



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL



Estudo teórico da Programação Linear e Modelagem Matemática como estratégia de ensino

Cascavel, 14 de fevereiro de 2025.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Estudo teórico da Programação Linear e Modelagem
Matemática como estratégia de ensino

Bruno Gonçalves

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação
em matemática como parte dos requisitos para obten-
ção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Paulo Domingos Conejo
Amarildo de Vicente
Adriano Verdério

Cascavel, 14 de fevereiro de 2025.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Gonçalves, Bruno
Estudo teórico da Programação Linear e Modelagem
Matemática como estratégia de ensino / Bruno Gonçalves;
orientador Paulo Domingos Conejo. -- Cascavel, 2025.
88 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) --
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em
Matemática - Mestrado Profissional, 2025.

1. Modelagem Matemática. 2. Problemas de Programação
Lineares. 3. Método Simplex. 4. Ensino de Matemática. I.
Domingos Conejo, Paulo , orient. II. Título.

BRUNO GONÇALVES

Estudo teórico da Programação Linear e Modelagem Matemática como
estratégia de Ensino

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Ensino de Matemática, linha de pesquisa Ensino básico de Matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Documento assinado digitalmente



PAULO DOMINGOS CONEJO
Data: 13/02/2025 11:02:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador Prof. Dr. Paulo Domingos Conejo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Documento assinado digitalmente



AMARILDO DEVICENTE
Data: 15/02/2025 15:34:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Amarildo de Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Documento assinado digitalmente



ADRIANO VERDERIO
Data: 14/02/2025 17:52:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Adriano Verdério

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus de Curitiba (UTFPR)

Cascavel, 14 de fevereiro de 2025

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha família pelo apoio incondicional ao longo desta jornada. Em especial, agradeço aos meus pais, Clair e Ven-ceslau, por sempre me incentivarem nos estudos, oferecendo suporte e ensinamentos fundamentais para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

À minha esposa Letícia, pelo amor incondicional, pela paciência e pelo incentivo constante. Agradeço por estar sempre ao meu lado durante os momentos cansativos de estudos. Você é o amor da minha vida. Te amo.

Ao meu orientador, Professor Paulo Conejo, pela dedicação, orientação e apoio na elaboração desta dissertação. Estendo meus agradecimentos a todos os professores do programa de mestrado, que, de alguma forma, contribuíram significativamente para minha formação acadêmica e profissional.

Aos meus colegas de mestrado, com quem compartilhei desafios, aprendizados e conquistas, agradeço pelo apoio mútuo e pelas trocas enriquecedoras que tanto contribuíram para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Por fim, agradeço aos meus amigos pessoais pelos momentos de alegria e descontração que tornaram essa caminhada mais leve. Que esses momentos continuem sendo renovados constantemente.

Resumo

Neste trabalho, exploramos o uso dos Problemas de Programação Linear (PPLs), conteúdo tradicionalmente visto apenas no Ensino Superior, como uma ferramenta de ensino de Matemática para alunos do Ensino Médio, apoiados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tendo como foco a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. Apresentamos os principais teoremas de PPL e suas respectivas demonstrações. Realizamos uma implementação computacional do Método Simplex em linguagem de programação *Python* que resolve o problema de maximizar a função objetivo com restrições de desigualdades do tipo menor ou igual. Por fim, propomos PPLs que podem ser aplicados no Ensino Médio juntamente com suas modelagens e resoluções gráficas e com apoio computacional. Objetivamos evidenciar a relevância educacional e o potencial dos PPLs no ensino da Matemática, visto que pode motivar os alunos trabalharem aspectos da Matemática relacionados às situações práticas.

Abstract

In this study, we explore the use of Linear Programming Problems (LPPs), a topic traditionally covered only in Higher Education, as a teaching tool for students in High School. This approach is supported by the Base Nacional Comum Curricular, focusing on Mathematical Modeling as a teaching strategy. We present the main LPP theorems and their respective proofs. Additionally, we implemented the Simplex Method in the Python programming language to solve problems aimed at maximizing the objective function with inequality constraints of the type less or equal. Finally, we propose LPPs that can be applied in High School, along with their modeling, graphical solutions, and computational support. Our goal is to highlight the educational relevance and potential of LPPs in Mathematics teaching, as they can motivate students addressing aspects of Mathematics related to practical situations.

Sumário

Introdução	15
1 Problemas de Programação Linear	19
2 Conceitos Preliminares	23
2.1 Álgebra Linear	23
2.2 Cálculo de Várias Variáveis	25
3 Teoria da Programação Linear	30
3.1 Principais resultados da Programação Linear	30
3.2 Método Simplex	39
3.3 Tabela Simplex	41
4 Resolução de Problemas de Programação Lineares	44
4.1 Gráfica	44
4.2 Tabela Simplex	49
4.3 Implementação em Python do Método Simplex	51
4.4 Python para o Método Simplex	55
5 Aplicações de PPL no Ensino Médio	61
5.1 Problema da indústria	62
5.1.1 Exaustão	64
5.1.2 Gráfica	67
5.1.3 Python	70

5.2	Problema da dieta	72
5.2.1	Python	74
Referências		77

Introdução

A Matemática é fundamental para compreender e resolver problemas do mundo real, sendo sua aplicação indispensável. Nesse contexto, a Programação Linear (PL) tem destaque devido sua ampla utilização na resolução destes problemas do mundo real.

Um problema de otimização consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função Z , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições, Ω , denominadas restrições, segundo Ribeiro e Karas (2013) é usualmente escrito na forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & Z(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega, \end{array} \quad (1)$$

com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ o conjunto das restrições, e as funções $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Quando a função objetivo Z e as funções g e h que definem as restrições são todas lineares, então dizemos que o problema de otimização (1) é um Problema de Programação Linear (PPL). A PL é um ramo da Matemática que estuda formas de resolver problemas de otimização cujas condições podem ser expressas por funções, equações e inequações lineares, isto é, do primeiro grau.

Problemas de Programação Linear têm sido abordados em diversos trabalhos acadêmicos, refletindo sua relevância e aplicabilidade em diferentes contextos. Os estudos realizados por Pereira (2020), Pinho (2020), Camargo (2020), Alves (2020) e Rosa (2021) enfocam o uso dos PPLs no Ensino Médio.

Os estudos de Pereira (2020), Camargo (2020) e Rosa (2021) propõem aplicações de PPLs no Ensino Médio, apresentando estratégias para encontrar soluções, como a resolução gráfica, o uso de solvers e a aplicação do Método Simplex. Além disso, esses trabalhos oferecem resultados sobre a teoria matemática que sustenta a PL.

Os trabalhos de Pinho (2020) e Alves (2020) discutem a Modelagem Matemática de PPLs como metodologia de ensino. Em particular, Pinho (2020) apresenta um estudo sobre como os PPLs podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades previstas na A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017), destacando sua aplicabilidade no currículo escolar.

Ao relacionarmos os PPLs com o Ensino Médio, é necessário estarmos amparados por documentos que orientem sua forma de abordagem. A BNCC é o documento que define as práticas a serem desenvolvidas na educação brasileira, estabelecendo um referencial para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das instituições escolares, além de propor as aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua jornada escolar.

Concernente à Matemática, temos que a BNCC enfatiza a importância do conhecimento matemático na formação do cidadão, o documento ressalta que:

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.

Ao se trabalhar com PPLs, é necessário que o aluno tenha capacidade de modelar um problema, encontrar maneiras para chegar ao resultado e, a partir disso, tomar decisões. Segundo Burak (1987):

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões.

Essas habilidades estão alinhadas aos objetivos da BNCC, ela cita que o aluno deve ser capaz de desenvolver Modelagem Matemática e que essa habilidade é extremamente valiosa para o ele, o que reforça a validade de se trabalhar com PPLs. Segundo a BNCC:

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino.

O trabalho com PPLs propicia a oportunidade para inserir estas abordagens no ensino, pois, ao se trabalhar com esses problemas, os alunos são incentivados a modelar as situações propostas e a buscar ferramentas matemáticas para resolvê-las. Entre essas ferramentas podemos citar o conceito de sistemas de equações, conteúdo este indispensável para o trabalho com PPLs, que é abordado no Ensino Médio e, com a introdução de

um PPL, os sistemas lineares podem ser explorados de maneira mais intuitiva e contextualizada. Lima (1993) aponta que:

Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados.

É comum que os alunos não se interessem por Matemática, pois geralmente não percebem sua aplicabilidade em situações reais. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) apontam que:

A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos.

Nesse sentido, ao se trabalhar com PPLs esperamos que o aluno consiga aproximar a Matemática vista em sala de aula com a Matemática vivenciada por ele em seu contexto social.

Neste trabalho, exploramos o uso de PPLs, conteúdo tradicionalmente visto apenas no Ensino Superior, como uma ferramenta de ensino de Matemática para alunos do Ensino Médio, apoiados na BNCC, e tendo como foco a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. Apresentamos os principais teoremas de PPL e suas respectivas demonstrações. Propomos PPLs que podem ser aplicados no Ensino Médio juntamente com suas modelagens e resoluções gráficas e com apoio computacional. Objetivamos evidenciar a relevância educacional e o potencial dos PPLs no ensino da Matemática, visto que pode motivar os alunos trabalharem aspectos da Matemática relacionados às situações práticas. Além disso, realizamos neste trabalho, uma implementação em linguagem *Python*, utilizando o Método Simplex, que possibilita a resolução de PPLs com restrições de desigualdades do tipo menor ou igual. A implementação surgiu do interesse do autor em estudar a linguagem de programação *Python*, bem como sua aplicabilidade para o ensino, pois oferece uma abordagem prática e acessível, facilitando a compreensão de conceitos matemáticos e promovendo o aprendizado de PL de forma intuitiva. Essa ferramenta computacional demonstra como a tecnologia pode ser integrada ao ensino e à aplicação da PL, possibilitando a resolução eficiente de problemas reais e o aprofundamento do aprendizado. O aluno pode, inclusive, manipular a implementação, despertando curiosidade sobre o funcionamento de *softwares*.

A exploração do tema realizada por diferentes autores, evidencia sua relevância como foco deste trabalho, que busca aprofundar o estudo acerca da aplicação dos PPLs no Ensino Médio, contribuindo para o avanço do conhecimento na área. Este estudo explora o potencial dos PPLs como ferramentas de ensino, utilizando a Modelagem Matemática como instrumento no processo de ensino e aprendizagem.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. O primeiro capítulo introduz os fundamentos dos PPLs, abordando suas principais características e sua formulação matemática. São apresentadas as noções de função objetivo e restrições, proporcionando a base teórica necessária para o entendimento dos métodos que serão explorados ao longo do trabalho, juntamente com a Modelagem Matemática de um exemplo de PPL.

No segundo capítulo, são revisados tópicos essenciais de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial que fundamentam a teoria relacionada aos PPLs, e permitem justificar alguns aspectos na solução gráfica de um PPL.

O terceiro capítulo é dedicado à teoria da PL. Elencamos teoremas fundamentais da PL, acompanhados de suas respectivas demonstrações. Além disso, apresentamos o Método Simplex, e fizemos uma descrição detalhada da tabela Simplex, uma ferramenta prática que organiza os cálculos realizados durante a aplicação do método.

No quarto capítulo aplicamos o Método Simplex em diferentes contextos, explorando sua utilização prática. Nele, o método é implementado através da tabela Simplex, ilustrando suas iterações com o objetivo de encontrar a solução ótima. Este capítulo também apresenta a elaboração de uma implementação em linguagem de programação *Python*, desenvolvido para resolver problemas de maximização.

Por fim, no quinto capítulo, abordamos a resolução de PPLs aplicados ao Ensino Médio, com foco na Modelagem Matemática. Este capítulo busca integrar a teoria dos PPLs com sua aplicação pedagógica, alinhada aos objetivos educacionais do Ensino Médio.

Capítulo 1

Problemas de Programação Linear

Concentramos nossa atenção neste capítulo na forma geral e padrão de um PPL, visto em Goldbarg e Luna (2000). Mostramos quais tipos de problemas são considerados PPLs, e como realizar a transformação de um PPL da forma geral para forma padrão.

Segundo a autora Biembengut (1999), a Modelagem Matemática é definida como "o processo que envolve a obtenção de um modelo". Dessa forma entendemos que a Modelagem Matemática é a ação de descrever a situação que se quer modelar, de maneira matemática, usando sua linguagem própria, para que a partir disso possamos resolver esta situação.

A aplicação da PL exige que os problemas a serem modelados sigam uma estrutura específica. Para que um determinado problema possa ser representado por meio de um modelo de PL, ele deve possuir as seguintes características.

- Proporcionalidade: A quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade deve ser proporcional ao nível de operação da atividade.
- Não negatividade: Deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo, e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
- Aditividade: O custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
- Separabilidade: Podemos identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

Podemos formular de uma forma geral um PPL, como

$$\begin{array}{ll}
\text{Otimizar} & Z(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \dots\dots\dots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_i \geq 0, i = 1, \dots, n.
\end{array}$$

- Z é denominada função objetivo.
- $(x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão.
- $(c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ é denominado vetor de custos.
- $\mathbb{R}^{m \times n} \ni A = (a_{ij})_{m \times n}$ é denominada matriz tecnológica.
- As desigualdades são denominadas restrições.
- $(b_1, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ é denominado vetor de recursos.
- As últimas desigualdades se referem ao sinal das variáveis de decisão.
- Podemos ter restrições de desigualdades do tipo $\leq$ e/ou $\geq$ e/ou $=$.
- O sinal das variáveis podem assumir valores negativos ou irrestritos.
- O problema pode ser de maximizar ou minimizar.

Um mesmo modelo de PL, composto pelo conjunto de equações anteriormente apresentadas, pode, sem qualquer perda para suas propriedades matemáticas, ser reescrito na forma padrão

$$\begin{array}{ll}
\text{Otimizar} & Z = cx, \\
\text{sujeito a} & Ax = b, \\
& x \geq 0 \\
& b \geq 0.
\end{array} \tag{1.1}$$

A forma padrão de um PPL é particularmente útil, pois as estratégias empregadas neste trabalho para resolvê-los necessitam que todas as restrições sejam expressas como igualdades, em vez de desigualdades. O processo de transformação para a forma padrão é realizado através das seguintes operações elementares.

- Operação 1: Mudança no critério de otimização, ou seja, transformação de maximização para minimização e vice-versa. Essa mudança pode ser realizada usando o

fato de que maximizar Z corresponde a minimizar $-Z$ e minimizar Z corresponde a maximizar $-Z$. Veja a Figura 1.1.

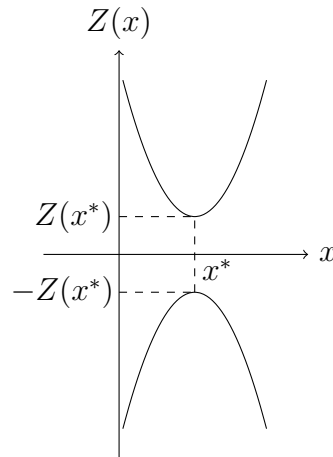


Figura 1.1: Gráficos de $Z(x)$ e $-Z(x)$

- Operação 2: Caso a variável de decisão seja livre (variável que pode assumir qualquer valor real), podemos transformá-la em variável não negativa. Nesse caso, a mudança exigirá a substituição da variável em transformação por duas variáveis auxiliares, ambas maiores ou iguais a zero, mas cuja soma é igual à variável original, ou seja

$$x_k = x_k^1 - x_k^2 \text{ e } x_k^1 \geq 0, x_k^2 \geq 0.$$

- Operação 3: Transformação de desigualdades em igualdades e vice-versa. Nessa situação, temos dois casos a observar
 - Caso de transformação de restrições de menor ou igual em restrições de igualdade.

Supondo a restrição dada na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b,$$

para transformá-la em uma restrição de igualdade, podemos introduzir uma variável de folga x_{n+1} capaz de completar a desigualdade, o que permite representar a restrição na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = b, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

- Caso de transformação de restrições de maior ou igual em restrições de igualdade.

Supondo a restrição

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b,$$

para transformá-la em uma restrição de igualdade, podemos introduzir uma variável de excesso x_{n+1} com coeficiente negativo capaz de "completar" a desigualdade, passando a representar a restrição na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - a_{n+1}x_{n+1} = b, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

Nosso estudo será focado no problema de maximizar a função Z .

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, reunimos definições e resultados importantes de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral, os quais julgamos serem essenciais para a compreensão dos conceitos relacionados à PL. Esses tópicos fornecem as ferramentas necessárias para as demonstrações que sustentam a teoria da PL.

2.1 Álgebra Linear

Nesta seção apresentamos os resultados sobre álgebra linear. Ela conterá definições e teoremas que auxiliam na justificativa de existência de uma solução em um PPL. Esta seção é fundamental para desenvolvermos uma estratégia que nos leve a uma solução para um problema de otimização linear. Os resultados apresentados neste capítulo foram baseados nas demonstrações e proposições encontradas em Boldrini et al. (1980).

Definição 2.1. *Sejam V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n$ números reais. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n,$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear de $v_1, \dots, v_n$.

Definição 2.2. *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0,$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LD.

Teorema 2.3. *O conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.*

Demonstração. Sejam $v_1, \dots, v_n$ LD e

$$a_1v_1 + \dots + a_jv_j + \dots + a_nv_n = 0,$$

da Definição 2.1, um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que $a_j \neq 0$. Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j} (a_1v_1 + \dots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_nv_n),$$

e portanto

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j}v_n.$$

Logo, v_j é uma combinação linear dos outros vetores. Por outro lado, se tivermos $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ tal que para algum j

$$v_j = b_1v_1 + \dots + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + \dots + b_nv_n,$$

temos então

$$b_1v_1 + \dots - 1v_j + \dots + b_nv_n = 0 \text{ com } b_j = -1,$$

e portanto, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD. □

Este teorema também é equivalente a: Um conjunto de vetores é LI se, e somente se nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

Definição 2.4. *Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se*

$$i) \{v_1, \dots, v_n\} \text{ é LI,}$$

$$ii) [v_1, \dots, v_n] = V.$$

O item *ii)* da definição significa que o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera o espaço vetorial V , ou seja, qualquer vetor de V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n$.

A notação $[v_1, \dots, v_n] = V$ representa o subespaço gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores.

O número de elementos de uma base define a dimensão do espaço vetorial.

Definição 2.5. *Sejam X e Y dois pontos do $\mathbb{R}^n$. O seguimento de extremos X e Y é o conjunto XY de pontos do $\mathbb{R}^n$, e é dado por $XY = (1-t)x + ty$ com $t \in [0, 1]$.*

Observe que no segmento XY o ponto o qual corresponde $t = 0$ é o ponto X e o ponto o qual corresponde $t = 1$ é o ponto Y e para qualquer ponto Q do segmento existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 \in [0, 1]$ e $Q = (1 - t_1)X + t_1Y$.

Outro conceito fundamental para o estudo de PPLs é o de convexidade de conjunto.

Definição 2.6. *Um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando, para quaisquer X e Y em P , o segmento de reta que une X e Y , definido por $(1 - t)X + tY$ com $t \in [0, 1]$, está inteiramente contido em P .*

Como consequência da Definição 2.6 podemos mostrar o resultado sobre intersecção de conjuntos convexos.

Teorema 2.7. *A intersecção finita de conjuntos convexos é convexa.*

Demonstração. Sejam S_i conjuntos convexos, com $i = 1, 2, \dots, k$, e seja $S = \bigcap_{i=1}^k S_i$. Considere dois elementos x e y de S . Pela definição de S , temos que $x, y \in S_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Como cada S_i é convexo, temos que $(1 - t)x + ty \in S_i$, para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, $(1 - t)x + ty \in S$, para todo $t \in [0, 1]$, então pela Definição 2.6, S é convexo. $\square$

2.2 Cálculo de Várias Variáveis

Nesta seção, trabalhamos com alguns tópicos de Cálculo Diferencial, com foco nos conceitos que são fundamentais para a interpretação gráfica da solução de um PPL. Os resultados elencados nesta seção foram escritos a partir da leitura de Stewart, Clegg e Watson (2022) e Leithold (1994).

Definição 2.8. *As curvas de nível de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante.*

O conceito de curvas de nível pode ser estendido para funções com mais variáveis. No caso de uma função f com três variáveis, chamamos de superfície de nível de f as superfícies com equação $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante.

Quando uma função possuir mais de três variáveis as curvas de nível são generalizadas para hiperfícies de nível.

Definição 2.9. *Seja $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um ponto do $\mathbb{R}^n$ e seja f uma função de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Então a derivada parcial de f em relação a x_k é a função, denotada por $D_k f$, tal que seu valor funcional em qualquer ponto P do domínio de f seja dado por*

$$D_k f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k},$$

se esse limite existir.

Definição 2.10. Se $z = f(x_1, x_2)$, então f é diferenciável em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_{x_1}(a, b)\Delta x_1 + f_{x_2}(a, b)\Delta x_2 + e_1\Delta x_1 + e_2\Delta x_2,$$

onde e_1 e e_2 tendem a 0 quando $(\Delta x_1, \Delta x_2) \rightarrow (0, 0)$.

Definição 2.11. Para uma função de duas variáveis, $z = f(x_1, x_2)$, definimos as diferenciais dx_1 e dx_2 como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a diferencial dz , também chamada de diferenciação total, é definida por

$$dz = f_{x_1}(x_1, x_2) dx_1 + f_{x_2}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2.$$

Teorema 2.12 (Regra da cadeia). Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y , onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t . Então, z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Demonstração. Uma variação de Δt em t produz variações de Δx em x e Δy em y . Essas, por sua vez, produzem uma variação de Δz em z , da Definição 2.10, temos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y,$$

onde $e_1 \rightarrow 0$ e $e_2 \rightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. [Se as funções e_1 e e_2 não estão definidas em $(0, 0)$, podemos defini-las como 0.] Dividindo ambos os lados desta equação por Δt , temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + e_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + e_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Se fizermos $\Delta t \rightarrow 0$, então $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$ porque g é diferenciável e, portanto, contínua. Da mesma forma, $\Delta y \rightarrow 0$. Isso, por sua vez, implica que $e_1 \rightarrow 0$ e $e_2 \rightarrow 0$, portanto

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_1 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e_2 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.13 (Regra da Cadeia geral). *Suponha que f seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \dots, t_m$. Então, f é uma função de $t_1, t_2, \dots, t_m$ e para cada $i = 1, 2, \dots, m$ temos*

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

A demonstração deste teorema é análoga ao Teorema 2.12.

Definição 2.14. *A derivada direcional de uma função com n variáveis na direção de um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ é dada por*

$$D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + ha_1, x_2 + ha_2, \dots, x_n + ha_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h},$$

se esse limite existir.

Teorema 2.15. *Se f é uma função diferenciável de n variáveis, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e*

$$D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_1 + f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_2 + \dots + f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_n.$$

Demonstração. Se definirmos uma função g de uma única variável h por

$$g(h) = f(x_1 + ha_1, x_2 + ha_2, \dots, x_n + ha_n),$$

então, pela definição de derivada direcional, temos

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + ha_1, x_2 + ha_2, \dots, x_n + ha_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = \\
&= D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever $g(h) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_i = x_i + ha_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, e, pelo Teorema 2.13, temos que

$$g'(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dh} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_i.$$

Se tomarmos $h = 0$, então $x_i = x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, e

$$g'(0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_i,$$

comparando as equações, temos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_i.$$

□

Definição 2.16. *A derivada direcional de uma função de n variáveis na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ pode ser escrita como um produto escalar de dois vetores.*

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_1 + f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_2 + \dots + f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)a_n \\ &= \langle f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle \cdot \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle. \end{aligned}$$

O primeiro vetor no produto escalar devido a sua importância no contexto do cálculo recebe o nome de vetor gradiente e é denotado por $\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dessa forma temos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \cdot \mathbf{u}.$$

Assim sendo, qualquer derivada direcional de uma função diferenciável pode ser obtida se multiplicarmos escalarmente o gradiente pelo vetor unitário na direção e sentido desejados.

Teorema 2.17. *Suponha que f seja uma função diferenciável. O valor máximo da derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f$ é $\|\nabla f(x)\|$ ocorre quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(x)$.*

Demonstração. $D_{\mathbf{u}}f$ é dado por

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\mathbf{u}$.

O valor máximo de $\cos \theta$ é 1, e isso ocorre quando $\theta = 0$.

Logo, o valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f$ é $|\nabla f|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que ∇f . □

Teorema 2.18. *O vetor gradiente ∇f é perpendicular à curva ou à superfície de nível de f .*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que f é uma função de três variáveis.

Considere a função $f(x, y, z)$ e sua superfície de nível definida pela equação

$$f(x, y, z) = c,$$

onde c é uma constante.

Temos que a parametrização dessa superfície de nível por um parâmetro t , é dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Diferenciando esta equação em relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Como $f(x(t), y(t), z(t))$ é constante e igual a c , a derivada em relação a t deve ser zero

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Podemos reescrever a expressão acima como

$$\nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0,$$

onde $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ é o vetor tangente à curva de nível na superfície.

O produto escalar de ∇f e $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ é zero, o que implica que o vetor gradiente ∇f é perpendicular ao vetor tangente $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Portanto, o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ é perpendicular à curva de nível da superfície $f(x, y, z) = c$. □

Como as curvas de nível de uma função linear no $\mathbb{R}^n$ são retas, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.19. *Se desejamos maximizar o valor da função linear $Z(x) = c^T x$, com $x \in \mathbb{R}^n$, devemos caminhar na direção $c = \nabla Z$.*

Demonstração. De fato, seja $\lambda > 0$ a quantidade que se deseja caminhar na direção de c . Logo,

$$Z(x + \lambda c) = c^T(x + \lambda c) = c^T x + \lambda c^T c = Z(x) + \lambda \|c\|^2 \geq Z(x).$$

□

Este resultado é útil para a interpretação geométrica que faremos da solução de um PPL.

Capítulo 3

Teoria da Programação Linear

Neste capítulo exploramos conceitos essenciais como poliedros, soluções básicas, convexidade, vértices e a existência de soluções. O último resultado do capítulo é fundamental, pois ele garante que a solução ótima de um PPL está localizada em um dos vértices do poliedro formado pelas restrições. Esse fato é fundamental para o Método Simplex, que será formalizado na Seção 3.2, pois seu funcionamento consiste em encontrar a solução ótima de um PPL explorando os vértices do poliedro formado pela região viável do problema.

3.1 Principais resultados da Programação Linear

Nesta seção formalizamos a Matemática necessária para o entendimento da PL. A seção foi construída a partir dos resultados presentes em Goldbarg e Luna (2000) e Bertsimas e Tsitsiklis (1997).

Definição 3.1. *Um poliedro é um conjunto no espaço $\mathbb{R}^n$ que pode ser descrito como*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e b é um vetor em $\mathbb{R}^m$.

A importância de se definir um poliedro no $\mathbb{R}^n$ se deve ao fato que este poliedro define as regiões viáveis onde buscamos a solução do problema de otimização. Note que poliedros podem se estender para o infinito ou estar confinados em uma região finita.

Definição 3.2. *Uma base de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um subconjunto de m colunas de A que são linearmente independentes. As variáveis associadas a essas colunas são denominadas variáveis básicas.*

Podemos decompor o vetor de variáveis $x \in \mathbb{R}^n$, como $x = (x_B, x_R)$, onde

- x_B é o vetor das variáveis básicas, com m componentes.
- x_R é o vetor das variáveis não básicas, com $n - m$ componentes.

Definição 3.3. *Seja B uma matriz formada pelas colunas da matriz A correspondentes às variáveis básicas. Temos que o vetor composto de*

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{e} \quad x_R = 0,$$

é chamado de solução básica.

Os dois últimos conceitos estão ligados a ideia de base, sendo que um conjunto de colunas linearmente independentes da matriz A , permite decompor as variáveis de um problema em variáveis básicas e não básicas. Isso é de extrema importância para o Método Simplex, que trabalha de forma iterativa, mudando as variáveis básicas até alcançar uma solução ótima. A solução básica, $x_B = B^{-1}b$ e $x_R = 0$, corresponde a um vértice do poliedro. A cada iteração do Método Simplex, percorre-se um novo vértice, encontrando uma nova solução básica.

Definição 3.4. *Uma Solução Básica sem componentes negativas é denominada solução básica viável.*

Definição 3.5. *O conjunto de soluções viáveis, C , é definido como*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}.$$

Note que pela Definição 3.1, C é um poliedro.

Teorema 3.6. *O conjunto C das soluções viáveis de um modelo de PL é um conjunto convexo.*

Demonstração. Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Sejam $x, y \in D$, soluções viáveis que satisfazem as restrições $Ax \leq b$ e $Ay \leq b$.

Da Definição 2.5, temos que um ponto z qualquer no segmento de linha entre x e y , é dado por

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Queremos mostrar que $z \in C$, ou seja, que $Az \leq b$.

Dessa forma, temos

$$Az = A(\lambda x + (1 - \lambda)y),$$

usando a distributividade da multiplicação de matriz, obtemos

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay.$$

Como x e y são soluções viáveis, temos que $Ax \leq b$ e $Ay \leq b$. Então,

$$\lambda Ax \leq \lambda b \quad \text{e} \quad (1 - \lambda)Ay \leq (1 - \lambda)b \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$\lambda Ax + (1 - \lambda)Ay \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = \lambda b + b - \lambda b = b,$$

ou seja,

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = Az \leq b, \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

logo, $z \in D$. Portanto D é convexo.

Seja $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$.

Note que E é convexo, pois se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \geq 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Pelo Teorema 2.7, $C = D \cap E$ é um conjunto convexo. □

Este teorema afirma que ao nos movermos entre duas soluções viáveis, quaisquer combinações convexas dessas soluções também serão viáveis. As duas próximas definições são de extrema importância para a solução de um PPL. Mais a frente falaremos sobre a equivalência entre estas definições.

Definição 3.7. *Seja P um poliedro. Um vetor $x \in P$ é denominado ponto extremo de P se não existem vetores $y, z \in P$, ambos diferentes de x , e um escalar $\lambda \in (0, 1)$ tais que*

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Definição 3.8. *Seja P um poliedro. Um vetor $x \in P$ é denominado vértice de P se existir um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$c^t x > c^t y,$$

para todo $y \in P$ com $y \neq x$.

Observe que basta c ser perpendicular ao hiperplano separador de P em x que é dado por $\{y \mid c^t y = c^t x\}$.

Teorema 3.9. *Seja S um subespaço vetorial gerado pelos vetores $x_1, \dots, x_K$ com dimensão m . Então*

(a) Existe uma base de S que pode ser formada por m dos vetores $x_1, \dots, x_K$.

(b) Se $k \leq m$ e os vetores $x_1, \dots, x_k$ são linearmente independentes, então podemos formar uma base de S começando com $x_1, \dots, x_k$ e selecionando $m - k$ dos vetores $x_{k+1}, \dots, x_K$.

Demonstração. Provaremos apenas a parte (b), porque (a) é o caso especial de (b) com $k = 0$.

Se todo vetor $x_{k+1}, \dots, x_K$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores $x_1, \dots, x_k$, então todo vetor no subespaço gerado por $x_1, \dots, x_K$ também é uma combinação linear de $x_1, \dots, x_k$, e estes últimos vetores formam uma base para o subespaço, pois a dimensão é m . Caso contrário, pelo menos um dos vetores $x_{k+1}, \dots, x_K$ é linearmente independente dos vetores $x_1, \dots, x_k$. Ao escolher um desses vetores, temos agora $k + 1$ vetores entre $x_1, \dots, x_K$ que são linearmente independentes. Repetindo este processo $m - k$ vezes, obtemos a base desejada de S . $\square$

Definição 3.10. Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de elementos de V . O conjunto $S^\perp$ é definido por

$$S^\perp = \{u \in V \mid u^t v = 0 \text{ para todo } v \in S\},$$

e é denominado " S perpendicular". No caso em que S é um subespaço vetorial de V , o conjunto $S^\perp$ é denominado complemento ortogonal de S em V .

Teorema 3.11. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e sejam S_1 e S_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbb{R}^n$ é a soma direta de S_1 e S_2 , e escrevemos

$$\mathbb{R}^n = S_1 \oplus S_2,$$

se, e somente se, todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de maneira única como

$$v = s_1 + s_2, \quad \text{com } s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontradas em Boldrini et al. (1980) na página 234.

Teorema 3.12. Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado por um conjunto de vetores $\{a_i \mid i \in I\}$. Se os vetores a_i , $i \in I$, não geram $\mathbb{R}^n$, então existe um vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ que é ortogonal a todos os vetores de S . Ou seja, existe um vetor d tal que

$$a_i^t d = 0 \quad \text{para todo } i \in I.$$

A demonstração deste teorema consiste em basicamente observar que $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, e que S não é todo o espaço $\mathbb{R}^n$, ou seja, $S^\perp$ não é formado somente pelo vetor nulo. Assim, o Teorema 3.11 permite tomar $d \neq 0$ em $S^\perp$ tal que $a_i^t d = 0$, para todo $i \in I$. Este teorema é essencial para as demonstrações seguintes neste trabalho.

Definição 3.13. *Se um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $a_i^t x = b_i$ para algum $1 \leq i \leq m$, dizemos que a restrição correspondente está ativa ou vinculativa em x .*

Teorema 3.14. *Seja um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e $I = \{i \mid a_i^t x = b_i\}$ o conjunto de índices das restrições que são ativas em x . Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) *Existem n vetores no conjunto $\{a_i \mid i \in I\}$, que são linearmente independentes.*
- (b) *O espaço gerado pelos vetores a_i , $i \in I$, é todo o $\mathbb{R}^n$, ou seja, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores a_i , $i \in I$.*
- (c) *O sistema de equações $a_i^t x = b_i$, $i \in I$, tem solução única.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b)

Suponha que existam n vetores no conjunto $\{a_i \mid i \in I\}$ que são linearmente independentes. Isso significa pelo Teorema 3.9, que esses n vetores formam uma base para o subespaço gerado por eles. Como eles são n vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, o espaço gerado é todo $\mathbb{R}^n$. Portanto, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores a_i , $i \in I$. Logo (a) implica (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Se os vetores a_i , $i \in I$, não geram $\mathbb{R}^n$, temos que o subespaço gerado pelos vetores a_i é de dimensão menor que n , logo pelo Corolário 3.12, podemos encontrar um vetor não nulo d que seja ortogonal a este subespaço. Se x satisfaz $a_i^t x = b_i$ para todo $i \in I$, temos como d é ortogonal a todos os a_i , e que

$a_i^t(x+d) = a_i^t x + a_i^t d = b_i + 0 = b_i$ para todo $i \in I$. Dessa forma podemos encontrar múltiplas soluções. Portanto, (b) implica (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponha que o sistema de equações $a_i^t x = b_i$, $i \in I$, não tem solução única. Sejam x_1 e x_2 , duas soluções distintas que satisfazem $a_i^t x_1 = b_i$ e $a_i^t x_2 = b_i$ para todo $i \in I$.

Seja $d = x_1 - x_2$ um vetor não nulo, pois $x_1 \neq x_2$, e como

$$a_i^t x_1 = b_i \quad \text{e} \quad a_i^t x_2 = b_i,$$

subtraindo as duas equações, obtemos

$$a_i^t(x_1 - x_2) = 0 \quad \text{ou seja} \quad a_i^t d = 0 \quad \text{para todo } i \in I.$$

Dessa forma, d é ortogonal a todos os vetores a_i , $i \in I$, temos que os vetores a_i não podem ser linearmente independentes, pois se os vetores a_i fossem linearmente independentes, não existiria tal vetor não nulo d que fosse ortogonal a todos eles, pois a única solução para $a_i^t d = 0$ em um conjunto linearmente independente é o vetor nulo $d = 0$. Assim (a) implica (b). $\square$

O próximo teorema garante uma equivalência entre os conceitos de um ponto ser vértice, ponto extremo e também uma solução básica viável em um poliedro P .

Teorema 3.15. *Seja P um poliedro não vazio e seja x um vetor que satisfaz $a_i^t x = b_i$ para algum $i \in I = \{i \mid a_i^t x = b_i\}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) x é um vértice de P .
- (b) x é um ponto extremo de P .
- (c) x é uma solução básica viável.

Demonstração. Para os propósitos desta prova e sem perda de generalidade, assumimos que P é representado em termos de restrições da forma $a_i^t x \leq b_i$ e $a_i^t x = b_i$.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Como $x \in P$ é um vértice, pela Definição 3.8, existe um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c^t x > c^t y$ e $c^t x > c^t z$ para todo y e $z \in P$ com $y \neq x$ e $z \neq x$.

Assim, para $0 < \lambda < 1$, temos que

$$c^t x > c^t (\lambda y + (1 - \lambda)z).$$

Portanto

$$x \neq \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Dessa forma x não pode ser expresso como uma combinação linear de dois outros vetores de P , sendo assim pela Definição 3.7, x é um extremo de P .

(b) $\Rightarrow$ (c)

Suponha que $x \in P$ não seja uma solução básica viável. Vamos mostrar que x não é um ponto extremo de P . Seja $I = \{i \mid a_i^t x = b_i\}$. Como x não é uma solução básica viável, não existem n vetores linearmente independentes na família $\{a_i \mid i \in I\}$. Assim, os vetores $\{a_i \mid i \in I\}$ estão em um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$, e existe algum vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_i^t d = 0$ para todo $i \in I$.

Seja ϵ um número positivo pequeno e considere os vetores $y = x + \epsilon d$ e $z = x - \epsilon d$. Note que $a_i^t y = a_i^t x = b_i$ para $i \in I$. Além disso, para $i \notin I$, temos $a_i^t x < b_i$ e, desde que ϵ

seja pequeno, também teremos $a_i^t y < b_i$. (Basta escolher ϵ de forma que $\epsilon \|d\| < b_i - a_i^t x$ para todo $i \notin I$.) Assim, quando ϵ é suficientemente pequeno, $y \in P$ e, por um argumento similar, $z \in P$. Finalmente, note que $x = \frac{y+z}{2}$, o que implica que x não é um ponto extremo.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja x^* uma solução básica viável e seja I o conjunto de índices das restrições ativas em x^* . Isso significa que x^* satisfaz as seguintes condições

$$a_i^t x^* = b_i \text{ para todo } i \in I.$$

Vamos mostrar que x^* é um vértice de P , onde P é o conjunto definido por

$$P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Seja $q = \sum_{i \in I} a_i x^*$. Como x^* satisfaz $a_i^t x^* = b_i$ para $i \in I$, podemos escrever

$$q^t x^* = \sum_{i \in I} a_i^t x^* = \sum_{i \in I} b_i.$$

Observe que para qualquer $x^* \in P$, temos $a_i^t x^* \leq b_i$ para todos os i . Logo, para qualquer $x \in P$, a função $q^t x$ é limitada por

$$q^t x \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

Portanto, x^* é uma solução ótima para o problema de maximizar $q^t x$ sobre o conjunto P . A igualdade na função objetivo $q^t x$ é atingida se e somente se $a_i^t x^* = b_i$ para todos $i \in I$.

Como x^* é uma solução básica viável, ele satisfaz exatamente n restrições linearmente independentes ativas, onde n é o número de variáveis. A solução x^* é, portanto, a única solução para o sistema de equações $a_i^t x = b_i$ para $i \in I$, conforme descrito pelo Teorema 3.14. Portanto, x^* não pode ser representado como uma combinação convexa de dois pontos distintos em P , o que implica que x^* é um vértice de P . $\square$

Teorema 3.16. *O conjunto dos pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado em C_n^m .*

Demonstração. Considere um sistema de m restrições lineares de desigualdade impostas a um vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Em qualquer solução básica, há n restrições ativas linearmente independentes. Como quaisquer n restrições ativas linearmente independentes definem um

ponto único, segue-se que soluções básicas diferentes correspondem a conjuntos diferentes de n restrições ativas linearmente independentes.

Portanto, o número de soluções básicas é limitado superiormente pelo número de maneiras que podemos escolher n restrições de um total de m , o que é dado por

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

□

Adiante, mostraremos que a solução de um PPL está em um vértice. Logo o fato de os pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis ser finito assegura que o Método Simplex irá eventualmente em alguma de suas iterações encontrar uma solução ótima em um destes pontos.

Definição 3.17. *Um poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ contém uma reta se existir um vetor $x \in P$ e um vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + \lambda d \in P$ para todos os escalares λ .*

Teorema 3.18. *Suponha que o poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^t x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ seja não vazio. Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) *O poliedro P não contém uma reta;*
- (b) *O poliedro P tem pelo menos um ponto extremo;*
- (c) *Existem n vetores da família $\{a_1, \dots, a_m\}$ que são linearmente independentes.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b)

Primeiramente, provamos que se P não contém uma reta, então possui uma solução básica viável e, portanto, um ponto extremo.

Seja x um elemento de P e $I = \{i \mid a_i^t x = b_i\}$. Se n dos vetores a_i , para $i \in I$, correspondentes às restrições ativas são linearmente independentes, então x é, por definição, uma solução básica viável e, portanto, uma solução básica viável existe. Se este não for o caso, então todos os vetores a_i , para $i \in I$, estão em um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ e existe um vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_i^t d = 0$ para todo $i \in I$.

Considere a reta composta por todos os pontos da forma $y = x + \lambda d$, onde λ é um escalar arbitrário. Para $i \in I$, temos $a_i^t y = a_i^t x + \lambda a_i^t d = a_i^t x = b_i$. Assim, aquelas restrições que eram ativas em x permanecem ativas em todos os pontos da reta. No entanto, como o poliedro é assumido como não contendo retas, segue-se que, à medida que variamos λ , alguma restrição será eventualmente violada. No ponto onde alguma restrição está prestes a ser violada, uma nova restrição deve se tornar ativa, e concluímos que existe algum λ^* e algum $j \notin I$ tal que $a_j^t(x + \lambda^* d) = b_j$.

Afirmamos que a_j não é uma combinação linear dos vetores a_i , para $i \in I$. De fato, temos $a_j^t x \neq b_j$ (porque $j \notin I$) e $a_j^t(x + \lambda^* d) = b_j$ (pela definição de λ^*). Assim, $a_j^t d \neq 0$. Por outro lado, $a_i^t d = 0$ para todo $i \in I$ (pela definição de d) e, portanto, d é ortogonal a qualquer combinação linear dos vetores a_i , para $i \in I$. Como d não é ortogonal a a_j , concluímos que a_j não é uma combinação linear dos vetores a_i , para $i \in I$.

Assim, ao passar de x para $x + \lambda^* d$, o número de restrições ativas linearmente independentes aumentou em pelo menos um. Repetindo o mesmo argumento, quantas vezes forem necessárias, eventualmente chegamos a um ponto no qual existem n restrições ativas linearmente independentes. Tal ponto é, por definição, uma solução básica viável, pois permanecemos dentro do conjunto viável.

$$(b) \Rightarrow (c)$$

Se P tem um ponto extremo x , então x é também uma solução básica viável (Teorema 3.15) e existem n restrições que são ativas em x , com os vetores correspondentes a_i sendo linearmente independentes.

$$(c) \Rightarrow (a)$$

Suponha que n dos vetores a_i sejam linearmente independentes e, sem perda de generalidade, suponha que $a_1, \dots, a_n$ sejam linearmente independentes. Suponha que P contenha uma reta, pela Definição 3.17, então, existe um vetor $x \in P$ e um vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + \lambda d \in P$ para todos os escalares λ . Dessa forma, temos $a_i^t(x + \lambda d) \leq b_i$ para todo i e todo λ . Concluímos que $a_i^t d = 0$ para todo i . (Se $a_i^t d < 0$, podemos violar a restrição escolhendo λ muito grande; um argumento simétrico se aplica se $a_i^t d > 0$). Como os vetores a_i , para $i = 1, \dots, n$, são linearmente independentes, isso implica que $d = 0$. Isso é uma contradição e estabelece que P não contém uma reta. $\square$

Teorema 3.19. *Considere o PPL de minimizar $c^t x$ sobre um poliedro P . Suponha que P tenha pelo menos um ponto extremo e que exista uma solução ótima. Então, existe uma solução ótima que é um ponto extremo de P .*

Demonstração. Seja Q o conjunto de todas as soluções ótimas, que assumimos ser não vazio. Seja P da forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

e seja v o valor ótimo do custo $c^t x$. Então, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, c^t x = v\}$, que também é um poliedro. Como $Q \subseteq P$ e P não contém retas (Teorema 3.18) Q também não contém retas. Portanto, Q possui um ponto extremo.

Seja x um ponto extremo de Q . Vamos mostrar que x também é um ponto extremo de P . Suponha, para obter uma contradição, que x não é um ponto extremo de P . Então, existem $y \in P$, $z \in P$, tais que $y \neq x$, $z \neq x$, e algum $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$,

segue que

$$v = c^t x = \lambda c^t y + (1 - \lambda) c^t z.$$

Além disso, como v é o custo ótimo, $c^t y \geq v$ e $c^t z \geq v$. Isso implica que $c^t y = c^t z = v$ e, portanto, $z \in Q$ e $y \in Q$. Mas isso contradiz o fato de que x é um ponto extremo de Q . A contradição estabelece que x é um ponto extremo de P . Além disso, como x pertence a Q , ele é ótimo. $\square$

Este teorema é fundamental, pois afirma que, se há uma solução do PPL, esta solução está em um vértice. Note que para satisfazer a hipótese do teorema anterior, basta por exemplo que o poliedro seja limitado e fechado (compacto), como sugere o teorema de Weierstrass Lima (2014), pois toda função contínua no compacto admite máximo e mínimo no conjunto.

Teorema 3.20. *Toda combinação convexa de duas soluções ótimas de um PPL, é também solução ótima.*

Demonstração. Seja o PPL na forma padrão

$$\begin{aligned} \text{Otimizar} \quad & Z = cx, \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \\ & b \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

e suponha x^* e x^{**} , sejam soluções de (3.1), tome W uma combinação convexa de x^* e x^{**} , ou seja $W = \lambda_1 x^* + \lambda_2 x^{**}$ com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Queremos mostrar que $cW \geq cz$ para todo $z \in C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$, e $Aw = b$.

De fato $cW = c(\lambda_1 x^* + \lambda_2 x^{**}) \geq c(\lambda_1 z + \lambda_2 z) = c(\lambda_1 + \lambda_2)z = cz$, logo $cW \geq cz$ para todo $z \in C$.

$$\text{Temos } AW = A(\lambda_1 x^* + \lambda_2 x^{**}) = \lambda_1 Ax^* + \lambda_2 Ax^{**} = \lambda_1 b + \lambda_2 b = b(\lambda_1 + \lambda_2) = b \quad \square$$

3.2 Método Simplex

O Simplex é um método tradicionalmente utilizado em PPLs, que de maneira iterativa, encontra a solução ótima de um PPL. Foi desenvolvido segundo Goldbarg e Luna (2000) por George B. Dantzig. Sua concepção básica é simples e eficiente. Em linhas gerais, o método parte de uma solução básica viável inicial do sistema de equações que constituem as restrições do PPL, solução essa extrema (vértice). A partir dessa solução inicial, vai identificando novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente. O

método, portanto, possui um critério de escolha que permite encontrar melhores vértices do problema, e um outro critério que consegue determinar se o vértice escolhido é ou não um vértice ótimo. Em cada iteração, o método visita um vértice, e portanto vai parar em uma quantidade finita de passos, já que pelo Teorema 3.16, o número de vértices em um poliedro é finito.

Para o uso do Método Simplex é fundamental que o PPL esteja escrito no que chamamos de forma padrão (3.1) e que tenhamos uma solução básica inicial viável. Quando todas as restrições do problema são do tipo $\leq$, é suficiente adicionar variáveis de folga, o que permite construir uma solução básica viável inicial de forma direta, já que as variáveis de folga assumem valores positivos e as variáveis originais são inicialmente nulas.

Quando o problema possui restrições do tipo $\geq$, a introdução de variáveis de excesso resulta em coeficientes negativos para essas variáveis na matriz de restrições. Isso impede a obtenção direta de uma solução básica viável inicial. Por essa razão, é necessário introduzir variáveis artificiais, que permitem compor uma solução básica viável inicial.

Para restrições de igualdade, também é indispensável a inclusão de variáveis artificiais, pois não há como garantir uma solução inicial viável inicial sem elas, pois ao contrário das restrições do tipo $\leq$, em que a adição de variáveis de folga pode gerar uma solução básica viável inicial assumindo valores nulos para as variáveis de decisão, as equações de igualdade exigem que as combinações das variáveis satisfaçam exatamente o lado direito da equação.

Para tratar problemas que envolvem variáveis artificiais, podemos usar o Método das Duas Fases, que não será foco neste trabalho. Este método funciona da seguinte maneira. Na primeira fase, minimizamos a soma das variáveis artificiais, representada pela função W . O objetivo dessa etapa é encontrar uma solução viável que elimine completamente as variáveis artificiais da base. Caso, ao final da Fase 1, o valor de W ainda seja maior que zero, concluímos que o problema original não possui solução viável.

Na segunda fase, utilizamos a solução viável obtida na Fase 1 como solução básica viável inicial para otimizar a função objetivo original. Esse procedimento assegura que o processo iterativo do Método Simplex conduza à solução ótima.

O Método Simplex verifica se a presente solução é ótima. Se esta não for, é porque um dos demais pontos extremos adjacentes (vértices) fornece valor maior para a função objetivo que a atual, quando o problema é de maximização. Ele então faz uma mudança de vértice na direção que mais aumenta a função objetivo e verifica se este novo vértice é ótimo. O processo termina quando, estando em um ponto extremo, todos os outros pontos extremos adjacentes fornecem valores menores para a função objetivo.

Para isso, escolhemos uma variável cujo custo relativo seja mais positivo para entrar

na base, e as trocas de vértices são feitas até que não exista mais nenhum custo relativo positivo.

A variável que sairá da base é aquela que, ao se anular, garante que as demais continuem maiores ou iguais a zero quando aumentamos o valor da variável que entra na base.

O Método Simplex, resolve o PPL dado na forma padrão (3.1), e de acordo com Oliveira e Pinto (2017) compreenderá, os seguintes passos, que serão detalhados na Seção 3.3.

Passo 1 Achar uma solução básica viável inicial, o que é feito como dito no início desta seção.

Passo 2 Verificar se a solução atual é ótima, ou seja, verificar se há $c_i > 0$. Se sim, pare. Caso contrário, vá para o passo 3.

Passo 3 Determinar a variável não básica que deve entrar na base, que será

$$\max \{c_i; c_i > 0\}.$$

Passo 4 Determinar a variável básica que deve sair da base, que será

$$\min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}}; a_{is} > 0 \right\}.$$

Onde s indica a coluna que saiu da base.

Passo 5 Realizar o pivoteamento a fim de determinar a nova solução viável básica, e voltar ao passo 2.

3.3 Tabela Simplex

Para melhor organizar os cálculos realizados no Método Simplex usamos o formato tabular das informações do problema. Este é apenas um recurso para os cálculos realizados pelo método descrito na Seção 3.2. Aqui trabalharemos por simplificação com restrições do tipo $\leq$.

Considere o seguinte problema

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

sujeito às restrições

$$Ax \leq b \quad \text{e} \quad x \geq 0,$$

onde A é uma matriz de coeficientes das restrições, b é um vetor de constantes, e x é o vetor das variáveis de decisão.

Antes de iniciarmos o Método Simplex transformamos o problema para a forma padrão (1.1). Sendo assim, devemos introduzir as variáveis de folga como visto no Capítulo 1, para que as restrições do tipo $\leq$, se tornem restrições do tipo

$$Ax = b \quad \text{e} \quad x \geq 0.$$

Após escrever o problema na forma padrão, construímos a tabela Simplex inicial a partir do sistema linear $Ax = b$ e da função Z . A tabela inclui as variáveis básicas x_{B_i} , as variáveis não básicas x_i , os coeficientes das variáveis na função objetivo c_i e as constantes b_i das restrições. A seguir temos a estrutura básica da Tabela 3.1

Tabela 3.1: Tabela Simplex

Base	x_1	x_2	$\dots$	x_n	b
x_{B_1}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
x_{B_2}	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Z	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0

Esta tabela na última coluna apresenta nossa solução básica viável inicial (Passo 1). Em seguida seguimos ao Passo 2, que consiste em verificar se a solução é ótima. Para isso devemos verificar se há $c_i > 0$ na linha da função Z . Em caso positivo ir para o Passo 3. Caso não exista $c_i > 0$ então a solução presente é a solução ótima.

O Passo 3 determina qual variável não básica entra na base. A qual é correspondente ao coeficiente mais positivo na linha de Z , pois isso indica o maior aumento possível da função objetivo. Chamamos esta coluna a_{ij} de coluna pivô.

Após, no Passo 4, devemos identificar a variável básica que sai da base. A qual é correspondente à menor razão positiva entre $\frac{b_i}{a_{ij}}$. Chamamos esta linha de linha pivô. Se todas as razões forem negativas ou iguais a zero, significa que a variável que entra na base pode crescer indefinidamente sem violar as restrições, tornando a solução ilimitada, e o método é interrompido.

Depois de encontrar a coluna pivô e a linha pivô, o elemento que está na intersecção destas é chamado de pivô, em sequência no Passo 5, realizamos o pivoteamento a fim de determinar a nova solução básica viável. O pivoteamento é detalhado nos passos a seguir

- Divida todos os elementos da linha pivô pelo valor do pivô, de modo que o pivô se torne igual a 1.

- Ajuste as outras linhas da tabela para que todos os outros valores na coluna pivô se tornem zero, subtraindo múltiplos apropriados da linha pivô.

Após feito o pivoteamento, retornamos ao Passo 2. O processo de escolha da variável que entra e da variável que sai da base é repetido até que não exista mais coeficientes positivos na linha da função objetivo Z . Quando isso ocorrer, a solução é ótima, pois, para coeficientes negativos, o aumento de uma variável não básica reduz o valor de Z , o que é indesejável em um problema de maximização. Da mesma forma que para coeficientes nulos, o aumento de uma variável não básica não altera o valor de Z .

No próximo capítulo apresentamos a resolução de um PPL usando a tabela Simplex.

Capítulo 4

Resolução de Problemas de Programação Lineares

Neste capítulo apresentamos alguns PPLs juntamente com distintas formas de resolução. Em PPLs com duas variáveis trabalhamos com a resolução gráfica, que possibilita compreender geometricamente os conceitos trabalhados na Seção 2.2. Ainda com duas variáveis resolvemos um exemplo usando a tabela Simplex e também uma visão geométrica do funcionamento do Método Simplex.

Em problemas com mais variáveis, devido à dificuldade, e no caso de mais de três variáveis a impossibilidade de se observar a solução gráfica, apresentamos uma maneira de se resolver computacionalmente os PPLs, utilizando uma implementação em linguagem *Python* realizada pelos autores.

4.1 Gráfica

PPLs com duas ou três variáveis podem ser resolvidos de forma gráfica utilizando o sistema cartesiano. Dado um PPL, uma solução viável é um vetor que satisfaz todas as restrições, inclusive as restrições de sinais. Uma solução ótima é uma solução viável que maximiza a função objetivo ou a minimiza no conjunto de soluções viáveis. Para resolver um PPL envolvendo apenas duas variáveis, o conjunto de soluções viáveis é identificado no plano cartesiano. A solução ótima é então identificada traçando a linha correspondente ao conjunto de soluções viáveis que dão um valor específico à função objetivo, ou seja, traçando as curvas de nível (2.8) de Z e movendo esta linha (no caso do plano) paralelamente a si própria, na direção do gradiente de Z (caso maximizar), de acordo com o Teorema 2.19. Faremos uso do GeoGebra [9], para nos auxiliar na construção dos gráficos necessários para a resolução do PPL.

Faremos um exemplo, juntamente com sua resolução gráfica. Para isso considere o problema de maximizar $Z = 2x + 3y$ sujeito às restrições

$$x + 2y \leq 100$$

$$2x + y \leq 80$$

$$x, y \geq 0.$$

Na resolução gráfica, é necessário determinar a região viável do problema. Isso é feito identificando a interseção das regiões definidas pelas restrições.

Nas figuras 4.1 e 4.2, temos respectivamente, as regiões $x + 2y \leq 100$, em vermelho e $2x + y \leq 80$, em azul, com $x, y \geq 0$.

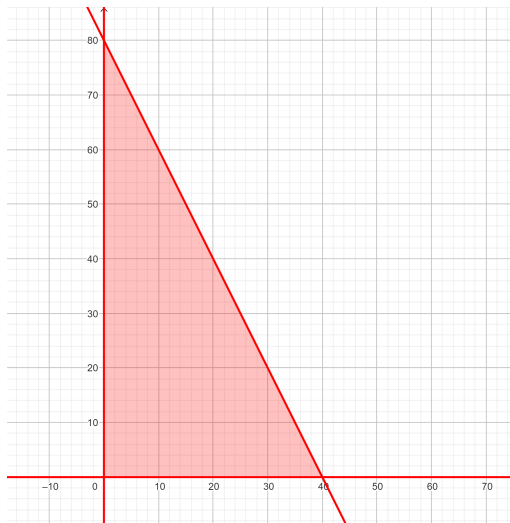


Figura 4.1: Restrição $x + 2y \leq 100$

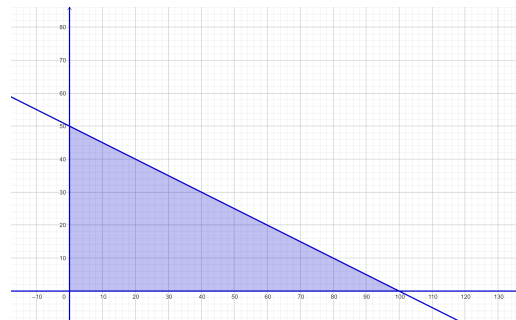


Figura 4.2: Restrição $2x + y \leq 80$

Para que um ponto do plano cartesiano seja uma solução de Z , este ponto deve pertencer simultaneamente a essas duas regiões, ou seja, pertencer a intersecção destas regiões. Sendo assim, os pontos que cumprem essa propriedade estão apresentados na região em verde na Figura 4.3, denominado conjunto viável.

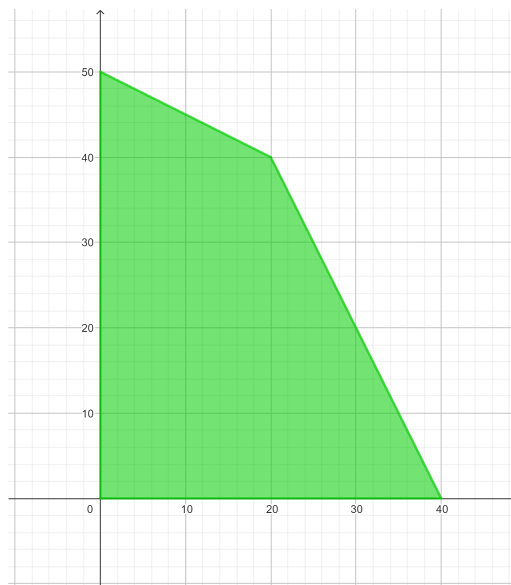


Figura 4.3: Região Viável do PPL

Como queremos que o valor de Z seja máximo, devemos encontrar um ponto tal que Z assumo valor máximo neste ponto, e a este ponto chamaremos de solução ótima do problema de maximizar Z sujeito às restrições do problema.

Para isso, tomamos uma curva de nível de Z , ou graficamente pensando, uma linha onde Z possui mesmo valor. Iniciamos com o valor $Z = 0$ e movemos esta curva de nível paralelamente a si própria. As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam as curvas de nível em vermelho para os valores $Z = 0$ e $Z = 40$.

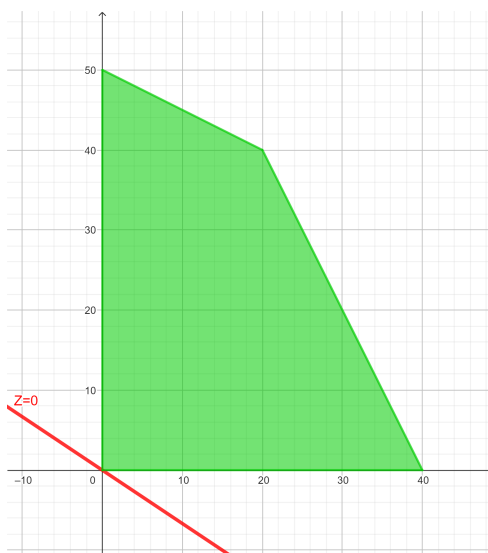


Figura 4.4: Curva de nível $Z = 0$

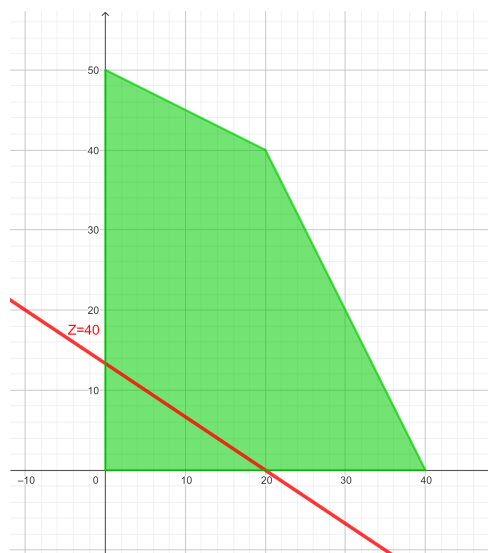


Figura 4.5: Curva de nível $Z = 40$

A Figura 4.6, mostra que ao mover a curva de nível paralelamente a ela própria, estamos a movendo na direção vetor gradiente, o qual aponta na direção de maior cresci-

mento da função Z , o que foi demonstrado no Teorema 2.19, uma vez que todas as curvas de níveis são retas paralelas.

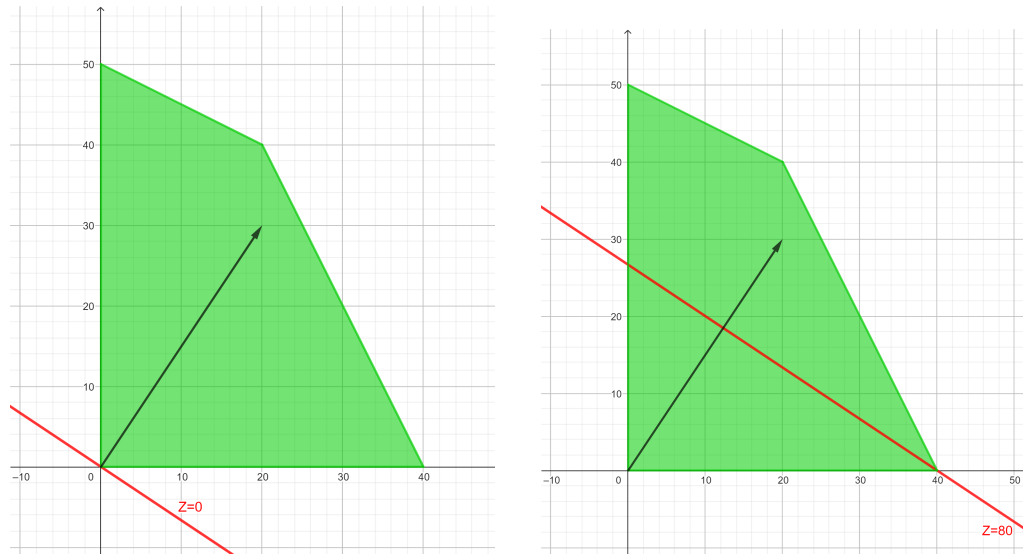


Figura 4.6: Curvas de nível na direção do gradiente

É importante notar que não podemos mover a curva de nível indefinidamente na direção do aumento de Z . Devemos assegurar que a interseção entre a curva de nível e a região viável não seja vazia. Por exemplo, ao considerar a curva de nível $Z = 200$ (veja a Figura 4.7) observamos que essa curva não intercepta a região viável em nenhum ponto. Assim, os pontos definidos por essa curva não pertencem ao conjunto viável de soluções.

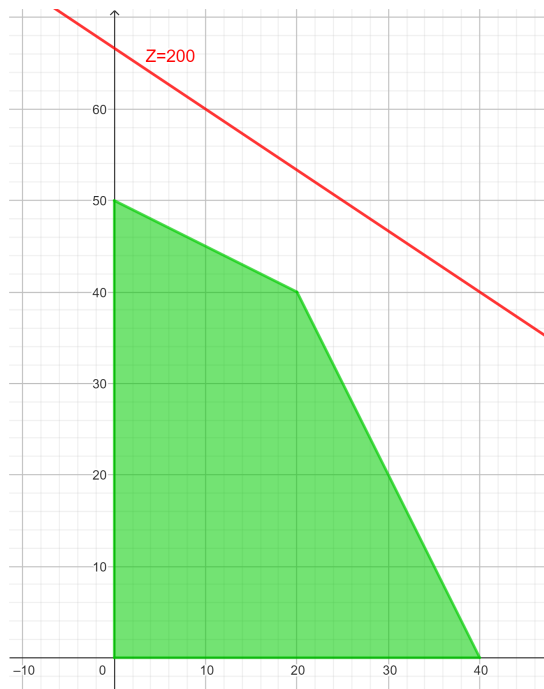


Figura 4.7: Curva de nível $Z = 200$

Sendo assim, para encontrar a solução ótima do problema de maximizar Z , devemos mover a curva de nível na direção de aumento de Z , até que ela atinja seu valor máximo, de modo que esta curva ainda intersecte a região viável.

No capítulo anterior enunciamos e demonstramos o Teorema 3.19 o qual afirma que a solução ótima de um PPL é um ponto extremo. Dessa forma para encontrarmos a solução ótima do problema movemos a curva de nível na direção de aumento de Z , até que a intersecção entre a curva de nível e a região viável seja um único ponto, que neste caso será um vértice da região viável, ou um lado do poliedro, caso esse lado seja paralelo às curvas de nível de Z , que não é o caso deste exemplo.

A Figura 4.8 mostra a curva de nível $Z = 160$, que representa graficamente a solução ótima do problema. A solução ótima, portanto, é o valor $Z = 160$, alcançado no ponto $(x, y) = (20, 40)$. É importante aqui percebermos que esta maneira de resolução, pode nos apresentar uma resposta aproximada da solução ótima, basta notar que poderíamos ter a curva de nível $Z = 160$, muito próxima ao vértice $(20, 40)$ e não exatamente sobre ele.

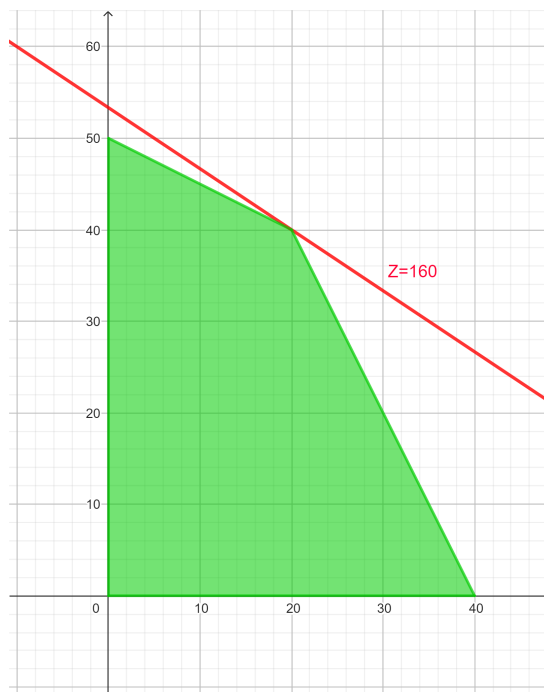


Figura 4.8: Solução ótima, $Z = 160$

É importante pensar que neste exemplo, a intersecção foi um único ponto, mas a curva de nível pode encontrar a borda da região viável de duas formas diferentes. Ela pode tocar em um segmento de reta, o que significa que há infinitas soluções possíveis que resultam no mesmo valor máximo para Z . Ou pode tocar em um único ponto, que será a solução ótima, pois ali Z atinge seu maior valor respeitando as condições impostas pelas

restrições.

Como todas as curvas de nível de uma função linear são retas (no plano), esse processo de mover a curva de nível na direção de aumento do valor de Z nos garante que estamos sempre caminhando para o maior valor possível dentro da região viável. Assim, ao parar no ponto ou segmento de interseção, sabemos que encontramos o resultado ótimo para o problema de maximizar Z .

Percebemos que mesmo um problema com apenas duas variáveis se torna inviável de se resolver manualmente. À medida que mais restrições são adicionadas ao problema, maior se torna o trabalho para encontrarmos uma solução ótima, pois ao aumentar o número de variáveis, aumentamos a dimensão do nosso problema, e se possuímos quatro ou mais variáveis perdemos a possibilidade de representação gráfica.

4.2 Tabela Simplex

Outra maneira de se resolver um PPL é fazendo uso do Método Simplex. Quando trabalhamos com um número menor de variáveis uma estratégia que pode ser utilizada é a tabela Simplex descrita na Seção 3.3.

Para exemplificar essa forma de resolução considere o problema de maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$, sujeito às restrições

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Escrevemos agora o problema na sua forma padrão, adicionando as variáveis de folga x_3 e x_4 . Assim o problema se torna, maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$, sujeito às restrições

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Com base nas informações do problema obtemos a Tabela 4.1

Sendo assim, nossa solução básica inicial é $x_1, x_2 = 0$ e $Z = 0$.

Como existe $c_i > 0$ na linha da função Z , a solução ótima ainda não foi encontrada e uma variável deve entrar na base.

A variável que entra na base é x_1 , pois $c_1 = 3$ é o maior valor positivo entre os c_{is} . A variável que sai da base é x_4 , pois é a menor razão entre os valores das constantes b e

Tabela 4.1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	2	4	1	0	8
x_4	2	1	0	1	5
Z	3	2	0	0	0

os coeficientes da coluna pivô.

Então realizamos o pivoteamento dividindo a linha de x_4 por 2 para tornar o pivô igual a 1, a Tabela 4.2 representa essa operação.

Tabela 4.2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	2	4	1	0	8
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
Z	3	2	0	0	0

Em seguida subtraímos duas vezes a linha de x_1 da linha de x_3 , e 3 vezes a linha de x_1 da linha de Z para zerar os coeficientes na coluna de x_1 .

A Tabela 4.3 mostra o primeiro pivoteamento.

Tabela 4.3: Título da Tabela

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	3	1	-1	3
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
Z	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$

Novamente, como existe $c_i > 0$ a solução ótima ainda não foi encontrada e uma variável deve entrar na base. A variável que entra na base agora é x_2 , pois $c_2 = \frac{1}{2}$ é o maior valor positivo entre os c_{is} . A variável que sai da base é x_3 , pois é a menor razão entre os valores das constantes b e os coeficientes da linha pivô.

Realizamos o pivoteamento dividindo a linha de x_3 por 3 para tornar o pivô igual a 1. A Tabela 4.4 mostra a operação feita.

Após isso, subtraímos $\frac{1}{2}$ vezes a linha de x_2 da linha de Z e da linha de x_1 para zerar os coeficientes da coluna de x_2 . A Tabela 4.5 mostra o pivoteamento realizado.

Como todos $c_{is} \leq 0$, a solução ótima foi encontrada. A solução ótima é o -Z em nossa tabela, portanto a solução ótima é $Z = 8$ com $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Tabela 4.4: Título da Tabela

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
Z	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$

Tabela 4.5: Título da Tabela

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_1	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	2
Z	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{3}$	-8

4.3 Implementação em Python do Método Simplex

Aqui utilizamos uma implementação em linguagem Python feita pelos autores para resolver PPLs de maximização com restrições do tipo $\leq$. A implementação é apresentada no Apêndice A, onde fizemos uma breve explicação sobre como esta foi desenvolvida, relacionando a implementação feita com os passos descritos na Seção 3.2. Para utilizá-la, o usuário deve copiar a implementação, pesquisar e acessar o site *Google Colab* em seu navegador como mostra a Figura 4.9, com uma conta de email *Google* conectada.

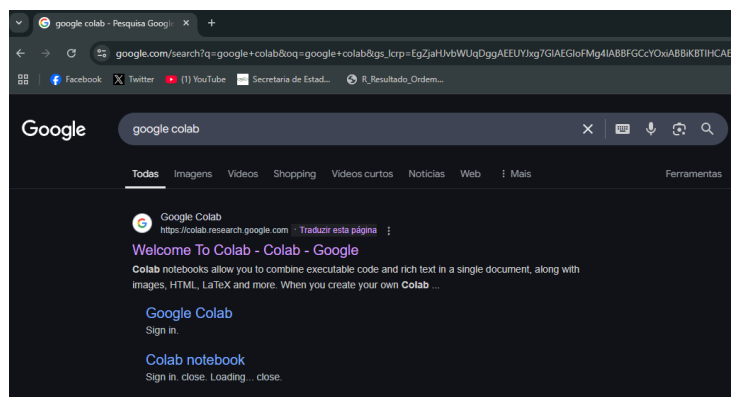


Figura 4.9: Google Colab

Após acessar o site o usuário deve selecionar a opção *New notebook*, conforme a Figura 4.10.

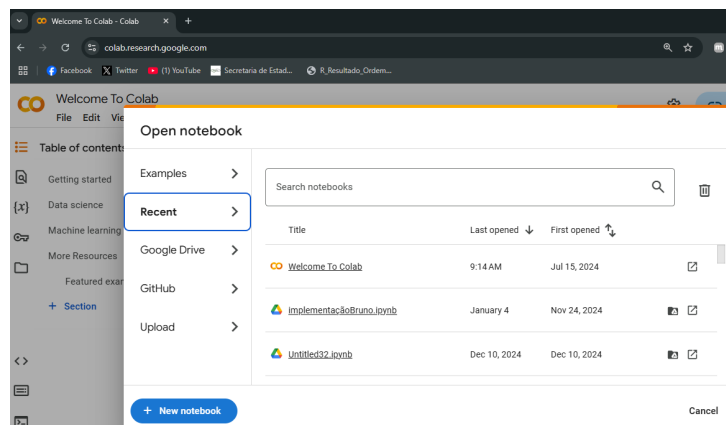


Figura 4.10: Nova implementação

Em seguida ao carregamento da página o usuário deve colar a implementação onde está escrito *start coding or generate with AI*. A Figura 4.11 mostra este passo.

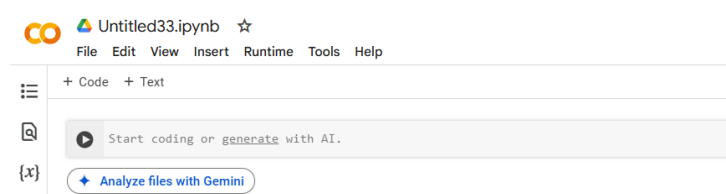


Figura 4.11: Colando a implementação

Por fim o usuário deve clicar na seta ao lado da implementação que foi colada no site, para dar início ao funcionamento da implementação.

A implementação tem importância pessoal para o autor, devido ao seu interesse em aprender uma linguagem de programação. Nesse sentido, o autor reconhece a programação como uma ferramenta educacional, capaz de estimular o raciocínio lógico e promover o desenvolvimento dos estudantes. Segundo Souza (2020):

Faz-se urgente a necessidade do professor de matemática utilizar linguagens de programação para mostrar aos seus alunos como ela é uma ferramenta extraordinária e como pode ser utilizada para a solução de inúmeros problemas envolvendo os conteúdos ensinados na sala de aula.

Uma vantagem dessa implementação é a capacidade de exibir o processo de iteração do Método Simplex, explicando ao usuário as etapas da resolução, como descrito na Seção 3.3.

Para mostrar o funcionamento da implementação, considere o problema de maximizar $Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3$, sujeito a

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 240$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 150$$

$$5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 210$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Ao iniciar o código, a implementação retorna uma orientação sobre o formato em que a função objetivo deve ser digitada, conforme mostrado na Figura 4.12.

```
----- Método Simplex para Maximização -----
Importante: Quando você for inserir uma variável como x_1, use o formato '1x_1' ao invés de apenas 'x_1'.
Digite a função objetivo Z (ex: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3):

```

Figura 4.12: Inserir a função Z

Após pressionar a tecla Enter, a implementação solicita ao usuário que informe quantas restrições o problema possui. Em seguida, orienta sobre o formato no qual as restrições devem ser inseridas. As figuras 4.13 e 4.14 ilustram a inserção das restrições de nosso problema.

```
----- Método Simplex para Maximização -----
Importante: Quando você for inserir uma variável como x_1, use o formato '1x_1' ao invés de apenas 'x_1'.
Digite a função objetivo Z (ex: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3):
2x_1+6x_2+5x_3
Quantas restrições existem?

```

Figura 4.13: Quantidade de restrições de Z

```
----- Método Simplex para Maximização -----
Importante: Quando você for inserir uma variável como x_1, use o formato '1x_1' ou apenas 'x_1'.
Digite a função objetivo Z (ex: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3):
2x_1+6x_2+5x_3
Quantas restrições existem?
3
As restrições devem estar no formato: Ax_1 + Bx_2 + ... <= C
Restrição 1: 2x_1+4x_2+8x_3<=240
Restrição 2: 3x_1+6x_2+4x_3<=150
Restrição 3: 5x_1+7x_2+3x_3<=210
```

Figura 4.14: Inserir restrições de Z

Após o usuário digitar as restrições do problema e pressionar Enter, a implementação inicia o processo de busca pela solução ótima. As figuras 4.15, 4.16 e 4.17 mostram,

a tabela inicial construída a partir dos dados fornecidos e os dois primeiros pivoteamentos realizados.

Tabela inicial:

Base	x1	x2	x3	s1	s2	s3	b
s1	2	4	8	1	0	0	240
s2	3	6	4	0	1	0	150
s3	5	7	3	0	0	1	210
z	2	6	5	0	0	0	0

Figura 4.15: Tabela inicial

Iteração 1:

A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há coeficientes positivos na linha da função Z.

Variável que entra na base: x2

Variável que sai da base: s2

A variável x2 entra na base pois possui o maior coeficiente positivo na linha Z

A variável s2 sai da base pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores da coluna pivô

Operação: Dividir linha 2 pelo pivô 6.

Operação: Subtrair 4 vezes a linha 2 da linha 1.

Operação: Subtrair 7 vezes a linha 2 da linha 3.

Operação: Subtrair 6 vezes a linha 2 da linha 4.

Tabela após pivoteamento:

Base	x1	x2	x3	s1	s2	s3	b
s1	0	0	16/3	1	-2/3	0	140
x2	1/2	1	2/3	0	1/6	0	25
s3	3/2	0	-5/3	0	-7/6	1	35
z	-1	0	1	0	-1	0	-150

Figura 4.16: Iteração 1

Iteração 2:

A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há coeficientes positivos na linha da função Z.

Variável que entra na base: x3

Variável que sai da base: s1

A variável x3 entra na base pois possui o maior coeficiente positivo na linha Z

A variável s1 sai da base pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores da coluna pivô

Operação: Dividir linha 1 pelo pivô 16/3.

Operação: Subtrair 2/3 vezes a linha 1 da linha 2.

Operação: Subtrair -5/3 vezes a linha 1 da linha 3.

Operação: Subtrair 1 vezes a linha 1 da linha 4.

Tabela após pivoteamento:

Base	x1	x2	x3	s1	s2	s3	b
x3	0	0	1	3/16	-1/8	0	105/4
x2	1/2	1	0	-1/8	1/4	0	15/2
s3	3/2	0	0	5/16	-11/8	1	315/4
Z	-1	0	0	-3/16	-7/8	0	-705/4

Figura 4.17: Iteração 2

Após encontrar a solução ótima para o problema, a implementação apresenta essa solução, juntamente com os valores das variáveis que maximizam Z , como mostrado na Figura 4.18.

Iteração 3:

Solução ótima encontrada, pois não há coeficientes positivos na linha da função Z.

Solução ótima: $x_1=0$, $x_2=15/2$, $x_3=105/4$

Valor máximo de Z: 705/4

Figura 4.18: Solução Ótima

Sendo assim, a solução do problema de maximizar Z será $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{15}{2}$ e $x_3 = \frac{105}{4}$, solução essa que torna $Z = \frac{705}{4}$. Valor este que representa o valor máximo de Z sujeito às restrições do problema.

A implementação em Python é interessante, pois a cada troca de variável na base, o valor de Z é recalculado. Esse recurso será fundamental na próxima seção, onde utilizamos a implementação para auxiliar na abordagem gráfica do Método Simplex.

4.4 Python para o Método Simplex

Esta seção apresenta uma resolução para um PPL de maximização, o qual possui duas variáveis, tem como objetivo mostrar o processo de iteração do Método Simplex, e como ele percorre os vértices da região viável para encontrar a solução ótima para o PPL. Para isso fizemos uso do GeoGebra, e da implementação em *Python* feita pelos autores.

Considere o problema de maximizar $Z = 5x_1 + 2x_2$ sujeito as restrições

$$2x_1 + 4x_2 \leq 17$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 22$$

$$12x_1 + 2x_2 \leq 23$$

$$14x_1 + 0,3x_2 \leq 24$$

$$x, y \geq 0.$$

Assim como na Seção 4.1, inicialmente determinamos a região viável utilizando as restrições do problema, sendo nossa região viável a região de intersecção entre todas as restrições. Isso é representado na Figura 4.19. Aqui, consideramos x_1 como a variável no eixo x e x_2 como a variável no eixo y .

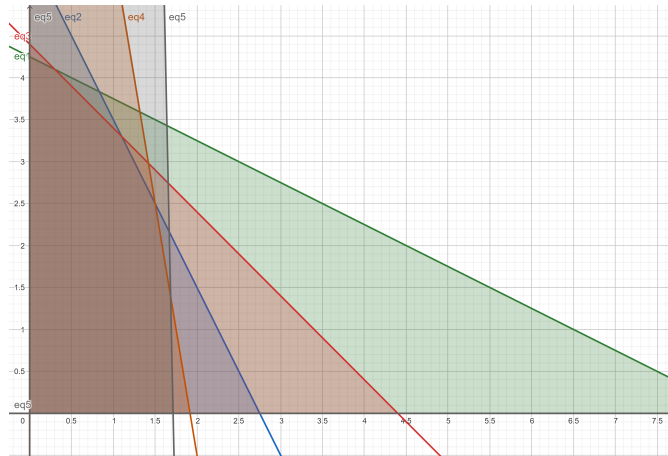


Figura 4.19: Restrições do problema

O Método Simplex explora, de forma iterativa, os vértices da região viável até encontrar a solução ótima para o PPL. Sendo assim, os vértices desempenham um papel fundamental na resolução. Nesse contexto, a Figura 4.20 apresenta a região viável juntamente com as coordenadas de seus vértices.

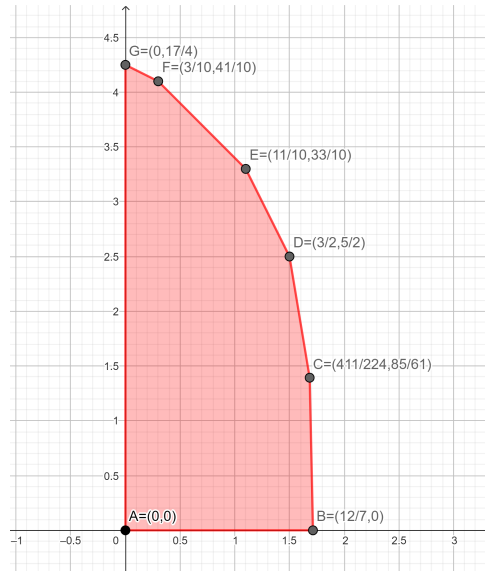


Figura 4.20: Região viável

Para resolver o problema, recorreremos à implementação em *Python* utilizada na Seção 4.3. A Figura 4.21 apresenta a tabela inicial do Método Simplex. Nesta tabela, observamos a solução básica inicial, em que as variáveis básicas assumem valores diferentes de zero, enquanto as variáveis não básicas têm valor 0. A solução inicial é fundamental para o Método Simplex, pois a partir dela ele começará as iterações até encontrar a solução ótima do PPL. Essa solução inicial corresponde ao vértice *A* da Figura 4.20.

Tabela inicial:

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	s5	b
s1	2	4	1	0	0	0	0	17
s2	4	2	0	1	0	0	0	11
s3	5	5	0	0	1	0	0	22
s4	12	2	0	0	0	1	0	23
s5	14	3/10	0	0	0	0	1	24
z	5	2	0	0	0	0	0	0

Figura 4.21: tabela inicial

A partir da solução básica inicial, o Método Simplex escolhe uma direção para avançar a um vértice adjacente ao vértice *A*. A Figura 4.22 ilustra as possíveis direções para os vértices *B* e *G*.

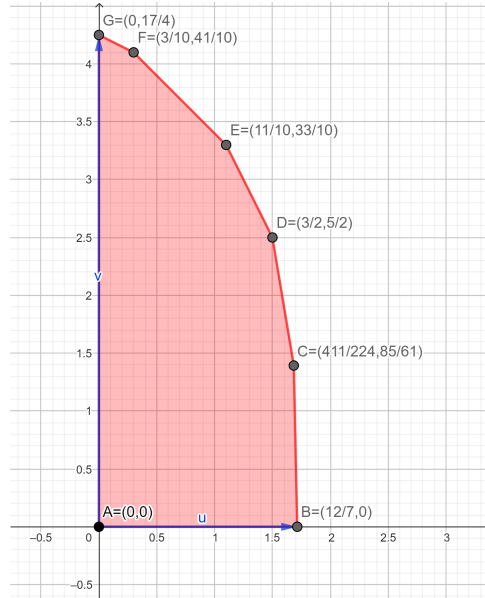


Figura 4.22: Direções u e v

O Método Simplex avança na direção que proporciona o maior aumento na função objetivo Z . Para isso, comparamos os valores de Z nos vértices B e G .

- Vértice B .

Teremos que Z assume valor $5 \cdot \frac{12}{7} + 2 \cdot 0 = \frac{60}{7}$.

- Vértice G .

Teremos que Z assume valor $5 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{2}$.

Como $\frac{60}{7} > \frac{17}{2}$, o Método avança para o vértice B . Isso é confirmado por nossa implementação na Figura 4.23, que apresenta o primeiro pivoteamento realizado. Nesta etapa, a variável x_1 entra na base, e o valor de Z atinge $\frac{60}{7}$.

Tabela após pivoteamento:

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	b
s_1	0	277/70	1	0	0	0	-1/7	95/7
s_2	0	67/35	0	1	0	0	-2/7	29/7
s_3	0	137/28	0	0	1	0	-5/14	94/7
s_4	0	61/35	0	0	0	1	-6/7	17/7
x_1	1	3/140	0	0	0	0	1/14	12/7
z	0	53/28	0	0	0	0	-5/14	-60/7

Figura 4.23: Pivoteamento 1

Como após este pivoteamento ainda temos coeficientes positivos na linha de Z , não encontramos ainda a solução ótima, indicando a necessidade de outro pivoteamento. A Figura 4.24 mostra que a variável x_2 entra na base, e após o pivoteamento teremos que $x_1 = \frac{411}{244}$ e $x_2 = \frac{85}{61}$ resultando em $Z = \frac{2735}{244}$. Perceba que os valores de x_1 e x_2 coincidem com as coordenadas do vértice C , ou seja, esse valor de Z é alcançado no vértice C .

Tabela após pivoteamento:

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	b
s_1	0	0	1	0	0	$-\frac{277}{122}$	$\frac{110}{61}$	$\frac{983}{122}$
s_2	0	0	0	1	0	$-\frac{67}{61}$	$\frac{40}{61}$	$\frac{90}{61}$
s_3	0	0	0	0	1	$-\frac{685}{244}$	$\frac{125}{61}$	$\frac{1613}{244}$
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{35}{61}$	$-\frac{30}{61}$	$\frac{85}{61}$
x_1	1	0	0	0	0	$-\frac{3}{244}$	$\frac{5}{61}$	$\frac{411}{244}$
z	0	0	0	0	0	$-\frac{265}{244}$	$\frac{35}{61}$	$-\frac{2735}{244}$

Figura 4.24: Pivoteamento 2

A Figura 4.25 ilustra a direção W percorrida pelo Método Simplex nessa iteração.

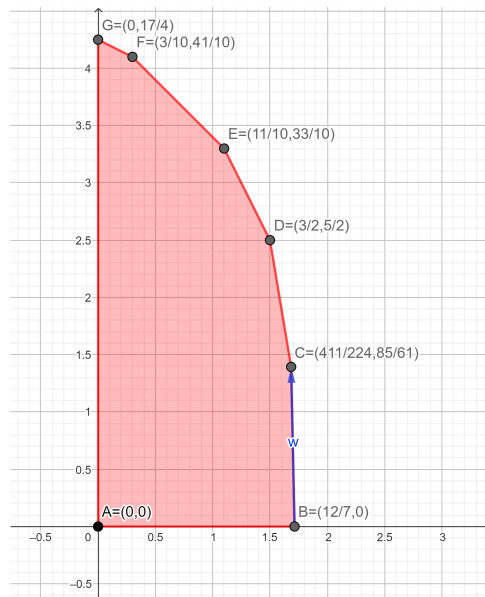


Figura 4.25: Direção W

Como ainda há coeficientes positivos na linha da função Z , realizamos mais um pivoteamento, conforme mostrado na Figura 4.26.

Tabela após pivoteamento:

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	s5	b
s1	0	0	1	-11/4	0	3/4	0	4
s2	0	0	0	61/40	0	-67/40	1	9/4
s3	0	0	0	-25/8	1	5/8	0	2
x2	0	1	0	3/4	0	-1/4	0	5/2
x1	1	0	0	-1/8	0	1/8	0	3/2
z	0	0	0	-7/8	0	-1/8	0	-25/2

Figura 4.26: Pivoteamento 3

Após esta iteração, não há mais coeficientes positivos na linha de Z , indicando que encontramos a solução ótima. Como a solução $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ corresponde ao vértice D , temos que esse vértice representa a solução ótima com valor $Z = \frac{25}{2}$. A Figura 4.27 apresenta todo o caminho percorrido pelo Método Simplex até a solução ótima.

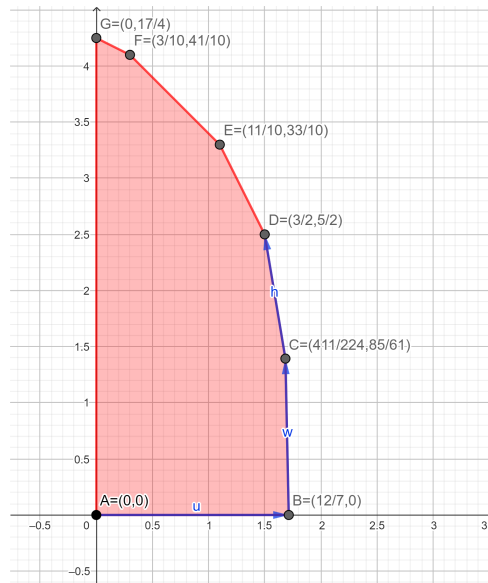


Figura 4.27: caminho total

Observe que, se o método tivesse avançado para o vértice E , o valor de Z seria $Z = \frac{121}{10}$, inferior ao obtido no vértice D . Caso continuássemos a explorar os demais vértices, perceberíamos que, a cada novo vértice, os valores de Z diminuiriam a cada iteração, até retornarmos ao vértice A .

Capítulo 5

Aplicações de PPL no Ensino Médio

Neste capítulo, apresentamos dois enunciados juntamente com as resoluções de dois PPLs. O primeiro PPL será resolvido usando o método da exaustão, a resolução gráfica e a implementação em Python desenvolvida pelos autores. O segundo PPL será resolvido utilizando uma implementação em Python que aborda problemas com desigualdades do tipo $\geq$, sendo essa implementação apresentada no Apêndice B.

O objetivo ao se trabalhar com enunciados contextualizados é aproximar os conceitos matemáticos ao cotidiano do aluno, visto que muitas vezes o aluno não vê a Matemática como uma ciência presente em sua vida. Os autores Bicudo e Borba (2004) trazem que:

[...] o aluno que estuda português na escola, na rua fala, lê e escreve, ou seja, tem um intenso contato com a língua escrita e falada. O aluno que estuda geografia na escola, vê em jornais e revistas ou na televisão, falarem de outros países. E o mesmo para a biologia, a química e a física, elas aparecem nas notícias e nos gibis.

Esperamos que o trabalho com PPLs contribua para a aproximação dos conceitos matemáticos com o cotidiano dos alunos, promovendo uma compreensão mais clara dos conteúdos abordados em sala de aula.

Ainda sobre a utilização de problemas em sala de aula, Onuchice (2011) ressalta que:

O problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento.

Dessa forma acreditamos que ao modelar o problema proposto, e encontrar uma solução para ele, o aluno consiga aprender de forma significativa os conceitos matemáticos usados por ele nestes processos.

5.1 Problema da indústria

Uma empresa produz dois produtos, A e B , que geram um lucro de R\$ 8,00 por litro produzido de A e R\$ 6,00 por litro produzido de B . Cada mistura é preparada utilizando diferentes recursos químicos disponíveis em quantidades limitadas. Sejam x_1 a quantidade do produto A e x_2 a quantidade do produto B .

As quantidades de recursos consumidos para a produção de cada produto são:

Primeiro processo: Consome dois litros do primeiro recurso químico por litro de A e quatro litros por litro de B , com um total disponível de 240 litros.

Segundo processo: Consome quatro litros do segundo recurso químico por litro de A e dois litros por litro de B , com um total disponível de 240 litros.

Terceiro processo: Consome 14 litros do terceiro recurso químico por litro de A e um litro por litro de B , com um total disponível de 660 litros.

Quarto processo: Consome dois litros do quarto recurso químico por litro de A e 14 litros por litro de B , com um total disponível de 740 litros.

Desejamos modelar este problema como um PPL, para isto vamos formular a função objetivo e as restrições que modelam este problema e determinar quantos litros de cada produto a empresa deve fabricar para maximizar o lucro total e qual é este lucro.

Modelagem Matemática do problema da indústria

A função objetivo é uma expressão que representa o lucro total que queremos maximizar. Os coeficientes indicam o lucro gerado por litro produzido de cada produto.

- Cada litro do produto A gera um lucro de R\$ 8,00.
- Cada litro do produto B gera um lucro de R\$ 6,00.

O lucro total, Z , pode ser calculado somando os lucros dos dois produtos multiplicados pelas quantidades. Portanto, a função objetivo é

$$Z = 8x_1 + 6x_2.$$

Aqui, Z representa o lucro total, o qual queremos maximizar.

Agora, vamos considerar as restrições que representam as limitações dos recursos disponíveis para a produção.

- **Primeiro processo** consome dois litros do primeiro recurso por litro de A e quatro litros do primeiro recurso por litro de B . O total disponível desse recurso é 240 litros. Então, a restrição será

$$2x_1 + 4x_2 \leq 240.$$

- **Segundo processo** consome quatro litros do segundo recurso por litro de A e dois litros do segundo recurso por litro de B . O total disponível desse recurso é 240 litros. Logo, a restrição será

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240.$$

- **Terceiro processo** consome 14 litros do terceiro recurso por litro de A e um litro do terceiro recurso por litro de B . O total disponível desse recurso é 660 litros. Logo, a restrição será

$$14x_1 + x_2 \leq 660.$$

- **Quarto processo** consome dois litros do quarto recurso por litro de A e 14 litros do quarto recurso por litro de B . O total disponível desse recurso é 740 litros. Logo, a restrição será

$$2x_1 + 14x_2 \leq 740.$$

As restrições representam os limites de recursos químicos disponíveis para a produção. Cada inequação relaciona o consumo de recursos com o máximo permitido, garantindo que o uso não exceda a disponibilidade.

Por fim, sabemos que as quantidades do produto A e do produto B produzidas não podem ser negativas. Ou seja, temos que

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Dessa forma, o PPL é maximizar $Z = 8x_1 + 6x_2$, sujeito as restrições

$$2x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$14x_1 + x_2 \leq 660$$

$$2x_1 + 14x_2 \leq 740$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

5.1.1 Exaustão

Iremos encontrar a solução ótima deste PPL utilizando o método da exaustão, que consiste em determinar os vértices da região viável e, em seguida, calcular o valor de Z em cada um deles, e comparar estes valores para determinar a solução ótima, já que mostramos no Capítulo 3 que a solução ótima de um PPL está no vértice do polígono formado pela região viável, e que a quantidade de vértices é finita.

Com o auxílio do *software* gráfico GeoGebra, representamos x_1 no eixo x e x_2 no eixo y . Inicialmente, identificamos geometricamente a região viável do problema, que é dada pela interseção das regiões definidas por restrição. Visualizar a região viável e os vértices no gráfico facilita a compreensão da interação entre as restrições e como o lucro máximo é alcançado. Na Figura 5.1, apresentamos a região viável destacada em vermelho. Note que cada par de equações gera um ponto, que pertence ao conjunto de vértices do poliedro que define o PPL.



Figura 5.1: Região viável

Para aplicar o método da exaustão, é necessário determinar as coordenadas dos vértices da região viável. Isso é feito ao encontrar as interseções entre as retas definidas pelas restrições do problema. Este método está amparado pelo fato de que se o PPL possuir uma solução ótima esta solução ótima é um vértice do poliedro.

O cálculo do lucro total para cada vértice nos mostra qual combinação de produção resulta no maior lucro, ajudando a identificar a solução ótima.

Como exemplo vamos encontrar o vértice formado pelas restrições $2x + 14y \leq 740$ e $2x + 4y \leq 240$.

Para encontrar o vértice formado pelas restrições $2x + 14y \leq 740$ e $2x + 4y \leq 240$, precisamos determinar o ponto exato onde essas duas retas se interceptam no plano

cartesiano. Sabemos que as restrições $\leq$ definem regiões de viabilidade, mas a interseção ocorre nas bordas dessas regiões, ou seja, nas retas correspondentes às igualdades.

Portanto, transformamos as desigualdades em igualdades

$$2x + 14y = 740 \quad \text{e} \quad 2x + 4y = 240.$$

Agora, resolvemos esse sistema de equações para encontrar as coordenadas do ponto onde as duas retas se cruzam. O motivo para usar as igualdades é que queremos o limite exato, ou seja, o ponto onde ambas as condições são simultaneamente satisfeitas como igualdade, representando o vértice entre essas duas restrições.

Vamos resolver o sistema de equações formado por essas restrições

$$\begin{cases} 2x + 14y = 740 \\ 2x + 4y = 240. \end{cases}$$

Começamos eliminando uma das variáveis. Subtraímos a segunda equação da primeira para que os termos com $2x$ se cancelem. Fazendo isso, temos

$$(2x + 14y) - (2x + 4y) = 740 - 240,$$

simplificando, obtemos

$$10y = 500 \quad \implies \quad y = 50.$$

Agora que encontramos o valor de y , substituímos $y = 50$ em uma das equações originais. Escolhemos a segunda equação, $2x + 4y = 240$, para isso

$$2x + 4(50) = 240.$$

Resolvendo, temos

$$2x + 200 = 240 \quad \implies \quad 2x = 40 \quad \implies \quad x = 20.$$

Assim, o ponto de interseção das duas retas, ou seja, o vértice formado pelas restrições, é dado por

$$(x, y) = (20, 50).$$

Repetindo este procedimento para todas as combinações de restrições, identificamos 6 vértices distintos que pertencem à região viável. A representação gráfica dos vértices e suas coordenadas está apresentada na Figura 5.2.

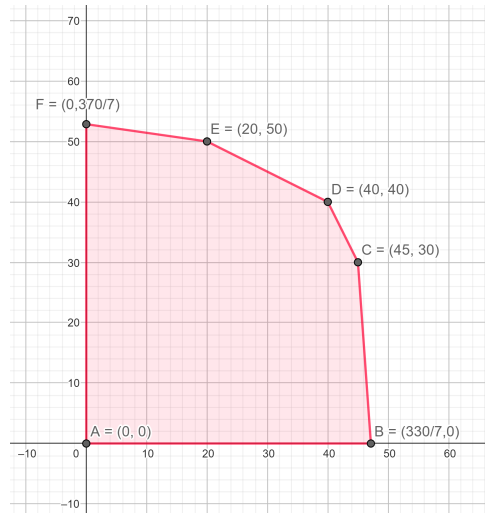


Figura 5.2: Vértices

Agora calculamos o valor de Z nos vértices para identificar a solução ótima. O vértice onde Z for máximo será a solução ótima do problema.

Vértice A

Como $A = (0, 0)$, temos que ele representa uma produção nula dos dois produtos da empresa. Então

$$Z = 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0,$$

dessa forma o lucro será de R\$ 0,00.

Vértice B

Como $B = (\frac{330}{7}, 0)$, temos que ele representa uma produção de $\frac{330}{7}$ litros do produto x_1 e nenhum litro do produto x_2 , assim

$$Z = 8 \cdot \frac{330}{7} + 6 \cdot 0 = \frac{2640}{7},$$

dessa forma o lucro será de aproximadamente R\$ 377,14.

Vértice C

Como $C = (45, 30)$, temos que ele representa uma produção de 45 litros do produto x_1 e 30 litros do produto x_2 , assim

$$Z = 8 \cdot 45 + 6 \cdot 30 = 360 + 180 = 540,$$

dessa forma o lucro será de R\$ 540,00.

Vértice D

Como $D = (40, 40)$, temos que ele representa uma produção de 40 litros de ambos os produtos, assim

$$Z = 8 \cdot 40 + 6 \cdot 40 = 320 + 240 = 560,$$

dessa forma o lucro será de $R\$ 560,00$.

Vértice E

Como $C = (20, 50)$, temos que ele representa uma produção de 20 litros do produto x_1 e 50 litros do produto x_2 , assim

$$Z = 8 \cdot 20 + 6 \cdot 50 = 160 + 300 = 460,$$

dessa forma o lucro será de $R\$460,00$.

Vértice F

Como $F = (0, \frac{370}{7})$, temos que ele representa uma produção de 0 litros do produto x_1 e $\frac{370}{7}$ litros do produto x_2 , assim

$$Z = 8 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{370}{7} = \frac{2220}{7},$$

dessa forma o lucro será de aproximadamente $R\$ 317,14$.

O maior valor de Z é obtido no vértice D , indicando que a produção ótima é de 40 litros de x_1 e 40 litros de x_2 , gerando um lucro máximo de $R\$560,00$. A solução ótima representa a melhor estratégia de produção dentro das limitações, maximizando o lucro da empresa.

Este método, apesar de menos eficiente para problemas de grande escala, é ideal para ilustrar a aplicação de conceitos básicos de otimização no ensino médio.

5.1.2 Gráfica

Apresentamos aqui a resolução gráfica do Problema da indústria 5.1. Aqui omitimos os conceitos relacionados ao cálculo de várias variáveis, buscando aproximar os conceitos empregados na resolução, dos conceitos vistos no Ensino Médio.

Damos início a resolução encontrando a região viável do PPL, fazendo uso do GeoGebra. A Figura 5.3 ilustra nossa região viável.

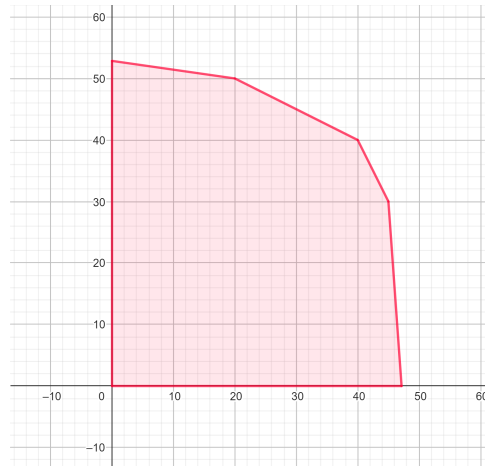


Figura 5.3: Região viável

Em seguida traçamos em azul a reta onde Z possui valor nulo, o que é mostrado na Figura 5.4.

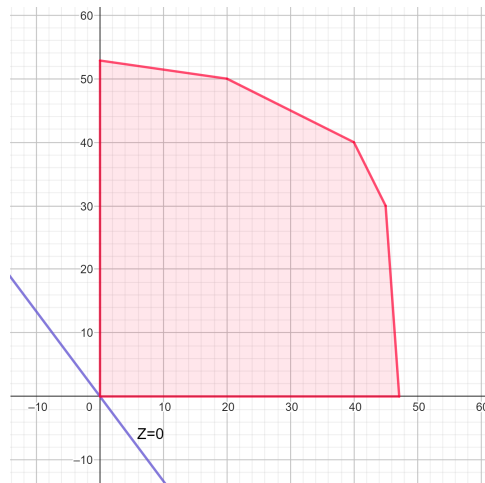


Figura 5.4: $Z = 0$

Em seguida que movemos a linha paralelamente a si própria na direção de aumento de Z . Poderíamos ter movido na outra direção, mas como queremos maximizar Z , isso não seria eficiente. Mover na direção oposta reduziria o valor de Z , afastando-nos do objetivo de encontrar o maior valor possível dentro da região viável. Portanto, sempre avançamos na direção em que aumentamos o valor de Z , garantindo que estamos nos aproximando da solução ótima. De acordo com Taha (2008).

Primeiramente, precisamos identificar a direção correta em que a função cresce (função de maximização). Para isso, traçaremos diferentes retas com base na equação da função objetivo, atribuindo diferentes valores a z , por tentativa e erro.

Identificada a direção em que a função objetivo aumenta, é possível identificar a solução ótima do modelo, dentro do espaço de soluções factíveis.

A Figura 5.5 mostra a reta onde $Z = 140$.

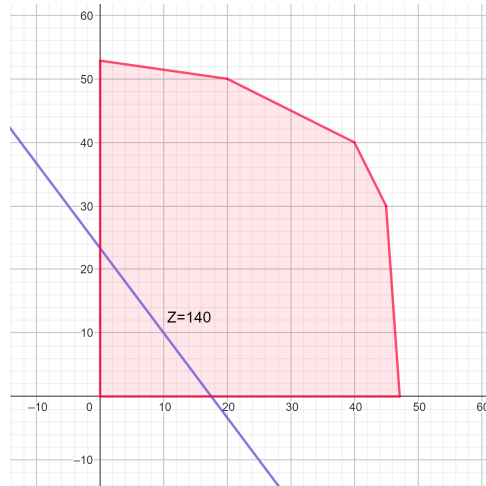


Figura 5.5: $Z = 140$

Continuando a mover a reta paralelamente a si própria, temos conforme a Figura 5.6, que a solução ótima é obtida aproximadamente na coordenada $(40, 40)$ que indica um valor ótimo de aproximadamente R\$ 560,00, obtido ao produzir 40 litros de x_1 e também 40 litros de x_2 .

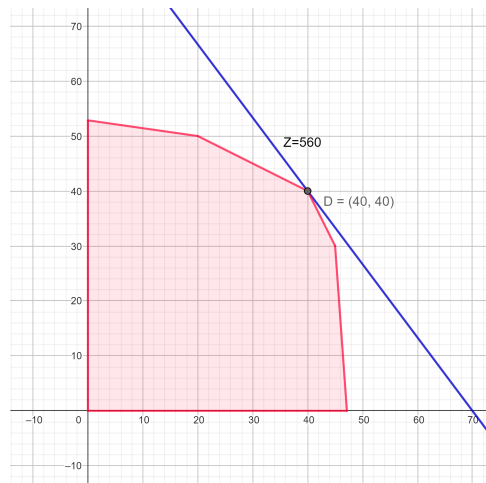


Figura 5.6: $Z = 560$

5.1.3 Python

Nesta seção apresentamos uma resolução do problema da indústria 5.1, usando a implementação em Python desenvolvida pelos autores.

A Base Nacional Comum Curricular incentiva o uso de tecnologias digitais para que os alunos possam não apenas resolver problemas, mas também compreender os conceitos matemáticos de forma mais visual e prática. Isso se alinha diretamente ao aprendizado de PL, onde a construção gráfica e a resolução de equações são ferramentas essenciais. Nesse contexto, a BNCC destaca que:

O aluno deve resolver e elaborar problemas do cotidiano, fazendo uso de ferramentas matemáticas e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Acessando o *Google Colab*, colando a implementação e executando o código implementado, a Figura 5.7 representa a entrada inicial de dados do usuário juntamente com a tabela inicial do Simplex.

```
----- Método Simplex para Maximização -----
Importante: Quando você for inserir uma variável como x_1, use o formato '1x_1' ou apenas 'x_1'.
Digite a função objetivo Z (ex: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3):
8x_1+6x_2
Quantas restrições existem?
4
As restrições devem estar no formato: Ax_1 + Bx_2 + ... <= C
Restrição 1: 2x_1+4x_2<=240
Restrição 2: 4x_1+2x_2<=240
Restrição 3: 14x_1+1x_2<=660
Restrição 4: 2x_1+14x_2<=740
Tabela inicial:
```

	Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	b
s1	2	4	1	0	0	0	0	240
s2	4	2	0	1	0	0	0	240
s3	14	1	0	0	1	0	0	660
s4	2	14	0	0	0	1	0	740
z	8	6	0	0	0	0	0	0

Figura 5.7: Restrições e tabela inicial

Perceba que esta tabela representa a solução $(0, 0)$, que corresponde ao vértice A da região viável. A Figura 5.8 representa a primeira iteração da implementação, note que após essa iteração o método caminhou para a solução correspondente ao vértice B .

Iteração 1:

A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há coeficientes positivos na linha da função Z.

Variável que entra na base: x1

Variável que sai da base: s3

A variável x1 entra na base pois possui o maior coeficiente positivo na linha Z

A variável s3 sai da base pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores da coluna pivô

Operação: Dividir linha 3 pelo pivô 14.

Operação: Subtrair 2 vezes a linha 3 da linha 1.

Operação: Subtrair 4 vezes a linha 3 da linha 2.

Operação: Subtrair 2 vezes a linha 3 da linha 4.

Operação: Subtrair 8 vezes a linha 3 da linha 5.

Tabela após pivoteamento:

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	b
s1	0	27/7	1	0	-1/7	0	1020/7
s2	0	12/7	0	1	-2/7	0	360/7
x1	1	1/14	0	0	1/14	0	330/7
s4	0	97/7	0	0	-1/7	1	4520/7
z	0	38/7	0	0	-4/7	0	-2640/7

Figura 5.8: iteração 1

Como ainda há coeficientes positivos na linha de Z, a implementação fez uma nova iteração, conforme mostrado na Figura 5.9.

Iteração 2:

A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há coeficientes positivos na linha da função Z.

Variável que entra na base: x2

Variável que sai da base: s2

A variável x2 entra na base pois possui o maior coeficiente positivo na linha Z

A variável s2 sai da base pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores da coluna pivô

Operação: Dividir linha 2 pelo pivô 12/7.

Operação: Subtrair 27/7 vezes a linha 2 da linha 1.

Operação: Subtrair 1/14 vezes a linha 2 da linha 3.

Operação: Subtrair 97/7 vezes a linha 2 da linha 4.

Operação: Subtrair 38/7 vezes a linha 2 da linha 5.

Tabela após pivoteamento:

Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	b
s1	0	0	1	-9/4	1/2	0	30
x2	0	1	0	7/12	-1/6	0	30
x1	1	0	0	-1/24	1/12	0	45
s4	0	0	0	-97/12	13/6	1	230
z	0	0	0	-19/6	1/3	0	-540

Figura 5.9: iteração 2

Após essa iteração, a solução corresponde ao vértice C da região viável. Como ainda há coeficientes positivos na linha de Z, foi realizada uma nova iteração pela implementação, que então encontrou a solução correspondente ao vértice D, como mostra a Figura 5.10.

Iteração 3:
A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há coeficientes positivos na linha da função Z.
Variável que entra na base: x5
Variável que sai da base: s1
A variável x5 entra na base pois possui o maior coeficiente positivo na linha Z
A variável s1 sai da base pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores da coluna pivô

Operação: Dividir linha 1 pelo pivô 1/2.
Operação: Subtrair -1/6 vezes a linha 1 da linha 2.
Operação: Subtrair 1/12 vezes a linha 1 da linha 3.
Operação: Subtrair 13/6 vezes a linha 1 da linha 4.
Operação: Subtrair 1/3 vezes a linha 1 da linha 5.

Tabela após pivoteamento:

	Base	x1	x2	s1	s2	s3	s4	b
x5	0	0	2	-9/2	1	0	60	
x2	0	1	1/3	-1/6	0	0	40	
x1	1	0	-1/6	1/3	0	0	40	
s4	0	0	-13/3	5/3	0	1	100	
z	0	0	-2/3	-5/3	0	0	-560	

Iteração 4:
Solução ótima encontrada, pois não há coeficientes positivos na linha da função Z.

Solução ótima encontrada:
Valores das variáveis: ['x_1=40', 'x_2=40']
Valor máximo de Z: 560

Figura 5.10: Iteração 3 e solução ótima

Perceba que não existem mais coeficientes positivos na linha da função Z, dessa forma temos que a solução ótima corresponde ao vértice D. Sendo assim, o lucro máximo é R\$ 560,00, e é obtido ao se produzir 40 litros de cada um dos produtos.

5.2 Problema da dieta

Nesta seção, resolvemos um PPL com restrições do tipo $\geq$. O PPL possui quatro variáveis, o que inviabiliza a resolução gráfica. Para lidar com isso, utilizamos uma implementação em *Python*, que resolve esse tipo de PPL. A implementação correspondente pode ser encontrada no Apêndice B. Uma maneira de resolver este PPL é usando o *Solver* do *Microsoft Excel* por exemplo. Em Rosa (2021) o autor resolve um PPL semelhante ao presente neste capítulo usando essa ferramenta.

O PPL apresentado a seguir é uma adaptação de um problema tradicionalmente trabalhado no Ensino Médio, conforme descrito em Leonardo et al. (2016) em que o problema é modelado apenas com igualdades. A adaptação envolve transformar o problema de sistemas de equações em um PPL, modificando os valores das variáveis, a quantidade de variáveis, as desigualdades nas restrições e atribuindo um custo para cada alimento. Essas alterações visam tornar o problema mais condizente com a realidade.

Enunciado do problema

Suponha que, por motivos justificáveis, uma certa dieta alimentar esteja restrita a leite desnatado, carne magra de boi, carne de peixe e uma salada de composição bem conhecida. Sabendo ainda que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas A, C e D e controlados por suas quantidades mínimas (em miligramas), uma vez que são indispensáveis à preservação da saúde da pessoa que estará se submetendo à dieta. A Tabela 5.1 resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimentos e sua necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa.

Tabela 5.1: Tabela nutricional dos alimentos e requisitos mínimos.

Vitamina	Leite (litro)	Carne (kg)	Peixe (kg)	Salada (100g)	Requisito Nutricional Mínimo
A	3 mg	5 mg	7 mg	2 mg	29 mg
C	4 mg	6 mg	8 mg	3 mg	35 mg
D	5 mg	7 mg	6 mg	4 mg	42 mg
Custo	4 reais	6 reais	5 reais	3 reais	

Buscamos determinar as quantidades diárias de certos alimentos que devem ser ingeridos em uma dieta de redução calórica, de forma que os requisitos nutricionais sejam atendidos ao menor custo possível.

Modelagem Matemática do problema da dieta

Consideramos que x_1 indica a quantidade de leite, x_2 a de carne, x_3 a de peixe e x_4 a de salada.

- Modelagem Matemática da função objetivo.

Aqui basta multiplicarmos o valor de cada alimento pela variável que representa a quantidade deste alimento. Temos então que a função objetivo Z será

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4.$$

- Modelagem Matemática das restrições

i) A restrição associada à demanda de vitamina A é dada por

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 29.$$

ii) A restrição associada à demanda de vitamina C é dada por

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 35.$$

iii) A restrição associada à demanda de vitamina D é dada por

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 42.$$

Como não é possível comprar uma quantidade negativa de alimentos temos que

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Assim, o PPL se torna minimizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4$, sujeito a

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 29$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 35$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 42$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

5.2.1 Python

Para resolver o PPL, utilizaremos o comando `Lpminimize`, que, por padrão, é uma implementação em C++ do `Cbc` (Coin-or Branch and Cut), um software *open-source* para Programação Inteira Mista, e que resolve PPLs com restrições gerais. Nesta implementação o usuário deve inserir a função objetivo e as restrições, como a seguir

```
#definindo a função objetivo a ser otimizada
funcao = p.LpProblem("exemplo",p.LpMinimize)
funcao += 4*x1+6*x2+5*x3+3*x4

#definindo as variáveis do problema
funcao += 3*x1+5*x2+7*x3+2*x4>=29
funcao += 4*x1+6*x2+8*x3+3*x4>=35
funcao += 5*x1+7*x2+6*x3+4*x4>=42
```

Perceba que nesta implementação o usuário escreve diretamente na implementação a função objetivo e as restrições. Após o usuário inserir Z e suas restrições, a implementação retorna a solução ótima. A Figura 5.11 mostra a solução ótima juntamente com a quantidade de porções de cada alimento que torna Z mínima.

```
Optimal
x1 = 0.0
x2 = 0.0
x3 = 2.0
x4 = 7.5
custo mínimo = 32.5
```

Figura 5.11: Solução ótima

Desta maneira, temos que o custo mínimo é de R\$ 32,50, e devem ser ingeridos 2kg de peixe e 750g de salada.

Considerações finais

O presente trabalho apresentou uma análise sobre como os PPLs podem ser utilizados no contexto educacional do Ensino Médio. Ressaltamos ainda que o trabalho com PPLs se alinha às atividades propostas nas diretrizes educacionais, como as apresentadas pela BNCC, que valorizam a Modelagem Matemática como estratégia pedagógica.

O Método Simplex foi objeto de estudo neste trabalho, pois este é tradicionalmente utilizado na resolução de PPLs. Esse método é reconhecido por sua eficiência na resolução de problemas lineares e é frequentemente abordado em estudos relacionados à otimização.

Esperamos que o desenvolvimento da implementação utilizada na Seção 4.3 para se resolver PPLs, possa ser útil para possíveis aplicações em sala de aula no Ensino Médio. O trabalho foi particularmente interessante para o autor, pois, oportunizou a ele, conhecer uma linguagem de programação, o que era um desejo pessoal. Além disso, a implementação desenvolvida pode inspirar os alunos a criarem suas próprias ferramentas tecnológicas, indo além do uso de ferramentas já existentes. O fato de todas as escolas da rede pública de ensino paranaense possuírem laboratórios de informática facilita a integração de tecnologias digitais, reforçando a ideia de que o professor de Matemática deve incentivar seus alunos a desenvolverem soluções tecnológicas para resolver problemas.

Dessa forma, acreditamos que o trabalho com PPLs no Ensino Médio é uma abordagem que pode integrar habilidades matemáticas, ao promover a Modelagem Matemática e o uso de tecnologias digitais, possibilitando ao aluno vivenciar o conhecimento de forma significativa, conectando conceitos teóricos a situações práticas. Essa abordagem enriquece o aprendizado matemático e amplia as possibilidades de aplicação do conteúdo aprendido.

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, Jerson Leite. Modelagem matemática na programação linear: método simplex e aplicações. Universidade Federal do Piauí, 2020.
- [2] Bertsimas, D e Tsitsiklis, John. *Introduction to the linear optimization*. Editora Athena Scientific, Belmont, 1997.
- [3] Biembengut, Maria Salett; Modelagem matemática e implicações no ensino e aprendizagem de matemática. Blumenau: Ed. da Furb, 1999.
- [4] Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. (Orgs.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.
- [5] Boldrini, J. L; et al. *Álgebra linear*. 3. ed. Editora Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1980.
- [6] Brasil. *Base nacional comum curricular (BNCC). Educação é a base*. MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 2017.
- [7] Burak, D. Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. Dissertação (Mestrado em Matemática), Unesp, Rio Claro, 1987.
- [8] Camargo, Ramina Samoa Silva. Introdução à programação linear no ensino médio utilizando a resolução gráfica. Universidade Federal do Amazonas, 2020.
- [9] GeoGebra. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org>.
- [10] Goldbarg, M. C. e Luna, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.
- [11] Hoffman, K., Kunze, R. Linear algebra. 2. ed.. Prentice-Hall. 2001.
- [12] A. A. Ribeiro e E. W. Karas. *Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais*. MPS-SIAM Series on Optimization. Cengage Learning, São Paulo, 2013.

- [13] Leonardo, F. M., et al. Conexões com a matemática - 2 ensino médio. Editora Moderna, São Paulo, 2016.
- [14] Leithold, L. *O cálculo com geometria analítica, volume 2*. 3. ed. Editora Harbra, São Paulo, 1994.
- [15] Lima, E. L. Sobre o ensino de sistemas lineares. Revista do Professor de Matemática, v. 23, p. 8–18, 1993.
- [16] Lima, Elon Lages. *Curso de análise: volume 2*. IMPA/Editora FGV, Rio de Janeiro, 2014.
- [17] Meyer, J. F. C. A.; Caldeira, A. D.; Malheiros, A. P. S. Modelagem em educação matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- [18] Onuchice, Allevato. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- [19] Pereira, Agnaldo dos Santos. Método simplex e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração. Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, 2020.
- [20] Pinho, Ana Paula Bueno de Camargo. Equações e inequações lineares: uma proposta para o ensino médio através de problemas de programação linear e de um software livre. Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2020.
- [21] Rosa, J. V. B. dos S. Uma proposta de aplicação da programação linear no ensino médio. Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, 2021.
- [22] Oliveira, L. M. A.; Pinto, D. L. L. Uma abordagem prática ao método simplex: fundamentos e aplicações. Revista Espacios, v. 38, n. 60, 2017.
- [23] Souza, T. T. Uma breve introdução à linguagem Python para professores de matemática. Universidade Federal do Ceará, Caucaia, 2020.
- [24] Stewart, J.; Clegg, D.; Watson, S. E. *Cálculo, volume 2*. 6. ed. Cengage Learning, São Paulo, 2022.
- [25] Taha, H. A. Pesquisa operacional. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

Apêndices

Apêndice A

Para acessar a implementação diretamente no *Google Colab*, basta acessar o *link* <https://colab.research.google.com/drive/1e7zNGI-5os0u8k3-PoqeE1AdT3Dq6ZY0?usp=sharing> copiar e colar em um novo *notebook*.

```
import numpy as np
from fractions import Fraction
from prettytable import PrettyTable
import re

def simplex_maximizacao(c, A, b):
    num_restricoes, num_variaveis = A.shape
    identidade = np.eye(num_restricoes)
    A = np.hstack((A, identidade))
    c = np.hstack((c, np.zeros(num_restricoes)))

    tableau = np.hstack((A, b.reshape(-1, 1)))
    tableau = np.vstack((tableau, np.hstack((c, [0]))))
    tableau = np.array([[Fraction(elemento).limit_denominator() for
        elemento in linha] for linha in tableau])

    variaveis_base = [f"s{i + 1}" for i in range(num_restricoes)] +
        ["z"]

    print("Tabela inicial:")
    imprimir_tableau(tableau, num_variaveis, num_restricoes,
        variaveis_base)

    iteracao = 0
    while True:
        iteracao += 1
        print(f"\nIteração {iteracao}:")

        entrada, coluna_pivo = verificar_coeficientes(tableau)

        if not entrada:
            print("Solução ótima encontrada, pois não há coeficientes
                positivos na linha da função Z.")
```

```

break

print("A solução ótima ainda não foi atingida, pois ainda há
      coeficientes positivos na linha da função Z.")

linha_pivo, existe_variavel_sai = identificar_variavel_sai(
    tableau, coluna_pivo)
if not existe_variavel_sai:
    return "Problema ilimitado"

print(f"Variável que entra na base: x{coluna_pivo + 1}")
print(f"Variável que sai da base: {variaveis_base[linha_pivo]}")
    )

print(f"A variável x{coluna_pivo + 1} entra na base pois possui
      o maior coeficiente positivo na linha Z")
print(f"A variável {variaveis_base[linha_pivo]} sai da base
      pois é o menor quociente entre os valores de b e os valores
      da coluna pivô ")

# Atualiza o nome da variável na base
variaveis_base[linha_pivo] = f"x{coluna_pivo + 1}"

tableau = pivoteamento(tableau, linha_pivo, coluna_pivo)

print("\nTabela após pivoteamento:")
imprimir_tableau(tableau, num_variaveis, num_restricoes,
    variaveis_base)

return interpretar_resultado(tableau, num_variaveis)

def verificar_coeficientes(tableau):
    linha_z = tableau[-1, :-1]
    if any(coef > 0 for coef in linha_z):
        coluna_pivo = max(range(len(linha_z)), key=lambda x: linha_z[x
            ])
    return True, coluna_pivo
    return False, None

def identificar_variavel_sai(tableau, coluna_pivo):
    b = tableau[:-1, -1]

```

```

valores_coluna_pivo = tableau[:-1, coluna_pivo]
razoes = [Fraction(b[i], valores_coluna_pivo[i]).
    limit_denominator() if valores_coluna_pivo[i] > 0 else np.
    inf
for i in range(len(b))]
if any(razao > 0 and razao != np.inf for razao in razoes):
linha_pivo = min((i for i in range(len(razoes)) if razoes[i] >
    0 and razoes[i] != np.inf), key=lambda x: razoes[x])
return linha_pivo, True
return None, False

def pivoteamento(tableau, linha_pivo, coluna_pivo):
pivo = tableau[linha_pivo, coluna_pivo]
if pivo == 0:
raise ValueError("0 elemento pivô não pode ser zero.")

print(f"\nOperação: Dividir linha {linha_pivo + 1} pelo pivô {
    pivo}.")
tableau[linha_pivo] = [elemento / pivo for elemento in tableau[
    linha_pivo]]

num_linhas, num_colunas = tableau.shape
for i in range(num_linhas):
if i != linha_pivo:
mult = tableau[i, coluna_pivo]
print(f"Operação: Subtrair {mult} vezes a linha {linha_pivo +
    1} da linha {i + 1}.")
tableau[i] = [elemento - mult * pivoteado for elemento,
    pivoteado in zip(tableau[i], tableau[linha_pivo])]

return tableau

def interpretar_resultado(tableau, num_variaveis):
num_linhas, num_colunas = tableau.shape
solucao = [0] * num_variaveis

for j in range(num_variaveis):
coluna = tableau[:-1, j]

if np.count_nonzero(coluna) == 1 and np.sum(coluna) == 1:
linha_pivo = np.where(coluna == 1)[0][0]

```

```

solucao[j] = tableau[linha_pivo, -1]

valor_maximo_Z = -tableau[-1, -1]

solucao = [f"x_{j + 1}={str(Fraction(valor).limit_denominator())}" for j, valor in enumerate(soluc ao)]
valor_maximo_Z = str(Fraction(valor_maximo_Z).limit_denominator())

return solucao, valor_maximo_Z

def imprimir_tableau(tableau, num_variaveis, num_restricoes,
    variaveis_base):
    tabela = PrettyTable()
    tabela.align = "c"
    tabela.max_width = 10

    cabecalhos = ["Base"] + [f"x_{i + 1}" for i in range(
        num_variaveis)] + [f"s_{i + 1}" for i in range(num_restricoes
    )] + ["b"]
    tabela.field_names = cabecalhos

    for i, linha in enumerate(tableau):
        dados_linha = [variaveis_base[i]] + [str(Fraction(elemento).
            limit_denominator()) for elemento in linha]
        tabela.add_row(dados_linha)
    print(tabela)

def validar_funcao_objetivo(funcao):
    if not re.match(r'^([+-]?\\d*\\.?\\d*x_\\d+\\s*)+$', funcao.strip()):
        :
    raise ValueError("A função objetivo deve estar no formato 'Ax_n
        + Bx_m + ...'")

def validar_restricao(restricao):
    # Esta regex agora verifica se a restrição segue o formato
    # correto
    if not re.match(r'^([+-]?\\d*\\.?\\d+)x_\\d+\\s*([+-]\\s
        *[0-9]*\\.?[0-9]+)?\\s*)+<=\\s*([+-]?\\d*\\.?\\d+\\$', restricao.
        strip()):
    raise ValueError("A restrição deve estar no formato 'Ax_1 +

```

```

    Bx_2 <= C'.")

def obter_entrada_usuario():
def parse_funcao(funcao):
    termos = re.findall(r'([+-]?[d*\.]?[d*])x_(\d+)', funcao)
    c = np.zeros(len(termos))
    for coef, var in termos:
        c[int(var) - 1] = float(coef) if coef else 1.0
    return c

def parse_restricao(restricao):
    partes = restricao.split('<=', 1)
    termos = re.findall(r'([+-]?[d*\.]?[d*])x_(\d+)', partes[0])
    b = float(partes[1].strip())
    A = np.zeros(len(termos))
    for coef, var in termos:
        A[int(var) - 1] = float(coef) if coef else 1.0
    return A, b

while True:
    try:
        print("Digite a função objetivo Z (ex: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3):")
        funcao = input().strip()
        validar_funcao_objetivo(funcao)
        c = parse_funcao(funcao)

        print("Quantas restrições existem?")
        num_restricoes = int(input().strip())

        # Mensagem explicativa sobre o formato da restrição
        print("As restrições devem estar no formato: Ax_1 + Bx_2 + ...
            <= C")

        A = []
        b = []
        for i in range(num_restricoes):
            while True:
                try:
                    restricao = input(f"Restrição {i + 1}: ").strip()
                    validar_restricao(restricao)
                    linha, valor_b = parse_restricao(restricao)
                    A.append(linha)

```

```

b.append(valor_b)
break
except ValueError as e:
print(e)

A = np.array(A)
b = np.array(b)

return c, A, b
except ValueError as e:
print(e)

def main():
print("----- Método Simplex para Maximização -----")
print("Importante: Quando você for inserir uma variável como
      x_1, use o formato '1x_1' ou apenas 'x_1'.")

c, A, b = obter_entrada_usuario()

solucao, valor_maximo_Z = simplex_maximizacao(c, A, b)

print("\nSolução ótima encontrada:")
print("Valores das variáveis: ", solucao)
print("Valor máximo de Z: ", valor_maximo_Z)

if __name__ == "__main__":
main()

```

Aqui faremos uma explicação da implementação realizada, seguindo os passos descritos na Seção 3.2.

Passo 1: Achar uma solução básica viável inicial

Na função `simplex_maximizacao`, este passo é implementado quando adicionamos as variáveis de folga (matriz identidade) e combinamos as matrizes A e b para criar a tabela inicial

```

identidade = np.eye(num_restricoes)
A = np.hstack((A, identidade))
c = np.hstack((c, np.zeros(num_restricoes)))
tableau = np.hstack((A, b.reshape(-1, 1)))

```

```
tableau = np.vstack((tableau, np.hstack((c, [0]))))
```

Essa construção define a primeira solução viável básica inicial com as variáveis de folga.

Passo 2: Verificar se a solução atual é ótima

Este passo é realizado na função `verificar_coeficientes`, que avalia se há coeficientes positivos na linha da função objetivo (linha z)

```
linha_z = tableau[-1, :-1]
if any(coef > 0 for coef in linha_z):
    coluna_pivo = max(range(len(linha_z)), key=lambda x:
        linha_z[x])
    return True, coluna_pivo
return False, None
```

Caso não exista coeficientes positivos, a solução atual é considerada ótima, e o algoritmo para.

Passo 3: Determinar a variável não básica que deve entrar na base

A variável que entra na base é escolhida como aquela com o maior coeficiente positivo na linha z . Isso é feito na mesma função `verificar_coeficientes`:

```
coluna_pivo = max(range(len(linha_z)), key=lambda x:
    linha_z[x])
```

O índice da coluna pivô corresponde à variável que deve entrar na base.

Passo 4: Determinar a variável básica que deve sair da base

A variável que sai da base é determinada pela razão mínima b_i/a_{is} , implementada na função `identificar_variavel_sai`:

```
razoes = [Fraction(b[i], valores_coluna_pivo[i]).
    limit_denominator() if valores_coluna_pivo[i] > 0 else
    np.inf for i in range(len(b))]
linha_pivo = min((i for i in range(len(razoes)) if razoes[i]
    ] > 0 and razoes[i] != np.inf), key=lambda x: razoes[x])
return linha_pivo, True
```

A menor razão positiva determina a linha pivô.

Passo 5: Realizar o pivoteamento

O pivoteamento é realizado na função `pivoteamento`, onde a linha pivô é normalizada e as demais são ajustadas para zerar os valores na coluna pivô:

```
tableau[linha_pivo] = [elemento / pivo for elemento in
    tableau[linha_pivo]]
for i in range(num_linhas):
    if i != linha_pivo:
        mult = tableau[i, coluna_pivo]
        tableau[i] = [elemento - mult * pivoteado for elemento,
            pivoteado in zip(tableau[i], tableau[linha_pivo])]
```

Após o pivoteamento, a solução viável básica é atualizada e a implementação retorna ao Passo 2.

Apêndice B

```
#Importando a biblioteca PuLP

!pip install pulp
import pulp as p

#definindo as variáveis do problema
x1=p.LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Continuous')
x2=p.LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Continuous')
x3=p.LpVariable("x3", lowBound=0, cat='Continuous')
x4=p.LpVariable("x4", lowBound=0, cat='Continuous')

#definindo a função objetivo a ser otimizada
funcao = p.LpProblem("exemplo",p.LpMinimize)
funcao += 4*x1+6*x2+5*x3+3*x4

#definindo as variáveis do problema
funcao += 3*x1+5*x2+7*x3+2*x4>=29
```

```
funcao += 4*x1+6*x2+8*x3+3*x4>=35
funcao += 5*x1+7*x2+6*x3+4*x4>=42

#maximizando o problema
solucao = funcao.solve()
print(p.LpStatus[solucao])

#imprimindo cada variável
for j in funcao.variables():
    print(j.name, "=", j.varValue)

print("custo mínimo =", p.value(funcao.objective))
```

