unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

CARBONE BRUNO SCHMIDT KRUG

# A MOBILIZAÇÃO DAS IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO EM SITUAÇÕES ASSOCIADAS À FUNÇÃO AFIM

CASCAVEL - PR
2024

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**NÍVEL DE DOUTORADO / PPGECEM**
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

# A MOBILIZAÇÃO DAS IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO POR ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO EM SITUAÇÕES ASSOCIADAS À FUNÇÃO AFIM

**CARBONE BRUNO SCHMIDT KRUG**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira

**CASCAVEL – PR**
**2024**

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

KRUG, Carbone Bruno Schmidt
A mobilização das ideias-base de função por estudantes do ensino fundamental e ensino médio em situações associadas à função afim / Carbone Bruno Schmidt KRUG; orientadora Clélia Maria Ignatius Nogueira. -- Cascavel, 2024.
194 p.

Tese (Doutorado Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2024.

1. Função Afim. 2. Campos Conceituais. 3. Método Clínico. 4. Competência. I. Nogueira, Clélia Maria Ignatius, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PPGECEM

**CARBONE BRUNO SCHMIDT KRUG**

A mobilização das ideias-base de função por estudantes do ensino fundamental e ensino médio em situações associadas à função afim

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientadora - Clélia Maria Ignatius Nogueira
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Marli Schmitt Zanella
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Lúcia de Fátima Durão Ferreira
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Cascavel, 22 de outubro de 2024.

## DEDICATÓRIA

À minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me ajudaram, direta ou indiretamente, a ter chegado até aqui e na realização deste trabalho. De forma especial, agradeço:

A Deus.

À minha esposa Elizete e à minha filha Briana, por todo o amor e carinho dedicados à minha pessoa todos os dias.

Aos meus pais, Valdir e Nelsi, pelos ensinamentos, amor e incentivo.

Aos meus irmãos, Edino, Valdine e Mateus, pelo companheirismo e por estarem sempre ao meu lado.

À professora Clélia Maria Ignatius Nogueira por ter me orientado, com toda a sua sabedoria, na construção desta tese.

Aos professores doutores da banca, Veridiana Rezende, Marilena Bittar, Lúcia de Fátima Durão Ferreira, João Alberto da Silva, Marli Schmitt Zanella e Richael Silva Caetano, por terem contribuído, no momento do Exame de Qualificação, com sugestões fundamentais para o direcionamento da construção desta investigação e por aceitarem avaliar o trabalho final na Banca de Defesa do relatório de tese.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) que contribuíram com a minha formação acadêmica e com a construção dessa tese.

Aos alunos do PPGECEM com os quais pude trocar experiências, debater ideias e construir conhecimentos.

Às minhas colegas da turma de 2020 do doutorado do PPGECEM, Alcione, Fernanda, Priscila, Rosangela e Sandra. Aprendi muito com vocês!

À Coordenadora de Apoio do PPGECEM, Aroni Lemke, por ter sido tão atenciosa e dedicada, facilitando a minha condição de aluno do PPGECEM.

Ao Instituto Federal do Paraná (IFPR), campus Quedas do Iguaçu, por ter oportunizado o meu afastamento das atividades laborais durante um período do meu doutoramento.

A todos os meus amigos do IFPR - campus Quedas do Iguaçu que sempre me apoiaram para a realização desse objetivo de complementar a minha formação acadêmica.

A todos os professores, que me ensinaram, desde os Anos Iniciais até agora.

Aos professores que foram meus orientadores: Antônio de Pádua Bosi (TCC, graduação em História), Edilson Roberto Pacheco (*in memoriam*) (Iniciação Científica, graduação em Matemática), Rômel da Rosa da Silva (orientador) e Marcio Bennemann (Coorientador) (Dissertação, mestrado profissional em Matemática).

Aos integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). As contribuições para a construção desta tese e aos momentos de estudos, principalmente da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), foram fundamentais para que eu conseguisse finalizar essa investigação.

Ao Colégio Estadual Arnaldo Busato, por ter oportunizado a produção dos dados dessa pesquisa. Em especial, agradeço a diretora Elizangela e a secretária Maristela por todo o apoio prestado durante a realização das entrevistas com os estudantes.

Aos estudantes colaboradores, sem os quais não seria possível desenvolver este estudo.

Ao Renato, a Sandra, a Alcione e a Marli, por terem me ajudado, tanto com questões científicas quanto com questões pessoais, sempre que precisei durante o percurso do meu doutoramento.

KRUG, C. B. S. **A mobilização das ideias-base de função por estudantes do ensino fundamental e ensino médio em situações associadas à função afim**. 2024. 194 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2024.

## RESUMO

O conceito de função figura como um dos mais importantes a serem considerados, durante a escolarização dos estudantes, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Pesquisas da área de Educação, especialmente da Educação Matemática, têm evidenciado a necessidade da mobilização de diversos conceitos pelos estudantes, como as ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização), na construção desse conceito. Com base nisso, o objetivo desta pesquisa foi investigar o nível de competência de estudantes do EF e EM na mobilização das ideias-base de função. Com aporte teórico na Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, foi elaborado um instrumento com nove situações associadas ao conceito de função afim para a produção dos dados. Na intenção de observar a atividade dos estudantes, ao tentarem solucionar as situações, a implementação do instrumento foi realizada com 21 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio de uma escola Estadual do município de Quedas do Iguaçu – PR, por meio de entrevistas individuais semiestruturadas desenvolvidas seguindo pressupostos do Método Clínico-Crítico Piagetiano. Na análise dos dados (protocolos escritos e gravações das entrevistas), com respaldo na Teoria dos Campos Conceituais, buscou-se identificar competências dos estudantes e níveis de compreensão do conceito de função (compreensão intuitiva, matematização inicial e abstração), ao resolverem as situações, observando a mobilização das ideias-base de função e de outros invariantes operatórios. Foi inferido que estudantes de diferentes níveis de ensino podem possuir competências praticamente equivalentes ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim. Foi identificado que a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes colaboradores, durante a resolução das situações, ocorreu em associação com a manifestação de oito teoremas em ação verdadeiros e dois teoremas em ação falsos. Os estudantes que, no momento da resolução de uma situação, possuíam competências necessárias ao seu enfrentamento, mobilizaram todas as ideias-base de função associadas a teoremas em ação verdadeiros. Quanto ao nível de compreensão do conceito de função afim, no momento da resolução das situações, foi inferido que a maioria dos estudantes encontrava-se no nível de matematização inicial. Os resultados dessa investigação evidenciam a necessidade da oferta de situações que proporcionem, durante a sua resolução pelos estudantes, a mobilização das ideias-base de função para que estes desenvolvam competências relativas ao conceito de função afim e possam atingir, no decorrer da sua escolarização na Educação Básica, o nível de abstração de compreensão do conceito de função.

**Palavras-chave:** Função Afim; Campos Conceituais; Método Clínico; Competência.

KRUG, C. B. S. **The mobilization of basic concepts of functions by elementary and high school students in situations associated with affine function**. 2024. 194 f. Thesis (Doctorate in Science Education and Mathematics Education) - Program of Graduation in Science Education and Mathematics Education, Western State University of Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2024.

## ABSTRACT

The concept of function stands out as one of the most important to be considered during the schooling of students in the processes of Mathematics teaching and learning. Research in the field of Education, especially of Mathematics Education, has highlighted the need for students to use a large number of concepts, such as the basic concepts of functions (dependence, variable, regularity, and generalization), in this conceptual construction. Based on this, the objective of this research was to investigate the level of competence of elementary and high school students in mobilizing the basic concepts of functions. With theoretical support from Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, an instrument was developed considering nine situations associated with the concept of affine function in order to collect data. With the intention of observing students activity as they attempted to solve the situations, the instrument was implemented with 21 students from the 6th grade of Elementary School to the 3rd year of High School at a State school in the city of Quedas do Iguaçu – PR through semi-structured individual interviews developed following the theory of the Piagetian Clinical-Critical Method. In data analysis (written protocols and interview recordings), based on the Theory of Conceptual Fields, it was aimed to identify students' competencies and levels of understanding of the concept of function (intuitive understanding, initial mathematization, and abstraction) when solving the situations, observing the mobilization of the basic concepts of functions and other operational invariants. It was inferred that students at different educational levels may have acquired practically equivalent competencies when solving situations associated with the concept of affine function. It was identified that the mobilization of the basic concepts of functions by the students during the resolution of the situations occurred in association with the manifestation of eight true action theorems and two false action theorems. The students who, at the moment of solving a situation, showed mastery of the necessary competencies to address it, mobilized all the basic concepts of functions associated with true action theorems. Regarding the level of understanding of the concept of affine function, at the moment of solving the situations, it was inferred that the most of the students were at the level of initial mathematics. The results of this investigation highlight the need to offer situations that provide, during their resolution by students, the mobilization of basic concepts of functions so that they develop competencies related to the concept of affine functions so they can achieve the level of abstraction in understanding the concept of functions during their schooling in Basic Education.

Keywords: Affine function; Conceptual Fields; Clinical Method; Competence.

## LISTA DE QUADROS


**Quadro 1:** Variáveis didáticas e valores identificados nas situações ..... 39
**Quadro 2:** Situação 1 ..... 51
**Quadro 3:** Situação 2 ..... 55
**Quadro 4:** Situação 3 ..... 59
**Quadro 5:** Situação 4 ..... 62
**Quadro 6:** Situação 5 ..... 65
**Quadro 7:** Situação 6 ..... 70
**Quadro 8:** Situação 7 ..... 74
**Quadro 9:** Situação 8 ..... 77
**Quadro 10:** Situação 9 ..... 81
**Quadro 11:** Resultados da implementação da situação 1..... 97
**Quadro 12:** Resultados da implementação da situação 2..... 104
**Quadro 13:** Resultados da implementação da situação 3..... 112
**Quadro 14:** Resultados da implementação da situação 4..... 118
**Quadro 15:** Resultados da implementação da situação 5..... 123
**Quadro 16:** Resultados da implementação da situação 6..... 132
**Quadro 17:** Resultados da implementação da situação 7..... 140
**Quadro 18:** Resultados da implementação da situação 8..... 147
**Quadro 19:** Resultados da implementação da situação 9..... 155
**Quadro 20:** Níveis de função e as ideias-base – EF (Anos Finais) e EM..... 157
**Quadro 21:** Níveis de compreensão do conceito de função afim dos estudantes colaboradores do EF e EM, para as situações 1, 2, 3 e 4..... 157
**Quadro 22:** Níveis de compreensão do conceito de função afim dos estudantes colaboradores do EM nas situações 7, 8 e 9 ..... 159
**Quadro 23:** Classificação das situações para os estudantes..... 162
**Quadro 24:** Teoremas em ação inferidos..... 163
**Quadro 25:** Teoremas em ação inferidos por situação..... 165

## LISTA DE FIGURAS


**Figura 1:** Resolução de E3A na situação 1..... 89
**Figura 2:** Resolução de E8B nos itens a e b da situação 1..... 91
**Figura 3:** Resolução de E7C no item c da situação 1..... 97
**Figura 4:** Resolução de E8A na situação 2..... 99
**Figura 5:** Resolução de E3A nos itens a e b da situação 2..... 102
**Figura 6:** Resolução de E7B nos itens a e b da situação 2..... 103
**Figura 7:** Resolução de E3A na situação 3..... 106
**Figura 8:** Resolução de E1C no item b da situação 3..... 107
**Figura 9:** Resolução de E8A no item c da situação 3..... 109
**Figura 10:** Resolução de E8B no item c da situação 3..... 110
**Figura 11:** Resolução de E7C na situação 4..... 114
**Figura 12:** Resolução de E2C na situação 5..... 120
**Figura 13:** Resolução de E9C na situação 6..... 125
**Figura 14:** Respostas de E9C, E9B, E2A e E2C no item b na situação 6..... 127
**Figura 15:** Respostas de E1A, E2B e E9A no item b da situação 6..... 129
**Figura 16:** Resposta de E1C no item b da situação 6..... 129
**Figura 17:** Resposta de E2C no item c da situação 6..... 131
**Figura 18:** Resolução de E1C na situação 7..... 134
**Figura 19:** Resolução de E3B no item a da situação 7..... 136
**Figura 20:** Resolução de E2C no item b da situação 7..... 138
**Figura 21:** Resolução de E2C no item c da situação 7..... 139
**Figura 22:** Resolução de E2B na situação 8..... 142
**Figura 23:** Resolução de E2A no item c da situação 8..... 145
**Figura 24:** Resolução de E3B na situação 9..... 149
**Figura 25:** Resolução de E1C no item a da situação 9..... 150
**Figura 26:** Resolução de E2C no item b da situação 9..... 152
**Figura 27:** Resolução de E3B no item b da situação 9..... 152
**Figura 28:** Resolução de E2A no item b da situação 9..... 153
**Figura 29:** Resolução de E1C no item c da situação 9..... 153
**Figura 30:** Resolução de E2C no item c da situação 9..... 154

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO ..... 13**
**CAPÍTULO 1 - IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO ..... 17**
1.1. IDEIAS-BASE E O ENSINO DE FUNÇÃO ..... 17
1.2. INTERPRETANDO AS IDEIAS-BASE ..... 21
**CAPÍTULO 2 - A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS ..... 26**
2.1. ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS ..... 26
2.2. IDENTIFICANDO COMPETÊNCIAS ..... 29
2.3. RELACIONANDO A MOBILIZAÇÃO DAS IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO COM OS NÍVEIS DE COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO ..... 35
2.4. PROBLEMAS MISTOS ..... 37
2.5. VARIÁVEIS DIDÁTICAS ..... 38
**CAPÍTULO 3 - A TRILHA DA PESQUISA: ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS ..... 41**
3.1. HIPÓTESE DE PESQUISA ..... 41
3.2. OBJETIVOS DA PESQUISA ..... 42
3.3. INSTITUIÇÃO E ESTUDANTES COLABORADORES ..... 42
3.4. O ESTUDO PILOTO ..... 44
3.5. O MÉTODO CLÍNICO-CRÍTICO PIAGETIANO ..... 45
3.6. O INSTRUMENTO DE PESQUISA ..... 49
3.6.1. Apresentação e análise da situação 1 ..... 50
3.6.2. Apresentação e análise da situação 2 ..... 55
3.6.3. Apresentação e análise da situação 3 ..... 59
3.6.4. Apresentação e análise da situação 4 ..... 62
3.6.5. Apresentação e análise da situação 5 ..... 65
3.6.7. Apresentação e análise da situação 7 ..... 74
3.6.8. Apresentação e análise da situação 8 ..... 77
3.6.9. Apresentação e análise da situação 9 ..... 81
**CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS ..... 86**
4.1. CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO ..... 86
4.2. ANÁLISES DA ATIVIDADE DOS ESTUDANTES AO RESOLVEREM AS SITUAÇÕES ..... 87
4.2.1. Análise das resoluções da situação 1 ..... 88

4.2.2. Análise das resoluções da situação 2 ..... 98
4.2.3. Análise das resoluções da situação 3 ..... 105
4.2.4. Análise das resoluções da situação 4 ..... 113
4.2.5. Análise das resoluções da situação 5 ..... 119
4.2.6. Análise das resoluções da situação 6 ..... 124
4.2.7. Análise das resoluções da situação 7 ..... 134
4.2.8. Análise das resoluções da situação 8 ..... 141
4.2.9. Análise das resoluções da situação 9 ..... 148
4.3. A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM AO LONGO DO PROCESSO DE ESCOLARIZAÇÃO ..... 156
4.4. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS RESULTADOS ..... 163
**CONSIDERAÇÕES FINAIS ..... 169**
**REFERÊNCIAS ..... 175**
**APÊNDICES ..... 181**
APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) ..... 181
APÊNDICE B – Termo de Assentimento (TA) ..... 184
APÊNDICE C – Instrumento de pesquisa ..... 186

# INTRODUÇÃO

Há alguns anos, desde 2009, venho atuando como professor de Matemática no Ensino Médio. Tenho vivenciado, neste período, muitas experiências interessantes relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos dessa área do conhecimento. Um fato que tem intrigado-me, com o passar do tempo, é a dificuldade dos estudantes referente ao conceito de função afim. Apesar deste conteúdo ser trabalhado desde os Anos Finais do Ensino Fundamental, tenho convivido com os desafios dos estudantes durante a sua complementação e aprofundamento no Ensino Médio.

Deste fato, associado à minha participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa), que tem como objeto maior de investigação o mapeamento do campo conceitual da função afim, emergiu o interesse no desenvolvimento desta tese de doutorado.

Motivado, então, pelos estudos e pesquisas do GEPeDiMa, com foco em mapear o campo conceitual da função afim, e pelas dificuldades dos estudantes do Ensino Médio junto aos conteúdos referentes a essa noção matemática, detectadas pela minha prática docente, propus-me a compreender o desenvolvimento do conceito de função pelos estudantes, no decorrer do processo de escolarização.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orienta a elaboração dos currículos da Educação Básica (EB) Brasileira (Brasil, 2018), é indicado que os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função devem ocorrer nos períodos de escolarização do Ensino Fundamental (EF) e do Ensino Médio (EM).

No EF, Anos Iniciais, “[...] as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade” (Brasil, 2018, p. 270) são consideradas essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, ainda, “A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) [...]” (Brasil, 2018, p. 270). Já nos Anos Finais do EF, por sua vez, a BNCC (Brasil, 2018, p. 271) considera que os estudantes devem estabelecer “[...] conexões entre variável e função e entre incógnita e equação”. Nesta etapa, além disso, “Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas

para identificar a relação de dependência entre duas grandezas [...]" (Brasil, 2018, p. 527).

No EM, ao finalizar a EB, os estudantes devem aprofundar todos os conhecimentos aprendidos no EF e, também, dentre outros conhecimentos, desenvolver a habilidade de "Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (Brasil, 2018, p. 536).

Podemos[1] interpretar, com base no indicado pela BNCC (Brasil, 2018), que o ensino de função, além de ser desenvolvido ao longo da escolarização, deve estar associado à aprendizagem de outros conceitos, dentre os quais figuram as ideias de: regularidade, variável, dependência e generalização.

Essas ideias também são consideradas importantes para a aprendizagem do conceito de função em trabalhos de pesquisadores conhecidos na área da Educação Matemática, a saber: Caraça (1951), Tinoco (2002), Campiteli e Campiteli (2006) e Nogueira e Rezende (2018), dentre outros.

Com base nisso, e tendo como referências pesquisas de integrantes do GEPeDiMa (Pavan; Nogueira; Kato, 2009; Pavan, 2010; Nogueira; Rezende, 2018; Bernardino; Garcia; Rezende, 2019; Miranda, 2019; Rezende; Nogueira; Calado, 2020; Silva, 2021; Rodrigues, 2021; Bernardino, 2022; Dezilio, 2022; Merli, 2022; Vargas, 2023; Siqueira, 2023; Silva; Teles, 2024; Zanella; Rezende, 2024; Merli; Nogueira, 2024), assumimos[2] como ideias-base do conceito de função: *dependência, variável, regularidade e generalização.*

Dado que as ideias-base são fundamentais à elaboração do conceito de função, buscamos, nesta investigação, elementos que possam indicar a sua mobilização na atividade dos estudantes, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim. Com base nisso, elaboramos a seguinte hipótese de pesquisa: É possível analisar o desenvolvimento das ideias-base de função de estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio mediante a identificação dos níveis de competência na mobilização dessas ideias na resolução de situações associadas ao conceito de função afim.

[1] Daqui para frente usaremos a primeira pessoa do plural no texto.
[2] Anterior à tese de Merli (2022), que, por meio de um estudo teórico, denota como ideias-base de função os conceitos de dependência, variável, regularidade e generalização, também estávamos considerando como ideia-base o conceito de correspondência.

Definimos, com base na hipótese, os seguintes objetivos:

Objetivo Geral:

*Investigar o nível de competência de estudantes do EF e EM na mobilização das ideias-base de função.*

Objetivos Específicos:

*I) Identificar possíveis conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes colaboradores.*

*II) Identificar competências de estudantes do EF e EM na resolução de situações-problema associadas à função afim.*

Buscamos identificar os conhecimentos matemáticos, manifestados nos esquemas dos estudantes ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim, presentes no Campo Conceitual das Funções[3], delineando a construção desse conceito pelos colaboradores da pesquisa, por meio da discussão de situações com base na teoria cognitivista de Gérard Vergnaud.

A produção dos dados, devido à necessidade de observar a atividade dos estudantes, foi realizada com inspiração no Método Clínico-Crítico Piagetiano (Carraher, 1983; Delval, 2012), envolvendo entrevistas semiestruturadas, apoiadas em situações (tarefas/problemas) associadas ao conceito de função afim.

Justificamos essa investigação pelas contribuições que podem dela advir para a ação didática, a qual intenciona a construção do conceito de função, em geral e da função afim, especificamente, pelos estudantes. Não temos conhecimento, até o momento, de trabalhos que buscam analisar o desenvolvimento das ideias-base de função ao longo do processo de escolarização da Educação Básica, do EF – Anos Finais ao EM.

No decorrer deste texto, apresentamos, na intenção de delinear a pesquisa, além desta introdução, quatro capítulos e as considerações finais, assim organizados: no primeiro, apresentamos como as ideias-base e o conceito de função figuram na BNCC e em pesquisas no âmbito da Educação Matemática, finalizando com uma descrição da interpretação destes conceitos; no capítulo dois, abordamos a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e a sua utilização, neste estudo, como referencial

[3] Apesar de estarmos falando em Campo Conceitual das Funções, por acreditarmos na possibilidade de sua delimitação, ainda não foram estabelecidas as classes de situações para este campo de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Um dos objetivos do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa, o qual integramos, consiste em buscar estabelecer o Campo Conceitual das Funções com base na TCC.

teórico e, enquanto teoria subsidiária na análise e produção dos dados; no terceiro capítulo, por sua vez, descrevemos os encaminhamentos metodológicos; enquanto no capítulo quatro, descrevemos a análise da implementação do instrumento com os estudantes; e, finalmente, apresentamos os resultados da investigação nas considerações finais.

# CAPÍTULO 1 - IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) e discutimos a sua importância para os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função.

## 1.1. IDEIAS-BASE E O ENSINO DE FUNÇÃO

O estudo de funções é reconhecidamente importante nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Devido à sua importância teórica, bem como ao seu amplo leque de aplicações práticas, seja no domínio das ciências exatas em geral e/ou nas ciências humanas e da natureza, é fundamental que os estudantes tenham a oportunidade de elaborarem e consolidarem este conceito de forma efetiva.

Pesquisas, como as de Brizuela e Martínez (2012) e de Nogueira e Rezende (2018), apontam que, para que os alunos logrem êxito na aquisição desse conhecimento devem, a princípio, iniciar seus estudos já nos primeiros anos de escolarização. Brizuela e Martínez (2012), por meio de um estudo longitudinal, dos primeiros anos do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, comprovaram a importância da aplicação de tarefas envolvendo funções, a longo prazo, a fim de que aconteça uma aprendizagem que poderá propiciar ao estudante a capacidade de atingir o nível de generalização no campo das funções. Ponto de vista análogo é defendido por Rezende e Nogueira (2018, p. 411) ao afirmarem que

> [...] o estudo de noções básicas para a compreensão deste conceito deve iniciar durante a introdução de ideias algébricas desde os Anos Iniciais, a partir da generalização de padrões, estabelecimento de relação e variação de grandezas, modelização, representação de problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreendendo a sintaxe (regras para resolução) de uma equação [...].

Na BNCC (Brasil, 2018), como vimos, também é evidenciada a importância do ensino do conceito de função ao longo da escolarização, compreendida pelos níveis de Ensino Fundamental e Médio. No EF - Anos Iniciais, de acordo com o documento, pode ser explorada, na resolução de problemas de proporção direta, a noção intuitiva de função. Podem ser trabalhados, ainda no campo da Álgebra e sem o uso de letras, as ideias de regularidade e generalização de padrões.

Na etapa do EF - Anos Finais, um dos cenários desta investigação, a BNCC (Brasil, 2018) recomenda o aprofundamento dos conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e, seguindo essa mesma lógica, apresenta, relativo ao conceito de função, habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em determinados anos da escolarização, com continuidade e aprofundamento nos anos dos níveis mais avançados de formação escolar.

No 7º ano, conforme o documento, os estudantes devem compreender a ideia de variável entre duas grandezas, saber expressar, por meio de símbolos algébricos, a regularidade e "Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (Brasil, 2018, p. 307).

No 8º ano, na unidade Álgebra, é objeto do conhecimento a "Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano" (Brasil, 2018, p. 312), sendo uma das habilidades "Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano." (Brasil, 2018, p. 313).

No 9º ano, também na unidade Álgebra, consta o objeto do conhecimento função: "Funções: representações numérica, algébrica e gráfica" (Brasil, 2018, p. 316). Uma das habilidades indicadas é: "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (Brasil, 2018, p. 317).

No EM, em continuidade e aprofundamento dos conhecimentos desenvolvidos anteriormente, especificamente relacionados ao conceito de função afim, os estudantes devem desenvolver a habilidade de empregar a função polinomial do 1º grau para construir modelos matemáticos na resolução de problemas. Além disso, devem identificar e fazer conversões entre as suas representações tabular, cartesiana e algébrica, além de criar "[...] conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau" (Brasil, 2018, p. 541).

Ao analisarmos o texto da BNCC (Brasil, 2018), observamos, dentre outros conceitos, a presença das ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) como conhecimentos importantes no desenvolvimento das

competências específicas da área de Matemática, sobretudo na construção do conceito de função.

Analogamente, pesquisadores, reconhecidos na Educação Matemática também, indicam conceitos fundamentais associados ao conceito de função. Caraça (1951), por exemplo, em sua conhecida obra "Conceitos fundamentais da Matemática", considera que as ideias de dependência, regularidade, correspondência, variável e generalização encontram-se na noção de função. Tinoco (2002), na obra "Construindo o conceito de função", concebe como noções essenciais, relativas ao conceito de função, as ideias básicas de variável, dependência, regularidade e generalização. Citamos, ainda, a obra "Funções", de autoria de Heliana C. Campiteli e Vicente C. Campiteli (2006), destinada a professores de Matemática do EF e do EM, que aborda o conceito de função. Para os autores, são ideias matemáticas presentes no conceito de função: proporcionalidade, *dependência*, continuidade, descontinuidade, relação, *variável*, *regularidade*, correspondência e *generalização* (Campiteli; Campiteli, 2006).

Inferimos, portanto, a importância da oferta de situações envolvendo as ideias-base de função (variável, dependência, regularidade e generalização) para a construção do conceito de função.

No nosso estudo, dado o caráter investigativo referente a competências[4] dos estudantes, ao depararem-se com situações matemáticas em contextos funcionais, buscaremos identificar os "passos" trilhados pelos colaboradores da pesquisa, durante sua atividade frente às situações associadas ao conceito de função afim. Dito de outra forma, procuramos descrever o desenvolvimento das ideias-base de função ao longo da formação escolar da Educação Básica, especificamente do período compreendido entre o sexto ano do Ensino Fundamental e o terceiro ano do Ensino Médio.

Nossa intenção, nessa investigação, foi reforçada por não termos identificado, na revisão bibliográfica realizada, nenhum estudo nessa direção. Encontramos trabalhos relacionados ao surgimento histórico das ideias-base de função (Roratto, 2009), ao reconhecimento e mobilização dessas ideias em uma turma da quarta série (atual quinto ano) do EF (Pavan, 2010) e em duas turmas, uma do nono ano do EF e outra do terceiro ano do EM (Bernardino; Garcia; Rezende, 2019), bem como

[4] Assumimos o conceito de competência como esquemas evocados em situações específicas (Otero *et al*., 2014), relacionado a forma operatória (saber fazer) do conhecimento revelada pelo estudante (Vergnaud, 2009c).

trabalhos relacionados à descrição de pesquisas referentes ao Campo Conceitual da função afim (Nogueira; Rezende, 2018) e às situações-problema envolvendo esses conceitos (Miranda, 2019).

Estas pesquisas, em linhas gerais, têm algo em comum: apresentam vínculo com o GEPeDiMa. Estão, portanto, conectadas com a possibilidade do estabelecimento do campo conceitual da função afim.

Recentemente, ainda no âmbito do GEPeDiMa, encontramos novos trabalhos, os quais apresentam resultados envolvendo as ideias-base de função e o conceito de função afim. Esses estudos trazem resultados quanto à mobilização dessas ideias em diferentes anos do período de escolarização da EB, especialmente, com resultados referentes ao 2º ano do EF (Vargas, 2023), ao 5º ano do EF (Silva, 2021; Rodrigues, 2021; Dezilio, 2022; Zanella; Rezende, 2024), ao 9º ano do EF (Calado, 2020), ao 2º ano do EM (Lorencini, 2019) e ao 3º ano do EM (Bernardino, 2022; Siqueira, 2023) ou, ainda, envolvendo o 5º e 9º do EF e o 3º do EM (Rezende; Nogueira; Calado, 2020).

Os resultados dessas pesquisas, em linhas gerais, corroboram que os estudantes mobilizam as ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização), além de outros conceitos, como os de correspondência e proporcionalidade, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim.

Outro ponto em comum, identificado em todas as investigações supracitadas, é o reconhecimento de que os estudantes possuem dificuldades na mobilização da ideia-base de função generalização, seja com notação algébrica, ou linguagem natural. Portanto, como pretendemos analisar o desenvolvimento das ideias-base ao longo da escolarização da EB, já temos, *a priori*, a informação quanto a possibilidade da sua mobilização por estudantes de diferentes níveis de escolarização, com destaque para as dificuldades quanto a generalização.

Apesar disso, como não identificamos estudos, seja no âmbito do GEPeDiMa, ou fora dele, investigando o desenvolvimento das ideias-base de função a partir da observação e análise de estudantes em atividade, podemos questionar também o quê muda em relação às dificuldades da mobilização da generalização ao longo da escolarização.

Frente a isso, ressaltamos a importância de investigar o desenvolvimento das ideias-base de função, ao longo do processo de escolarização da Educação Básica.

Então, após destacar a importância das ideias-base de função para os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de função, discorremos sobre como estamos interpretando as ideias-base.

## 1.2. INTERPRETANDO AS IDEIAS-BASE

Os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, em geral e de função afim, especificamente, na formação escolar de nível Básico Brasileira acontecem, geralmente, por meio de definições e fórmulas. Merli (2022, p. 168), ao estudar textos sobre as possibilidades do ensino de funções, encontrou "[...] como principal resultado, a constatação que as aulas sobre funções são geralmente iniciadas com a parte algébrica, com conceitos anteriores atrelados à teoria de conjuntos".

De um modo geral, podendo apresentar diferenças na enunciação, os estudantes da Educação Básica do Brasil, no momento da formalização do conceito de função, são submetidos à seguinte definição:

*"Função é uma relação entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento x, pertencente a A, um único elemento y, pertencente a B"* (Krug; Nogueira, 2022, p. 5).

Um exemplo de definição de função afim, o qual pode ser encontrado nos Livros Didáticos do EM, salvo diferenças na escrita, é a apresentada na obra "A matemática do Ensino Médio", de Lima *et al.* (2006, p. 87): "Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$".

Conforme os resultados de Merli (2022, p. 108), "Diferentes autores não têm um consenso sobre quais deveriam ser as abordagens didáticas para o ensino de função [...]" evidenciando, considera o pesquisador, a complexidade do tema. Além disso, assinala que foi possível reconhecer as dificuldades para estruturar todos os conceitos atinentes ao de função.

Com respaldo na TCC, Miranda (2019, p. 37, grifo nosso) considera que, no ensino de função afim, devem ser abordados os conceitos de:

> [...] **dependência**, relação, conjuntos, correspondência, **variável**, domínio, par ordenado, plano cartesiano, produto cartesiano, continuidade, descontinuidade, **regularidade**, **generalização**, proporcionalidade, taxa de variação, coeficiente angular, equação de reta, colinearidade de pontos, monotonicidade de funções, sistemas lineares, entre outros.

Identificamos, a partir da citação anterior, a presença das ideias-base de função, como conceitos importantes para o ensino de função afim. Diante disso, podemos questionar o quê são ideias-base de função.

Recorremos, para responder a essa pergunta, à tese de Merli (2022). Com o objetivo de "[...] identificar e caracterizar o quarteto do conceito de função, a saber os conceitos organizadores, as ideias-base, as representações e as situações [...]" (Merli, 2022, p. 21), o pesquisador realizou uma investigação teórica subsidiada pela TCC, estabelecendo os "[...] conceitos de dependência, generalização, regularidade e variável" (Merli, 2022, p. 165) como ideias-base de função e função afim, enquanto conceitos organizadores[5] científicos. Ao mobilizar tais conceitos em sua atividade, pontua o autor, o sujeito "[...] está as pragmatizando, ou seja, deixa de ser uma **ideia-base** advinda do saber científico para ser uma **ideia-base** da prática do sujeito, em que ele as utiliza para estimular o desenvolvimento de novos conceitos" (Merli, 2022, p. 179, grifo do autor).

As ideias-base, argumenta Merli (2022), estão vinculadas ao conhecimento científico e, ao serem mobilizadas na atividade de um sujeito, podemos considerá-las "[...] como **ideias-base** pragmáticas, uma vez que o sujeito em ação, mobiliza **ideias-base**, que são conceitos científicos, pragmatizando-as como conceitos-em-ação, para organizar e resolver a situação-problema" (Merli, 2022, p. 144, grifo do autor).

Dessa forma, para compreender a conceitualização de um conceito, como o de função, por um estudante, é necessário analisar a mobilização das ideias-base na sua atividade, pois "[...] a elaboração de um conceito está subordinada à mobilização pelo sujeito, das respectivas **ideias-base**, sem elas o sujeito não conceitualiza" (Merli, 2022, p. 144, grifo do autor).

Durante a atividade de um sujeito, ao resolver uma situação, as ideias-base são mobilizadas na escolha das informações relativas com a função inicial de guiar sua ação. Para Pastré, Mayen e Vergnaud (2019, p. 24), "Esta função de seleção da informação é efetuada pelos conceitos em ato, que podem ser implícitos ou explícitos, mas que são fundamentalmente os conceitos organizadores da ação" (p. 24).

[5] "Os conceitos organizadores da ação [...] são "pragmatizados" para serem os organizadores de um esquema, cujo objetivo é resolver uma situação-problema. Pode-se dizer que eles constituem a base para que o indivíduo faça um diagnóstico da situação e possa tomar as decisões necessárias a fim de resolvê-la" (Merli, 2022, p. 142). Eles "[...] permitem hierarquizar todas as tarefas de uma situação. Nessa estrutura (dos conceitos organizadores) há conceitos que podem ser de origem pragmática (conceitos organizadores pragmáticos) ou científica (conceitos organizadores)" (Merli, 2022, p. 179).

Dessa forma, a compreensão do conceito de função só é possível mediante o reconhecimento da relação entre grandezas variáveis, isto é, por meio da ideia de dependência. Como as funções estudadas na Educação Básica são, geralmente, de uma variável, o conceito de dependência atribui dinamicidade a elas. Ele permite inferir, ao relacionar univocamente a variável independente, contida no conjunto domínio da função, a variável dependente, contida no conjunto contradomínio da função, que a variação da primeira conduz obrigatoriamente a variação da segunda. A dinamicidade do conceito de função, mais facilmente observada em fenômenos econômicos, físicos, químicos etc., pode ser observada, ressaltam Rezende, Nogueira e Calado (2020), por meio da noção de dependência.

Para Tinoco (2002, p. 6), é fundamental enfatizar a relação de dependência entre as grandezas variáveis da função para que, sem pressa e durante os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função, durante a EB, os estudantes possam compreender que "[...] numa relação funcional, uma das grandezas (a função) é perfeita e univocamente determinada pela variação da outra (variável independente)".

Com base nisso, salientamos a ligação entre os conceitos de dependência e variável. O conceito de função só pode ser compreendido com suporte na noção de variável. Conforme Caraça (1951), é o conceito de variável que possibilita a representação simbólica dos conjuntos envolvidos numa função. Para tanto, se considerarmos (E) como "[...] um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável" (Caraça, 1951, p. 112).

O conceito de variável, considera Tinoco (2002, p. 5), com base em Caraça (1951), é um dos mais difíceis para os estudantes. "É um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto". Segundo a pesquisadora, no EF - Anos Iniciais, os estudantes usam letras para representar valores desconhecidos na resolução de problemas. Na sequência, no EF - Anos Finais, as letras podem ser: incógnitas na resolução de equações e inequações (por exemplo: $x + 1 = 2$ e $x + 1 > 2$); constantes para a generalização de propriedades aritméticas ($c + d = d + c$); variáveis em expressões algébricas ($2x - 3$); ou variáveis em regras de função ($f(x) = 2x - 3$). Diante disso, a autora recomenda atenção aos professores, cuidando de explorar, por meio de situações

apropriadas, os diversos usos das letras nos variados contextos para evitar, basicamente, o hábito dos alunos, motivado pelo fato de considerarem sempre as letras como incógnitas, de igualar a zero qualquer expressão.

De acordo com Silva e Teles (2024), apesar de distintos, os conceitos de equação e função são complementares. Ao resolver situações que envolvem o primeiro conceito, descrevem as autoras, os estudantes buscam por quantidades desconhecidas, representadas por uma letra, em composição com quantidades conhecidas. Ao tratar do segundo conceito, segundo elas, buscam encontrar quantidades variáveis que não são independentes entre si. Portanto, “Para a compreensão do conceito de função, é necessário que o estudante diferencie [...] quantidades desconhecidas de quantidades variáveis [...], pois ele usará conhecimentos de equação ao estudar função, de forma mais estritamente ligadas a esse aspecto” (Silva; Teles, 2024, p. 127-128), ao calcular o(s) zero(s) da função, caso existam.

Por outro lado, “O conceito de *regularidade* é o mais simples e fácil de ser entendido pelos alunos [...]” (Rezende; Nogueira; Calado, 2020, p. 32, grifo das autoras). Devido a sua ligação com a percepção de padrões, de repetições e de continuidade, seu estudo é, de acordo com Rezende, Nogueira e Calado (2020), fundamental para a conceitualização de função, pois usualmente, é o que permite estudar os fenômenos por meio da modelagem, possibilitando, dessa forma, a realização de inferências, simulações, estimativas e previsões.

Tinoco (2002, p. 6), por sua vez, considera importante, após indicar que “O reconhecimento de regularidades em situações reais, em sequências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de função”, apresentar aos estudantes situações em que não exista regularidade, evitando, com isso, o entendimento errôneo de que todo fenômeno pode ser modelado por uma regra.

Da regularidade atinge-se à generalização, pois “Fenômenos que ocorrem com regularidade podem ser generalizados” (Tinoco, 2002, p. 6). O problema é que tal processo geralmente envolve a descrição do padrão observado, capacidade de abstração e representação em linguagem algébrica. Conforme Tinoco (2002, p. 6), é necessário que os estudantes “[...] desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a lei para qualquer caso, registrando-os”. Embora considere difícil para estudantes de níveis anteriores à 7ª

série (atual 8º ano do EF), Tinoco (2002, p. 6) defende que “O registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função [...]”.

Interpretação semelhante, relativa à ideia-base generalização, é realizada por Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 33), da seguinte forma:

> O registro de leis gerais em linguagem algébrica ou gráfica é passo decisivo para a construção do conceito de função, embora não seja fácil, talvez porque além de ser compreendida, a generalização exige, na maioria dos casos, também a representação utilizando a linguagem algébrica.

De acordo com as autoras, os estudantes conseguem, muitas vezes, compreender a partir da regularidade a existência de uma “[...] *lei geral* ou uma *lei de formação* que descreve um comportamento ou um fenômeno, mas mais do que perceber, é preciso argumentar e justificar que essa lei faz sentido para além de casos particulares experimentados [...]” (Rezende; Nogueira; Calado, 2020, p. 33, grifo das autoras). Para tanto, assinalam as pesquisadoras, os estudantes precisam descrever essa percepção por meio de uma expressão algébrica, ou em linguagem natural de tal forma que “[...] Este movimento só é possível a partir de uma abstração sobre os casos particulares experimentados” (Rezende; Nogueira; Calado, 2020, p. 33).

Diante desses resultados que relacionam a mobilização das ideias-base de função com a aprendizagem do conceito de função e, ainda, considerando a TCC (Vergnaud, 2009c), interpretamos os conceitos de dependência, variável, regularidade e generalização, como invariantes operatórios[6], indispensáveis para que os sujeitos atinjam a conceitualização do conceito de função afim.

[6] Explicaremos com mais detalhes os invariantes operatórios na seção 2.1.

# CAPÍTULO 2 - A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Iniciamos este capítulo apresentando elementos da TCC que são importantes ao desenvolvimento da tese e, na sequência, considerando a TCC, descrevemos a noção de competência assumida para identificar competências dos estudantes, ao resolverem situações envolvendo o conceito de função afim. Depois, relacionamos os níveis de compreensão do conceito de função com a mobilização das ideias-base de função e, por fim, descrevemos nossa interpretação de problemas mistos e estabelecemos as variáveis didáticas para as situações do instrumento.

## 2.1. ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), fundada pelo francês Gérard Vergnaud, que foi orientado de Jean Piaget no seu doutoramento em Psicologia, "[...] é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas [...]" (Vergnaud, 1993, p. 1).

Tal teoria, afirma Vergnaud (1993, p. 1), "[...] não é específica da Matemática, embora inicialmente tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra".

Nesta investigação, utilizamos a TCC para compreendermos a conceitualização e competências dos estudantes entrevistados ao resolverem situações associadas à função afim. Dessa forma, com base em Vergnaud (2019), devemos recorrer a um domínio particular (subcampo) da experiência global, isto é, a um Campo Conceitual (CC). Recorremos, portanto, à noção de Campo Conceitual da Função Afim (CCFA). Mas, afinal, o quê é um Campo Conceitual.

Para Vergnaud (2009c, p. 28),

> [...] um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações.

A compreensão de um CC, portanto, impõe a necessidade de identificar os elementos fundamentais que o constituem. De acordo com Vergnaud (2019, p. 12), a base de formação de um campo conceitual é a terna formada por:

> 1 O conjunto de situações, cujo domínio progressivo demanda uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas em estreita conexão
> 2 O conjunto dos conceitos que contribuem para o domínio dessas situações
> 3 O conjunto de formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar os objetos de pensamento e as conceituações implícitas ou explícitas nessas situações

Com esse aporte, intencionamos discutir o desenvolvimento das ideias-base de função pelos estudantes, com foco na resolução de situações, dentro do CC das funções, conforme propõem Nogueira e Rezende (2018). Segundo as autoras, para que os estudantes compreendam o conceito de função, faz-se necessário ultrapassar os limites da definição formal e da descrição verbal. Deve-se, portanto, considerar a forma simbólica e, principalmente, o leque de situações ligadas às funções. Argumentam que "[...] sendo as situações a porta de entrada para a construção do conceito, identificá-las, delimitá-las e tipificá-las é o primeiro passo para a explicitação do Campo Conceitual das Funções" (Nogueira; Rezende, 2018, p. 413).

Além do conjunto de situações, um campo conceitual congrega outro conjunto composto por conceitos e teoremas que possibilitam a análise das situações (Vergnaud, 1996). Nesse ponto, esperamos contribuir com a identificação do CCFA, ao analisarmos o desenvolvimento dos conceitos de dependência, variável, regularidade e generalização (ideias-base de função) na atividade dos sujeitos ao resolverem situações associadas à função afim.

Como exemplo dessa formação dos CC, Vergnaud (1996, p. 168, tradução nossa) relata que o Campo Conceitual Aditivo (CCA) é "[...] ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas" e o Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) é "[...] simultaneamente, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações [...]".

Cabe destacar, nesse ponto, o entendimento, à luz dessa teoria, da aprendizagem do sujeito em situação. Conjuntos de situações e problemas são, conforme Gitirana *et al.* (2014), o meio para a obtenção do conhecimento na TCC. O

sentido dos conceitos matemáticos, sublinha Vergnaud (1996), são esquemas evocados (as condutas e a sua organização) da relação do sujeito com as situações.

Para estudar aspectos do ensino e da aprendizagem da Matemática, como a mobilização das ideias-base de função, precisamos, portanto, voltarmos-nos para os esquemas mobilizados na atividade dos sujeitos. Diante disso, cabe a seguinte questão: o que é esquema?

Um esquema, na TCC, é "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória" (Vergnaud, 1996, p. 157, tradução nossa). Um algoritmo, por exemplo, é um tipo particular de esquema, visto que organiza a atividade. De acordo com Vergnaud (1996, p. 158-159, tradução nossa), "[...] os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos: falta-lhes eventualmente a efetividade, isto é, a propriedade de chegar ao fim com segurança em um número finito de passos".

Dada a intenção da nossa investigação, é preciso, à luz da TCC, voltar a atenção para os esquemas utilizados na atividade dos sujeitos, ao resolverem as situações propostas. Para Vergnaud (2009c), além da organização da conduta observável, os esquemas também são os que regem o pensamento implícito. Nesse ponto, sem entrar em pormenores, estamos assumindo uma premissa da teoria cognitiva de Vergnaud (2009c), qual seja: o estudo da aprendizagem com base no par esquema-situação.

Como analisar, porém, os esquemas evocados pelos sujeitos em situação?

O primeiro passo, decorrente do nosso entendimento da TCC, é buscar compreender os conhecimentos contidos nos esquemas: os invariantes operatórios. A inferência das principais regras em ação de um sujeito, ao ocupar-se de uma situação, considerando Moreira (2002), acontecem por meio destes. "Cada esquema é relativo a uma classe de situações, cujas características estão bem definidas. [...] O reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema" (Vergnaud, 1996, p. 161, tradução nossa).

Os invariantes operatórios, enquanto conhecimentos em ação, compreendem os teoremas em ação e os conceitos em ação. Podemos definir os primeiros, como "[...] uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" e os segundos, conforme "[...] um conceito pertinente na ação em situação" (Vergnaud, 2009c, p. 23).

Nesse ponto, com base em Merli (2022) e Vergnaud (2009c), destacamos que estamos considerando às ideias-base de função, durante a atividade dos estudantes, como conceitos em ação que compõem os esquemas mobilizados para resolverem as situações. De acordo com Vergnaud (2009c, p. 22), "[...] os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo [...]".

Almejamos, a partir dos possíveis teoremas em ação identificados na atividade dos estudantes colaboradores, ao resolverem as situações do instrumento de pesquisa, identificar competências desses sujeitos quanto a mobilização das ideias-base de função.

Frente a isso, buscamos identificar os teoremas em ação mobilizados pelos estudantes, ao depararem-se com situações envolvendo as ideias-base do conceito de função. Um desafio a ser superado, no tocante a isso, é a incapacidade frequente dos estudantes, principalmente os mais jovens, em expor os conhecimentos dos seus esquemas na linguagem natural (Vergnaud, 1993, 1996).

O conhecimento, para Vergnaud (2007), apresenta uma duplicidade quanto a sua forma, a saber: a forma operatória do conhecimento (saber fazer) e a forma predicativa do conhecimento (saber expressar).

Para Vergnaud (2007), a forma operatória do conhecimento corresponde a noção de competência. Dada a dificuldade que os sujeitos têm em expressar sua atividade, tanto oralmente, quanto na escrita, perguntamo-nos: como podemos identificar competências dos estudantes em atividade?

## 2.2. IDENTIFICANDO COMPETÊNCIAS

Escrever sobre a noção de competência é uma tarefa desafiadora. Ela permeia muitas áreas, tais como: educação, esporte, trabalho, economia, direito etc. (Otero, 2019). Dessa forma, para não nos desviarmos do foco da nossa investigação, vamos nos pautar, neste texto, na área da educação. Mesmo assim, consideramos necessário, devido à gama de teorias, pesquisadores e documentos envolvidos com o tema, realizar um novo recorte. Portanto, voltamos nossa atenção para a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), documento que norteia a

construção/elaboração curricular dos sistemas educativos de educação Básica do Brasil, e para a TCC, nosso referencial teórico.

Com a aprovação da BNCC pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologação do Ministério da Educação (MEC), em dezembro de 2018, incluindo todas as etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) (Brasil, 2018), ganha impulso a ideia, ao menos na esfera normativa, de uma educação para a formação de competências. “Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez **competências gerais** [...]” (Brasil, 2018, p. 8, grifo no documento).

Para tanto,

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 8).

No Ensino Fundamental - Anos Finais, nível escolar abrangido na nossa investigação, a BNCC (Brasil, 2018, p. 266) destaca a articulação entre os diferentes campos da Matemática, a saber: Álgebra, Estatística e Probabilidade, Geometria e Aritmética, e o compromisso “[...] com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...]”.

Em conexão a isso, a BNCC (Brasil, 2018) explicita que deve ser garantido aos estudantes, no EF, o desenvolvimento de oito competências específicas no componente curricular de Matemática. Para tanto, propõe cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística, correlacionadas para a orientação e formulação das habilidades a serem desenvolvidas no EF.

No EM, por sua vez, “A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe **a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais** desenvolvidas no Ensino Fundamental” (Brasil, 2018, 527, grifo no documento). Com foco na formação da percepção de uma Matemática integrada, com aplicação em diversos contextos reais, a BNCC (Brasil, 2018) considera novos conhecimentos específicos para que os estudantes do EM desenvolvam

competências associadas a: raciocinar, representar, comunicar e argumentar. Para tanto, são elencadas cinco competências específicas do componente de Matemática e suas tecnologias seguidas das habilidades a serem obtidas pelos estudantes.

Dada essa ênfase na noção de competência, podemos questionar: como identificar o seu desenvolvimento pelos estudantes.

Otero (2019), na sua obra “Competencias ¿Para qué?”, interessada especificamente na área de Educação Matemática, propõe-se a “[...] questionar, analisar e sintetizar, sem nenhuma pretensão de esgotar, alguns aspectos problemáticos do chamado enfoque de ensino por competências, assim como seu alcance, consequências e perspectivas [...]” (Otero, 2019, p. 5, tradução nossa). A pesquisadora descreve, a partir das suas investigações, que no “[...] domínio educativo e pedagógico, a difusão do enfoque por competências tem sido exponencial, ainda que tenha se limitado quase exclusivamente ao desenho curricular” (Otero, 2019, p. 14, tradução nossa). Observa, também, apesar do tema competência ser alvo de observações há quase 40 anos, a inexistência de sua elucidação e do estabelecimento da sua relação com o conhecimento.

Dessa forma, apesar de professores e estudantes de muitos países com formações culturais, sociais e econômicas muito heterogêneas, como o Brasil, estarem sujeitos a currículos direcionados à abordagem por competências, como propõe a BNCC, na intenção de atender às avaliações padronizadas vide o Programa Internacional de Avaliação de estudantes (PISA), ainda “[...] persiste a falta de acordo sobre o que são, como se ensinam e como se avaliam as competências” (Otero, 2019, p. 16, tradução nossa).

Frente a esse quadro, como poderemos analisar a competência dos estudantes, ao longo da escolarização da Educação Básica, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, referente a mobilização das ideias-base de função, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim?

Para tanto, atinentes a nossa problemática e objetivos, fomos buscar qual a noção de competência na TCC.

Para Vergnaud (2007, 2009c, 2013), as competências são a parte mais importante do nosso conhecimento, podendo, em resumo, ser considerada a forma operatória do conhecimento. “Certamente a forma operatória é muito mais rica que a forma predicativa, tal como atesta a defasagem entre a competência que um sujeito

pode manifestar em situação e aquilo que é capaz de dizer a respeito" (Vergnaud, 2013, p. 147, tradução nossa). É a competência, portanto, o quê permite atuar e lograr êxito em uma situação. Nenhum registro de atividade deixa de ser, ainda que mais ou menos estruturado, objeto de competência (Vergnaud, 2013).

Dessa forma, Vergnaud (2007) indica a dificuldade, já discutida para a forma operatória do conhecimento, quanto a expressão oral, ou escrita das competências. Isso é ainda mais pertinente, argumenta, para as crianças dado que elas não são capazes de expressar o conhecimento utilizado em suas ações.

Para tanto, o pesquisador apresenta cinco premissas, as quais, juntas, ajudam a entender sua noção de competência. As duas primeiras, descreve, são mais usuais e relacionadas diretamente com a ideia de comparação, a saber:

> Diferencial: A é mais competente do que B se ele sabe fazer algo que B não sabe fazer.
> Desenvolvimento: A é mais competente no tempo t' que no tempo t se ele sabe fazer aquilo que ele não sabia fazer" (Vergnaud, 2019, p. 5-6).

Já, as outras três, enquanto formas de enriquecer as precedentes, evocam a ideia de atividade:

> A é mais competente se ele se posiciona de uma maneira melhor
> A é mais competente se ele dispõe de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta em diferentes situações que possam surgir
> A é mais competente se ele é menos impotente diante de uma situação nova (Vergnaud, 2019, p. 6).

Vergnaud (2019) considera a ideia de competência, na análise da atividade, um conceito pouco analítico, não sendo científico em si mesmo. De acordo com o pesquisador, "Falar sobre formas de organização da atividade é dizer mais do que falar sobre competências: são formas com as quais se pode descrever e analisar o desenvolvimento temporal e não apenas o objetivo procurado" (Vergnaud, 2019, p. 5).

Então, se o termo competência não é um conceito científico, como podemos utilizá-lo em uma investigação científica da área de Educação Matemática?

Para além da análise do resultado da atividade (critérios de comparação), que confunde competência e desempenho, um estudo empírico da competência precisa considerar a organização da atividade (critérios de atividade). Portanto, deve-se recorrer ao par esquema-situação (Vergnaud, 2009b). "Esses dois conceitos - esquema e situação - devem ser adotados por esta razão decisiva: o conhecimento é

adaptação que ocorre pelos esquemas; estes, por sua vez, se adaptam a situações" (Vergnaud, 2009b, p. 43).

Em relação ao conceito de esquema, Vergnaud (2019, p. 7) define-o assim:

> Um esquema é uma forma de organização da atividade, destinada a uma classe de situações. Ele inclui:
> 1 um objetivo ou vários
> 2 regras de ação; de tomada de informação e de controle
> 3 invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação
> 4 possibilidades de inferência

Conforme Vergnaud (2019), dentre essas quatro propriedades que permitem analisar os esquemas, a primeira refere-se à intenção, a segunda, ao desenvolvimento da atividade, enquanto a terceira, à conceituação organizadora desse desenvolvimento e, a quarta, aos cálculos realizados na atividade. "A ideia de regra é essencial, mas não é suficiente: sem conceituação, pelo menos implícita, não há esquema (Vergnaud, 2019, p. 7).

Na nossa investigação, como vimos, ao analisarmos os esquemas manifestados pelos colaboradores, tentaremos identificar os conceitos em ação (ideias-base) e teoremas em ação mobilizados, isso é, os invariantes operatórios. Conforme Vergnaud (2009c), estes são conhecimentos em ação decisivos na perspectiva cognitivista uma vez que "[...] os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo [...]" (Vergnaud, 2009c, p. 22).

Ao voltarmos nossa atenção para a atividade dos estudantes, colaboradores da presente investigação, com o objetivo de identificar competências na mobilização das ideias-base de função ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim vamos recorrer, com aporte na TCC, ao conceito de Campo Conceitual. De acordo com Vergnaud (2013, p. 155, tradução nossa, grifo nosso), "Para analisar o desenvolvimento das **competências** e das conceitualizações do sujeito dentro dos distintos **registros de sua atividade**, é indispensável **fragmentar objetos de estudo** menores que a experiência global [...]".

Dessa forma, para analisarmos competências dos estudantes, além de interpretar os invariantes operatórios, comparando os teoremas em ação, identificados na atividade dos colaboradores da investigação, pretendemos classificar as situações, para os sujeitos, considerando o conceito de esquema.

Então, na intenção de operacionalizar a classificação das situações para o sujeito, vamos diferenciá-las entre situações do Tipo 1 e do Tipo 2, associadas, respectivamente, às seguintes classes:

> 1) classes de situações em que o sujeito **dispõe**, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das **competências necessárias** ao tratamento relativamente imediato da situação;
>
> 2) classes de situações em que o sujeito **não dispõe** de todas **as competências necessárias**, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso" (Vergnaud, 1993, p. 2, grifo nosso).

O conceito de esquema, apesar de interessar as duas classes, pondera Vergnaud (1993), não funciona de forma igual em cada uma. Na classe 1, a qual associamos as situações classificadas como do Tipo 1 para os sujeitos, observam-se "[...] comportamentos amplamente automatizados, organizados por um só esquema" (Vergnaud, 1993, p. 2). Já na classe 2, a qual associamos as situações classificadas, como do Tipo 2 para os sujeitos, "[...] observa-se a sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados" (Vergnaud, 1993, p. 2).

Portanto, diante desse quadro teórico respaldado na TCC, pretendemos identificar competências dos estudantes de diferentes níveis de ensino, ao resolverem situações envolvendo o conceito de função afim recorrendo, basicamente, a interpretação de dois fatores imbricados entre si:

a) Os invariantes operatórios, comparando os teoremas em ação identificados na atividade dos estudantes colaboradores; e

b) Classificar as situações, para os sujeitos, considerando o conceito de esquema.

Ao considerar esses fatores imbricados para a interpretação de competências dos estudantes colaboradores da investigação, além dos fundamentos da TCC, apresentados na seção 2.1, na próxima seção descrevemos como consideramos a relação entre os níveis de compreensão do conceito de função e a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes colaboradores.

## 2.3. RELACIONANDO A MOBILIZAÇÃO DAS IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO COM OS NÍVEIS DE COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O processo de construção do conceito função, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), pode começar com a implementação de situações apropriadas já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de tal forma que “A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três) [...]” (Brasil, 2018, p. 270).

Pesquisas desenvolvidas no âmbito do GEPeDiMa (Vargas, 2023; Silva, 2021; Rodrigues, 2021; Dezilio, 2022; Zanella; Rezende, 2024), evidenciam que os estudantes mobilizam as ideias-base de função, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim desde os anos iniciais do EF, corroborando com o indicado na BNCC (Brasil, 2018).

No EF – Anos Finais, segundo a BNCC (Brasil, 2018, p. 271) “É necessário [...] que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação” (p. 270-271). Para tanto, segundo o documento, os estudantes devem desenvolver a habilidade, no 9º ano do EF, para “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica [...]” (Brasil, 2018, p. 316).

No EM, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), os estudantes devem desenvolver a habilidade para empregar o conceito de função afim na resolução de problemas, conjecturando e modelando as situações, quando for o caso, por meio da sua expressão algébrica, sendo capazes de identificar e realizar conversões entre as suas representações tabular, cartesiana e algébrica.

Merli e Nogueira (2024), considerando diferentes níveis de ensino, do EF – Anos Iniciais ao Ensino Superior, apresentam resultados da tese de Merli (2022) relacionando “[...] as ideias-base, os conceitos organizadores da noção de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)” (Merli; Nogueira, 2024, p. 24). Para tanto, recorrem aos quatro níveis de compreensão[7] do conceito de função (compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração e formalização) de Bergeron e Herscovics

[7] Apesar dos autores utilizarem a palavra “entendimento”, vamos substituir por compreensão, mais próxima da TCC, mantendo a palavra entendimento apenas em citações.

(1982), articulando-os com o quarteto proposto por Merli (2022)[8] (situações-problema, conceitos organizadores, ideias-base e representações) para apresentar um modelo cognitivo e didático "[...] que descreve o caminho pelo qual o professor pode introduzir as primeiras noções de funções até chegar ao seu conceito propriamente dito" (Merli; Nogueira, 2024, p. 35).

Dessa forma, ao relacionar a compreensão das ideias-base de função com os quatro níveis de compreensão do conceito de função, Merli e Nogueira (2024) consideram que no primeiro nível, o da compreensão intuitiva, ocorre a construção das noções iniciais, como um "[...] pré-conceito baseado numa percepção visual e em aproximações ao conceito" (Merli; Nogueira, 2024, p. 34), sendo que as ideias-base de dependência e variável devem figurar nesse nível de compreensão do conceito de função.

No segundo nível, o da matematização inicial, "[...] o estudante estabelece procedimentos a partir do conhecimento intuitivo do nível anterior" (Merli; Nogueira, 2024, p. 34), podendo compreender diferentes representações de uma função (gráfica, tabular e algébrica) e as ideias-base de função de dependência, variável e regularidade.

Já, no nível três, o da abstração, "[...] o estudante mostra evidências de generalização [...] [podendo distinguir] "[...] a noção de relação da de função e compreender as noções de dependência e independência, domínio e imagem" (Merli; Nogueira, 2024, p. 35, acréscimo nosso). Nesse nível de compreensão do conceito de função, observam os autores, os estudantes são capazes de mobilizar as quatro ideias-bases de função, a saber: dependência, variável, regularidade e generalização.

No quarto nível, o da formalização, "[...] há o uso da simbologia matemática e de justificativas lógicas para as operações pela descoberta de axiomas e teoremas que explicitem os conceitos" (Merli; Nogueira, 2024, p. 35). Então, dado o rigor matemático desse nível, conforme Merli e Nogueira (2024), como o uso de notação funcional $(f: A \to B)$, a justificação matemática das operações por meio de axiomas e teoremas, como a definição dos conjuntos domínio e contradomínio da função, dentre outros, quando se considera o uso de situações contextualizadas, apesar dos estudantes do EM poderem apresentar uma compreensão desse nível, sua consolidação "[...] só será possível em cursos superiores, de maneira que não é

[8] Na sua tese, Merli (2022, p. 21) buscou "[...] identificar e caracterizar o quarteto do conceito de função, a saber os conceitos organizadores, as ideias-base, as representações e as situações".

alcançada por aqueles que não se graduam em cursos vinculados à área de exatas, por exemplo” (Merli; Nogueira, 2024, p. 44).

Dessa forma, como implementamos situações contextualizadas com os estudantes dos Anos Finais do EF e do EM, não consideramos o nível de formalização da compreensão do conceito de função nas nossas análises (seção 4.3).

Os resultados da investigação de Merli e Nogueira (2024) evidenciam que existe uma inclusão hierárquica entre os quatro níveis de compreensão do conceito de função, isso é, “[...] Tudo que está no intuitivo, está na matematização, que, por sua vez, está na abstração e na formalização. A cada novo nível de ensino são acrescidos novos elementos” (Merli; Nogueira, 2024, p. 48).

Então, considerando os níveis de compreensão do conceito de função, conforme descritos por Merli e Nogueira (20214), apresentamos nas nossas análises (seção 4.3) uma relação entre esses níveis e a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes colaboradores.

Após essa apresentação de como relacionamos a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes colaboradores com os níveis de compreensão do conceito de função, descrevemos, na próxima seção, como consideramos as situações do instrumento da presente tese em relação aos problemas mistos.

## 2.4. PROBLEMAS MISTOS

Vergnaud (2009a) denomina de problemas aritméticos complexos situações consideradas de aritmética elementar nas “[...] quais várias relações e várias questões possíveis estão em jogo” (Vergnaud, 2009a, p. 269). De acordo com o pesquisador, esses problemas podem ser de três tipos: aditivo puro (comporta somente relações aditivas), multiplicativo puro (comporta somente relações multiplicativas), ou misto (comporta simultaneamente relações de adição, ou subtração e multiplicação, ou divisão).

Dada essa característica dos problemas mistos, Miranda (2019), ao desenvolver um estudo com o objetivo de categorizar situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, com aporte na TCC, considerou que é possível analisar situações, as quais envolvem o conceito desse tipo de função por meio de problemas mistos e/ou multiplicativos.

Tieppo (2024), ao analisar situações relacionadas à função afim presentes em dissertações de mestrado e teses de doutorado Brasileiras, observou que “[...] nem todos os problemas mistos demandam, de maneira explícita a ideia base de generalização” (Tieppo, 2024, p. 74). Considerando isso, a autora estabeleceu uma distinção entre as situações quanto a exigência, ou não da expressão algébrica, ou seja, da generalização. De acordo com ela, “Com isso, podemos subdividir as classes de situações de função afim em duas outras: com generalização, para as situações exclusivas de função afim; e sem generalização, problemas mistos” (Tieppo, 2024, p. 184).

Logo, no instrumento da presente investigação[9], estamos propondo situações exclusivas de função afim (situações: 5, 6, 7, 8 e 9) ao passo que exigem a expressão algébrica, e situações que representam problemas mistos (situações: 1, 3 e 4), por não exigirem nos enunciados a expressão algébrica. A situação 2, apesar de não exigir a expressão algébrica, é estritamente multiplicativa, porque envolve o conceito de função linear (contempla a multiplicação na forma $f(x) = ax$) sendo, portanto, um caso particular da função afim.

É importante observar, com aporte em Merli (2022), que os problemas mistos são situações que envolvem o conceito de função afim. Ao apontar que os Campos Conceituais de Função Afim (CCFA) e de Função (em geral) não estão contidos no dos problemas mistos (situado nas imbricações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo), ressalta que “O inverso acontece, ou seja, os Problemas Mistos estão contidos no Campo Conceitual de Função, pois podemos encontrar intersecções entre seus *conceitos organizadores,* como proporcionalidade, dependência e correspondência” (Merli, 2022, p. 163, grifo do autor). Outros conceitos organizadores comuns, observa o autor, são as ideias-base de função.

De posse dessas informações, após identificarmos as situações do nosso instrumento quanto aos problemas mistos, com base na TCC, apresentamos na próxima seção as variáveis didáticas, consideradas nas situações do instrumento.

## 2.5. VARIÁVEIS DIDÁTICAS

[9] Conforme apresentado na seção 3.6.

Uma variável didática, de acordo com Almouloud (2016, p. 121, grifo do autor), “[...] **é uma variável cognitiva** que pode ser modificada pelo professor, e que afeta a hierarquia das estratégias de resolução (pelo custo, validade, complexidade)”. Então, como estamos investigando o desenvolvimento das ideias-base de função ao longo da escolarização, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, pensamos em componentes das situações que podem aumentar, ou diminuir sua complexidade, demandando, consequentemente, de diferentes invariantes operatórios por parte dos estudantes ao resolvê-las.

Analogamente, Bittar (2017, p.103) considera que os “[...] elementos da situação que, ao serem alterados, implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos”, são variáveis didáticas. Nos concentramos, portanto, nos elementos das diferentes situações do instrumento que poderiam implicar em alterações nas resoluções dos colaboradores da pesquisa.

O que pode ser alterado/modificado, em uma variável didática de uma situação, são os valores “[...] cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos” (Almouloud, 2016, p. 121).

Considerando essas possíveis alterações dos elementos de uma situação, nos concentramos nas diferenças entre as situações escolhidas para o instrumento (seção 3.6). A escolha das variáveis didáticas, em vista disso, foi pautada no reconhecimento de que “Os valores dessas variáveis podem ser modificados no decorrer do processo de aprendizagem para interferir na escolha do conhecimento necessário à resolução do problema” (Almouloud, 2016, p. 122).

Definimos, com base nisso, as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores para a pesquisa:

**Quadro 1** – Variáveis didáticas e valores identificados nas situações

| **Variáveis didáticas** | **Valores** |
|---|---|
| Conjunto numérico | - Números Naturais ($\mathbb{N}$)<br>- Números Reais ($\mathbb{R}$) |
| Apoio visual | - ausente<br>- representação pictórica<br>- tabela<br>- gráfico |
| Coeficientes no enunciado | - implícito<br>- explícito |

**Fonte:** da pesquisa

Realizada a apresentação das variáveis didáticas, consideradas na escolha das situações do instrumento da presente investigação, na sequência, no capítulo 3, descrevemos as escolhas metodológicas adotadas para o seu desenvolvimento.

# CAPÍTULO 3 - A TRILHA DA PESQUISA: ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos a hipótese de pesquisa, os objetivos, os estudantes colaboradores e a sua instituição escolar, a realização do estudo piloto, a metodologia de construção dos dados com destaque para o Método Clínico-Crítico Piagetiano e a escolha das situações do instrumento de pesquisa.

## 3.1. HIPÓTESE DE PESQUISA

De acordo com o disposto na BNCC (Brasil, 2018), as ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) figuram dentre os conhecimentos relevantes para o desenvolvimento das competências específicas da área de Matemática, sendo, portanto, fundamentais para a construção do conceito de função pelos estudantes.

Quanto a manifestação das ideias-base de função pelos estudantes, ao enfrentarem situações associadas ao conceito de função, resultados das pesquisas de integrantes do GEPeDiMa com estudantes do 2º ano do EF (Vargas, 2023), do 5º ano do EF (Silva, 2021; Rodrigues, 2021; Dezilio, 2022; Zanella; Rezende, 2024), do 9º ano do EF (Calado, 2020), do 2º ano do EM (Lorencini, 2019), do 3º ano do EM (Bernardino, 2022; Siqueira, 2023), do 5º e 9º anos do EF e do 3º do EM (Rezende; Nogueira; Calado, 2020), confirmam a possibilidade da sua mobilização pelos estudantes no decorrer de toda a formação escolar da Educação Básica, desde os Anos Iniciais até a finalização do Ensino Médio.

Um ponto em comum presente nos resultados das investigações supracitadas é a observação de que os estudantes, em todas as etapas de formação da Educação Básica, apresentam dificuldades para expressar a generalização tanto na sua forma algébrica, quanto em linguagem natural.

Diante disso, consideramos que os resultados dessas pesquisas confirmam a possibilidade da mobilização das ideia-base de função por estudantes do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, ao enfrentarem situações associadas ao conceito de função afim, o quê tornaria legítimo procurar analisar o desenvolvimento das ideias-base de função ao longo da Educação Básica.

Consideramos, com aporte na TCC, que uma forma de analisar o desenvolvimento das ideias-base de função, ao longo da escolarização dos estudantes, é investigando níveis de competência de estudantes do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, ao enfrentarem situações envolvendo o conceito de função afim.

Portanto, considerando o disposto na BNCC, a base teórica, apresentada nos capítulos 1 e 2, e os resultados de pesquisas desenvolvidas no âmbito do GEPeDiMa com estudantes de diferentes níveis de ensino, elaboramos a seguinte hipótese de pesquisa: *É possível analisar o desenvolvimento das ideias-base de função de estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio mediante a identificação dos níveis de competência na mobilização dessas ideias na resolução de situações associadas ao conceito de função afim.*

## 3.2. OBJETIVOS DA PESQUISA

Considerando a hipótese a ser verificada, elaboramos os seguintes objetivos:

*Objetivo Geral:*

Investigar o nível de competência de estudantes do EF e EM na mobilização das ideias-base de função.

*Objetivos específicos:*

I) Identificar possíveis conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes colaboradores.

II) Identificar competências de estudantes do EF e EM na resolução de situações-problema associadas à função afim.

## 3.3. INSTITUIÇÃO E ESTUDANTES COLABORADORES

Esta pesquisa foi aprovada[10] pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), *Campus* Cascavel.

[10] Com Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) nº 59654522.5.0000.0107.

Para a implementação do instrumento e a produção dos dados, escolhemos uma escola pública da rede estadual de educação do município de Quedas do Iguaçu – PR, devido ao fato do pesquisador residir nesta cidade. Localizado na região Centro-Sul paranaense, esse município teve a população de 30738 pessoas, na contagem realizada no último censo demográfico, em 2022 (IBGE, 2024).

Das 13 escolas públicas vinculadas à administração estadual, presentes no município, seis são categorizadas[11], como escolas do campo, duas como colégios cívico-militares e as outras cinco, como normal (PARANÁ, 2024).

Dado nosso interesse em realizar as entrevistas semiestruturadas, de forma individual, com estudantes em formação escolar da mesma instituição, optamos pela Escola Estadual Arnaldo Busato – EFM, por esta ofertar as etapas do EF – Anos Finais e EM. Localizada no bairro Progresso, região urbana próxima ao centro do município de Quedas do Iguaçu, a escola, no ano de 2024, possui 158 estudantes matriculados no EM, divididos em cinco turmas: três no turno matutino (1º, 2º e 3º anos) e duas no período vespertino (2º e 3º anos). No EF – Anos Finais, são 139 matrículas divididas em oito turmas, quatro no período matutino (5º, 6º, 7º e 8º anos) e quatro no período vespertino (5º, 6º, 7º e 8º anos). Dada a sua localização, os estudantes matriculados são preponderantemente da zona urbana (PARANÁ, 2024).

A escolha desta instituição de ensino foi motivada por ser a única localizada na região urbana do município de Quedas do Iguaçu – PR, que não está vinculada a nenhum dos seguintes programas da Secretaria Estadual de Educação do Paraná: Colégios Cívico-Militares, Educação em Tempo Integral, ou Educação Profissional e Técnica de Nível Médio (PARANÁ, 2024).

Então, considerando o objetivo da pesquisa, solicitamos à direção da escola e à equipe pedagógica, as quais pedissem aos professores de matemática das turmas (6ºB, 7ºA, 8ºB, 9ºA, 1ºA, 2ºA e 3ºB) a indicação de três estudantes, sendo de cada turma, considerando que fossem comunicativos, para facilitar o diálogo com o pesquisador, e que seu rendimento em Matemática não representasse destaque entre os estudantes da turma, ou seja, não fosse aqueles com o melhor desempenho e nem com o pior. Escolhemos as turmas, considerando a oportunidade de intercalar

[11] Cada instituição é classificada quanto ao tipo, podendo ser: CEEBJA, CEEBJA UP, CEEP, Campo, Civ. Mil, Escolas de Formadores, Guido Viaro, Ilha, Indígena, Instituto, Normal, Pol. Mil, Quilombola, UD (PARANÁ, 2024).

estudantes que frequentavam as aulas no turno matutino, das turmas A's, e estudantes do turno vespertino, matriculados nas turmas B's.

Após a indicação dos professores, com o aval da equipe pedagógica e da direção da escola, os estudantes indicados de cada turma eram chamados para conversar com o pesquisador na sala dos professores da escola. Nesse momento, o pesquisador apresentava a pesquisa e falava da importância da participação dos estudantes, de acordo com o Termo De Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (APÊNDICE A) e o Termo de Assentimento – TA (APÊNDICE B). Em seguida, esses termos foram entregues aos estudantes, para que levassem ao conhecimento dos seus responsáveis e retornassem, caso aceitassem participar, com eles assinados para o dia da realização das entrevistas. Dado que não tinha como prever o dia exato da realização de cada entrevista, devido a sua realização em período letivo, conforme descrito na seção 4.1, foi solicitado aos estudantes que deixassem-os em suas mochilas, juntamente com seus materiais escolares.

Após essa identificação da escola e dos estudantes colaboradores, passamos a descrever a implementação do estudo piloto, na próxima seção.

## 3.4. O ESTUDO PILOTO

Na intenção de analisar o instrumento (apresentado na seção 3.6) e objetivando praticar a realização de entrevistas semiestruturadas com aporte no Método Clínico-Crítico Piagetiano, conforme descrito, em seguida, na seção 3.5, realizamos um estudo piloto no final do ano de 2022. Implementamos as situações do instrumento por meio de entrevistas individuais, gravadas em áudio por meio do celular, com nove estudantes da mesma instituição escolhida para a implementação e produção dos dados da investigação.

Conforme explicitado na seção 3.6, dada a implementação das situações em outras investigações, já tínhamos a informação de que eram adequadas aos níveis de formação propostos, bem como sua linguagem era acessível. Conseguimos identificar, a partir da realização do piloto, que precisávamos diminuir os itens das situações 1, 3, 4, 6 e 8, conforme descrito nas seções 3.6.1, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.6 e 3.6.8, respectivamente. Identificamos, com a realização do estudo piloto, que os estudantes colaboradores ficavam reticentes, ao se depararem com situações com um elevado

número de itens. Portanto, padronizamos todas as situações com três itens, optando em suprimir, nas que continham um número maior de itens, as questões relacionadas às explicações referentes aos cálculos realizados e/ou ao entendimento das situações. Deixamos tais perguntas, para serem realizadas pelo pesquisador no momento da realização das entrevistas individuais.

Durante a atividade dos estudantes, ao resolverem as situações do instrumento implementadas no estudo piloto, identificamos que os espaços a resolução das situações eram adequados na folha entregue aos colaboradores, atendendo as suas necessidades de resolução.

Por fim, consideramos que a possibilidade de mobilização das ideias-base de função associado a manifestação de teoremas em ação na atividade dos estudantes, ao resolverem as situações do instrumento, conforme observado na análise *prévia* de cada situação (seção 3.6) foi confirmada com a realização do estudo piloto. Diante disso, inferimos ser possível a classificação de cada situação do instrumento para o sujeito, em do Tipo 1 ou do Tipo 2, com base na identificação de competências para tratar das situações, conforme explicitamos na seção 2.2, a partir da análise dos protocolos escritos e das entrevistas dos estudantes, ao resolverem as tarefas.

Após essas considerações referentes a realização do estudo piloto, na próxima seção, apresentamos elementos do Método Clínico-Crítico Piagetiano que embasaram a realização das entrevistas semiestruturadas com os estudantes colaboradores para a produção dos dados.

## 3.5. O MÉTODO CLÍNICO-CRÍTICO PIAGETIANO

Pensar em investigar o desenvolvimento das ideias-base de função, ao longo da escolarização, analisando estudantes em atividade, tendo como tema função afim, requer o auxílio de uma metodologia apropriada para conseguir aprofundar-se na complexidade desse panorama.

Nas últimas décadas, com o avanço das pesquisas em Educação Matemática, a pesquisa qualitativa tem ganhado destaque nos estudos referentes ao ensino e à aprendizagem desse componente curricular. Pretendemos, também, seguir este caminho. Borba (2004, p. 1) salienta que em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática “[...] praticamente só esta modalidade de pesquisa é

desenvolvida". Analogamente, Bicudo (2014) assinala a predominância da modalidade de pesquisa qualitativa nas investigações efetuadas na área de Educação Matemática.

Dado que a nossa investigação é desenvolvida em um contexto que envolve sujeitos em atividade, optamos pela pesquisa qualitativa, porque tal abordagem "[...] prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida" (Borba, 2004, p.2).

Diante disso, surgem algumas questões: Como produzir os dados da investigação? Quem serão os colaboradores? Como analisar os dados?

Já descrevemos nossa opção teórica pela TCC. Buscamos adotar, nessas condições, um instrumento que possibilite a mobilização de conhecimentos na atividade dos estudantes colaboradores, tanto na sua forma operatória (saber fazer), quanto na sua forma predicativa (saber expressar).

Optamos, portanto, em produzir os dados por meio de entrevistas semiestruturadas, constituídas por situações envolvendo as ideias-base de função associadas ao conceito de função afim, com aporte no Método Clínico-Crítico Piagetiano[12].

Tal método, pontua Delval (2012, p. 8, tradução nossa), foi introduzido por Piaget na Psicologia do Desenvolvimento, sendo ele "[...] o primeiro que o usou como um método para o estudo do desenvolvimento normal". A essência dessa técnica, sinaliza o autor, reside na possibilidade de o investigador fazer repetidas intervenções na intenção de compreender a organização do pensamento do sujeito que, ao se deparar com uma situação da qual ele não consegue explicar sua atuação de modo natural, devido à falta de consciência, permanece implícita.

Neste ponto, percebemos a possibilidade e importância do uso dessa técnica na produção dos dados da presente investigação. Considerando nossa pretensão de identificar os esquemas evocados pelos sujeitos em situação, e reconhecendo o caráter implícito contido neles (Vergnaud, 2019), precisaremos recorrer a meios, como os disponíveis no Método Clínico, para compreender e/ou fazer inferências sobre o desenvolvimento das ideias-base de função ao longo da formação escolar investigada.

[12] De agora em diante vamos nos referir ao Método Clínico-Crítico Piagetiano apenas como Método Clínico.

Sabemos, com base na descrição de Carraher (1983), das dificuldades do emprego do Método Clínico. Para a autora, o pesquisador precisa muitas vezes de um ano de exercício diário, para aplicar eficazmente esse método.

As entrevistas semiestruturadas, realizadas individualmente, como propostas no Método Clínico, possibilitam ao pesquisador meios de indagar acerca dos pensamentos do estudante, ajudando na inferência do que se encontra implícito em sua ação. Essa técnica consiste em "[...] um procedimento para investigar como pensam, percebem, agem e sentem as crianças, que tenta descobrir o que não está evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está escondido da aparência da sua conduta, seja em ações ou em palavras" (Delval, 2012, p. 75, tradução nossa).

Para Carraher (1983, p. 19), "[…] a ênfase do método clínico-piagetiano recai sobre o processo que leva o sujeito a dar esta ou aquela resposta". Para tanto, a autora pontua algumas diretrizes para os examinadores, tais como: usar uma linguagem simples, não concluir pelo sujeito, acompanhar seu raciocínio sem corrigi-lo automaticamente e não deixar ambiguidades. Referente a essa última consideração, descreve a importância da justificação das respostas para que os sujeitos investigados reflitam sobre a situação-problema, tornando mais explícitas as suas respostas. "[…] é parte essencial do exame clínico-piagetiano a obtenção de justificativas para as respostas" (Carraher, 1983, p. 34).

Estamos cientes da existência de dificuldades com as quais precisamos preocupar-nos. Uma delas, talvez, a mais patente no momento, está diretamente ligada à diversidade do grau de instrução (nível escolar) dos sujeitos da investigação. Como pretendemos mapear o desenvolvimento das ideias-base de função, faremos uso de situações associadas ao conceito de função afim. Dessa forma, tanto os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, quanto dos demais anos, até o 3º ano do Ensino Médio, terão a possibilidade de mobilizar esquemas para solucionar as situações propostas no instrumento. Novamente, neste ponto, o Método Clínico vem ao encontro da nossa investigação. Ele pode ser aplicado a "[...] sujeitos de diferentes idades, para examinar como muda o pensamento com a idade, como se constroem as ideias" (Delval, 2012, p. 12, tradução nossa).

Ressaltamos, na intenção de não engendrar dúvidas, que utilizamos o Método Clínico na produção dos dados. Conforme Delval (2012), essa técnica é um procedimento de coleta e análise de dados. Na primeira opção, o sujeito investigado pode, dependendo do interesse do pesquisador, resolver uma tarefa, ou explicar um

fenômeno. No nosso caso, os estudantes terão que resolver tarefas (situações) envolvendo as ideias-base de função.

Neste ponto, é interessante observar que a utilização do Método Clínico prescinde previamente da escolha das situações e da consideração de formas alternativas de apresentação dessas. “O que é importante é que o examinador saiba de antemão que tipos de pergunta deve usar […]” (Carraher, 1983, p. 28). Portanto, objetivando obter o máximo de informações sobre as situações do nosso instrumento, realizamos uma análise *prévia* de cada uma delas[13].

Considerando isso, desenvolvemos um “roteiro de entrevista” com perguntas que norteariam nossa ação na intenção de conseguir obter o máximo de informações dos estudantes, durante a realização das entrevistas individuais. Como entregamos cada situação em uma folha sulfite *A4*, de tal forma que o estudante entrevistado respondia a situação da folha e só recebia outra, depois de terminar o diálogo com o pesquisador sobre àquela que estava respondendo, as primeiras questões, a cada situação, eram os próprios itens *a, b* e *c* da tarefa. Então, além das perguntas indicadas em cada item da situação proposta, o pesquisador realizava outros questionamentos na intenção de compreender como o estudante pensou para resolver cada situação. Dentre essas questões, algumas norteavam a realização das entrevistas, sendo:

- Você entendeu a questão?
- Como você pensou para resolver?
- Como você explicaria a questão para um colega?
- Existe outra forma de resolver a questão?
- Qual a relação entre os valores presentes na questão?

Após a realização das entrevistas, a análise dos dados foi realizada à luz da TCC. Concentramo-nos sobre as resoluções apresentadas pelos estudantes, durante as realizações das entrevistas semiestruturadas, com a intenção de inferir quais foram os invariantes operatórios evocados identificando, na medida do possível, competências dos estudantes colaboradores. Com isso, buscamos analisar o desenvolvimento das ideias-base de função dos participantes por meio da análise do par esquema-situação.

[13] Tal análise é apresentada, em seguida, na seção 3.6.

Tal escolha é justificada, como descrevemos, pela adequação da TCC, para a análise e produção dos dados com base na nossa problemática e objetivos. A fim de ampliar o leque de possibilidades quanto a análise da atividade dos estudantes, associamos o aporte do Método Clínico na produção dos dados.

Após elucidarmos a metodologia de construção dos dados, passamos, na próxima seção, a apresentação do instrumento de pesquisa por meio de uma análise de cada situação que o compõe.

## 3.6. O INSTRUMENTO DE PESQUISA

Dada a importância do instrumento de pesquisa para a construção de dados em uma investigação científica, fomos em busca de situações-problema pertinentes, a fim de atingirmos o objetivo da pesquisa. Surgiu, então, um questionamento inicial: quais situações deveríamos escolher para compor nosso instrumento?

Já tínhamos decidido pelo tema função afim devido à diversidade do nível estudantil dos colaboradores da pesquisa, estudantes do 6º ano do EF ao 3º ano do EM. Voltamos nossa atenção, portanto, para os trabalhos do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa), o qual integramos, na busca de identificarmos situações, para compor o instrumento de produção dos dados.

O critério inicial de escolha das situações, em atendimento aos objetivos e à metodologia da investigação, consistia na possibilidade de manifestação das ideias-base de função, durante sua resolução, pelos estudantes colaboradores do trabalho.

Nesse ponto, respaldados na TCC, justificamos essa escolha de situações já aplicadas em outras investigações, porque “[...] a estrutura conceitual de uma situação refere-se a uma análise a *posteriori.* É preciso passar por uma análise da atividade para mapear quais são os conceitos organizadores desta atividade” (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019, p. 38-39). Portanto, as pesquisas do GEPeDiMa, desenvolvidas com estudantes em atividade, poderiam fornecer situações que possibilitaram a mobilização das ideias-base de função durante a sua resolução.

Encontramos, nos trabalhos de Roratto (2009), Pavan (2010), Calado (2020), Rezende, Nogueira e Calado (2020), Silva (2021), Rodrigues (2021), Bernardino (2022) e Dezilio (2022), um conjunto de situações implementadas em suas pesquisas

com análise das resoluções de estudantes. Tendo essa informação, surgiu a problemática de quais situações incluir no nosso instrumento.

Como objetivamos analisar o desenvolvimento das ideias-base de função, no decorrer do processo de escolarização da Educação Básica, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, fomos garimpar situações que pudessem ser aplicadas em todas essas fases de formação escolar. Pensamos, portanto, em quatro situações iniciais para serem resolvidas por todos os colaboradores. Estas, por sua vez, deveriam ser adequadas ao nível escolar dos estudantes do 6º ano do EF. Para concluir o instrumento, sempre com o objetivo e a metodologia da pesquisa em mente, pensamos em acrescentar, a partir do 8º ano do EF, outras situações com um grau de dificuldade apropriado ao nível de formação dos estudantes, para serem resolvidas por todos os estudantes colaboradores de níveis mais avançados de formação. Portanto, fechamos o instrumento com a seguinte organização:

- Estudantes do 6º e 7º anos do EF resolvem quatro situações: um bloco A de quatro situações que será resolvido por todos os estudantes colaboradores da investigação;

- Estudantes do 8º ano EF resolvem cinco situações: o bloco A mais uma situação adequada com o seu nível escolar;

- Estudantes do 9º ano EF resolvem seis situações: todas as situações propostas para os de 8º ano, mais uma apropriada com o seu nível escolar;

- Estudantes do 1º, 2º e 3º anos do EM resolvem nove situações: todas as situações propostas aos do 9º ano do EF e três adequadas com o seu nível de formação;

Faremos, na sequência, uma apresentação, acompanhada de uma análise *prévia*, de cada situação que selecionamos para compor o instrumento da investigação.

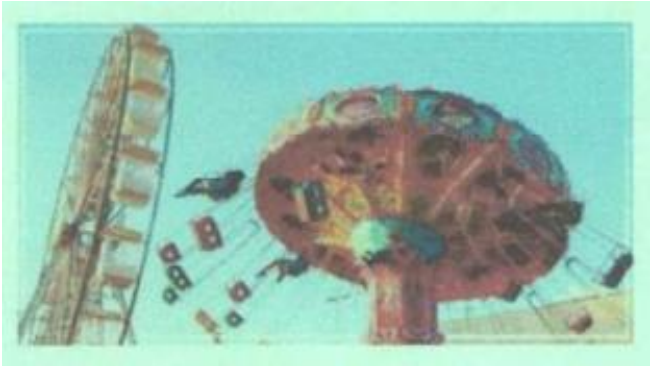
### 3.6.1. Apresentação e análise da situação 1

A escolha da situação inicial das que formam o instrumento, para não inibir os participantes, deveria conter um nível de dificuldade acessível a todos os

colaboradores da pesquisa. Apoiados nesse fato, fomos buscar nas nossas referências, artigos, teses e dissertações, envolvendo função afim e TCC, uma situação aplicada a estudantes com alto número de acertos na análise após sua implementação. O nível de formação exigido para a resolução da situação, devido aos objetivos da nossa investigação, deveria ser compatível com o 6º ano do EF.

Dentre uma gama significativa de situações, presentes nos trabalhos de Roratto (2009), Pavan (2010), Calado (2020), Rezende, Nogueira e Calado (2020), Silva (2021), Rodrigues (2021), Bernardino (2022) e Dezilio (2022), optamos por uma da dissertação desta última autora por ser um problema do tipo misto, implementado com estudantes do 5º ano do EF, no qual nas suas palavras[14]: "[...] contempla todas as ideias-base de função – variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização – e a ideia de proporcionalidade" (Dezilio, 2022, p. 85).

**Quadro 2** - Situação 1

| **Situação 1** - adaptado de Dezilio (2022, p. 86). |
|---|
| Implementação: Todos os anos/séries da investigação |
| Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:<br>  <br>a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?<br><br>b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?<br><br>c) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados? |

**Fonte:** Adaptado de Dezilio (2022, p. 86)

Esta situação é o problema 1, dentre quatro, do instrumento da pesquisa de Dezilio (2022). No seu trabalho, a autora apresenta um estudo *a priori* contemplando

[14] As pesquisas do GEPeDiMa, desenvolvidas antes da definição, na tese de Merli (2022), dos conceitos de dependência, variável, regularidade e generalização como ideias-base de função, também consideravam o conceito de correspondência como ideia-base de função.

possíveis mobilizações dos estudantes quanto as estratégias de resolução, erros e ideias de função.

Quanto aos itens da situação, Dezilio (2022) discute o objetivo da inclusão da questão "*c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?*"[15] para os estudantes refletirem acerca dos itens precedentes e, com isso, perceberem as ideias de variável, regularidade, dependência e correspondência para, na questão "d", generalizar o problema.

Após sua implementação em uma turma do 5º ano, com 13 alunos, de uma escola do campo no interior da região Noroeste do Paraná, com os alunos organizados em grupos, a pesquisadora observou que:

> No problema 1, as ideias de correspondência, dependência, regularidade, variável e proporcionalidade foram manifestadas pelos estudantes de todos os grupos. Já a ideia de generalização foi identificada nas resoluções dos estudantes dos grupos 1 e 5, e a modelação da função afim com os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6 (Dezilio, 2022, p. 135).

Além disso, Dezilio (2022, p. 101) menciona que "[...] o estudante 1 conseguiu explicitar a generalização do problema para a sua dupla, mesmo sem apresentar expressões matemáticas". Esse resultado, com a presença de uma generalização na linguagem natural, já era esperado pela autora, devido ao nível escolar dos estudantes, na análise *prévia*. Quanto a isso, podemos questionar a partir de qual nível escolar (ano/série) os estudantes vão apresentar uma generalização algébrica para a questão? Os estudantes de outros níveis mais avançados do EF e do EM conseguirão apresentar a generalização nas formas predicativa e operatória? Qual a relação entre a mobilização das diferentes ideias-base de função no decorrer do processo de escolarização?

Outro resultado importante da pesquisa de Dezilio (2022), referente a situação 1, foi a identificação de um teorema em ação falso (TAF). Os estudantes dos grupos 4 e 5, nos itens "a" e "b", segundo a autora, "[...] multiplicaram a variável tanto pela taxa de variação quanto pela constante" (Dezilio, 2022, p. 102) resultando no "[...] seguinte teorema em ação falso: Seja $f$ uma relação funcional, então $f(x) = ax + bx$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$" (Dezilio, 2022, p. 95).

[15] Conforme descrito na seção 3.4, após a realização do estudo piloto optamos por diminuir os itens das situações, padronizando em três o número de itens em cada situação. Portanto, este item foi excluído da folha impressa do nosso instrumento entregue aos colaboradores, ficando a cargo do pesquisador efetivar tal pergunta no momento de cada entrevista individual.

Na mesma direção, conforme Dezilio (2022, p. 102), “Outro fato ocorrido que não estava previsto refere-se aos estudantes dos grupos 2, 3, 4 e 6, que apresentaram como resposta da questão “d”, que se referia a generalização, a soma dos resultados obtidos nas questões “a” e “b””.

Quanto a modelação da função afim na forma $f(x) = ax + b$, na implementação da situação 1, na pesquisa de Dezilio (2022), após observações dos esquemas utilizados pelos estudantes, associando os resultados sem a manifestação da notação algébrica, coerente com o nível dos estudantes de um 5º ano do EF, resultou na mobilização do seguinte teorema em ação verdadeiro (TAV): seja $f$ uma relação funcional, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$.

De posse dessas informações, salientamos a importância do resultado da implementação dessa situação na pesquisa de Dezilio (2022) demonstrando, perante uma análise pautada na TCC, como estudantes de 5º ano mobilizaram as ideias-base de função. Para tanto, interpretamos a situação 1, como potencialmente rica para a nossa investigação.

Apesar de ter sido implementada em uma turma de 5º ano do EF, devido as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em especial no tocante à generalização, ao resolverem em grupo e na sala de aula, consideramos pertinente seu grau de dificuldade para alunos do 6º ano do EF resolverem, durante uma entrevista semiestruturada individualmente. Além disso, sua implementação com estudantes dos níveis de formação propostos na nossa investigação pode, assim conjecturamos, contribuir com a análise do desenvolvimento das ideias-base de função, no decorrer do processo de escolarização da Educação Básica, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM.

Para além desses resultados da implementação, definimos as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores para a situação 1:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* ausente;
- *Coeficientes no enunciado:* explícitos ($a = 4$ e $b = 5$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 4x + 5$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

No tocante à presença das ideias-base de função na situação 1, considerando como variável dependente $f(x)$ - o gasto total no parque, e independente $x$ - a quantidade de ingressos para cada brinquedo, pautamos nossa interpretação da seguinte forma:

i. Dependência: o gasto total no parque $f(x)$ depende da quantidade de ingressos comprados para cada brinquedo $x$;

ii. Variável: o gasto total no parque $f(x)$ e a quantidade de ingressos comprados para cada brinquedo $x$ são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ (quantidade de ingressos para cada brinquedo) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{N}$ (gasto total no parque);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 4x + 5$.

A mobilização, ou não dessas ideias-base de função, pelos estudantes colaboradores, dependerá dos esquemas que eles dispõem no momento da resolução da situação 1. São conceitos em ação que eles precisaram usar para resolvê-la.

Em relação aos possíveis TA que poderão ser utilizados pelos estudantes colaboradores, durante a resolução da situação 1, fundamentados na análise *prévia* da sua implementação na pesquisa de Dezilio (2022), destacamos:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + bx$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

O TAV1, não necessariamente com essa modelação, foi mobilizado, como vimos, por estudantes do 5º ano do EF na pesquisa de Dezilio (2022). Esse também foi identificado nas resoluções de estudantes do 3º ano do EM, na investigação de Siqueira (2023), e do 5º ano do EF, na dissertação de Rodrigues (2021).

Já o TAF1, como descrito anteriormente, foi identificado, salvo diferenças na modelação, na pesquisa de Dezilio (2022).

Temos, portanto, um panorama prévio de potenciais invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) a serem manifestados pelos estudantes no momento da implementação da situação 1. Passamos, agora, para uma análise *prévia* da situação 2.

### 3.6.2. Apresentação e análise da situação 2

**Quadro 3** - Situação 2

**Situação 2** - (Pavan, (2010) - adaptado de Imenes, Jakubo e Lellis, (2002)).

Implementação: Todos os anos/séries da investigação

A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la:
Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com o do filho:

| | Mãe | Filho |
|---|---|---|
| Número de pulos | 1 | 3 |
| | 2 | |
| | | 9 |
| | 4 | |
| | 5 | |
| | | 18 |

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

**Fonte:** Pavan (2010, p. 102)

Essa situação foi implementada, inicialmente, para 10 crianças de uma turma de 4ª série (atual 5º ano) do EF, na investigação de Pavan (2010). Por meio do Método Clínico, com aporte teórico na TCC, a autora objetivou investigar o reconhecimento e a mobilização das ideias-base (variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização) do Campo Conceitual das Funções, pelas crianças.

Pavan (2010) concluiu, baseada nos esquemas de resolução dos estudantes e na análise das entrevistas semiestruturadas realizadas por meio do Método Clínico, que as crianças compreenderam a ideia-base de regularidade no problema, percebendo a sequência de 3 em 3, bem como a relação de dependência entre os pulos da mãe e os do filho. Na resolução do item “b” do problema, salienta a autora, os estudantes precisaram da intervenção da pesquisadora, conseguindo, a partir disso, generalizar a situação por meio da oralidade, ou da multiplicação.

Quanto aos esquemas de resolução, Pavan (2010) destaca: as adições sucessivas (somas de parcelas iguais) e a utilização do algoritmo da multiplicação relacionados, respectivamente, com os seguintes TA: interação aditiva, bijeção e $f(x) = 3x$.

A situação 2 também compõe uma investigação descrita por Rezende, Nogueira e Calado (2020). Com foco na estratégia de resolução dos estudantes, o problema foi aplicado a seis estudantes Brasileiros do 9º ano do EF com o objetivo de analisar se e como as ideias-base de função eram mobilizadas.

As autoras consideraram que a tarefa possibilitou a mobilização das ideias-base de função: variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização. Ao completarem corretamente a tabela, relataram Rezende, Nogueira e Calado (2020), os estudantes do 9º ano do EF manifestaram corretamente as ideias-base de variável, correspondência, dependência e regularidade.

Apesar disso, destacaram que somente um colaborador da pesquisa, dentre os seis que estavam concluindo o 9º ano, respondeu acertadamente todos os itens da questão (Rezende; Nogueira; Calado, 2020). Ao analisar as respostas apresentadas pelos seis alunos no tocante aos três itens da tarefa, observaram que "[...] dentre as 18 resoluções analisadas, apenas 05 foram consideradas totalmente corretas, 02 foram consideradas parcialmente corretas, 05 respostas incorretas, 05 não apresentaram estratégias, [...] e 01 ausência de resposta (em branco)" (Rezende; Nogueira; Calado, 2020, p. 38).

Diante disso, inferimos na importância dessa situação para compor o nosso instrumento de pesquisa. Apesar de não ser um problema misto, haja vista ser uma tarefa do Campo Conceitual Multiplicativo, compatível com o nível escolar dos estudantes do 5º ano do EF, é uma situação de função afim que permitiu a manifestação das ideias-base de função por estudantes do 9º ano do EF. Logo, a implementação dessa situação para sujeitos em diferentes etapas (níveis) da formação escolar, como objetivamos, pode contribuir para a análise da mobilização das ideias-base de função ao longo da formação escolar.

Nos resultados da tese de Silva (2021), desenvolvida em uma turma composta por trinta alunos, com o objetivo de "Analisar a compreensão das ideias base de função de alunos do quinto ano mediante a resolução em grupo de uma sequência de problemas de estruturas multiplicativas" (Silva, 2021, p. 77), também identificamos dados acerca da implementação da situação 2, reforçando nossa consideração em relação a sua viabilidade para a nossa investigação.

A autora utilizou, em seu instrumento, situações do CCM envolvendo as ideias-base de função. À luz da TCC e da Teoria das Situações Didáticas, organizou uma sequência didática com blocos de problemas sendo: o 1º bloco com 10 problemas

referentes a ideia-base de correspondência, o 2º bloco com 3 problemas sobre a ideia-base de dependência, o 3º bloco com 4 problemas acerca da ideia-base de regularidade e, por fim, o 4º bloco com cinco problemas envolvendo variável e generalização.

O problema 2, do bloco 3 da tese de Silva (2021), é a situação 2 sem o item[16] ““*d” - Você pensou igual para resolver a letra “a” e a letra “c”? Por quê?*” Segundo a autora, a inclusão desse item foi para reafirmar os raciocínios “[...] multiplicativo de um para muitos e o de divisão por cota, justamente para oportunizar aos alunos a reflexão a respeito das diferenças entre eles [...]” (Silva, 2021, p. 99-100).

A autora relata que todos os grupos manifestaram a ideia-base de regularidade, ao preencherem corretamente a tabela na resolução da situação 2. As ideias de dependência, variável e generalização, também foram manifestadas pelos estudantes. Ao resolverem o item “a”, segundo Silva (2021), as crianças mobilizaram, de forma implícita, o pensamento funcional associado à função definida pela regra $f(x) = 3x$. Nas suas palavras, “Podemos associar o esquema mobilizado pelos alunos ao teorema em ação $f(n) = f\ (n \times 1) = n \times f\ (1)$, $n \in \mathbb{N}$, $f$ isomorfismo” (Silva, 2021, p. 241). Analogamente, na resolução do item “c”, a autora descreve que os estudantes usaram implicitamente a regra funcional $f(x) = \frac{1}{3}x$ para associar o número de pulos da mãe canguru ao número de pulos do filho podendo, portanto, o esquema de resolução estar associado novamente ao TA $f(n) = f\ (n \times 1) = n \times f\ (1)$, $n \in \mathbb{N}$, $f$ isomorfismo.

Para a situação 2, após analisarmos seus elementos, definimos as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* tabela;
- *Coeficientes no enunciado:* explícitos ($a = 3$ e $b = 0$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 3x$, para todo $x \epsilon\ \mathbb{N}$.

Podemos observar, ao compararmos os valores das variáveis didáticas das situações 1 e 2, uma elevação no nível de complexidade da última em relação a primeira. As duas situações possuem os valores Números Naturais e coeficientes

[16] Na nossa investigação, utilizamos a situação 2 conforme implementada no estudo de Pavan (2010), com os três itens, como pode ser visualizado no Quadro 3.

explícitos nos enunciados; no entanto, diferentemente da situação 1, na situação 2, os estudantes precisarão interpretar e preencher a tabela.

Portanto, considerando esse critério de comparação entre os valores das variáveis didáticas, bem como as análises de pesquisas que implementaram as situações 1 e 2, interpretamos a situação 2, como mais complexa para os estudantes responderem, quando comparada com a situação 1.

Feita essa análise, apresentamos a nossa interpretação a respeito da presença das ideias-base de função na situação 2. Então, considerando o número de pulos do filho $f(x)$, como variável dependente e o número de pulos da mamãe canguru $x$, como variável independente, temos:

i. Dependência: o número de pulos do filho $f(x)$ depende do número de pulos da mamãe canguru $x$;

ii. Variável: o número de pulos do filho $f(x)$ e o número de pulos da mamãe canguru $x$ são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ (número de pulos da mamãe canguru) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{N}$ (número de pulos do filho);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 3x$.

Os esquemas manifestados pelos estudantes, sejam escritos ou orais, no momento da resolução da situação 2 demonstrarão a mobilização, ou não, desses conceitos em ação. Apresentamos, portanto, baseados na implementação da situação 2 nos trabalhos de Pavan (2010), Rezende, Nogueira e Calado (2020) e Silva (2021), possíveis TA decorrentes da sua implementação.

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAV2: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

TAV3: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

Todos esses teoremas em ação verdadeiros foram identificados na investigação de Siqueira (2023) com estudantes do 3º ano do EM. Nos artigos de Vergnaud (1996, 2007, 2019), também encontramos o TAV2 e o TAV3 ligados à função linear, como um fator de proporcionalidade em que $f(x) = ax$. Em outras pesquisas, como em Pavan (2010), Calado (2020), Rodrigues (2021), Silva (2021) e Bernardino (2022), também foram identificados tais TA na atividade dos estudantes, ao resolverem situações envolvendo o conceito de função afim.

Com essas observações, somos cientes de que não esgotamos todas as possibilidades da mobilização de TA cabíveis de figurar nas resoluções dos estudantes. Descrevemos, a partir do estudo das investigações supracitadas, aqueles que julgamos mais prováveis de integrar as ações dos estudantes em atividade, durante a implementação da situação 2 na nossa pesquisa.

Passamos, no próximo item, a uma apresentação e análise *prévia* da situação 3.

### 3.6.3. Apresentação e análise da situação 3

**Quadro 4** - Situação 3

**Situação 3** - adaptado de Silva (2021, p. 100) que adaptou de Tinoco (2002).

Implementação: Todos os anos/séries da investigação

Olhe com atenção a sequência de triângulos construídos com palitos de fósforo:

1 Triângulo | 2 Triângulos | 3 Triângulos | 4 Triângulos | ... | ...

a) Agora complete a tabela relacionando a quantidade de triângulos formados com o número de palitos de fósforo usados:

| **Número de triângulos** | 1 | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Palitos usados** | 3 | | 7 | |

b) Quantos palitos de fósforo são necessários para formar 5 triângulos? E para formar 9 triângulos?
c) Podemos encontrar a quantidade de palitos de fósforo que vamos usar para formar qualquer número de triângulos? Como devemos pensar para resolver esse desafio?

**Fonte:** Adaptado de Silva (2021, p. 100)

A situação 3, adaptada por Silva (2021) do livro “Construindo o conceito de função”, de autoria de Tinoco (2002), é uma tarefa que exige um grau de abstração maior por parte dos estudantes quando comparada com as situações 1 e 2. Tinoco (2002, p. 33) descreve que “[...] em uma turma sem iniciação algébrica, é natural que os alunos tenham dificuldade de chegar à abstração”. Para a autora, mesmo compreendendo a situação 3, somente os estudantes com experiência em álgebra atingirão a generalização, ficando os demais, presos à quantificação numérica da necessidade da soma de dois palitos para se construir, dado o primeiro, cada novo triângulo.

Para a situação 3, Tinoco (2002) estabeleceu a generalização, por meio de uma expressão geral, como objetivo para a ação dos estudantes. Na sua descrição, “Mesmo que os alunos não escrevam uma expressão é importante que descrevam em palavras a lei que rege o fenômeno” (Tinoco, 2002, p. 33).

Na tese de Silva (2021), a situação 3 é o problema 3 do bloco 2. Seu foco, ao propor essa tarefa, foi identificar a manifestação e mobilização da regularidade. Para além disso, a autora descreveu[17]:

> Elaboramos as questões “b” e “d” propondo valores que não estavam expressos na sequência geométrica, para mostrar que a quantidade de triângulos é uma grandeza variável e também para que, a partir da identificação da regularidade e da relação de dependência entre a quantidade de triângulos e a quantidade de palitos e a correspondência entre os valores, os alunos apresentassem outras maneiras de resolução diferentes da contagem e, com o objetivo audacioso das questões “e” e “g”, pudessem realizar a generalização (Silva, 2021, p. 101).

Nessa situação, a pesquisadora utilizou uma sequência geométrica com representação pictórica e uma sequência numérica presente na tabela do item “a”. Conforme a autora, quatro grupos responderam este item contando os palitos da representação pictórica. Estes, sendo “[...] os Grupos 4, 5, 6 e 7 apresentaram dificuldades em escrever a resposta na questão “c” que solicitava explicações a respeito da ideia de regularidade” (Silva, 2021, p. 248).

Já os grupos 1, 2 e 3, formados pelos colaboradores da investigação de Silva (2021), identificaram com o preenchimento da tabela, no item “a”, as ideias-base de

[17] Novamente, conforme descrito na seção 3.4, para facilitar o diálogo com o pesquisador e não inibir os colaboradores no momento da entrevista, diminuímos os itens da situação. Na tese de Silva (2021), constavam os itens “*b) Quantos palitos de fósforo são necessários para formar 5 triângulos?”* e “*d) E para formar 9 triângulos quantos palitos de fósforo serão usados?”* que juntamos no item *b* e os itens *“f) Com 25 palitos de fósforo podemos montar quantos triângulos?”* e *“g) Como podemos descobrir quantos triângulos serão montados sabendo o número de palitos de fósforo?”* que foram suprimidos.

regularidade e dependência. No entanto, nos itens “e” e “g”, os quais demandam a ideia de generalização, todos os grupos, destaca a autora, não conseguiram conjecturar uma forma geral e abstrata para quaisquer valores de triângulos e palitos. Suas respostas, argumenta Silva (2021), ficaram limitadas a ideia de regularidade, descrevendo a continuação da sequência geométrica, como seus esquemas de resolução. Dado que os estudantes cursavam o 5º ano do EF, esse resultado corresponde ao previsto por Tinoco (2002) quanto a abstração da situação 3.

Somente com muito diálogo entre a pesquisadora e os alunos, específica Silva (2021), esses conseguiram mobilizar o pensamento funcional associado à regra $f(x) = 2x + 1$, para a situação 3. “O conhecimento mobilizado pelas interações dialógicas pode ser associado ao teorema em ação verdadeiro $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, $c$, $k \in \mathbb{N}$, sendo $f$ isomorfismo [...]” (Silva, 2021, p. 251).

Nos itens “f” e “g”, descreve a pesquisadora, os estudantes mobilizaram o pensamento funcional associado à regra $f(x) = \frac{x-1}{2}$, “[...] sendo $f(x)$ a quantidade total de triângulos e $x$ a quantidade de palitos” (Silva, 2021, p. 252).

Diante dessas informações, e analisando a situação 3, estabelecemos as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* representação pictórica e tabela;
- *Coeficientes no enunciado:* implícitos ($a = 2$ e $b = 1$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 2x + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Ao voltarmos nossa atenção para os valores das variáveis didáticas da situação 3, podemos perceber uma elevação no nível de complexidade dessa situação em comparação com a situação 2: o conjunto numérico é o mesmo, porém a representação pictórica introduz a necessidade de uma interpretação referente a uma sequência geométrica e, além disso, conjecturamos que os coeficientes implícitos no enunciado tornam mais complexo seu entendimento.

No tocante à presença das ideias-base de função na situação 3, reconhecendo que o número de palitos usados $f(x)$, é a variável dependente e o número de triângulos $x$, é a variável independente, temos a seguinte interpretação:

i. Dependência: o número de palitos usados $f(x)$ depende do número de triângulos $x$;

ii. Variável: o número de palitos usados $f(x)$ e o número de triângulos $x$ são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ (número de triângulos) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{N}$ (número de palitos usados);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 2x + 1$.

A situação 3, com base na análise realizada nos estudos de Silva (2021) e Tinoco (2002), pode trazer muita dificuldade para os estudantes em relação à sua generalização. Portanto, para compreender como os estudantes usam as ideias-base de função na tentativa de resolvê-la, fundamentados nesses autores, indicamos TA que poderão ser mobilizados pelos colaboradores durante as entrevistas. São eles:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAV4: Se $f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

O TAV4 também foi modelado na investigação de Siqueira (2023) com estudantes do 3º ano do EM. Além disso, foi identificado nas pesquisas de: Pavan (2010), Calado (2020), Rodrigues (2021), Silva (2021) e Bernardino (2022). Diante disso, consideramos que também poderá ser mobilizado pelos colaboradores da nossa investigação.

No próximo item apresentaremos a situação 4, acompanhada de uma análise *prévia*.

### 3.6.4. Apresentação e análise da situação 4

**Quadro 5** - Situação 4

| |
|---|
| **Situação 4** – adaptado de Dezilio (2022, p. 117). |
| Implementação: Todos os anos/séries da investigação |
| Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.<br>a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?<br><br>b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. |

| Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia | Gasto total no mês por Márcia |
|---|---|
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |
| 35 | |
| 40 | |

c) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

**Fonte:** Adaptado de Dezilio (2022, p. 117).

Conforme Dezilio (2022), a situação 4 é um problema misto da classe proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas - com o todo desconhecido, igualmente a situação 1. O diferencial entre as duas, argumenta a autora, é a utilização da tabela, como valor da variável didática na situação 4.

Quanto ao conceito de função relacionado a situação 4, Dezilio (2022, p. 120) descreve: “Consideramos todas as ideias-base envolvidas nesse problema, variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização, e a ideia de proporcionalidade envolvida em cada multiplicação realizada”.

Após a implementação da situação 4, ao analisar a mobilização das ideias-base de função pelos grupos de estudantes do 5º ano do EF colaboradores da sua pesquisa, Dezilio (2022, p. 133) identificou que os grupos 1, 2, 3, 5 e 6 manifestaram as ideias de correspondência, regularidade e proporcionalidade. “As ideias de dependência, variável e modelação da função afim foram identificadas nos grupos 1, 5 e 6, e a generalização, nos grupos 1 e 5”.

As respostas de três grupos (1, 5 e 6), de acordo com Dezilio (2022), demonstram a mobilização do pensamento funcional em suas resoluções. Para a autora, tomando $f(x)$, como a representação do gasto total de Márcia por mês, e $x$ como a representação da quantidade de sanduíches produzidos, as respostas dos estudantes desses grupos podem ser modeladas pela função afim $f(x) = 3x + 150$. Tal conhecimento, infere a pesquisadora, pode ser associado ao TAV: “[...] Seja $f$ uma relação funcional, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$” (Dezilio, 2022, p. 129).

Alguns erros também foram identificados, após a análise *a posteriori* da pesquisa de Dezilio (2022), nas resoluções dos grupos de estudantes. Previsto na análise *a priori*, destaca a autora, apareceu nas respostas dos estudantes o uso da taxa de variação (3) multiplicada pelo número de sanduíches, sem somar o termo independente (o imposto mensal de 150). Outro erro - mas que não estava previsto - foi assim descrito: “Não esperávamos erros ao multiplicar o valor do imposto por R$ 3,00, e, com o resultado, somar com a quantidade de sanduíches produzidos, ou multiplicarem a constante (valor do imposto) pela variável (quantidade de sanduíches produzidos)” (Dezilio, 2022, p. 133).

De posse desses resultados da implementação da situação 4 na investigação de Dezilio (2022), fomos analisá-la, analogamente ao que fizemos nas situações 1, 2 e 3, para definir as subsequentes variáveis didáticas com seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* tabela;
- *Coeficientes no enunciado:* explícitos ($a = 3$ e $b = 150$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 3x + 150$, para todo $x \epsilon \mathbb{N}$.

Ao observarmos os valores das variáveis didáticas da situação 4, identificamos que o conjunto numérico é o dos Números Naturais, igualmente nas situações precedentes 1, 2 e 3. Além disso, similarmente às situações 2 e 3, a variável apoio visual tem valor de tabela. Portanto, podemos questionar qual o diferencial dela em relação as tarefas anteriores?

Consideramos, relativamente a terceira variável didática, que os coeficientes ($a = 3$ e $b = 150$) encontram-se explícitos no enunciado na situação 4, semelhante ao valor dessa variável nas situações 1 e 2. Devido à variável apoio visual da situação 4 possuir valor preenchimento e interpretação de tabela, semelhante a situação 3, inferimos, então, que essas duas tarefas possuem um nível de complexidade próximo para os estudantes. Nossa escolha para fechar o bloco das situações a serem implementadas com os estudantes colaboradores de todos os anos/séries da nossa investigação com a situação 4 considerou, além dessa análise das variáveis didáticas, os resultados da pesquisa de Dezilio (2022), especialmente sua rica descrição referente aos erros e aos teoremas em ação mobilizados pelos estudantes durante sua resolução.

Considerando todas essas observações referentes a situação 4, realizamos a seguinte interpretação acerca da presença das ideias-base de função:

i. Dependência: o gasto total no mês $f(x)$ depende da quantidade de sanduíches produzidos $x$;

ii. Variável: o gasto total no mês $f(x)$ (variável dependente) e a quantidade de sanduíches produzidos $x$ (variável independente), são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ (quantidade de sanduíches produzidos) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{N}$ (gasto total no mês);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 3x + 150$.

Com essa interpretação das ideias-base de função, e considerando os resultados da implementação da situação 4, na pesquisa de Dezilio (2022), identificamos possíveis TA a serem mobilizados pelos estudantes colaboradores no momento da resolução dessa tarefa, sendo:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + bx$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

O TAF2 emergiu, modelado de forma análoga[18], na pesquisa de Siqueira (2023) com estudantes do 3º ano do EM. Conforme a autora, esse TA é mobilizado "Para situações que matematicamente são representadas por $f(x) = ax + b$, considera-se apenas $f(x) = ax$" (Siqueira, 2023, p. 151).

Na sequência, apresentamos a situação 5 do nosso instrumento de pesquisa.

### 3.6.5. Apresentação e análise da situação 5

**Quadro 6** - Situação 5

| **Situação 5** - (Calado, (2020, p. 76-77) - adaptado de Tinoco (2002)). |
|---|

[18] Na pesquisa de Siqueira (2023, p. 111), o TAF2 foi modelado dessa forma: "Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear, então a relação funcional $f$ é dada por $f(x) = ax + b = ax$".

| Implementação: a partir do 8º ano do EF |
| --- |
| D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:<br>- as camisas são colocadas lado a lado;<br>- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador;<br>a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.<br>b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.<br>c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas. |

**Fonte:** Calado (2020, p.76-77)

A pesquisa de Calado (2020, p. 55), na qual encontramos a implementação e análise dessa situação com estudantes, buscou "analisar invariantes operatórios, relacionados à generalização, mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mediante situações envolvendo função afim". Para tanto, a pesquisadora utilizou, como instrumento de produção dos dados uma sequência didática, fundamentada na Engenharia Didática, contendo sete atividades. Segundo a autora, a organização e a implementação das atividades tiveram respaldo na Teoria das Situações Didáticas e a análise, por sua vez, foi realizada com base na TCC. Diante desse panorama, com base no nosso primeiro critério de escolha das situações, ressaltamos a viabilidade das atividades da investigação de Calado (2020), para comporem o nosso instrumento.

A situação 5 do nosso instrumento é a atividade 4 da sequência didática de Calado (2020). Podemos questionar, inicialmente, se esta situação leva à mobilização das ideias-base de função.

Novamente, para encontrar a resposta, voltamos a explorar a pesquisa de Calado (2020). Ao responderem o item "c*"* da atividade, pontua a pesquisadora, os três grupos, dentre os 13 participantes da implementação no dia, que conseguiram desenvolver a expressão algébrica $y = x + 1$, mobilizaram todas as ideias-base de função, pois ao determinarem "[...] uma expressão algébrica que relaciona as variáveis quantidade de pregadores e número de camisas, os sujeitos estabelecem uma relação de correspondência e dependência entre essas variáveis a partir de uma regularidade observada" (Calado, 2020, p. 136). Percebemos, diante disso, a viabilidade da situação 5, para que os estudantes em atividade manifestem as ideias-base de função, ao resolverem tal tarefa.

No dia da implementação dessa atividade (situação 5 do nosso instrumento), descreve Calado (2020), participaram 27 alunos, os quais divididos em 12 duplas e um trio. Da análise *a posteriori* da atividade, a autora concluiu que seis grupos resolveram corretamente o item “a” da atividade, diminuindo o número de acerto, nos itens seguintes, para três grupos. “Dos treze (13) grupos que participaram da atividade, três (03) desenvolveram estratégias corretas para a generalização por meio da língua natural e da expressão algébrica [...]” (Calado, 2020, p. 137).

Os resultados da implementação da situação 5 na investigação de Calado (2020) divergem, no tocante às dificuldades dos estudantes, das inferências apontadas no livro “Construindo o conceito de função”, local de onde ela adaptou a questão. Nesta obra, Tinoco (2002, p. 32) defende que o trabalho em duplas pode favorecer o processo, depois de afirmar que: “Nesta atividade, muito simples, os alunos trabalham nos níveis de compreensão intuitiva e matematização inicial. Espera-se que, após a análise da situação, sejam capazes de expressar a sua lei geral, ao menos em palavras, sem a necessidade de tabelas”. Para a autora, o uso de tabelas deverá ser feito pelo professor para os alunos que não possuem treinamento algébrico, pois, segundo sugere, a falta dessa experiência pode constituir-se em uma dificuldade à generalização.

O maior diferencial da atividade proposta por Tinoco (2002, p. 32), em relação a sua adaptação para a pesquisa de Calado (2020), é a presença de um item inicial dizendo: “Tente fazer um desenho que represente esta situação”. Podemos questionar, diante disso, qual o impacto da representação em forma de desenho para os estudantes entenderem essa situação.

Novamente, voltando a atenção para a pesquisa de Calado (2020), percebemos a importância da representação aos estudantes do 9º ano do EF. Ao resolverem o item “a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta”, dois dos seis grupos que responderam corretamente a questão, descreve a autora, utilizaram a estratégia de representação em desenho para compreender a situação.

Em relação aos invariantes operatórios, relacionados a ideia-base de função generalização, mobilizados pelos estudantes do 9º ano do EF, ao resolverem a situação 5, Calado (2020) inferiu, semelhante ao observado por Silva (2021) na sua investigação com estudantes do 5º ano do EF, a manifestação do TAV: $f(kx) + c =$

$k \times f(x) + c, c, x \in \mathbb{N}$. Outro TAV, identificado por Calado (2020, p. 137), na resolução do item “c” da situação 5, é: “Uma quantidade qualquer é representada por uma letra”. Esse resultado coincide, ao menos na interpretação, com a seguinte habilidade indicada para o 7º ano do EF na BNCC (2017, p. 307): “Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita”.

Com base nessa observação, optamos por implementar a situação 5 com os estudantes, a partir do 8º ano de formação escolar. Consideramos que os resultados da investigação de Calado (2020), associado às observações de Tinoco (2002), contribuirão para a nossa investigação referente ao desenvolvimento das ideias-base de função.

Outro resultado relativo aos invariantes operatórios, identificado por Calado (2020), surgiu na resolução do item “b” da situação 5. Conforme a autora, dois grupos de estudantes, colaboradores da sua pesquisa, associaram erroneamente o teorema em ação $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1),\ n \in \mathbb{N}$, verdadeiro nas relações matemáticas de proporção direta, mas falso no contexto da situação 5, pois “Acreditavam que, se uma camisa utiliza dois pregadores, então, para qualquer quantidade de camisas, o número de pregadores será sempre o dobro do número de camisas” (Calado, 2020, p. 132).

Esse teorema, como vimos, foi associado de forma correta pelos colaboradores, estudantes do 5º ano do EF, na implementação da situação 2 do nosso instrumento, a qual remete a um contexto de proporção direta entre os pulos do filho e da mãe canguru, na investigação de Silva (2021). Isso demonstra, como descreve Vergnaud (1993), que um teorema em ação pode ser verdadeiro em um determinado contexto e falso em outro, isso é, os TA têm uma validade local e não global.

Além disso, permite-nos inferir que os estudantes dos dois grupos, colaboradores da pesquisa de Calado (2020), os quais usaram erroneamente o TA $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1), n \in \mathbb{N}$, para resolver o item “b” da situação 5, ainda não desenvolveram competências necessárias para obter êxito na situação (Vergnaud, 2013).

Para que os estudantes consigam adaptar os esquemas, utilizando os teoremas em ação indicados, para solucionar a situação 5, eles precisarão mobilizar, mesmo que implicitamente, as ideias-base de função relativas à situação 5, análogo à nossa interpretação:

i. Dependência: a quantidade de pregadores $f(x)$ depende do número de camisas $x$;

ii. Variável: a quantidade de pregadores $f(x)$ (variável dependente) e o número de camisas $x$ (variável independente), são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ (número de camisas) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{N}$ (quantidade de pregadores);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = x + 1$.

Na intenção de conjecturar sobre a complexidade da situação 5 para os estudantes, estabelecemos os seguintes valores para as variáveis didáticas:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* ausente;
- *Coeficientes no enunciado:* implícitos ($a = 1$ e $b = 1$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Constatamos, ao compararmos a situação 5 com as situações 3 e 4, em especial, uma elevação na complexidade da primeira pela ausência de apoio visual para interpretar a questão. Tinoco (2002) considera, recomendando aos professores, importante usar tabelas, para trabalhar a situação 5 com estudantes sem experiência algébrica. Na mesma direção, Silva (2021, p. 257) identificou, na sua investigação envolvendo estudantes do 5º ano do EF, que "[...] a proposição do preenchimento de tabelas nos problemas potencializa a compreensão e explicitação da ideia de regularidade [...]". Podemos, portanto, conjecturar que o uso de tabelas e representações pictóricas podem favorecer o entendimento do enunciado das situações.

Por fim, ancorados nas análises de Calado (2020) e Tinoco (2002) atinentes à situação 5, identificamos possíveis TA que os estudantes colaboradores da investigação poderão utilizar na resolução dessa tarefa:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAV4: Se $f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

Ao observarmos os resultados da implementação da situação 5 na pesquisa de Calado (2020), identificamos sua complexidade para os estudantes, em especial no tocante à generalização. Nas palavras de Calado (2020, p. 138): “Nessa atividade, pudemos perceber que os sujeitos apresentaram dificuldades em apreender a regularidade presente na situação e, consequentemente, a generalização [...]”. Dado que a autora implementou a tarefa com estudantes do 9º ano do EF, podemos indagar quais TA estarão associados à mobilização das ideias-base de função por sujeitos de outros níveis de formação escolar, ao tentarem solucionar essa situação.

A manifestação das ideias-base de função, por parte dos estudantes, não é uma tarefa simples. Isso corrobora com a observação de Vergnaud (2013) de que um conceito leva um longo período de tempo, para ser apreendido pelo sujeito. Veremos um exemplo das dificuldades associadas à aprendizagem do conceito de função, especificamente função afim, na apresentação da próxima situação.

### 3.6.6. Apresentação e análise da situação 6

**Quadro 7** - Situação 6

| **Situação 6** – adaptado de Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 39). |
|---|
| Implementação: a partir do 9º ano do EF |
| O restaurante Rango, cobra R$ 3,80 pelo consumo de 100g de comida. Três pessoas foram ao restaurante Rango e cada uma consumiu uma lata de refrigerante que custa R$ 3,50, e as seguintes quantidades de alimentos:<br>Fabrícia consumiu 200g. Fernando consumiu 400g. Lucas consumiu 500g.<br>a) Qual o valor pago por cada pessoa? Explique como você determinou cada um desses valores?<br>b) Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V), incluindo o refrigerante.<br>c) Carla almoçou no restaurante Rango e pagou R$ 24,40 pela refeição com um refrigerante. Quantos gramas de comida Carla consumiu? |

**Fonte:** Adaptado de Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 39)

A situação 6, presente no Quadro 7, também foi implementada, juntamente com a situação 2, na investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020). O diferencial dela, em relação à situação 2, descrevem as autoras, é a sua classificação, enquanto um problema do tipo misto que envolve as operações de adição e multiplicação. Conforme elas, ancoradas na BNCC (Brasil, 2017), a situação 6 pode ser resolvida

por estudantes do EF. Ela envolve, ressaltam as autoras, o conceito de função afim e as ideias-base de função.

De posse disso, implementaram a situação 6 com 12 estudantes colaboradores da investigação, sendo: seis do 9º ano, concluintes do EF, e seis do 3º ano, concluintes do EM.

Ao analisarem os esquemas de resolução dos estudantes, explorando suas respostas, Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 41) afirmam que eles "[...] mostram as dificuldades dos estudantes ao resolverem uma tarefa relacionada ao conceito de função afim". Conforme as autoras, no item "c"[19], associado a ideia-base de generalização, não foi encontrada nenhuma estratégia correta na resolução dos estudantes. Para tanto, conjecturam que os estudantes, diferente do indicado na BNCC, não compreendem a ideia-base de generalização ao término do EF e do EM.

Diante disso, ressaltamos a importância da situação 6, a fim de compor o nosso instrumento. Além de permitir a mobilização das ideias-base de função, ela tem potencial para ser implementada a sujeitos de diversos níveis de formação escolar, assim como propomos na pesquisa.

Os resultados da investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020) demonstram, sustentadas na análise das resoluções escritas dos estudantes para a situação 6, a pouca, ou inexistente diferença entre a mobilização das ideias-base de função entre os sujeitos concluintes do EF e do EM. Podemos, portanto, questionar se a competência dos sujeitos de diferentes níveis de formação escolar sustenta-se em esquemas semelhantes, ao resolverem a situação 6? Quais conhecimentos mobilizados em ação estão associadas ao desenvolvimento das ideias-base de função ao longo da escolarização dos estudantes? Será que por meio do Método Clínico conseguiremos, com a implementação da situação 6, identificar esquemas que não são explícitos nas resoluções escritas dos colaboradores?

Para a mobilização das ideias-base de função na resolução da situação 6, interpretamos, com base no nosso referencial, a necessidade de os estudantes reconhecerem, implicitamente, os seguintes conceitos em ação:

i. Dependência: o valor a ser pago $f(x)$ depende do peso $x$ da comida consumida;

[19] Nessa situação, ao adaptarmos a tarefa, o item "b" da questão na pesquisa das autoras foi suprimido e o item "c" corresponde ao item "b" da situação do nosso instrumento.

ii. Variável: o valor a ser pago $f(x)$ (variável dependente) e o peso $x$ (variável independente) da comida consumida são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{R}_+$ (peso da comida consumida) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{R}$ (valor a ser pago);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = \frac{3,8}{100}x + 3,5$.

Após termos conhecimento dessas informações e observações atinentes à situação 6, determinamos as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Reais ($\mathbb{R}$);
- *Apoio visual:* ausente;
- *Coeficientes no enunciado:* explícitos ($a = 0,038$ e $b = 3,5$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 0,038x + 3,5$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Observamos, ao compararmos a situação 6 com a situação 5 por meio de uma análise das variáveis didáticas envolvidas, um aumento no nível de complexidade. O valor da variável conjunto numérico, diferentemente de todas as situações anteriores, é Números Reais. Esse fator pode tornar a situação 6, ao menos teoricamente, mais complicada para os estudantes, pois, de acordo com Vergnaud (1996), os valores numéricos interferem na complexidade de uma situação.

Além disso, a situação 6 não traz apoio visual a sua resolução. A falta de uma tabela, para ser preenchida, pode dificultar, conforme Silva (2021), a mobilização da ideia-base de regularidade. Esse fato pode explicar, conjecturamos, parte da dificuldade dos colaboradores de Rezende, Nogueira e Calado (2020). Na interpretação das autoras, ao analisarem os registros escritos dos colaboradores, não foi manifestada a ideia-base de regularidade.

Em um trabalho para apresentar resultados do GEPeDiMa, referentes ao Campo Conceitual das Funções, Nogueira e Rezende (2018) descrevem os resultados da implementação de Rezende, Nogueira e Calado (2020) referentes a situação 6. Na interpretação das autoras, com base no enunciado da tarefa, ela pode ser “[...] considerada relativamente simples para estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio [...]” (Nogueira; Rezende, 2018, p. 418). Destacam, ainda, que “[...] a generalização não foi mobilizada corretamente” (Nogueira; Rezende, 2018, p. 419).

Na investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 29), relatam as autoras, é apresentado um recorte de uma pesquisa que visava

> [...] investigar se e como ideias base sobre função são mobilizadas por estudantes Brasileiros de 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano de Ensino Médio, enfatizando, particularmente os resultados referentes à descrição geral de padrões ou seja, a ideia base de generalização.

Diante disso, estamos considerando importante a utilização do Método Clínico, para compreendermos, durante as entrevistas individuais, como sujeitos de diferentes níveis de escolarização, a partir do 9º ano do EF, mobilizam as ideias-base de função, ao tentarem resolver a situação 6.

Observarmos, na situação 6, que os coeficientes estão explícitos no enunciado ($a = 0{,}038$ e $b = 3{,}5$) com a lei da função $f$ dada por $f(x) = 0{,}038x + 3{,}5$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Podemos questionar, portanto, como essa situação pode ser mais complexa que uma situação com coeficientes implícitos, como a situação 5.

Para Vergnaud (1993), a complexidade de uma situação reside em mais do que um fator, destacando-se três: a sua estrutura, a natureza e grandeza dos números e a experiência dos sujeitos envolvidos. Ressaltamos, a partir disso, que a situação 6, diferente de todas as anteriores, exige do sujeito competências para realizar operações com números reais. Além disso, apesar da taxa de variação (a = 0,038) estar explícita no seu enunciado, a sua determinação exige esquemas que envolvem a operação de divisão, haja vista ser preciso interpretar que o restaurante Rango cobra R$ 3,80, a cada 100 gramas de comida. Por meio de um estudo bibliográfico com o objetivo de identificar o quê revelam as pesquisas produzidas por educadores matemáticos sobre o Campo Conceitual Multiplicativo (CCM), publicadas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Krug e Zanella (2023) identificaram, em relação aos desafios do ensino desse Campo Conceitual na Educação Básica, “[...] nos trabalhos do ENEM, relativa convergência no que se refere às dificuldades inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem da divisão [...]” (Krug; Zanella, 2023, p. 36).

Com base nessas considerações, apresentamos um conjunto de TA que os estudantes, no nosso entendimento, poderão manifestar ao resolverem a situação 6:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

A mobilização, ou não desses TA pelos colaboradores da pesquisa, vai depender da competência desses estudantes em relação aos conceitos matemáticos, envolvidos com a função afim, em especial no tocante às ideias-base de função.

No próximo item, vamos apresentar a situação 7 do instrumento.

### 3.6.7. Apresentação e análise da situação 7

**Quadro 8** - Situação 7

| **Situação 7** - Bernardino (2022, p. 68) |
|---|
| Implementação: A partir do 1º ano do EM |
| Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora.<br>a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?<br>b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.<br>c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina? |

**Fonte:** Bernardino (2022, p. 68)

As situações 7 e 9, que compõem o nosso instrumento, foram implementadas na investigação de Bernardino (2022). Objetivando “analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, interfere na resolução de estudantes do Ensino Médio” (Bernardino, 2022, p. 19), a pesquisadora utilizou a TCC, como suporte teórico para a produção e a análise dos dados. Em seu instrumento, a autora utilizou quatro problemas mistos classificados na classe proporção simples e transformação de medidas, os quais foram resolvidos por dez estudantes de uma 3ª série do EM.

Portanto, com base nisso, destacamos a viabilidade das situações implementadas por Bernardino (2022) para compor o nosso instrumento. Elas possibilitam, como observaremos na sequência, a manifestação das ideias-base de função pelos estudantes, bem como envolvem o conceito de função afim. Além disso, foram implementadas e analisadas com aporte na TCC.

A situação 7, do nosso instrumento, foi a primeira do instrumento de Bernardino (2022). Segundo a autora, ao resolverem os itens da situação, nove dos dez

estudantes participantes manifestaram estratégias adequadas no item “a”. No item “b”, por sua vez, somente dois estudantes manifestaram estratégias adequadas e, por fim, no item “c”, nove estudantes chegaram ao resultado correto, sendo que todos utilizaram estratégias corretas, mas um deles errou os cálculos matemáticos.

Outro fato importante registrado por Bernardino (2022), em sua investigação, está relacionado aos TA, mobilizados na situação 7. De acordo com sua interpretação, foram manifestados três TAV e dois TAF, sendo:

- TAV: $f(x) = b \cdot x \Leftrightarrow b = \frac{f(x)}{x}$, com $x, b \in \mathbb{N}$;
- TAV: $c = a + (\pm f(x))$, com $c, a, x \in \mathbb{N}$;
- TAV: $f(x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$;
- TAF: $a \pm f(bx) = \pm f(bx)$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$;
- TAF: $a - f(bx) = f(bx) - a$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$.

Destacamos, dado o nosso interesse em identificar teoremas em ação mobilizados pelos estudantes, ao analisarmos competências quanto as ideias-base de função, a viabilidade da situação 7, para compor o instrumento à produção dos dados via implementação com os colaboradores da investigação.

Para tanto, definimos os seguintes valores para as variáveis didáticas na situação 7:

- *Conjunto numérico:* Números Reais ($\mathbb{R}$);
- *Apoio visual:* ausente;
- *Coeficientes no enunciado:* explícitos ($a = -2000$ e $b = 30000$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 30000 - 2000x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x \leq 15$.

Dado que os valores das variáveis didáticas definidos para a situação 7 são iguais aos observados na situação 6, decidimos implementar as duas nessa ordem, com base nos resultados das suas implementações nas investigações de Bernardino (2022) e de Rezende, Nogueira e Calado (2020), respectivamente. A situação 7 foi resolvida por estudantes do 3º ano do EM na pesquisa de Bernardino (2022), enquanto a situação 6, foi implementada no 9º ano do EF e no 3º ano do EM na pesquisa de Rezende, Nogueira e Calado (2020). Optamos, dessa forma, por utilizar a situação 6, a partir do 9º ano do EF e a situação 7 a partir do 1º ano do EM.

Em relação a mobilização das ideias-base de função, interpretamos que elas estão envolvidas na situação 7 como:

i. Dependência: a quantidade de água na piscina $f(x)$ (litros) depende do tempo $x$ (horas) de funcionamento da bomba;

ii. Variável: a quantidade de água na piscina $f(x)$ (variável dependente) e o tempo $x$ (variável independente) de funcionamento da bomba são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $0 \leq x \leq 15$ (15 horas é o tempo necessário para esvaziar a piscina) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{R}$ (quantidade de água na piscina);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 30000 - 2000x$.

A mobilização, ou não das ideias-base de função, enquanto invariantes operatórios mobilizados em ação, dependerá da competência dos estudantes colaboradores, para resolver a situação 7. Pretendemos interpretar isso, com base em Vergnaud (2013), analisando os teoremas em ação manifestados nas suas estratégias de resolução.

Para tanto, apresentamos, com base nos resultados de Bernardino (2022), possíveis TA que poderão figurar nas resoluções dos colaboradores na situação 7:

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAV2: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

TAV4: Se $f(x) = ax + b$ e $x \neq 0$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = f\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n\ parcelas} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$.

TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAF3: Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Dentre esses TA, ainda não apresentamos o TAV6 e o TAF3. A identificação[20] do TAV6 ocorreu na investigação de Siqueira (2023)[21], com estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao mobilizarem, em seus esquemas de resolução, somas ou subtrações sucessivas de $f(x)$. Tal TA também foi mencionado por Vergnaud (1996, 2007, 2019), Pavan (2010), Calado (2020), Rodrigues (2021), Silva (2021) e Bernardino (2022). O TAF3, por sua vez, foi identificado na pesquisa de Bernardino (2022)[22], com estudantes do 3º ano do EM que mobilizavam "[...] estratégias nas quais os estudantes fazem uma inversão das informações: a transformação deveria ser retirada do estado inicial, mas é realizado o inverso, os estudantes retiram da transformação o estado inicial" (Bernardino, 2022, p. 140), ou seja, em vez de modelarem a situação 7 pela expressão $30000 - 2000x$ o faziam por $2000x - 30000$.

Destacamos, como fizemos nas situações precedentes, que a mobilização, ou não desses TA, bem como de outros não inferidos, a partir dessa exploração inicial, dependerá dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes no momento da resolução da situação 7.

A partir de agora, voltamos novamente a atenção para o estudo de Rezende, Nogueira e Calado (2020). Além da implementação das situações 2 e 6 do instrumento, envolvendo o conceito de função, com análise pautada na TCC, tal estudo traz outra situação implementada com 06 estudantes, colaboradores da investigação, concluintes do EM. Apresentamos, na sequência, essa situação explicando o porquê consideramos sua pertinência para o desenvolvimento do nosso trabalho.

### 3.6.8. Apresentação e análise da situação 8

**Quadro 9** - Situação 8

| |
|---|
| **Situação 8** – adaptado de Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 43) que foi adaptado de Roratto (2009). |
| Implementação: a partir do 1º ano do EM |

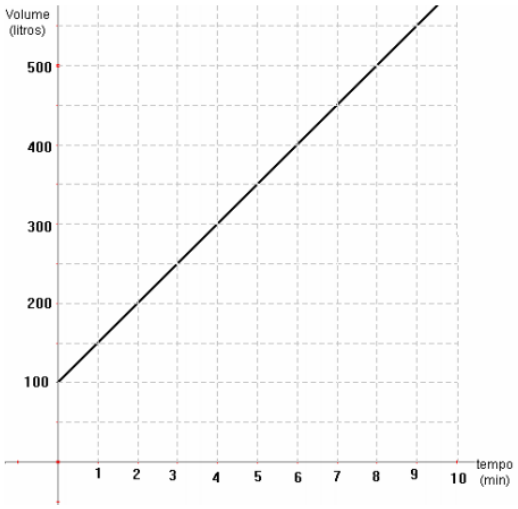
[20] Também estamos considerando como o TAV6 os casos que incluem o caso particular desse TA para $x = 1$, dado por $f(n) = nf(1)$, com $n \in \mathbb{N}$.
[21] O TAV6 foi modelado por Siqueira (2023, p. 150) como: "Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(x + x') = f(x) + f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$."
[22] Modelado assim: "$a - f(bt) = f(bt) - a$ com $a\ b, e\ t \in \mathbb{N}$" (Bernardino, 2022, p. 98).

Uma caixa de água tem capacidade de 1000 litros e possui certa quantidade de água em seu interior. Em determinado instante, uma torneira é aberta para encher a caixa d'água, conforme informações disponíveis no gráfico abaixo. Com estas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?

b) Qual a taxa de vazão de água da torneira?

c) Indique a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo?




**Fonte:** Adaptado de Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 43)

Rezende, Nogueira e Calado (2020) descrevem a tarefa 3 (situação 8 do nosso instrumento), como um problema do tipo misto que envolve o conceito de função afim e as ideias-base de função.

Ao analisarem, com base nos registros escritos dos estudantes colaboradores da pesquisa, as estratégias de resolução e a mobilização das ideias-base de função, inferiram, em quadros relativos a cada item[23] da situação 8, os seguintes resultados: nos itens "a", "b", "c" e "d", respectivamente, quatro, cinco, três e dois alunos apresentaram estratégias de resolução corretas mobilizando as ideias-base de variável, dependência e regularidade, bem como o conceito de correspondência; no item "e", quatro alunos utilizaram estratégias corretas mobilizando as ideias-base de variável e dependência e o conceito de correspondência; já nos itens "f" e "g" nenhum estudante apresentou estratégia de resolução correta.

De acordo com as autoras, "[...] a análise da representação gráfica foi utilizada como estratégia de resolução em todos os itens da atividade" (Rezende; Nogueira; Calado, p. 47). Mesmo assim, nenhum aluno desenvolveu a forma algébrica da generalização da questão corretamente, bem como ninguém identificou o domínio e a

[23] No intuito de facilitar o diálogo entre o pesquisador e os colaboradores, no momento da entrevista individual, diminuímos os itens da situação 8. No trabalho de Rezende, Nogueira e Calado (2020), os três itens adotados aqui eram os itens *a*, *c* e *f*. Além destes, constavam os itens: "*b) Supondo que a torneira fique aberta durante 25 minutos, o que acontecerá?", "d) Quanto tempo levará até o completo enchimento da caixa?", "e) Que relação(ões) o gráfico expressa? Elas são relações de dependência?"* e *"g) Quais grandezas representam o domínio e a imagem, respectivamente, nesta relação? Para quais valores essas grandezas estão definidas na situação?",* que foram suprimidos.

imagem da função, apesar de reconhecerem, no item posterior, a dependência entre o volume e o tempo.

Roratto (2009, p. 63), de quem Rezende, Nogueira e Calado (2020) adaptaram a situação 8, desenvolveu sua pesquisa objetivando “[...] identificar se o conteúdo matemático Funções, trabalhado pedagogicamente mediante uma sequência didática proposta numa perspectiva histórica, foi apreendido significativamente pelos estudantes [...]”. Trabalhando com estudantes da 8ª série do EF (atual 9º ano), baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, e utilizando a tendência da História da Matemática aplicada ao Ensino, o autor utilizou a situação 8 (com mais detalhes no enunciado[24], contendo um número maior de itens (10 no total), mas sem envolver os conceitos de domínio e imagem de função), na intenção de trabalhar a linguagem algébrica e a representação analítica de função.

Após salientar, na análise *prévia* da situação 8, que os estudantes poderiam ter dificuldades com a expressão “taxa de vazão” e com “[...] o fato de o gráfico estar transladado 100 unidades no eixo vertical" (Roratto, 2009, p. 132), o autor descreve que “Com respeito à expressão matemática que deveria representar o fenômeno, percebemos que, possivelmente, o tratamento algébrico na situação anterior possa ter contribuído [...]” (Roratto, 2009, p. 133), dado que oito dos dez grupos, os quais resolveram a tarefa conseguiram apresentar uma expressão algébrica.

Tais resultados são compatíveis com o indicado na BNCC (Brasil, 2018), relativo ao 9º ano do EF, quando apresenta, na unidade Álgebra, o objeto do conhecimento função: “Funções: representações numérica, algébrica e gráfica” (Brasil, 2018, p. 316). Segundo o documento oficial, uma das habilidades para o 9º ano do EF é: “Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (Brasil, 2018, p. 317). Já no EM, segundo o documento, deve-se consolidar, aprofundar e ampliar as aprendizagens do EF. No tocante ao conceito de função afim, os estudantes devem desenvolver habilidades para “construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º grau [...]” (Brasil, 2018, p. 536), reconhecer diferentes

[24] No trabalho de Roratto (2009, p. 131), o enunciado é: “Uma caixa de água tem capacidade de 1000 litros e possui uma certa quantidade de água em seu interior. Em determinado instante, uma torneira é aberta para encher a caixa. Baseado no gráfico abaixo, que representa o volume de água no interior da caixa em função do tempo durante os primeiros 10 segundos e, sabendo que a taxa de aumento de vazão da torneira permanece constante até o completo enchimento da caixa, responda as perguntas”.

representações dessas funções, identificar padrões e criar conjecturas, sabendo expressar algebricamente generalizações.

Diante dessas análises, estabelecemos para a situação 8, no intento de compreender melhor como os estudantes poderão resolvê-la, as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Reais ($\mathbb{R}$);
- *Apoio visual:* representação gráfica;
- *Coeficientes no enunciado:* implícitos ($a = 50$ e $b = 100$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 50x + 100$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x \leq 18$.

Ao analisarmos os valores das variáveis didáticas, na situação 8, observamos, em comparação com as situações precedentes propostas no instrumento, um incremento no grau de complexidade. Nessa situação, diferentemente das anteriores, é cobrada a interpretação da representação do gráfico de uma função afim. Além disso, assim como apontado por Rezende, Nogueira e Calado (2020), ela envolve as ideias-base de função, representação e intepretação gráfica e necessita da expressão algébrica da lei matemática que modela a situação.

Atentos a esses detalhes, optamos em implementar a situação 8, na nossa investigação, a partir do 1º ano EM. Rezende, Nogueira e Calado (2020), ancoradas na BNCC (Brasil, 2018), também consideram que os conteúdos e conceitos, envolvidos nessa situação correspondem ao indicado para os estudantes do nível do Ensino Médio do Brasil.

Quanto a resolução da situação 8, durante a implementação com os colaboradores, consideramos a necessidade da mobilização das ideias-base de função, mesmo que implicitamente, analogamente a nossa interpretação:

i. Dependência: o volume de água na caixa $f(x)$ (em litros) depende do tempo $x$ (minutos) que a torneira ficar aberta;

ii. Variável: o volume de água na caixa $f(x)$ (variável dependente) e o tempo $x$ (variável independente) que a torneira permanece aberta são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $0 \leq x \leq 18$ (tempo que a torneira permanece aberta) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{R}$ (volume de água na caixa);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 50x + 100$.

No tocante à implementação, ainda, imaginando a ação dos estudantes colaboradores, ao buscarem resolver a situação 8, elencamos como um exercício para mapear, na medida do possível e cientes das limitações desse tipo de ação, possíveis TA que poderão ser utilizados por eles.

TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

TAV4: Se $f(x) = ax + b$ e $x \neq 0$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.

TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = f\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n\ parcelas} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$.

TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Apesar das limitações dessas observações iniciais, consideramos que elas validam a inclusão da situação 8 no instrumento de pesquisa haja vista os resultados da sua implementação nos trabalhos de Roratto (2009) e Rezende, Nogueira e Calado (2020).

Analogamente, no próximo item apresentamos resultados da implementação da situação 9, na pesquisa de Bernardino (2022), no intuito de demonstrar o potencial desta, para compor o instrumento da investigação.

### 3.6.9. Apresentação e análise da situação 9

**Quadro 10** - Situação 9

| **Situação 9** - Bernardino (2022, p.85). |
|---|
| Implementação: a partir do 1º ano do EM |
| Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.<br><br>a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?<br>b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.<br>c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer? |

**Fonte:** Bernardino (2022, p. 85)

A situação 9 foi implementada na investigação de Bernardino (2022) sendo, na ordem do instrumento dela, a quarta. De acordo com a autora, os estudantes fizeram muitos questionamentos, ao se depararem com essa situação indagando, “Por exemplo, como deveriam resolver, se não estava faltando informação, e a pesquisadora respondia que eles precisavam ler com calma a situação, extrair as informações pertinentes, e que não estavam faltando informações” (Bernardino, 2022, p. 123-124).

Em relação aos resultados da implementação, relata Bernardino (2022) que dentre os nove estudantes participantes, seis apresentaram estratégias adequadas no item “a”; apenas um manifestou esquema adequado no item “b”; e, por fim, cinco estudantes mobilizaram estratégias adequadas no item “c” da situação 9.

Foram identificados, pela autora, os seguintes TAV nas resoluções dos estudantes:

- TAV: $f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b \Leftrightarrow b = \frac{f(b) \cdot b1}{f(b1)}$, com $b \; e \; b1 \; \in \mathbb{N}$;

- TAV: $f(x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$.

Em relação a complexidade das situações 7 e 9, conforme resultados da sua implementação na pesquisa de Bernardino (2022), a primeira é menos complicada que a última aos estudantes. Dentre as quatro subclasses[25] analisadas pela pesquisadora, “A segunda classe, que se revelou mais complexa, foi a proporção simples (quarta proporcional) e transformação de medidas (transformação negativa desconhecida) [...]” (Bernardino, 2022, p. 136), presente na situação 9 e “[...] a mais simples para os sujeitos da pesquisa, foi a proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa) [...]” (Bernardino, 2022, p. 136), presente na situação 7.

Com base nisso, optamos por deixar a situação 9 para fechar o instrumento, propondo sua implementação a partir do 1º ano do EM, reconhecendo sua complexidade em relação as demais situações propostas.

[25] A saber: multiplicação um para muitos com a transformação negativa e estado final desconhecido; partição com a transformação positiva desconhecida; cota com transformação positiva e estado inicial desconhecido; quarta proporcional com a transformação negativa desconhecida (Bernardino, 2022).

Para melhor interpretarmos a situação 9, definimos, a *priori*, as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores:

- *Conjunto numérico:* Números Naturais ($\mathbb{N}$);
- *Apoio visual:* ausente;
- *Coeficientes no enunciado:* implícitos ($a = -2000$ e $b = 23000$) com lei da função $f$ dada por $f(x) = 23000 - 2000x$, para todo $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x \leq 8$.

Ao compararmos com os valores das variáveis definidas na situação 8, identificamos, basicamente, duas diferenças: (i) uma relativa ao conjunto numérico, enquanto na situação 8, o domínio da função era real e, portanto, contínuo, na situação 9, envolve grandezas discretas, de domínio natural; e (ii) outra relativa ao apoio visual, dado que, na situação 8, tem a representação gráfica e na situação 9 é ausente. Considerando tais diferenças, julgamos[26] a *priori* a situação 9, como mais complexa que a situação 8, para os estudantes resolverem.

Quanto a identificação das ideias-base de função na situação 9, interpretamos assim:

i. Dependência: o valor que Enzo recebe $f(x)$ (em dólares) depende da quantidade $x$ de publicações não feitas;

ii. Variável: o valor que Enzo recebe em dólares $f(x)$ (variável dependente) e a quantidade $x$ (variável independente) de publicações não feitas são variáveis;

iii. Regularidade: ao variar os valores de $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x \leq 8$ (8 é o número mínimo de publicações para Enzo receber um salário de 23.000 dólares no mês) tem-se uma regularidade nos valores assumidos em $f(x) \in \mathbb{R}$ (salário de Enzo no mês);

iv. Generalização: partindo da regularidade, é possível identificar uma expressão genérica para a situação dada por $f(x) = 23000 - 2000x$.

No tocante a generalização da situação 9, se considerarmos $p$, como o número de publicações feitas, tal que $0 \leq p \leq 8$, e uma relação funcional $g: [0,8] \to \mathbb{R}$, teríamos: $g(p) = 23000 - (8 - p)2000 = 7000 + 2000p$. Então, dado que $x$ é o número de publicações não feitas tal que $f(x) = 23000 - 2000x$ para todo $x$ pertencente ao intervalo $[0,8]$, segue que $f(x) = g(8 - p)$, sempre que $x = p$ com $x, p \in [0,8]$. Portanto, apesar das duas formas de generalização resultarem em valores corretos para o salário de Enzo, quanto ao número de publicações, a função

[26] Teremos confirmação ou não desse julgamento na análise dos dados.

$g$ não atende ao item $b$ da situação 9 por não apresentar, em síntese, uma expressão que determine o valor que Enzo recebe em dólares com a quantidade de publicações não realizadas.

Conforme Lima *et al.,* (2006), na ação, sabendo que $g: [0,8] \to \mathbb{R}$ é afim, para determinar os coeficientes $a$ e $b$ de modo que se tenha $g(p) = ap + b \; \forall \; p \in [0,8]$, basta resolver, com $p_1 \neq p_2$, o sistema formado pelas equações $g(p_1) = y_1$ e $g(p_2) = y_2$. Como, ao resolver o item "a" da situação 9, os estudantes obtêm o valor de 2000 dólares por publicação não feita por Enzo e, sabendo que ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações, para obter um salário mensal de 23000 dólares, poderão ser induzidos, conjecturamos, a julgar que Enzo recebe 2000 dólares por publicação realizada, até um limite de 8 publicações. Então, caso algum estudante raciocine dessa forma, considerando $p$ como o número de publicações feitas e reconhecendo que são necessárias, no mínimo, 8 publicações para Enzo receber 23000 dólares mensais, é possível concluir que a função afim $g$ assume os valores: $g(8) = 23000$ e $g(7) = 21000$. Logo, resolvendo o sistema dado pelas equações $8a + b = 23000$ e $7a + b = 21000$, tem-se como solução $a = 2000$ e $b = 7000$. Portanto, $g(p) = 2000p + 7000$.

Para que os colaboradores, durante a implementação do instrumento, manifestem raciocínios análogos ao descrito, precisa ocorrer a mobilização das ideias-base de função em associação com TA. Indicamos então, sem almejar o esgotamento, possíveis TA que poderão permear as resoluções dos estudantes para a situação 9:

> TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.
>
> TAV2: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$.
>
> TAV5: *Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.*
>
> TAF2: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.
>
> TAF3: Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

O TAV5 foi identificado, como vimos, na investigação de Bernardino (2022)[27]. De acordo com a autora, Vergnaud (1996, 2007), Calado (2020) e Rodrigues (2021) também identificaram esse TA em suas pesquisas.

Concluída essas observações iniciais acerca das 9 situações do instrumento, apresentamos no capítulo 4 a análise dos dados produzidos.

[27] Modelado dessa forma: "$f(b) \cdot b1 = f(b1) \cdot b$ [e] $b = \frac{f(b) \cdot b1}{f(b1)}$, com $b \; e \; b1 \in \mathbb{N}$" (Bernardino, 2022, p. 87, acréscimo nosso).

# CAPÍTULO 4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos os resultados da análise da observação da atividade dos estudantes, ao resolverem as situações do instrumento. Para tanto, iniciamos descrevendo o contexto da sua realização e, na sequência, passamos a descrever os resultados inferidos a cada situação implementada com os estudantes. Por fim, discutimos o desenvolvimento do conceito de função afim ao longo do processo de escolarização e relacionamos os resultados com os objetivos traçados.

## 4.1. CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO

A investigação foi desenvolvida com estudantes de uma escola pública estadual, vinculada à Rede Estadual de Educação do Paraná, localizada na zona urbana da cidade de Quedas do Iguaçu – Pr, conforme descrito na seção 3.3. Nesta instituição é ofertado o Ensino Fundamental, EF – Anos Finais e o Ensino Médio, EM.

Após conversas com a direção da escola e a equipe pedagógica, optamos em realizar as entrevistas semiestruturadas no período de aula dos estudantes, evitando, com isso, a possibilidade de encontrarmos transtornos decorrentes da utilização do transporte escolar e outros inerentes à vinda e permanência dos estudantes em contraturno nas dependências da escola. Quanto ao período de implementação do instrumento, para não coincidir com o calendário de avaliações dos estudantes, decidimos pelos meses de outubro e novembro do ano de 2023.

Os estudantes indicados, para participar das entrevistas semiestruturadas, foram escolhidos pelos professores de Matemática de cada turma, com o aval da equipe pedagógica. O critério que deveria subsidiar a indicação é o estudante não ser o com o maior rendimento em Matemática, nem como o pior, portanto, um bom aluno e que aparentasse comportamento comunicativo, para que pudesse interagir com o pesquisador no momento da entrevista individual (seção 3.3).

Para a realização das entrevistas, foi disponibilizada a sala da biblioteca da escola. Devido a possibilidade de interrupções, durante a realização das entrevistas, uma funcionária da escola ficou responsável por auxiliar, quando ocorriam as entrevistas, no controle do fluxo de pessoas até a biblioteca, restringindo o acesso de outras pessoas que não fossem o pesquisador, ou os estudantes colaboradores.

Antes de iniciarmos a realização de cada entrevista, conversávamos novamente com cada estudante, para reafirmarmos o conteúdo do TCLE (APÊNDICE A) e TA (APÊNDICE B). Além disso, estabelecíamos um diálogo sobre a escola e sua relação com os estudos na intenção de deixarmos os estudantes mais confortáveis.

Durante a implementação do instrumento, cada estudante foi entrevistado de forma individual, recebendo as situações do instrumento uma a uma, sem um tempo pré-estabelecido para a resolução de cada situação e para a finalização da entrevista. Apesar disso, todas as entrevistas foram concluídas no mesmo dia e dentro do turno escolar da sua realização, seja matutino, ou vespertino. O estudante recebia a situação impressa em folha *A4* e tinha a sua disposição: caneta, lápis, borracha e calculadora. Todas as entrevistas foram gravadas em vídeo por meio do celular do pesquisador. Fomos realizando as entrevistas, conforme a ordem da etapa de formação dos estudantes, do menor nível (6º ano do EF) ao maior nível (3º ano do EM).

As interações entre o pesquisador e os estudantes aconteciam durante a resolução de cada situação. Não foi adotado um procedimento padrão quanto ao momento da realização das perguntas pelo pesquisador, pois, inspirados no Método Clínico (Delval, 2012), observávamos a atividade dos estudantes e realizávamos interações, de acordo com suas ações em situação. Então, além das perguntas indicadas em cada item da situação proposta, o pesquisador realizava outros questionamentos, na intenção de compreender como o estudante pensou para resolver cada situação, conforme descrito na seção 3.5.

Após contextualizada a realização das entrevistas semiestruturadas para a construção dos dados, apresentamos as análises da atividade dos estudantes, ao resolverem as situações do instrumento, na próxima seção.

## 4.2. ANÁLISES DA ATIVIDADE DOS ESTUDANTES AO RESOLVEREM AS SITUAÇÕES

Como implementamos o instrumento com 21 estudantes, três de cada ano de formação escolar, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, vamos identificá-los por uma sigla composta por três dígitos com a seguinte representação: o primeiro dígito é a letra E (representa estudante), o segundo é um número $n = 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3$ (representa

o ano escolar que o estudante cursa) e o terceiro é uma letra A, B ou C (que denomina o estudante). Por exemplo: E6B é o estudante do 6º ano do EF denominado por B; E2A é o estudante do 2º ano do EM denominado por A.

De forma análoga, para os trechos das entrevistas citados no texto, o pesquisador é indicado pela letra P.

Utilizaremos, também, TAV$n$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ para os teoremas em ação verdadeiros inferidos e TAF$n$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$ para os teoremas em ação falsos identificados. Por exemplo: TAV1 é o teorema em ação verdadeiro 1; TAF2 é o teorema em ação falso 2.

Consideramos, na análise da atividade dos estudantes colaboradores ao resolverem as situações do instrumento, como estratégia o modo de resolução adotado pelo sujeito para solucionar a tarefa.

### 4.2.1. Análise das resoluções da situação 1

Dentre as resoluções apresentadas nos protocolos escritos dos 21 estudantes entrevistados, referentes a situação 1, optamos em exibir[28] as respostas de E3A. Este, como pode ser observado na Figura 1, respondeu corretamente os três itens da situação. Nesses casos, quando o colaborador responde corretamente à tarefa sem apresentar dúvidas, quanto ao processo correto de resolução, com aporte em Vergnaud (1993), estamos considerando a situação como pertencente à Classe de Tipo 1 para esse sujeito. Ou seja: ele dispõe, em seu repertório, "[...] das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação" (Vergnaud, 1993, p.2).

Analogamente, outros oito estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A e E2A) responderam corretamente à situação 1 utilizando, no momento da entrevista, de esquemas automatizados para a sua resolução. Portanto, considerando Vergnaud (1993), classificamos essa situação como do Tipo 1 para estes sujeitos.

Além disso, para as situações classificadas, como do Tipo 1 para os sujeitos, a exemplo da situação 1 aos nove estudantes citados (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A), estamos considerando que na sua resolução foram mobilizadas,

[28] Apresentamos o protocolo escrito de resolução de pelo menos um estudante na análise de cada uma das situações implementadas na intenção de permitir a sua leitura sem a necessidade de trazer novamente o seu enunciado.

por esses sujeitos em ação, todas as ideias-base de função. Assumimos tal postura com base em Vergnaud (2009c, p. 22), pois, enquanto conceitos em ação, as ideias-base de função "[...] permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo [...]".

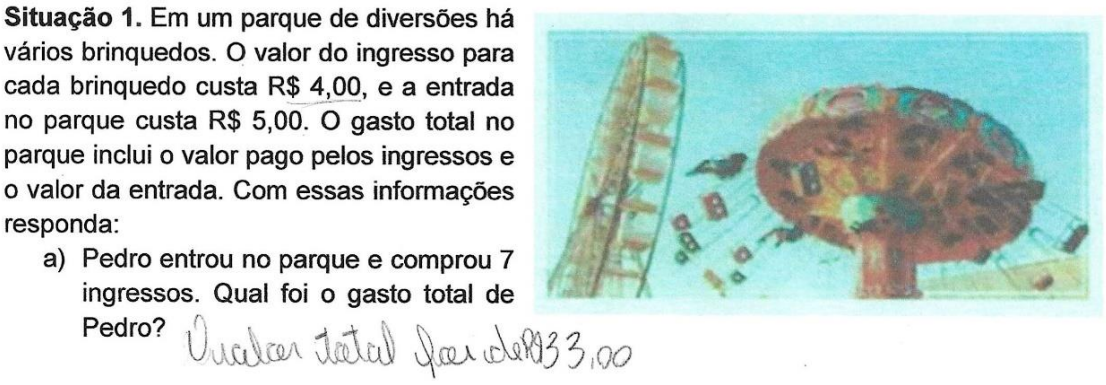



**Figura 1** – Resolução de E3A na situação 1
**Fonte:** da pesquisa

Além disso, ao identificarem o valor do ingresso para cada brinquedo (4 reais), como a taxa de variação da função ($a = 4$) e o custo da entrada (5 reais), como o coeficiente linear da função ($b = 5$), inferimos, com base nos protocolos escritos, a

exemplo das respostas de E3A, vide Figura 1, e nas entrevistas individuais, que estes nove estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A) mobilizaram o *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*

A mobilização do TAV1 decorre, assim interpretamos, da identificação da taxa ($a = 4$) e do coeficiente linear ($b = 5$) por parte dos estudantes, ao resolverem a situação 1. Um exemplo disso, pode ser observado no seguinte trecho da entrevista[29] de E3A:

*P: Como você explicaria a questão para um colega?*
*E3A: (Lê novamente o item a) Aqui, eu pegaria o valor de cada ingresso, que são quatro reais* (identificou a taxa) *e multiplicaria por sete, que foi o total de ingressos que ele comprou, e somaria cinco* (identificou o coeficiente linear)*, que é o valor da entrada no parque, porque pediu o valor total, então tem que somar tudo. [Na] segunda (item b), eu pegaria o total de ingressos, que são 12, e multiplicaria pelo preço dos ingressos, como eu fiz na primeira. Depois, somaria cinco também. E, aqui (item c), você tem que analisar o quê fez nas duas primeiras. Você multiplica o número de ingressos pelo valor deles* (identificou a taxa, $a = 4$) *e somou ao valor da entrada no parque* (identificou o coeficiente linear, $b = 5$)*.*

Outros 10 estudantes colaboradores (E6A, E6C, E7A, E8C, E9B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C) também mobilizaram, em observação aos seus protocolos escritos e entrevistas, o TAV1. Para exemplificar como interpretamos isso, apresentamos algumas respostas dos estudantes, durante suas entrevistas:

- E6C, ao ser questionado pelo pesquisador sobre como explicaria a situação 1 para um colega, respondeu: *Eu explicaria para ele que era para ele calcular, primeiro, o preço que Pedro entrou [no parque]* (que é de cinco reais – identificou o coeficiente linear) *e depois calcular o tanto de dinheiro que ele gastou só com os ingressos dos brinquedos* (referindo-se a multiplicar o número de ingressos por quatro, que é o valor de cada ingresso – identificou a taxa).
- E7A, ao ser questionada como resolveu os itens “a” e “b”, respondeu: *Eu fiz [...] o valor dos ingressos vezes a quantidade de ingressos* (o valor do ingresso é quatro

[29] As entrevistas não passaram por uma correção de língua portuguesa.

reais - identificou a taxa) *que ele comprou. Daí, [fiz] mais cinco que é o valor da entrada* (identificou o coeficiente linear).

- E2B, também ao ser questionado como fez os itens “a” *e* “b”, respondeu: *Aqui* (item a), *como era cinco reais a entrada no parque,* (identificou o coeficiente linear) *mais quatro, sete vezes quatro* (identificou a taxa) *da 28, que era o valor dos ingressos que ele comprou, mais cinco da entrada no parque, deu 33. E aqui (item b), se ele comprasse 12 ingressos, daria 48. Com os cinco da entrada no parque, daria 53.*

Interpretamos que a mobilização do TAV1 também pode ser observada nas estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes nos seus protocolos escritos. Como exemplo, apresentamos, na Figura 2, as resoluções de E8B frente aos itens “a” e “b” da situação 1.

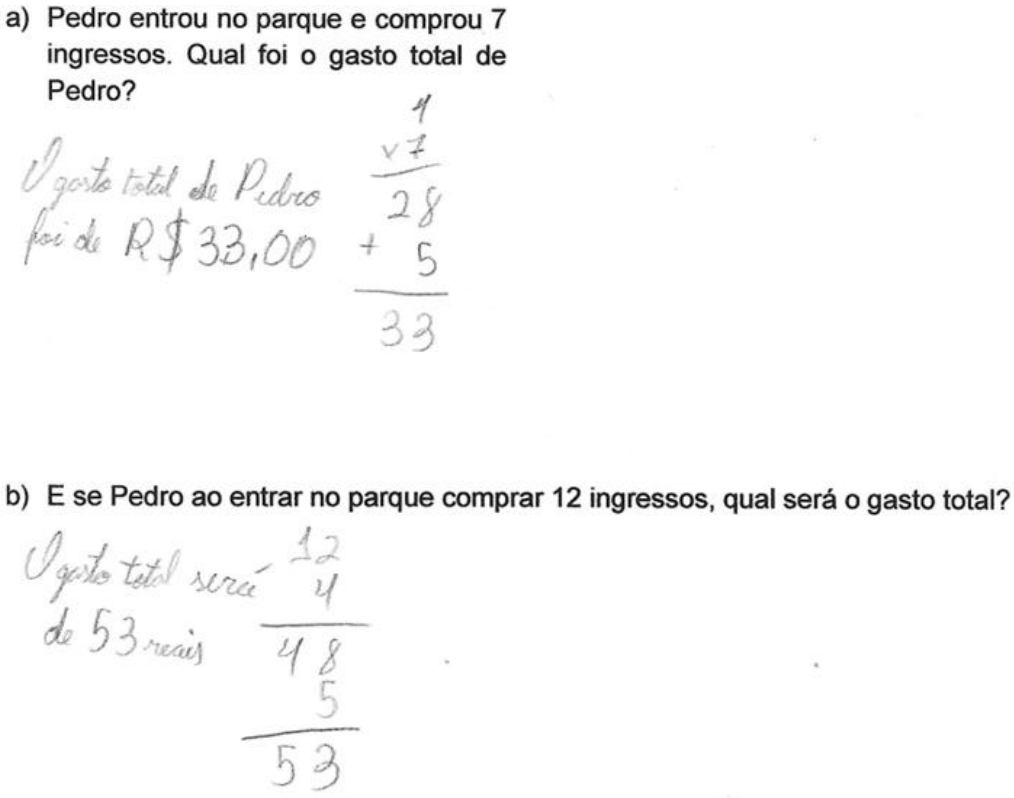



**Figura 2** – Resolução de E8B nos itens a e b da situação 1
**Fonte:** da pesquisa

Considerando a estratégia utilizada por E8B, ao resolver os itens “a” e “b” da situação 1, de acordo com a Figura 2, inferimos que ele mobilizou em sua ação o TAV1, ao considerar o valor do ingresso para cada brinquedo, quatro reais, como a taxa ($a = 4$) e o valor da entrada, cinco reais, como o coeficiente linear ($b = 5$).

Essa estratégia de E8B, de utilizar o algoritmo da multiplicação e da adição na vertical, também foi a utilizada por outros 16 estudantes entrevistados (E6A, E6B, E6C, E7A, E7B, E7C, E8A, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E1C, E2C, E3B e E3C). Observamos, com base nisso, que todos os estudantes do EF manifestaram tal estratégia de resolução para os itens “a” e “b” da situação 1. Dentre as estratégias dos outros quatro estudantes, E3A utilizou o algoritmo da multiplicação e da adição na horizontal, conforme Figura 1. E2A e E2B, por sua vez, utilizaram a calculadora para efetuar os cálculos necessários e somente escreveram a resposta nos seus protocolos escritos. Semelhante aos estudantes do EF – Anos Iniciais, E1B realizou a operação de sete vezes quatro, mais 5 ($7 \cdot 4 + 5$) na vertical, como uma soma contendo sete parcelas iguais a quatro e uma parcela igual a cinco, para resolver o item “a” da situação 1. No item “b”, também recorreu a mesma estratégia, com 12 parcelas iguais a quatro e uma parcela igual a cinco (o estudante escreveu 11 parcelas iguais a quatro no protocolo, mas fez a soma com a calculadora utilizando 12 parcelas iguais a quatro).

Já consideramos a mobilização da ideia-base de função de dependência pelos nove estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A), para os quais classificamos a situação 1 como de Tipo 1. Aos demais estudantes, interpretamos a manifestação dessa ideia-base por meio da análise das transcrições das suas entrevistas. Inferimos, por exemplo, que E9B mobilizou a ideia-base de dependência, na situação 1, ao considerar que o gasto total de Pedro depende da quantidade de ingressos para cada brinquedo, conforme fragmento a seguir:

*P: Como você entendeu a questão? (item a)*
*E9B: (...) eu entendi que ele tem que pagar cinco, que é obrigatório da entrada e cada brinquedo, quatro. Só que, daí, vai pagar para cada que ele for.*
*(...)*
*P: Como você faz para saber o gasto total?*
*E9B: Soma.*
*P: Soma o que?*
*E9B: Soma o que ele vai gastar com todas as coisas*
*P: Com quais coisas que ele vai gastar?*
*E9B: Com os ingressos e a entrada.*

Desta forma, concluímos que todos os estudantes, ao resolverem a situação 1, mobilizaram a ideia-base dependência. De acordo com Zanella e Rezende (2024), esse conceito pode ser mobilizado por estudantes do 5º ano do EF, ao resolverem problemas multiplicativos. De forma análoga, Silva (2021) e Dezilio (2022) também observaram a possibilidade da mobilização da ideia-base de dependência por estudantes do 5º ano do EF. Diante disso, podemos conjecturar que tal conceito já está sendo constituído, desde os Anos Iniciais do EF.

Analogamente, inferimos com base nos protocolos escritos e nas transcrições das entrevistas, que a ideia-base de função regularidade foi mobilizada pelos estudantes em ação ao resolverem a situação 1, com exceção de E7B. Consideramos, semelhante a análise de Dezilio (2022), as repostas aos itens "a*"* e "b*",* como indicadores da manifestação da regularidade pelos estudantes em ação. Para resolver o item "a*"*, o sujeito precisava identificar a taxa de variação da função ($a = 4$) e o coeficiente linear da função ($b = 5$) para obter a solução $4 \cdot 7 + 5 = 33$. Na sequência, no item "b", recorrendo à ideia-base de função regularidade, bastava o estudante raciocinar do mesmo modo, fazendo $4 \cdot 12 + 5 = 53$. Um exemplo disso pode ser observado nas respostas de E8B aos itens "a" e "b" da situação 1, conforme a Figura 2 (supracitada).

Ainda em relação a inferência da mobilização da ideia-base de função regularidade pelos estudantes, ao resolverem a situação 1, apresentamos a resposta de E6B sobre a forma que ele explicaria para um colega como calcula-se o gasto total: "*Tipo, se ele comprou 2 ingressos, cada ingresso é quatro [reais]. [Então] ele faz 2 vezes quatro, daí, mais cinco, que é o valor da entrada, que daí dá 13".* Interpretamos, neste fragmento, que E6B identificou que, ao variar a quantidade de ingressos para cada brinquedo, tem-se uma regularidade nos valores resultantes no gasto total.

A ideia-base de função variável também foi inferida na ação dos estudantes ao resolverem a situação 1. Com exceção de E7B, E1B e E3B, interpretamos que os demais recorreram a esse invariante operatório em sua atividade frente à situação 1. Como exemplo, apresentamos um fragmento da entrevista de E7C, no qual observamos a identificação realizada pelo estudante, ou seja, de que o gasto total no parque ($f(x)$) e a quantidade de ingressos para cada brinquedo ($x$) são variáveis.

*P: Se variar a quantidade de ingressos, o que acontece?*
*E7C: Como assim?*

*P: Se aumentar a quantidade de ingressos, por exemplo.*
*E7C: Seria a mesma coisa, só mudaria o valor, a quantidade que ele faria vezes.*
*P: E o gasto total?*
*E7C: Também. Tipo, a quantidade seria quatro vezes outra quantidade (número de ingressos) e mais cinco da entrada. Daí, o valor (gasto total) seria outro também.*

Podemos observar, a partir desse fragmento da entrevista de E7C, a mobilização de todas as ideias-base de função. Interpretamos que E7C identificou a dependência do gasto total em relação ao número de ingressos comprados, ao considerar, manifestando a variável, que um aumento no número de ingressos acarretaria aumento no gasto total. Além disso, ao explicar que o gasto total seria outro, porque resultaria da adição dos cinco reais da entrada com a multiplicação por quatro (custo de cada ingresso) da quantidade de ingressos, conjecturamos que E7C mobilizou as ideias-base de: regularidade, pois identificou que, ao variar a quantidade de ingressos para cada brinquedo, tem-se uma regularidade nos valores do gasto total no parque e de generalização, uma vez que sua explanação generaliza a situação em língua natural.

No item “c” da situação 1, quando era exigida a mobilização da ideia-base de função generalização, como previsto na análise prévia, com base no estudo de Dezilio (2022), 12 estudantes (E6A, E6C, E7B, E7A, E8C, E9B, E1B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C) não conseguiram resolver corretamente. E1B argumentou que não entendeu a pergunta. Outros estudantes resolveram de diferentes formas errôneas: considerando o gasto total do item “a”, como a resposta ao item “c” (E3C e E9B); fazendo a diferença entre o valor que ele tinha e quanto ele gastou (E7B); tentando uma regra de três (E3B e E8C); considerando a quantidade de ingressos vezes quatro (E2C); supondo oito ingressos e efetuando $8 \cdot 4 = 32 + 5$ (E2B); somando os resultados dos itens “a” e “b” (E6A, E6C e E7A), análogo às respostas de quatro dos seis grupos de estudantes do 5º ano na investigação de Dezilio (2022); e, por fim, considerando a quantidade de ingressos vezes o valor do ingresso somado com a quantidade de ingressos vezes o valor da entrada por meio da equação[30]: $4x + 5x = x$ (E1C).

Na investigação de Dezilio (2022), ao implementar a situação 1 com estudantes do 5º ano do EF, segundo a autora, dois dos seis grupos participantes resolveram os

[30] Nesta equação, E1C utilizou erroneamente o $x$ nos dois membros na intenção de representar os valores desconhecidos.

itens “a” e “b” multiplicando a quantidade de ingressos (variável) tanto pela entrada no parque (coeficiente linear da função), quanto pelo valor do ingresso (taxa de variação da função), semelhante à resposta de E1C, no item “c” da situação 1. Na sua investigação, Dezilio (2022, p. 95, grifo da autora) considerou que os estudantes desses dois grupos mobilizaram o “[...] seguinte *teorema em ação* falso: Seja $f$ uma relação funcional, então $f(x) = a.\ x + b.\ x$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$”. Diante disso, inferimos que E1C **não**[31] mobilizou o TAF1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + bx$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$, conforme previsto na análise *prévia.* Observando que E1C resolveu acertadamente os itens anteriores da situação 1, diferentemente dos colaboradores da investigação de Dezilio (2022), conjecturamos que ele usou tal raciocínio de forma esporádica, quando ainda recorria aos seus esquemas, na intenção de escrever uma expressão para generalizar o item “c”, como pode ser observado no fragmento a seguir:

*P: Como você entendeu?*
*E1C: Essa aqui (item c) eu fiz, como se fosse uma fórmula para o valor de cada um. O valor do ingresso para entrar no parque faria vezes o valor. A quantidade de ingressos vezes o valor. E, aqui, somando com a quantidade de ingressos dos brinquedos, com o valor de cada, para entrar no brinquedo, o resultado é a soma de tudo.*

Quanto a mobilização da ideia-base de função generalização pelos estudantes, inferimos que somente os nove estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A) para os quais classificamos a situação 1, como de Tipo 1, apresentaram soluções que generalizam a tarefa. Dentre esses, como não era exigida na tarefa a apresentação de uma expressão algébrica que generalizasse a situação 1, observamos que E6B, E8A, E8B e E1A generalizaram em linguagem natural, como pode ser observado na resposta de E8A, quando questionado sobre como entendeu a questão: *(...) o valor do ingresso custa quatro e a entrada custa cinco então é só multiplicar a quantidade de ingressos por quatro e daí mais cinco da entrada.*

[31] Baseados em Vergnaud (1993, 1996, 2009a, 2009c, 2019), consideramos que tal conhecimento, por não figurar nas suas resoluções a todos os itens da situação 1, não é um invariante operatório presente nos esquemas desse estudante.

Considerando a quantidade de ingressos, como a variável $x$, pode-se modelar a resposta de E8A pela seguinte expressão algébrica: $4x + 5$.

Consideramos que os estudantes E7C, E9A, E9C, E2A e E2B generalizaram a situação 1 tanto em linguagem natural, ao explicarem como se calcula o gasto total de Pedro no parque para uma quantidade qualquer de ingressos, quanto por meio da expressão algébrica. Respaldados em Vergnaud (2007), conjecturamos que esses sujeitos manifestaram conhecimentos frente a situação 1 tanto na sua forma operatória (correspondente ao saber fazer), quanto na sua forma predicativa (correspondente ao saber expressar). Um exemplo dessa mobilização nas duas formas do conhecimento pode ser observado na resposta de E7C, conforme o seguinte fragmento:

*P: Como você respondeu a letra c?*
*E7C: É, seria quatro vezes um número que seria o xis ($x$), que não tem quantidade, mais cinco da entrada que seria igual a xis ($x$), porque não tem resultado (algebricamente a estudante fez: $4 \cdot x + 5 = x$).*
*P: O xis é o que?*
*E7C: É, porque não tem um valor, você não sabe o valor, tem o xis (...) para representar um número que eu não sei ainda.*
*P: O número de que?*
*E7C: Da quantidade de ingressos e do resultado que seria.*
*P: A quantidade de ingressos e o resultado é o mesmo?*
*E7C: Não. Daí teria que colocar outra letra.*
*P: Qual letra você usaria?*
*E7C: Pode ser qualquer uma, mas é o xis ($x$) e o ípsilon ($y$) (altera a equação no protocolo para: $4 \cdot x + 5 = y$).*
*(...)*
*P: Como você explicaria essa questão para um colega seu?*
*E7C: É que tem que pegar o valor do ingresso, que é quatro, [fazer] vezes o valor que ele comprou, a quantidade [de ingressos] que ele comprou, mais cinco da entrada que você chegaria no resultado.*

Referente a generalização algébrica apresentada como resposta ao item “c” pelos estudantes, evidenciamos a resposta de E7C, conforme Figura 3, formalizada

por meio da equação algébrica $4 \cdot x + 5 = y$. Nas outras resoluções ao item “c”, E9A, E9C e E2A responderam $5 + 4x$ e E2A respondeu $4 \cdot x + 5$. Ao compararmos essas formas algébricas, identificamos que a resposta de E7C é mais próxima de uma notação funcional, na qual o $x$ é a variável independente (quantidade de ingressos comprados) e o $y$ é a variável dependente (gasto total de Pedro no parque). Além disso, assim como foi observado nas pesquisas de Calado (2020), Bernardino (2022) e Siqueira (2023), essas respostas indicam a preferência dos estudantes em recorrer a letra $x$, para representar variáveis.

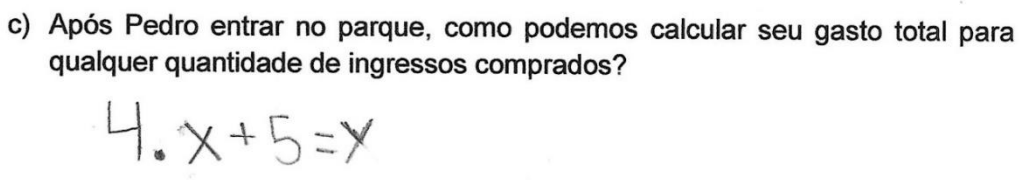



**Figura 3** – Resolução de E7C no item c da situação 1
**Fonte:** da pesquisa

Diante dessas análises realizadas acerca das resoluções apresentadas pelos estudantes colaboradores, ao resolverem a situação 1, elaboramos o Quadro 11 na intenção de resumir as principais informações.

**Quadro 11**– Resultados da implementação da situação 1

| Ano | Estudante | Resposta[32] | TA | Ideias-base[33] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E6B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E6C | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| 7 | E7A | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E7B | **E:** a, b e c | Não identificado | D | Tipo 2 |
| | E7C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 8 | E8A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E8B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E8C | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| 9 | E9A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E9B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E9C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 1 | E1A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E1B | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D e R | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |

[32] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada.
[33] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | E2B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E3B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D e R | Tipo 2 |
| | E3C | **E:** a, b e c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

Na análise prévia da situação 1, realizada na seção 3.6.1, com base na investigação de Dezilio (2022), consideramos a possibilidade de os estudantes mobilizarem dois TA, a saber: o TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$ e o TAF1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + bx$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. Então, observando o Quadro 1, enfatizamos que nas nossas análises inferimos somente a mobilização do TAV1 pelos estudantes, exceto por E7B e E1B.

Em relação as ideias-base de função, observamos, a partir das análises resumidas no Quadro 11, que os estudantes mobilizaram com mais frequência a dependência, haja vista ter sido mobilizada por todos os estudantes. A regularidade foi mobilizada por 20 estudantes, exceto por E7B. Já a variável foi compreendida por 18 estudantes, à exceção de E7B, E1B e E3B. Por fim, a generalização foi a ideia-base de função menos compreendida pelos estudantes, sendo mobilizada por nove deles (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A). Tal dificuldade em relação a generalização já era esperada, conforme previsto na análise *prévia* com base no estudo de Dezilio (2022). Além disso, Siqueira (2023) e Bernardino (2022) observaram dificuldade de estudantes do 3º ano do EM relativo a compreensão da ideia-base de função generalização. Diante disso, podemos conjecturar que as dificuldades relacionadas a expressão da generalização perfazem todo o percurso da formação escolar compreendido pelas diferentes etapas da Educação Básica, com destaque para os Anos Finais do EF e o EM.

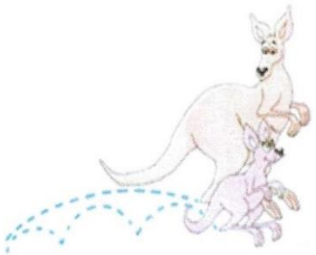
Após realizarmos essas análises da situação 1, passamos a descrever os resultados das análises da implementação da situação 2, na próxima seção.

### 4.2.2. Análise das resoluções da situação 2

A situação 2, diferentemente das outras que são problemas do tipo misto, é um problema do CCM. Como vimos na sua análise *prévia* (seção 3.6.2), seu nível de

complexidade é adequado ao 5º ano do EF. É possível visualizarmos uma resolução dessa tarefa em observação ao protocolo escrito de E8A, conforme Figura 4.

**Situação 2.** A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la.



Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com os do filho:

| | Mãe | Filho |
|---|---|---|
| Número de pulos | 1 | 3 |
| | 2 | 6 |
| | 3 | 9 |
| | 4 | 12 |
| | 5 | 15 |
| | 6 | 18 |

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

1
26
x 3
78

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

222 | 21
012 | 10
12
00

c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

Sim, porque a cada um pulo da mãe são 3 do filho, logo se multiplicar por 3 os pulos da mãe acharemos a quantidade de pulos do filho.

**Figura 4** – Resolução de E8A na situação 2
**Fonte:** da pesquisa

Inferimos, com base no protocolo escrito de E8A na situação 2 (Figura 4), análogo à interpretação realizada por Silva (2021) em sua tese, que ele mobilizou implicitamente as ideias-base de função dependência, variável e regularidade, ao

preencher corretamente a tabela e, ao solucionar acertadamente os itens “a” e “b”. Interpretamos que, ao compreender que o número de pulos do filho depende do número de pulos da mãe (dependência – ao preencher a tabela), E8A identificou que tanto os pulos da mãe, como os do filho podem variar (variável), e ao variar o número de pulos da mãe tem-se uma regularidade na variação do número de pulos do filho (regularidade).

Consideramos que a compreensão de E8A frente à situação 2, revelando a mobilização dessas ideias-base de função, foi reforçado na sua reposta ao item “c”, quando ele manifesta a ideia-base de função generalização em linguagem natural. Ao considerar que “a cada um pulo da mãe são 3 do filho”, inferimos que ele explicita a compreensão da dependência entre os pulos da mãe e do filho, bem como que eles podem variar com base nessa regularidade. Por fim, inferimos que manifestou a generalização em linguagem natural, ao considerar (vide Figura 4) que “[...] se multiplicar por 3 os pulos da mãe acharemos a quantidade de pulos do filho”. Tal argumento pode ser modelado algebricamente por uma relação funcional $f$, sendo a cada pulo da mãe canguru ($x$) associado ao número de pulos do filhote canguru ($f(x)$) por meio da expressão $f(x) = 3x$.

Apesar de inferirmos que E8A mobilizou as quatro ideias-bases de função, ao resolver a situação 2, classificamos essa tarefa, como de Tipo 2 para este sujeito, ou seja: interpretamos que ele não possuía competências necessárias para o tratamento imediato da situação (Vergnaud, 1993). Para tanto, observamos na sua resposta ao item “c” a não identificação da necessidade de concluir que não era possível calcular qualquer número de pulos do filho, mas somente o número de pulos decorrente da multiplicação do número de pulos dados pela mãe por três.

Outros seis estudantes (E6A, E8B, E9A, E9B, E2C e E3A), semelhante ao observado nas resoluções de E8A, apresentaram indícios da mobilização das ideias-base de dependência, regularidade, variável e generalização nas suas entrevistas e protocolos escritos, mas, apesar disso, consideraram erroneamente que era possível calcular qualquer quantidade de pulos do filho canguru nas suas respostas ao item “c”. Um exemplo disso pode ser observado no seguinte fragmento da entrevista de E6A:

*P: Você entendeu a questão?*
*E6A: Sim.*

*P: Como você explicaria a questão para um colega?*
*E6A: Cada pulo da mãe, o filho tem que pular três vezes (indício de regularidade, dependência e variável). [No item a] ela pulou 26, ele tem que pular vezes três. Olha aqui, eu ia falar assim: a mãe dá um pulo e o filho tem que pular três. Então, aqui (item a), a mãe pulou 26 e o filho tem que pular vezes três, 26 vezes três dá 78 pulos do filho. (item b) Então eu dividi 222 por três, que é o tanto de pulos que a mãe deu. Daí, eu fiz 74 vezes três, para tirar a prova real. E a c, aqui, eu acho que sim, porque, enquanto a mãe pula uma vez, é só calcular vezes três os pulos da mãe (indício de generalização).*

Consideramos que cinco estudantes (E6B, E7A, E7C, E9C e E2A) resolveram acertadamente todos os itens da situação 2. Nesse caso, conjecturamos que a situação é do Tipo 1 para esses sujeitos, pois eles apresentaram de forma automatizada competências para solucionar a tarefa (Vergnaud, 1993). Portanto, seguindo o mesmo critério adotado na situação 1, consideramos que estes estudantes mobilizaram todas as ideias-base de função.

Conjecturamos que oito estudantes (E6C, E8C, E1A, E1B, E1C, E2B, E3B e E3C) mobilizaram somente as ideias-base de função de dependência, regularidade e variável, ao resolverem a situação 2. Estes sujeitos, além de solucionarem adequadamente os itens “a” e “b”, evidenciando a constituição desses invariantes operatórios, expressaram, nas suas entrevistas, argumentos que reforçaram essa interpretação. Um exemplo disso pode ser observado no trecho da resposta de E3C sobre como ele tinha entendido a questão: *Eu vi aqui pela tabela, que a cada pulo que a mãe canguru dava, o filho tinha que dar três para acompanhar ela.* Com base nisso, inferimos que E3C mobilizou as ideias de dependência, regularidade e variável, ao descrever que visualizou na tabela que, a cada pulo da mãe, o filho dava três.

Quanto as estratégias utilizadas pelos estudantes colaboradores, ao resolverem os dois primeiros itens da situação 2, com exceção de E7B e E3A, todos os outros utilizaram os algoritmos da multiplicação e da divisão escritos na vertical, como pode ser visualizado no protocolo das respostas de E8A, na Figura 4. Interpretamos que, para responder o item “a”, estes estudantes identificaram a taxa de variação da função ($a = 3$), ao considerarem que a cada pulo da mãe canguru, seu filho dá três. Com base nisso, inferimos a possibilidade de associar as estratégias desses estudantes com o *TAV2: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é*

*a taxa, então* $f(x) = ax$, *com* $a, x \in \mathbb{R}$. Analogamente, consideramos que eles compreenderam, ao resolver o item "b", que os 222 pulos do filho estão relacionados ao número de pulos da mãe por meio da taxa de variação da função ($a = 3$). Então, ao dividirem 222 por três, conjecturamos que as estratégias desses estudantes podem ser modeladas por meio do *TAV3: Seja* $f$ *uma relação de proporcionalidade e* $a \neq 0$ *é a taxa, então* $x = \frac{f(x)}{a}$, *com* $a, x \in \mathbb{R}$.

A estratégia utilizada por E3A, ao resolver os dois itens iniciais da situação 2, foi a regra de três (vide Figura 5). Neste caso, consideramos que a estratégia deste estudante pode ser modelada por uma relação funcional $f$ da seguinte forma: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade tal que $f(1) = 3$ e $f(26) = x$. Então, $x = f(26) = f(26 \cdot 1) = 26f(1) = 26 \cdot 3 = 78$. Com base nisso, conjecturamos que a estratégia de E3A pode ser associada ao *TAV6: Seja* $f$ *uma relação de proporcionalidade, então* $f(nx) = nf(x)$, *com* $n, x \in \mathbb{N}$. Consideramos, no caso da estratégia de E3A, o caso particular do TAV6, para $x = 1$, dado por: $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1)$, com $n = 26$.

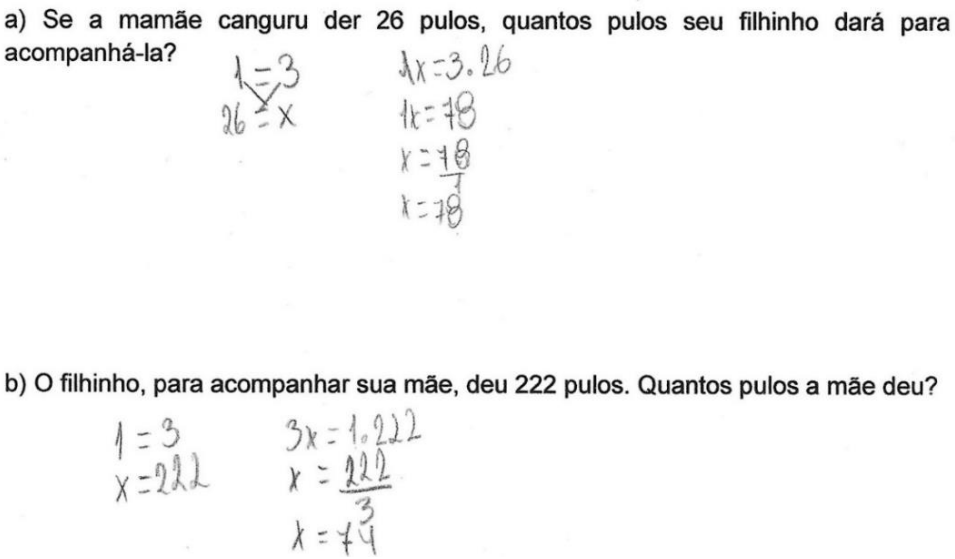


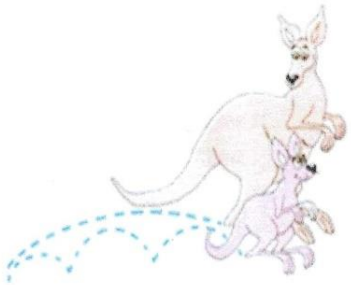

**Figura 5** – Resolução de E3A nos itens a e b da situação 2
**Fonte:** da pesquisa

Inferimos na mobilização do TAV6 da estratégia de E3A por considerar, com base em Vergnaud (1993, 2007), que tal conhecimento já pode ser manifestado por crianças entre oito e dez anos de idade. Além disso, E3B, ao ser questionado se teria outra forma de resolver a questão, respondeu assim: *Eu faria por regra de três.* Observamos, portanto, que tal estratégia faz parte do conhecimento mobilizado por esses estudantes, ao se depararem com uma tarefa.

Outra estratégia distinta foi a utilizada por E7B. Ao interpretar a tabela erroneamente, considerou que bastava contar os pulos da mãe canguru e sempre somar mais dois pulos para o filho canguru. Sua estratégia fica evidente nas suas respostas, conforme a Figura 6.

**Situação 2.** A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la.

Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com os do filho:



| | Mãe | Filho |
|---|---|---|
| **Número de pulos** | 1 | 3 |
| | 2 | 4 |
| | 3 | 9 |
| | 4 | 6 |
| | 5 | 7 |
| | 16 | 18 |

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

28 pulos.

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

220 pulos.

**Figura 6** – Resolução de E7B nos itens a e b da situação 2
**Fonte:** da pesquisa

Durante a entrevista, ao ser questionado se tinha entendido a questão, E7B respondeu: *É, mais ou menos. Eu fiquei com dificuldade, porque aqui [no enunciado] ele fala a cada três pulos. Daí, aqui [na tabela], um e já tem o três, seria um, dois, três. Mas daí ficou só um, dois, daí já tem o três.*

Com base em Vergnaud (1993), ao analisarmos o protocolo escrito de E7B (Figura 6) e considerando sua entrevista, conjecturamos que tal estudante não mobilizou ideias-base de função pertinentes para a resolução da situação 2.

A partir das análises relativas a situação 2 apresentadas, formulamos o Quadro 12, na intenção de resumirmos as informações.

**Quadro 12** – Resultados da implementação da situação 2

| Ano | Estudante | Resposta[34] | TA | Ideias-base[35] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E6B | **C:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E6C | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| 7 | E7A | **C:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E7B | **E:** a, b e c | Não identificado | Nenhuma | Tipo 2 |
| | E7C | **C:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 8 | E8A | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E8B | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E8C | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| 9 | E9A | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E9B | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E9C | **C:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 1 | E1A | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **C:** a e b **E:** c | TAV6 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a e b **E:** c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3C | **E:** a, b e c | TAV2 e TAV3 | D, V e R | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

Considerando as análises apresentadas no Quadro 12, observamos que, com exceção de E7B e E3A, os outros estudantes colaboradores apresentaram indícios da mobilização de dois TA: o *TAV2: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$* e o *TAV3: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $a, x \in \mathbb{R}$,* como indicado no estudo da situação 2 previamente.

Além disso, diferentemente do previsto na análise *prévia,* E3A mobilizou o *TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$.* Esse TAV também foi observado na tese de Silva (2021), ao implementar a situação 2 com estudantes de um 5º ano do EF. No entanto, esperávamos que, devido ao fato dos nossos colaboradores serem de níveis mais avançados de ensino, poderiam optar

[34] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada.
[35] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

por outros TA, como o TAV2, por exemplo. De acordo com Vergnaud (2019, p. 13, grifo do autor), “Sem surpresa, as primeiras situações compreendidas pelos alunos são *situações de proporção simples, nas quais é preciso efetuar uma multiplicação,* com números inteiros pequenos [...]”.

Assim como previsto, com base nos resultados da investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020), oito estudantes (E6C, E8C, E1A, E1B, E1C, E2B, E3B e E3C) não conseguiram generalizar a situação 2 por meio do conceito de função, apesar de mobilizarem as ideias-base de função dependência, regularidade e variável.

Ao considerar a generalização, observamos que 12 estudantes (E6A, E6B, E7A, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E9B, E2A, E2C e E3A) apresentaram indícios da manifestação dessa ideia-base em linguagem natural. Destes, como não é solicitado a generalização na forma algébrica, somente três generalizaram a situação algebricamente: E9A usou a notação funcional para a situação 2 dada por $3 \cdot x = y$, E9C apresentou a expressão $M \cdot 3$ e E2A escreveu $3x$. Esse resultado corrobora o previsto na BNCC (Brasil, 2018) quanto a possibilidade de formalização do conceito de função afim no 9º ano do EF.

Uma vez descritas essas análises da implementação da situação 2, passamos a discutir, na seção subsequente, os dados produzidos com a implementação da situação 3.

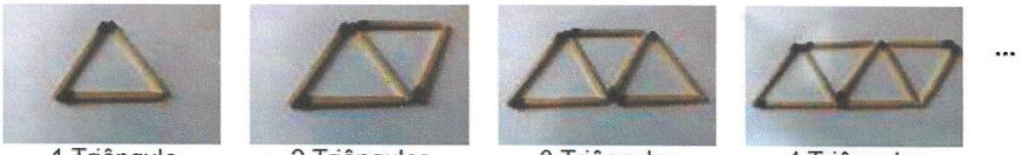
### 4.2.3. Análise das resoluções da situação 3

Com base na análise prévia dessa situação, com aporte nas observações de Tinoco (2002) e Silva (2021), já tínhamos a expectativa de que sua resolução poderia ser difícil, em especial para os estudantes do 6º e do 7º ano do EF. No entanto, após a análise da atividade dos estudantes entrevistados, observamos que as dificuldades relativas a resolução da situação 3, especialmente no tocante à generalização, manifestaram-se em todos os níveis de escolarização investigados. Podemos observar tal fato nas respostas de E3A, de acordo com a Figura 7.

Com base na atividade de E3A frente à situação 3, observamos que, apesar de as suas respostas resolverem corretamente aos itens “a” e “b” da tarefa, no item “c” considera a ideia de regularidade e não consegue mobilizar a ideia-base de função generalização. Usa a estratégia, analogamente aos estudantes do 5º ano do EF,

colaboradores da investigação de Silva (2021), de continuar a tabela e resolver por recorrência, isso é, aumentando a cada novo triângulo mais dois palitos.

**Situação 3.** Olhe com atenção a sequência de triângulos construídos com palitos de fósforo:




a) Agora complete a tabela relacionando a quantidade de triângulos formados com o número de palitos de fósforo usados:

| Número de triângulos | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Palitos usados | 3 | 5 | 7 | 9 |

5 = 11
6 = 13 7 = 15 8 = 17 9 = 19

b) Quantos palitos de fósforo são necessários para formar 5 triângulos? E para formar 9 triângulos? 11 palitos são necessários para 5 triangulos e 19 para 9 Triangulos

c) Podemos encontrar a quantidade de palitos de fósforo que vamos usar para formar qualquer número de triângulos? Como devemos pensar para resolver esse desafio?

Pudemos sim, analise que o numero de palitos aumenta de 2 em 2 para formar novos Triangulos.

**Figura 7** – Resolução de E3A na situação 3
**Fonte:** da pesquisa

Todos os estudantes colaboradores recorreram à representação pictórica, para completar a tabela no item “a”. Ao passar para a resolução do item “b”, esperávamos que conseguiriam compreender a regularidade presente nas linhas da tabela associando a cada novo triângulo mais dois palitos. Porém, ao analisar as entrevistas

e os protocolos escritos dos colaboradores, identificamos que sete deles (E6A, E6B, E7B, E9B, E1C, E2B e E2C) utilizaram, como estratégia, a continuação da representação pictórica para efetuar a contagem do número de palitos, como pode ser visualizado na Figura 8. Suas estratégias a fim de resolver o item "b" foram explicadas, de forma análoga à resposta dada por E6A: *Eu fui desenhando os triângulos e fui contando quantos palitinhos ia usar*.

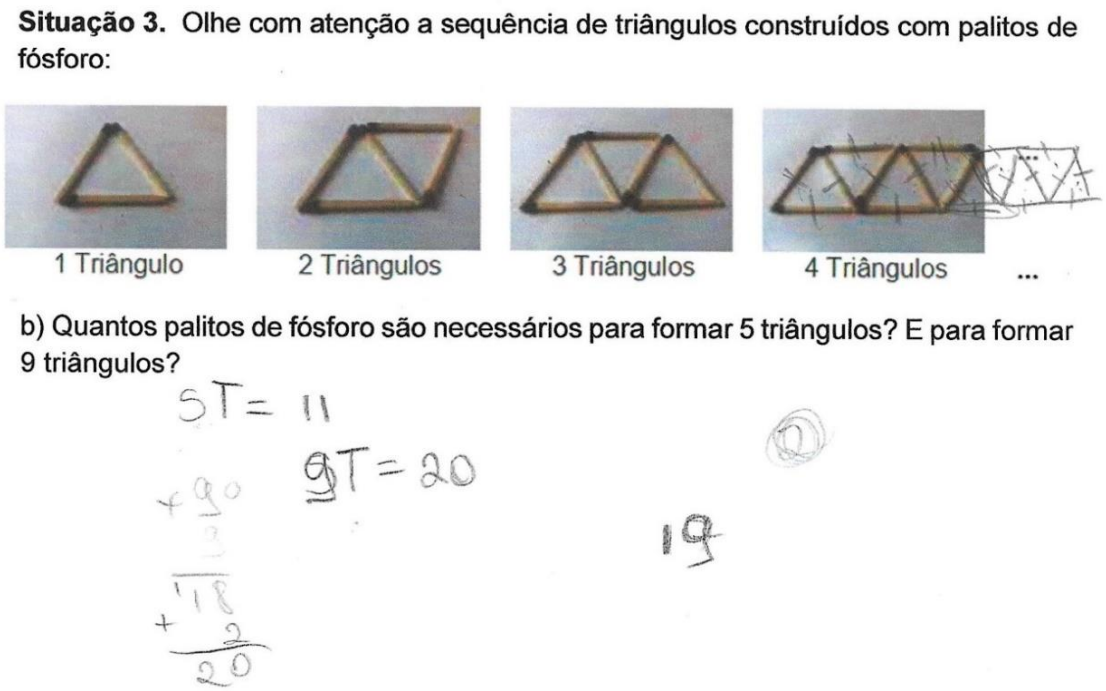



**Figura 8** – Resolução de E1C no item b da situação 3
**Fonte:** da pesquisa

Antes de descrevermos outra estratégia utilizada pelos estudantes colaboradores, ao resolverem a situação 3, precisamos explicitar como é possível efetuar o reconhecimento do termo geral de uma progressão aritmética[36] (PA). Considerando uma PA dada pela sequência[37] $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, de razão[38] $r$, segue que "[...] o termo geral é dado por um polinômio em $n$, $a_n = a_1 + (n-1)r = r \cdot n + (a_1 - r)$" (Lima *et al.,* 2004, p. 4). Então, se pensarmos nessa PA como uma função que associa a cada número natural $n$ o valor $a_n$, substituindo $n$ por $x$, temos uma função $f$ que associa a cada número natural $x$ o valor $f(x)$ com termo geral igual a:

[36] "Progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo" (Lima *et al.,* 2004, p. 1).
[37] "Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais" (Lima *et al.,* 2006, p. 74).
[38] "O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão" (Lima *et al.,* 2004, p. 1).

$f(x) = f(1) + (x-1) \cdot r = rx + (f(1) - r)$. Na situação 3, a sequência que relaciona o número de triângulos, formados ao número de palitos usados, é uma PA de razão $r = 2$ e primeiro termo $a_1 = 3$. Ao considerar essa PA, como uma função $f$ que associa o número de triângulos formados $x$ ao número de palitos usados $f(x)$, temos como termo geral: $f(x) = 3 + (x-1) \cdot 2 = 2x + (3-2) = 2x + 1$.

Com base nisso, interpretamos que 11 estudantes (E6C, E7A, E7C, E8A, E8C, E9A, E9C, E1A, E1B, E3A e E3B) apresentaram indícios, ao resolverem a situação 3, da mobilização de conhecimentos que podem ser associados ao termo geral de uma PA. Ao considerarem que a cada novo triângulo formado será usado mais dois palitos, demonstrando a compreensão da ideia de regularidade presente na situação 3, inferimos que esses sujeitos mobilizaram[39] o *TAV7: Seja $f$ uma progressão aritmética e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = f(1) + (x-1)a$, com $a, x \in \mathbb{N}$.* Para ilustrar como interpretamos, apresentamos a resolução do item "c" por E8A (vide Figura 9) e o seguinte fragmento da entrevista de E6C:

*E6C: (...) está indo de dois em dois. Parece que um triângulo usava uma parte de outro.*
*P: Está indo de dois em dois?*
*E6C: Pelo jeito sim, mas tem que ver. (item b) Olha, podia fazer o desenho dos triângulos, mas acho que sei uma fórmula mais rápida e fácil para poupar teu tempo.*
*P: Qual fórmula?*
*E6C: Pelo que estou vendo aqui, a ordem é indo por dois, está indo de dois em dois. Então, se fosse cinco, nove mais dois é igual a 11. Para nove triângulos, seria utilizado 19 palitos de fósforo.*
*P: Você pensa que teria outra forma de fazer?*[40]
*E6C: Poderia desenhar os triângulos. Ia demorar um pouco (risos).*
*P: E o item c?*
*E6C: (...) Deixa eu pensar. Tipo... qualquer número, vou explicar do meu jeito. Qualquer número, vamos supor dez. Como no primeiro a gente começa pelo 3*

[39] Também consideramos que mobilizaram implicitamente o TAV7 todos os estudantes que utilizaram a estratégia de fazer $f(x) = f(x-1) + a$ pois, no contexto da situação 3, no qual $f(1) = 3$ e $a = 2$, iniciaram fazendo: $f(2) = f(1) + 2$ que é o TAV7 para $x = 2$. Além disso, inferimos que E7C, apoiado na mobilização implícita do TAV7, mobilizou um conhecimento mais geral ao considerar que para saber quantos palitos iria usar para fazer nove triângulos pensou em: $f(9) = f(4) + (9-4) \cdot 2$.
[40] Neste momento, sem ter a intenção, o pesquisador influencia o estudante a pensar em outra forma de resolução.

*(identificou $f(1)$), a gente vai fazendo mais dois, mais dois, mais dois (identificou a taxa – razão da PA). Aqui ó (mostra na folha): o resultado dessas duas (3+2) seria para dois triângulos, o resultado dessas duas (3+2+2), para três [triângulos]. Então, iria fazendo adição até encontrar o resultado [para o] número dez, [que] seria 21, 19+2.*

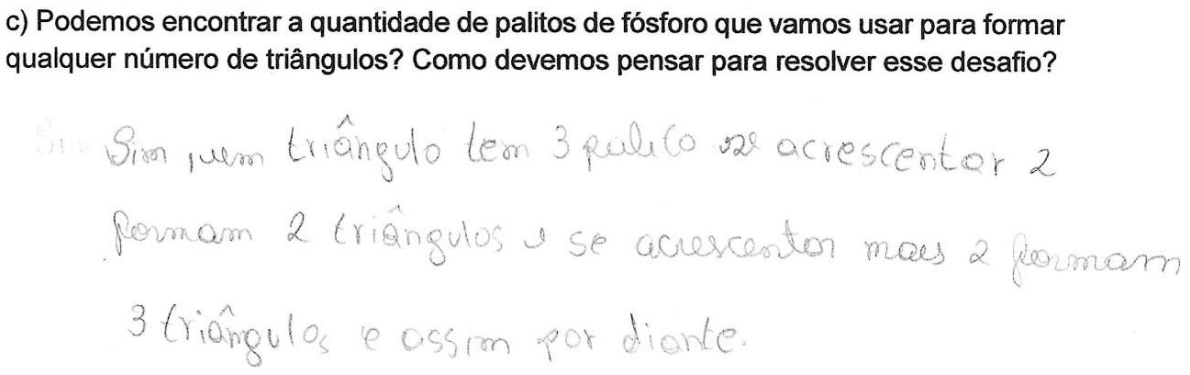
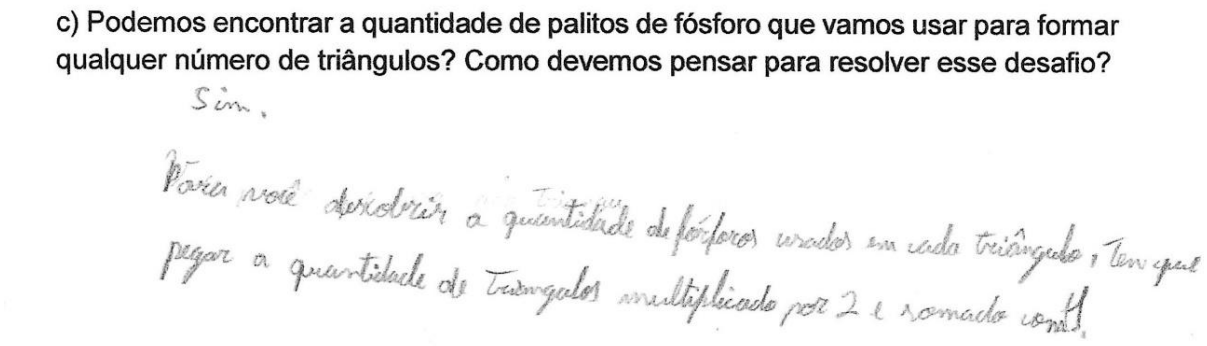



**Figura 9** – Resolução de E8A no item c da situação 3
**Fonte:** da pesquisa

Com base nesse fragmento da entrevista de E6C, inferimos que o estudante identificou o valor de $f(1) = 3$, ao expressar que vai três fósforos para formar o primeiro triângulo. Continuando, E6C argumenta que, para formar dois triângulos, usa $3 + 2$ palitos ($f(2) = 3 + 2$), ou seja, $f(2) = f(1) + (2 - 1) \cdot 2$ e, para formar três triângulos, usaria $3 + 2 + 2$ palitos ($f(3) = 3 + 2 + 2$), isto é, $f(3) = f(1) + (3 - 1) \cdot 2$. Portanto, inferimos que E6C mobilizou implicitamente em ação, ao resolver a situação 3, o *TAV7: Seja $f$ uma progressão aritmética e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = f(1) + (x - 1)a$, com $a, x \in \mathbb{N}$.* Analogamente, a resposta de E8A, conforme a Figura 9, permite inferir a mobilização do TAV7.

Outra estratégia de resolução foi utilizada pelos estudantes E8B, E2A e E3C. Conforme pode ser visualizado na Figura 10, E8B conseguiu generalizar a situação em linguagem natural. Inferimos que este estudante identificou a regularidade na tabela e conseguiu generalizar a situação, ao manifestar que o número de palitos de fósforo ($f(x)$), resultava da adição entre a multiplicação do número de triângulos $x$ por dois (2) (identificou a taxa de variação da função, $a = 2$) e o número 1 (identificou o coeficiente linear, $b = 1$). Algebricamente, é possível modelar a generalização em linguagem natural do estudante assim: Se $x$ representa o número de triângulos e $f(x)$ o número de palitos de fósforo, então a função $f$ é definida por $f(x) = 2x + 1$.

Considerando isso, conjecturamos que E8B mobilizou o *TAV1: Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*


c) Podemos encontrar a quantidade de palitos de fósforo que vamos usar para formar qualquer número de triângulos? Como devemos pensar para resolver esse desafio?

Sim.

Para você descobrir a quantidade de fósforos usados em cada triângulo, Tem que pegar a quantidade de Triangulos multiplicado por 2 e somado com 1.

**Figura 10** – Resolução de E8B no item c da situação 3
**Fonte:** da pesquisa

Analogamente, ao analisarmos as entrevistas de E2A e E3C, observamos a identificação da taxa de variação da função ($a = 2$) e do coeficiente linear ($b = 1$) por esses estudantes. E3C, ao responder como faria para calcular a um número qualquer de triângulos, afirmou: *(...) Ele começa um triângulo com três [palitos de fósforos] e, depois, esses dois [palitos] formam outro. Multiplica por dois [o número de triângulos] (identificou a taxa, $a = 2$) e soma um (identificou coeficiente linear, $b = 1$), eu acho.* E2A, por sua vez, respondeu: *O número de triângulos vezes dois mais um,* escrevendo sua resposta no protocolo por meio da expressão algébrica: $2x + 1$. Inferimos, portanto, que esses estudantes mobilizaram o *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$,* ao resolverem a situação 3.

A partir disso, interpretamos que E8B, E2A e E3C mobilizaram a ideia-base de função generalização em linguagem natural. E2A, por sua vez, complementou sua resposta explicitando a generalização algébrica da situação por meio da expressão $2x + 1$. Segundo Silva (2021), na sua investigação nenhum grupo de estudantes do 5º ano do EF conseguiu generalizar a situação 3 por conta própria, necessitando de diálogos com a pesquisadora até manifestarem o pensamento funcional associado à lei da função $f$ dada por $f(x) = 2x + 1$.

Relativo a mobilização de outras ideias-base de função, inferimos que os 21 estudantes demonstraram terem compreendido as de dependência e variável, ao preencherem a tabela corretamente no item “a” da tarefa. Tal inferência foi reforçada

com argumentos que representavam indícios da compreensão dessas ideias-base nas entrevistas dos estudantes. Observamos que os estudantes compreenderam a existência da dependência entre o número de triângulos e a quantidade de palitos de fósforo usados (ideia-base de dependência) em associação à compreensão de que, ao variar a quantidade de triângulos, também varia a quantidade de palitos usados (ideia-base de variável), como pode ser visto nos seguintes fragmentos: *Porque quanto mais triângulos, mais palitos precisa (E7A); Quando aumenta o número de triângulos ele aumenta o número de palitos (E8A); A cada triângulo que aumenta, ele vai aumentar a quantidade de palitos usados (E2C).*

Quanto a ideia-base de regularidade, conjecturamos que o preenchimento da tabela no item “a” da situação 3, assim como observado na investigação de Silva (2021), tenha contribuído para os estudantes colaboradores compreenderem que a cada novo triângulo formado era preciso usar mais dois palitos de fósforo. Portanto, inferimos que dentre os 21 estudantes entrevistados, somente E6A, E9B e E2B não conseguiram compreender a regularidade da situação. Um exemplo da manifestação dessa ideia-base pode ser observado no seguinte fragmento:

*P: Existe alguma relação entre o número de triângulos e o número de palitos?*
*E8A: Acho que sim, mas eu não sei dizer qual.*
*P: O que acontece, quando aumenta o número de triângulos?*
*E8A: Quando aumenta o número de triângulos, ele aumenta o número de palitos. Porém, não igual, aqui (indica a figura com um triângulo), de três em três, [mas] de dois em dois.*

Consideramos a situação 3 como do Tipo 1 para E8B, E2A e E3C. Utilizando o critério adotado nas situações anteriores, consideramos a não apresentação de dúvidas e a resolução correta dos itens da tarefa para realizar essa inferência, pois, com base em Vergnaud (1993), consideramos uma situação do Tipo 1 ao sujeito, quando ela pertence a classe de situações para as quais os sujeitos dispõem em seu repertório, no momento da resolução da tarefa, de comportamentos automatizados por um único esquema (Vergnaud, 1993).

Diante das análises realizadas em observação a ação dos estudantes colaboradores, ao resolverem a situação 3, elaboramos o Quadro 13.

**Quadro 13** – Resultados da implementação da situação 3

| Ano | Estudante | Resposta[41] | TA | Ideias-base[42] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E6B | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E6C | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| 7 | E7A | **C:** a **E:** b e c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E7B | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E7C | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| 8 | E8A | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E8B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, R, V e G | Tipo 1 |
| | E8C | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| 9 | E9A | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E9B | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E9C | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| 1 | E1A | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, R, V e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a e b **E:** c | TAV7 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, R, V e G | Tipo 1 |

**Fonte:** da pesquisa

Com base nos resultados das análises, apresentados no Quadro 13, identificamos que a situação 3 é do Tipo 1 para E8B, E2A e E3C, isso é, eles possuem em seu repertório competências necessárias para o tratamento da situação (Vergnaud, 2019). Diante disso, podemos considerar o critério "*A é mais competente se ele dispõe de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta em diferentes situações que possam surgir"* (Vergnaud, 2019, p. 6 – grifo nosso) e inferirmos que esses sujeitos são mais competentes em relação aos demais na situação 3.

Observamos, a partir dos resultados contidos no Quadro 13, que o TAV1 foi mobilizado em associação com a ideia-base de função generalização e o TAV7, como descrito nas análises supracitadas, foi mobilizado em associação com a ideia-base de regularidade.

O TAV7 não foi indicado na análise, porque não tínhamos, e ainda não temos, conhecimento da sua modelação nesse formato em outros estudos. Porém, ao

[41] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada.
[42] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

analisarmos os estudantes em ação, ao resolverem a situação 3, inferimos que manifestaram conhecimentos que podem ser associados ao TAV7, como uma forma de solucionar a tarefa. De acordo com Vergnaud (2009b, p.54), “[...] o conhecimento é adaptação a situações e o que se adapta, em primeiro lugar, são as formas de organização da atividade, os esquemas”.

Em relação as ideias-base de função, como indicado na análise *prévia* da situação 3 (seção 3.6.3), com base na investigação de Silva (2021), observamos uma maior dificuldade dos estudantes em relação a compreensão da generalização, quando comparada com as outras ideias-base. Novamente, neste ponto, dado que isso também foi observado por Calado (2020), com estudantes do 9º ano do EF e por Bernardino (2022) e Siqueira (2023), com estudantes do 3º ano do EM, identificamos uma continuidade, durante todo o período de formação da Educação Básica em relação a dificuldade na compreensão da ideia-base de generalização

Após descrevermos as análises, referentes aos dados construídos com a implementação da situação 3 nessa tese, direcionamos a atenção, na sequência, para a descrição da análise e dos resultados relativos a observação dos estudantes em atividade na situação 4.

### 4.2.4. Análise das resoluções da situação 4

A situação 4, diferentemente do indicado na análise *prévia*, foi a mais facilmente compreendida pelos estudantes colaboradores dentre as quatro situações implementadas com todos os níveis de escolarização envolvidos nessa investigação. Um exemplo de resolução adequada pode ser observado no protocolo escrito de E7C, presente na Figura 11.

Ao observarmos, com base na Figura 11, identificamos que a estratégia de resolução, utilizada por E7C no item “a” foi a de utilizar os algoritmos da multiplicação e da adição na vertical. Outros 15 estudantes (E6A, E6B, E6C, E7A, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E1B, E2C, E3B e E3C) recorreram a mesma estratégia, ao resolverem esse item.

**Situação 4.** Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

10 ×3 = 30 ; 150 + 30 = 180

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês.

| Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia | Gasto total no mês por Márcia |
|---|---|
| 20 | 210 |
| 25 | 225 |
| 30 | 240 |
| 35 | 255 |
| 40 | 270 |

c) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

X . 3 + 150 = Y

**Figura 11** – Resolução de E7C na situação 4
**Fonte:** da pesquisa

Dentre os discentes que utilizaram outras estratégias, identificamos que: E2A e E2B fizeram os cálculos corretamente na calculadora e só escreveram a resposta na folha (180); E3B utilizou os algoritmos da multiplicação (10x3 = 30,00) e da adição (30+150 = 180) na horizontal; E1C multiplicou o custo dos ingredientes para cada sanduíche (3,00) pelo número de sanduíches (10), esquecendo de considerar o valor do imposto; por fim, E7B utilizou os algoritmos da multiplicação e da subtração na vertical no item “a”, pois interpretou erroneamente o gasto com os ingredientes para fazer dez sanduíches, como o lucro da Márcia, conforme pode ser observado na sua explicação: *Daí, aqui (item a), pede qual seria o gasto total no mês. (...) Aqui, dez*

*sanduíches ela produziu e, daí, seria dez vezes três, que seria o preço dos sanduíches, que daria 30. Como o preço do lucro é menor que o do imposto dela, ele teria que fazer o preço do imposto menos o preço do lucro, que ficaria uma dívida para ela (no protocolo faz:* $150 - 30 = -120$*).* Observamos a intenção de E7B em fazer $30 - 150 = -120$. No entanto, inferimos que opera erroneamente com base em um conhecimento adquirido, ao aprender a subtração no domínio dos números naturais, pensando que sempre precisa fazer o número de maior valor absoluto menos o de menor valor absoluto. Vergnaud (1993, p.4) considera que o erro dos alunos, referente ao fato de "[...] subtrair o número menor do maior em cada coluna independentemente de sua posição embaixo ou em cima [...]" é um dos mais frequentes, quando utilizam a operação de subtração por se prenderem "[...] a uma conceitualização insuficiente da notação decimal" (Vergnaud, 1993, p. 4).

No item "b", com exceção de E1C e E7B, todos os outros estudantes conseguiram completar corretamente a tabela (vide resposta de E7C na Figura 11). Ao compararem com o item "a", compreenderam que basta multiplicar os valores da coluna da esquerda da tabela (quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia) por três e somar o resultado com o valor do imposto, para completar a coluna da direita da tabela (gasto total no mês por Márcia). Considerando que esses estudantes identificaram a taxa de variação da função (valor dos ingredientes para cada sanduíche, $a = 3$) e o seu coeficiente linear (valor do imposto por mês, $b = 150$), inferimos que mobilizaram em suas ações um conhecimento que pode ser associado ao *TAV1: Se* $a$ *é a taxa, e* $b$ *é o coeficiente linear de uma relação funcional* $f$*, então* $f(x) = ax + b$*, com* $a, b, x \in \mathbb{R}$*.* Na pesquisa de Dezilio (2022), com estudantes do 5º ano do EF, também foi observada a manifestação desse TAV na ação dos estudantes, ao resolverem a situação 4.

Consideramos que o elevado nível de compreensão dos estudantes, ao resolverem os itens "a" e "b" da situação 4, ocorreu associando a mobilização das ideias-base de função ao TAV1, pois, conforme Vergnaud (1993, p. 25), as "[...] invariantes operatórias organizam a busca da informação pertinente em função do problema a resolver ou do objeto a atingir, além de balizar as inferências".

A partir disso, observamos que, à exceção de E7B e E1C, os demais estudantes colaboradores apresentaram indícios da mobilização das ideias-base de função dependência, variável e regularidade nas suas ações, ao resolverem a situação 4. Ao compreenderam a dependência do gasto total no mês $f(x)$ em relação

a quantidade de sanduíches produzidos $x$ (dependência), os estudantes também perceberam que essas quantidades são variáveis (variável) e que, ao variar a quantidade de sanduíches produzidos tem-se uma regularidade nos valores resultantes do gasto total no mês (regularidade). Um exemplo desse entendimento pode ser observado nos seguintes trechos: *O que varia é a quantidade de sanduíches. Então, se ela fizer menos, ela vai gastar menos (...) e, se ela fizer mais, [gastará] mais (E8A); fixo é o 150 e o variável é os três reais do sanduíche. Dependendo da quantidade de sanduíches vezes três (E9C); eu entendi que o 150 é um valor fixo, do imposto por mês. E a gente tem que contar a quantidade de sanduíches produzidos e multiplicar por 3, que corresponde ao valor dos ingredientes para cada sanduíche (E2C).*

Ao observarmos as resoluções dos estudantes referentes ao item “c”, tanto nos protocolos escritos, a exemplo da resposta de E7C na Figura 11, quanto nas suas entrevistas, encontramos indícios da mobilização da ideia-base de função generalização por 16 deles (E6A, E6B, E6C, E7C, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C). Analogamente ao observado com E7C, que generalizou a situação 4 por meio da expressão algébrica $x \cdot 3 + 150 = y$ (vide Figura 11), observamos com outros estudantes as respectivas respostas: E9A ($x \cdot 3 + 150$), E9C ($150 + 3.x$), E2A ($3x + 150$), E2C ($x \cdot 3 + 150 = valor\ total\ no\ mês$) e E3A ($3 \cdot x + 150 = x$). Ao compararmos todas essas expressões algébricas, inferimos que a mais completa, por utilizar adequadamente a notação funcional, foi a apresentada por E7C. Além disso, consideramos que E2C e E3A ainda não dispõem em seus respectivos repertórios da simbologia adequada relativa ao conceito de função, pois o primeiro não conseguiu usar uma letra, para representar o gasto total, e o segundo usou erroneamente a mesma letra, o $x$, para representar tanto o número de sanduíches quanto o gasto total. Segundo Vergnaud (1993, p. 23), “A pertinência do simbolismo e da linguagem é relativa aos conhecimentos e ao desenvolvimento cognitivo do aluno”.

Os seis estudantes (E7C, E9A, E9C, E2A, E2C e E3A) que apresentaram a generalização da situação 4, por meio de uma expressão algébrica, também apresentaram indícios em suas entrevistas, analogamente aos outros dez estudantes (E6A, E6B, E6C, E8A, E8B, E8C, E9B, E1A, E3B e E3C) que conseguiram generalizar a tarefa, da generalização em linguagem natural, ao responderem o item “c”. Podemos

observar dois exemplos disso nos excertos das entrevistas de E6B e E8B, respectivamente:

*E6B: Na c, eu acho que a gente pode calcular o gasto total, somando o número de reais que ela gastou para fazer o sanduíche, mais 150 que é o imposto.*
*P: E como calcular o gasto para produzir os sanduíches?*
*E6B: É vezes três, porque cada sanduíche é três.*

*P: Me explica como você pensou para fazer? (item c)*
*E8B: Se [a] cada sanduíche é usado três reais de ingredientes, você pega a quantidade de sanduíches usados e multiplica pelo preço dos ingredientes que você usa em cada um. Depois, você soma com o valor fixo do imposto.*
*(...)*
*P: o gasto total está relacionado com o quê?*
*E8B: Com a soma do dinheiro do imposto e da quantidade que você gastou nos sanduíches.*

Portanto, semelhante ao identificado na implementação da situação 4 na investigação de Dezilio (2022), com estudantes do 5º ano do EF, interpretamos que esses 16 estudantes (E6A, E6B, E6C, E7C, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C) mobilizaram todas as ideias-base de função, bem como manifestaram, implicitamente, o pensamento funcional relacionado a função $f(x) = x \cdot 3 + 150$, na qual $x$ representa a quantidade de sanduíches e $f(x)$ o gasto total de Márcia no mês.

Diante disso, em observação ao critério de considerar a resolução adequada de todos os itens da situação, sem apresentar dúvidas, como um indicador adotado para classificar a situação, como do Tipo 1 para o sujeito, isso é, pertencente à classe de situações para as quais o estudante possui em seu repertório das competências para o tratamento automatizado da tarefa (Vergnaud, 1993), inferimos que a situação 4 é do Tipo 1 para esses 16 estudantes: E6A, E6B, E6C, E7C, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C.

A partir disso, na intenção de resumir nossas análises referentes a atividade dos estudantes entrevistados, ao resolverem a situação 4, elaboramos o Quadro 14.

**Quadro 14** – Resultados da implementação da situação 4

| Ano | Estudante | Resposta[43] | TA | Ideias-base[44] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E6B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E6C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 7 | E7A | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E7B | **E:** a, b e c | Não identificado | Não identificada | Tipo 2 |
| | E7C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 8 | E8A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E8B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E8C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 9 | E9A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E9B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E9C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 1 | E1A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E1B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1C | **E:** a, b e c | Não identificado | Não identificada | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 3 | E3A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E3B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E3C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |

**Fonte:** da pesquisa

Em observação às análises resumidas no Quadro 14, identificamos que a situação 4 foi compreendida por 16 estudantes (E6A, E6B, E6C, E7C, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C) aos quais inferimos a mobilização das ideias-base de função em associação com o TAV1 e, por consequência, classificamos essa situação como do Tipo 1 para esses sujeitos.

Na investigação de Dezilio (2022), descreve a autora, na situação 4 (problema 4 da sua pesquisa) menos grupos de estudantes manifestaram as ideias-base de função, quando comparado com os resultados da implementação da situação 1 (problema 1 na sua pesquisa) na sua investigação. Considerando isso, inferimos que a situação 4 foi mais complexa em comparação à situação 1, para os seus colaboradores resolverem. Diferentemente, nesse estudo, ao classificarmos a situação para o sujeito, identificamos que ela foi considerada do Tipo 1 a nove estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E1A, E2A e E3A), ao resolverem a situação 1, e para 16 estudantes (E6A, E6B, E6C, E7C, E8A, E8B, E8C, E9A, E9B,

[43] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada.
[44] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

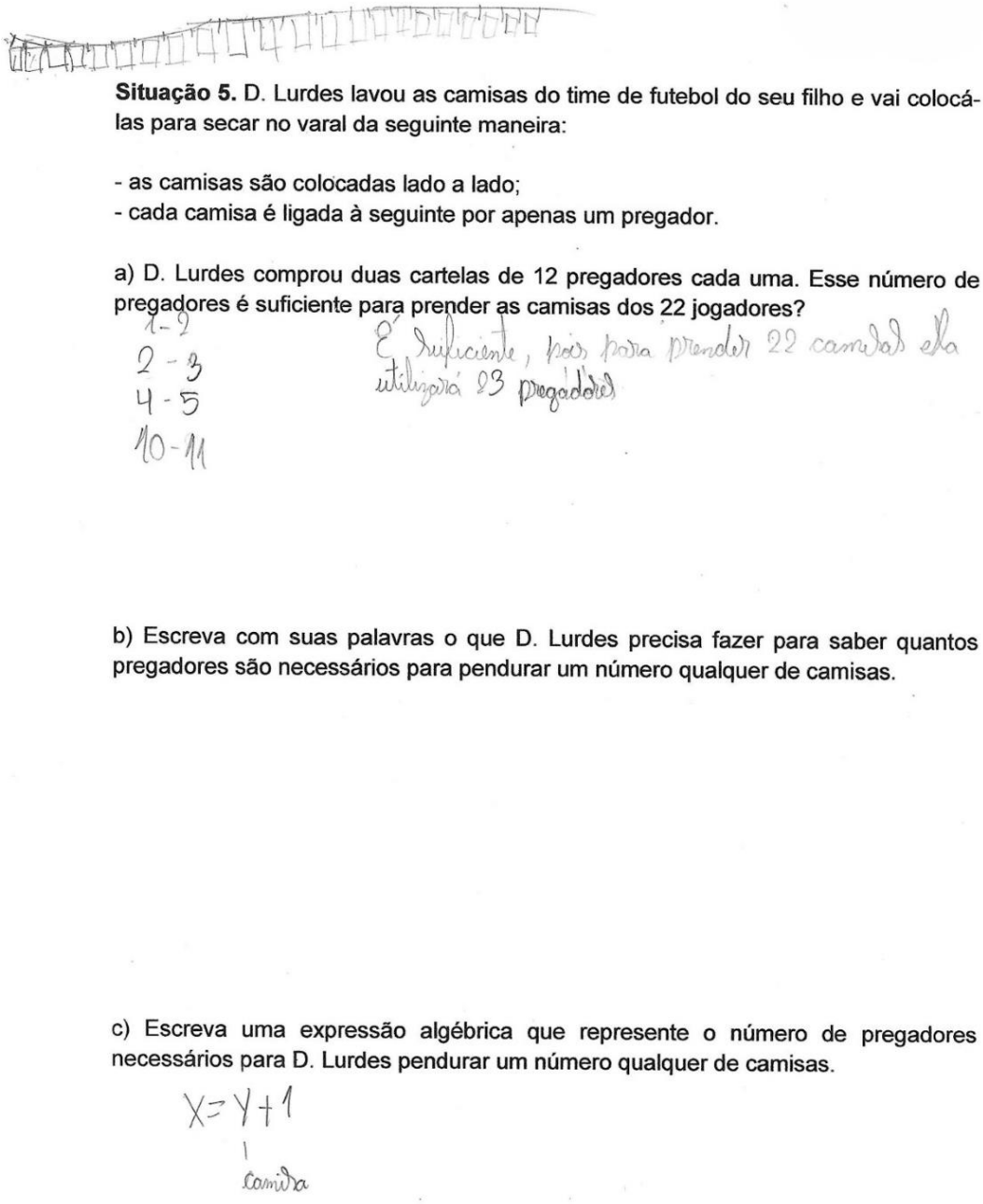
E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C), ao resolverem a situação 4 evidenciando, portanto, que essa foi menos complexa para esses estudantes em comparação com a primeira.

Inferimos que os resultados da nossa investigação com a implementação das situações 1 e 4 divergem, quanto a dificuldade dos estudantes, dos resultados da implementação dessas tarefas na investigação de Dezilio (2022) devido a forma de implementação. Essa autora, implementou as situações em sala de aula para uma turma de 13 alunos, do 5º ano do EF, que tinham sido seus alunos no ano anterior, quando cursavam o 4º ano do EF. Já na nossa investigação, os estudantes participaram de entrevistas individuais realizadas por um professor (pesquisador) desconhecido, o qual não faz parte do convívio escolar deles. Portanto, consideramos que, ao resolverem a situação 1, nossos colaboradores ainda estavam desconfortáveis com o fato de estarem sendo gravados e interrogados por um professor desconhecido, o que pode ter resultado em dificuldades para interpretar e resolver essa tarefa. Ao resolverem a situação 4, conjecturamos, já estavam mais confortáveis com a realização da entrevista e, diante disso, conseguiram acessar seus esquemas, mobilizando invariantes operatórios para resolver a tarefa (Vergnaud, 1993).

Após apresentarmos as análises dos resultados das observações dos estudantes em atividade na situação 4, passamos a descrever a análise dos dados produzidos com a implementação da situação 5.

### 4.2.5. Análise das resoluções da situação 5

A situação 5 (vide Figura 12) foi a primeira, do instrumento dessa tese, a não ser implementada com os estudantes colaboradores de todos os anos de escolarização participantes. De acordo com o apresentado na seção 3.6.5, na análise *prévia*, consideramos, com aporte em Calado (2020), Tinoco (2002) e na BNCC (Brasil, 2018), que o nível de complexidade desta tarefa é compatível com o 8º ano do EF. Portanto, optamos em utilizá-la nas entrevistas com os estudantes, a partir desse ano de formação escolar.



**Situação 5.** D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador.

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores?

1-2
2-3
4-5
10-11

É suficiente, pois para prender 22 camisas ela utilizará 23 pregadores

b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

X = Y + 1
|
camisa

**Figura 12** – Resolução de E2C na situação 5
**Fonte:** da pesquisa

Conforme pode ser visualizado na Figura 12, E2C recorreu a um desenho para conseguir resolver a situação 5. De forma análoga, outros nove estudantes (E8A, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2B, E3A e E3B) recorreram à representação em forma de desenho, como estratégia para compreender a tarefa. Isso também foi observado por Calado (2020), ao implementar essa situação com estudantes do 9º ano do EF. De acordo com a autora, "[...] o fato de os sujeitos terem recorrido à representação na forma de desenho os auxiliou na interpretação da atividade e, consequentemente, a desenvolverem uma resposta correta" (Calado, 2020, p. 129). Para Vergnaud (2019),

muitos problemas em linguagem natural, semelhantes à situação 5, obrigam os alunos a se voltarem a esquemas pessoais devido a falta da identificação de um algoritmo ensinado, o qual possa equacionar o problema.

Identificamos, ao analisar os protocolos escritos e as entrevistas dos estudantes colaboradores que representaram a situação 5 por meio de um desenho, somente uma resposta inadequada no item “a”: E2B não conseguiu resolver adequadamente o primeiro item da situação e, consequentemente, os outros dois também. Apesar de ter apresentado indícios da compreensão das ideias-base de função variável e dependência, ao perceber que variando o número de camisas, também varia o número de pregadores, inferimos que E2B não mobilizou de forma pertinente a ideia de regularidade, ao considerar o incremento de um pregador, iniciando a colocação das camisas no varal e mais um ao final e, por consequência, não conseguiu generalizar a situação 5. Podemos observar seu raciocínio no excerto a seguir:

*E2B: Aqui é o começo do varal, aí vai ter um pregador. Aqui, já vai ter outra camisa utilizando para grudar as duas, tipo assim, aqui, já vai ter outra camisa. A mesma coisa vai continuando e, quando chegar na última, vai ser assim também e vai um pregador assim. (...) A primeira camisa e a última utilizam um pregador a mais para segurar as pontas.*
*P: Quantos pregadores utilizaria? (no item a).*
*E2B: 24.*
*P: Como você fez na b?*
*E2B: Era para fazer na última essa (o estudante tinha escrito:* $x = 1 + 2$*). É, digamos que fizesse xis igual a um mais dois. Cada camisa vai usar um e você adiciona mais dois para as das duas pontas, um em cada.*

Dentre os cinco estudantes (E8B, E1B, E1C, E2A e E3C) que não recorreram a um desenho para resolver a situação 5, observamos que E1B e E1C erraram todos os itens com a diferença de que o primeiro não mobilizou ideias-base de função, pois não compreendeu a tarefa, e o segundo só conseguiu compreender a ideia de dependência como pode ser observado na sua fala: *Os pregadores, porque eles dependem do número de camisas.* E8B, E2A e E3C conseguiram compreender que o número de pregadores correspondia ao número de camisetas e mais um, usando tal

entendimento, para resolver os itens “a” e b” corretamente. Podemos observar isso no fragmento da entrevista de E3C, em destaque:

*P: Por que você considera que sim (item a)?*
*E3C: Por causa que aqui em cima diz a informação que precisa apenas um pregador, que eles são colocados lado a lado daí.*
*P: Então, para 22 camisas vai precisar de quantos pregadores?*
*E3C: Acho que (pensando) é 23.*
*P: E quantos pregadores tem na letra a?*
*E3C: Tem 24. Vai sobrar um.*
*P: O item b você pode falar, se preferir.*
*E3C: Ela tem que saber o valor de camisas, né.*
*P: Sabendo o número de camisas, quantos pregadores vai?*
*E3C: Vai o número de camisas mais um pregador.*

De forma análoga à resposta apresentada por E3C, além de E2A e E8B, conseguiram generalizar em linguagem natural, ao resolverem o item “b”, mais sete estudantes (E9A, E9B, E9C, E1A, E2C, E3A e E3B). Considerando a compreensão desses sujeitos frente à situação, inferimos que mobilizaram as ideias-base de função dependência, variável e regularidade de forma associada para conseguirem chegar na generalização em linguagem natural. É possível observar isso vide fragmento da entrevista de E9C: *É mais, ou menos isso daqui: uma camisa começa com dois pregadores. Daí, quando você vai aumentando, uma camisa vai aumentando um pregador (indício das ideias de dependência e variável). É, já está tudo desenhado aqui, mais uma camisa, dois pregadores. Duas camisas, três pregadores. Quatro camisas, cinco pregadores. Então, só começa com dois e depois vai aumentando de um em um (indício de regularidade).*

Considerando a generalização em linguagem natural, manifestada por esses 10 estudantes (E8B, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C), ao resolverem o item “b” da situação 5, podemos supor a compreensão por esses sujeitos da relação funcional $f$ que permite obter o número de pregadores $f(x)$ por meio da soma entre o número de camisetas ($x$) e o número um (1) (algebricamente: $f(x) = x + 1$). Com base nisso, conjecturamos que identificaram implicitamente a taxa de variação da função ($a = 1$) e seu coeficiente linear ($b = 1$), manifestando um conhecimento em

linguagem natural (na forma predicativa do conhecimento) que pode ser associado ao *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*

Tal inferência é reforçada, quando analisamos as respostas ao item "c" da situação 5. De forma similar à resposta de E2C (vide Figura 12), outros cinco estudantes generalizaram a situação 5 por meio de uma expressão algébrica da seguinte forma: E8B ($x + 1 = y$), E9C ($c + 1 = p$), E2A ($x + 1$), E3A ($B + 1 = x$) e E3B ($y + 1 = x$). Inferimos, portanto, que essas expressões podem ser associadas à mobilização explícita do *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$,* por esses estudantes, pois a identificação do objeto matemático função, para Vergnaud (2019), é uma conceituação explícita.

Com base nessas análises e em observação ao acerto dos três itens da situação 5, inferimos sua classificação, como do Tipo 1, para seis estudantes (E8B, E9C, E2A, E2C, E3A e E3B) pois estes apresentaram, no momento da sua resolução, competências necessárias ao tratamento imediato da situação por meio de um só esquema (Vergnaud, 1993).

Na intenção de resumir as análises realizadas da ação dos estudantes, ao resolverem a situação 5, com base nos protocolos escritos e nas entrevistas, elaboramos o Quadro 15.

**Quadro 15** – Resultados da implementação da situação 5

| Ano | Estudante | Resposta[45] | TA | Ideias-base[46] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | E8A | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E8B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E8C | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| 9 | E9A | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E9B | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 2 |
| | E9C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 1 | E1A | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **E:** a, b e c | Não identificado | Não identificada | Tipo 2 |
| | E1C | **E:** a, b e c | Não identificado | D | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **E:** a, b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |

[45] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada.
[46] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | E3A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E3B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E3C | **C:** a e b **E:** c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

Com base nos resultados das análises resumidas no Quadro 15, observamos o seguinte: 12 estudantes (E8A, E8B, E8C, E9A, E9B, E9C, E1A, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C) resolveram adequadamente o item “a”, desses, à exceção de E8A e E8C, dez resolveram corretamente o item “b” e, por fim, somente seis (E8B, E9C, E2A, E2C, E3A e E3B) conseguiram generalizar a situação por meio de uma expressão algébrica, ao responderem o item “c”. Essa diminuição do número de resoluções, adequadas a cada novo item da situação 5, também foi observada por Calado (2020).

Observamos, com base nos resultados contidos no Quadro 15, que cinco estudantes (E8A, E8C, E1B, E1C e E2B) não chegam a fazer uso da linguagem para resolver o item “b” da situação 5. Conjecturamos, portanto, que esses estudantes não possuem competências em seu repertório de esquemas, os quais possibilitem o tratamento de situações envolvendo o conceito de função afim. Já outros 10 estudantes, ao resolverem o item “b”, conseguem generalizar a situação em linguagem natural, demonstrando possuírem mais competências para resolver a tarefa. Desses, seis (E8B, E9C, E2A, E2C, E3A e E3B) possuem todas as competências necessárias para resolver a situação 5, o que nos permite inferir que ela é do Tipo 1 a esses sujeitos.

Ao findar as análises decorrentes da implementação da situação 5 com os estudantes colaboradores, apresentamos os resultados da observação dos estudantes em ação ao resolverem a situação 6.

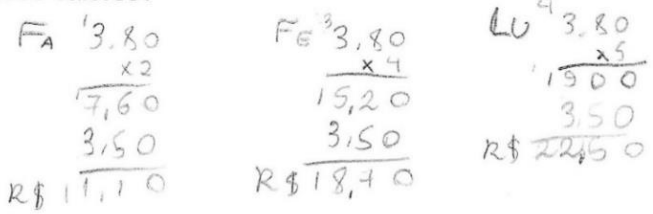
### 4.2.6. Análise das resoluções da situação 6

Consideramos, com base em Rezende, Nogueira e Calado (2020) e na BNCC (Brasil, 2018), que a situação 6 tem nível de complexidade apropriado para o 9º ano do EF. Para tanto, como descrito na análise *prévia* (seção 3.6.6), optamos em implementá-la a partir desse ano de escolarização do EF.

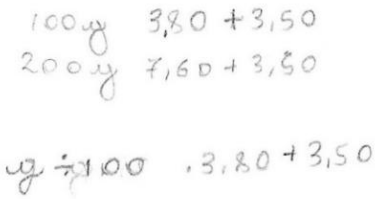
Como pode ser visualizado na Figura 13, referente as respostas de E9C, identificamos que o estudante resolveu corretamente os três itens da situação 6.

**Situação 6.** O restaurante Rango cobra R$ 3,80 pelo consumo de 100g de comida. Três pessoas foram ao restaurante Rango e cada uma consumiu uma lata de refrigerante que custa R$ 3,50, e as seguintes quantidades de alimentos:
Fabricia consumiu 200g. Fernando consumiu 400g. Lucas consumiu 500g.

a) Qual o valor pago por cada pessoa? Explique como você determinou cada um desses valores?




b) Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (v), incluindo o refrigerante.




c) Carla almoçou no restaurante Rango e pagou R$ 24,40 pela refeição com um refrigerante. Quantas gramas de comida Carla consumiu?

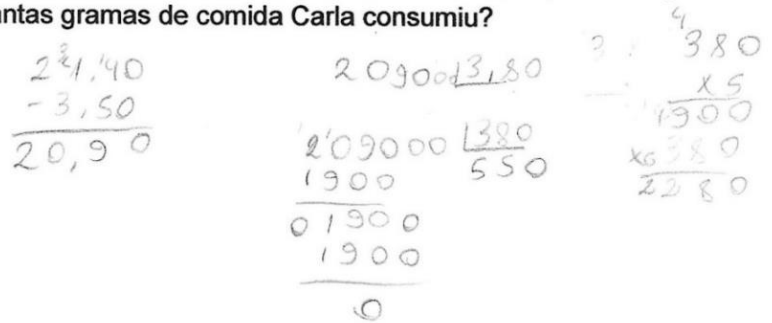



**Figura 13** – Resolução de E9C na situação 6
**Fonte:** da pesquisa

Em relação ao item “a” (vide Figura 13), inferimos que E9C identificou a taxa de variação da função ($a = \frac{3,8}{100}$) e seu coeficiente linear (b= 3,5), implicitamente, ao

utilizar os algoritmos da multiplicação e da adição na vertical, para calcular o gasto total da Fabrícia, do Fernando e do Lucas. Com base nisso, consideramos que o conhecimento mobilizado em ação por este estudante pode ser associado à relação funcional $f$, que faz corresponder o valor a ser pago $f(x)$ com o peso $x$ (em gramas) da comida consumida por meio da lei $f(x) = \frac{3,8}{100}x + 3,5$. Portanto, conjecturamos que E9C manifestou implicitamente o *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*

Observando as entrevistas e os protocolos escritos dos estudantes colaboradores, identificamos que todos conseguiram resolver adequadamente o item "a" da situação 6. Então, de forma análoga ao inferido na resolução de E9C nesse item, consideramos a manifestação implícita do *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$* na atividade de todos os estudantes colaboradores. Para exemplificar essa consideração, apresentamos o seguinte trecho da entrevista de E1C: *Então, aqui, está dizendo que a cada 100 gramas de comida, o restaurante cobra três reais e oitenta [centavos]. A Fabrícia consumiu 200g de comida, que eu multipliquei por dois ($2 \cdot 3,8$). Deu sete e sessenta mais o refrigerante que ela consumiu, que é três e cinquenta. O resultado final deu onze reais e dez [centavos]. O Fernando consumiu 400g. Eu fiz quatro vezes três e oitenta ($4 \cdot 3,8$), que deu 15,2. Somando com o valor do refrigerante, deu 18,70. O Lucas consumiu 500g de comida. Então, eu fiz cinco vezes três e oitenta, que deu 19. Somando com o refrigerante, deu 22,50.*

Quanto a mobilização das ideias-base de função, em observação a ação dos estudantes, ao resolverem o item "a" da situação 5, consideramos a compreensão deles quanto a dependência entre o valor a ser pago por cada pessoa e o peso (em gramas) da comida consumida. Decorrente dessa compreensão da ideia-base de dependência, conjecturamos que manifestaram implicitamente o reconhecimento de que, ao variar o peso da comida consumida, também varia o valor a ser pago, isso é, mobilizaram a ideia-base de variável. Podemos visualizar tal indício da compreensão dessas ideias-base no fragmento em destaque:

*P: O que varia e o que é fixo nessa questão?*

*E9A: Varia o peso e o valor que ela vai pagar (variável), mas o fixo é o valor que ela vai pagar a cada 100 e o número do refrigerante.*
*P: Se aumentar a quantidade de comida, o que acontece com o valor pago?*
*E9A: Aumenta também (dependência).*

No item “b” da situação 5, era solicitado aos estudantes que indicassem uma expressão matemática que relacionasse o peso (p) ao valor a ser pago (v), incluindo o refrigerante. Com base nos protocolos escritos e nas transcrições das entrevistas dos estudantes colaboradores, identificamos quatro resoluções adequadas, conforme Figura 14, apresentadas por: E9B, E9C, E2A e E2C.

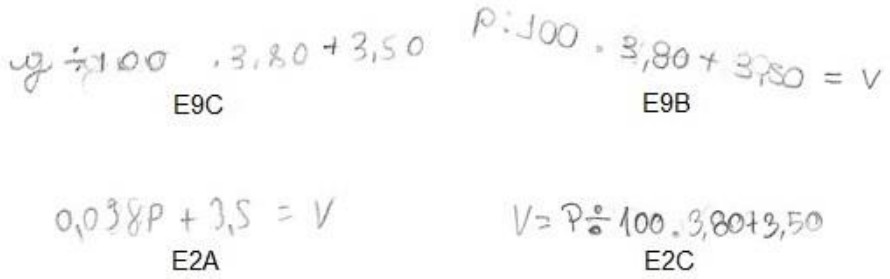



**Figura 14** – Respostas de E9C, E9B, E2A e E2C no item b na situação 6
**Fonte:** da pesquisa

Com base nisso, inferimos que tais estudantes mobilizaram explicitamente o *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$,* ao generalizar a situação 5 por meio de uma expressão algébrica (vide Figura 14). Ao identificarem a lei da função $f$, que associa o valor a ser pago $f(x)$ ao peso $x$ (em gramas) da quantidade de comida consumida definida[47] por $f(x) = 0{,}038 + 3{,}5$, conjecturamos, com aporte em Vergnaud (2019), que esses estudantes apresentaram uma conceituação explícita do objeto matemático função afim.

Os outros oito estudantes (E9A, E1A, E1B, E1C, E2B, E3A, E3B e E3C) não manifestaram a generalização algébrica adequada para a situação 5. Durante a resolução do item “b”, com base nas suas entrevistas e protocolos escritos, identificamos que esses sujeitos recorreram a diferentes tentativas. Segundo

[47] Observamos que E9C usou a letra g (gramas) para a variável peso e não considerou a igualdade com a variável v. E2B, E2C e E9B utilizaram, conforme solicitado no item b, a letra p (peso) para a variável peso e a letra v para a variável valor a ser pago.

Vergnaud (1993, p. 6), para os alunos que não dominam a situação "[...] trata-se de resolver o problema, pois as situações em jogo ainda não são triviais para eles". Um exemplo disso pode ser identificado na resposta errônea de E1B ao item "b": *Eu preciso pensar (permanece um tempo em silêncio). Talvez seria isso: somando o peso e o valor a ser pago, que é três e oitenta mais o refri (escreve como resposta:* $3{,}80 + 3{,}50 = 7{,}30$*).* E3B, de forma similar, responde $v = 3{,}80 + 3{,}50$ e $P = 100$, acompanhado da seguinte explicação: *Que o pê é 100 gramas. O vê é três e oitenta mais três e cinquenta, que é o valor do refrigerante.* Também há indícios dessa postura na resolução de E3C. Ao apresentar, como resposta duas frações isoladas ($\frac{p}{3{,}80}$ $\frac{v}{3{,}50}$), justificou assim: *Que o pê, que é o peso, é três e oitenta e o vê, que é o valor pago pelo refrigerante, é 3,50.*

Após escrever a expressão $3{,}8 \cdot x + 3{,}50 = p$, como resposta ao item "b", E3A ficou em dúvida sobre a validade dessa expressão, ao tentar solucionar o item "c" e decidiu apagá-la com base nessa justificativa: *Eu esqueci algum número nessa fórmula.* Consideramos, portanto, que esse estudante não possuía, no momento da resolução desse item, os conhecimentos necessários para o tratamento da tarefa, pois "A confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se, em última análise, no conhecimento que ele possui, explícito ou implícito, das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver" (Vergnaud, 1993, p. 3).

Outros três estudantes (E9A, E1A e E2B), como previsto na análise *prévia* da situação 6 (seção 3.6.6), não conseguiram interpretar que a taxa de variação da função resultava do quociente $\frac{3{,}8}{100}$, apesar de terem identificado que o restaurante Rango cobra R$ 3,80 a cada 100 gramas de comida, demonstrando indícios da mobilização da ideia-base de função regularidade. Consideramos, nesses casos, a resposta apresentada pelos estudantes como inapropriada para o item "b", pois não generaliza a situação 5 de forma adequada, conforme pode ser observado na Figura 15. Observamos, com base na análise *prévia* (seção 3.6.6), que a situação 6 é a primeira do instrumento, na qual a variável didática conjunto numérico assume o valor Números Reais ($\mathbb{R}$). Conjecturamos que isso interferiu na resolução dos estudantes colaboradores, pois, de acordo com Vergnaud (1993, 1996) os valores numéricos de uma situação é um dentre os "[...] três grandes fatores da complexidade cognitiva [...]" (Vergnaud, 1993, p. 16).

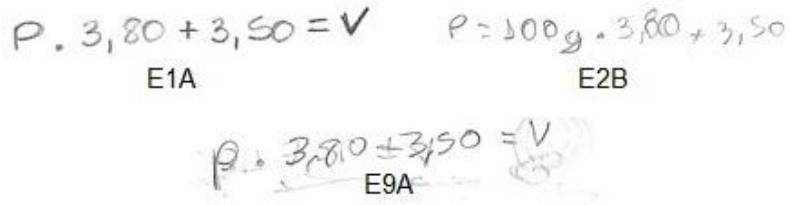



**Figura 15** – Respostas de E1A, E2B e E9A no item b da situação 6
**Fonte:** da pesquisa

Analogamente, E1C não identifica que a taxa de variação da função é o número racional $\frac{3,8}{100}$, conforme Figura 16. Além disso, considera que o número de refrigerantes é variável, indicando isso na expressão por $x \cdot 3{,}50$. Observamos que E1C não diferencia na sua expressão (Figura 16) o número de refrigerantes, que ele denomina de $x$ do valor a ser pago, que ele também denomina por $x$. E1C explicou como fez o item "b" dessa forma: *Aqui, eu coloquei esse xg, que representa a quantidade de gramas que o cliente vai consumir. Esse aqui (3,80) é a quantidade a cada 100 gramas, o valor a ser pago. E aqui ($x \cdot 3{,}5$) esse xis representa quantos refrigerantes a pessoa vai tomar.* Inferimos, portanto, que E1C ainda não tem acomodado em seu repertório de esquemas a representação algébrica do conceito de função, pois, segundo Vergnaud (1993, p. 23), "A pertinência do simbolismo e da linguagem é relativa aos conhecimentos e ao desenvolvimento cognitivo do aluno".

b) Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (v), incluindo o refrigerante.

**Figura 16** – Resposta de E1C no item b da situação 6
**Fonte:** da pesquisa

Ao resolver o item "c", sete estudantes (E9A, E9B, E9C, E1A, E1C, E2A e E2C) resolveram de forma correta e os outros cinco (E1B, E2B, E3A, E3B e E3C) não conseguiram mobilizar uma estratégia adequada, para lograr êxito na questão.

Dentre os que responderam de forma inadequada, E1B não conseguiu pensar em nenhuma estratégia de resolução para o item "c", explicando em sua entrevista dessa forma: *Eu ia fazer vezes, mas não dá certo. (...) É o que eu raciocinei, mas não é.* E3C e E2B raciocinaram adequadamente que era preciso descontar o valor do refrigerante, R$ 3,50 do valor pago por Carla, R$ 24,50 obtendo: $24{,}5 - 3{,}5 = 20{,}9$. Porém, não conseguiram pensar em nenhuma estratégia adequada para resolver a

questão e “chutaram”, respectivamente, 209g e 610g. Por fim, E3A e E3B tentaram a regra de três, como estratégia para solucionar o item “c”, mas, em meio ao processo de resolução, percebem que não é possível e desistem de resolver a questão, optando por deixar a resposta em branco. Isso fica evidenciado nesta fala de E3B: *Eu faria por regra de três também (...). Vou tentar. Nossa, isso para mim não está certo! Não daria para responder por regra de três então.* Na sua entrevista, E3A expressou assim seu raciocínio:

*P: O que você está pensando? (item c)*
*E3A: Eu estou pensando em fazer uma regra de três, mas não sei se vai dar certo.*
*P: Por que tu pensa que é por regra de três?*
*E3A: Porque 100 gramas sempre vai ser igual a três e oitenta. Então, se aqui variar (peso) esse aqui vai variar (valor pago). Esse aqui não vai variar (3,80), porque sempre vai ser igual, multiplicado pelo mesmo número.*
*P: Como você está pensando em fazer?*
*E3A: Eu estava pensando em dividir, mas não dá certo. (...) Eu não vou conseguir fazer está.*

Inferimos, com base nisso, que esses estudantes (E1B, E2B, E3A, E3B e E3C) ainda não adquiriram competências, para tratar desse tipo de situação envolvendo o conceito de função afim. De acordo com Vergnaud (1993), quando o sujeito não dispõe das competências necessárias ao tratamento imediato de uma tarefa, ele recorre ao seu repertório de esquemas na busca de um que tenha afinidade com a situação a ser resolvida apresentando, muitas vezes, apenas um esboço do esquema e a sua interrupção, antes de concluir a resolução. “Muitos esquemas podem ser sucessivamente evocados, ou mesmo simultaneamente, em uma situação nova para o sujeito (ou por ele considerada nova)” (Vergnaud, 1993, p. 4).

Dentre os que resolveram de forma adequada o item “c” da situação 6, E9B, E9A e E1A iniciaram usando a estratégia de subtrair o valor do refrigerante R$ 3,50 do valor pago por Carla R$ 24, 40, encontrando o gasto decorrente do peso (em gramas) da comida consumida igual a R$ 20,9 ($24{,}4 - 3{,}5 = 20{,}9$). Depois disso, recorreram a estratégia de tentativa e erro até encontrar o valor que multiplicado por três e oitenta resultaria em 20,9. Podemos identificar isso na seguinte explicação dada por E1A: *Eu fui pelo raciocínio meio lógico assim, sabe. Aqui, tipo, o valor total,*

*incluindo a refeição e o refrigerante, era de 24,40. Eu, primeiramente, tirei o valor do refrigerante. Ficou 20,90. Daí, aqui, eu fui meio por chute assim, sabe, de quantas gramas ela tinha comido. Primeiro, fiz 500 [gramas], deu menos. Depois fiz 600 [gramas], deu um pouquinho a mais. Daí, eu optei por fazer de 550 gramas vezes o valor da refeição, daí deu o valor total.*

Nesses casos em que os estudantes recorreram à estratégia de tentativa e erro, não inferimos a mobilização de nenhum TA. Identificamos, em contrapartida, em observação à atividade de E9B, E9A e E1A, indícios da mobilização das ideias-base de função dependência, variável e regularidade. Consideramos que, ao subtrair o valor do refrigerante do valor pago pelo almoço por Carla, os estudantes demonstraram a compreensão implícita de que o valor a ser pago depende do peso (em gramas) da comida consumida. E, ao multiplicarem os valores decorrentes dos "chutes" por 3,8, permite a inferência da compreensão das ideias de variável e regularidade.

Os estudantes E9B, E9C, E2A e E2C usaram a estratégia adequada, conforme pode ser visualizado na Figura 17, de subtrair o valor do refrigerante (R$ 3,50) do valor pago por Carla no almoço (R$ 24,40) para encontrar o valor gasto (R$ 20,90) somente com o peso (em gramas) da comida consumida. Na sequência, dividiram esse valor (20,9) por 3,8 e multiplicaram por 100, para encontrar quantos gramas de comida Carla consumiu (550g). Isso pode ser modelado pelas seguintes expressões numéricas: $24{,}4 - 3{,}5 = 20{,}9$ e $(20{,}9 \div 3{,}8) \cdot 100 = 550$.

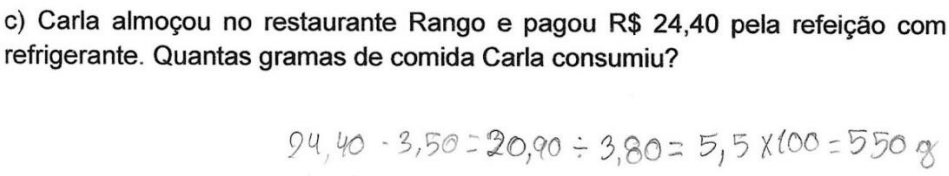



**Figura 17** – Resposta de E2C no item c da situação 6
**Fonte:** da pesquisa

Nesses casos, consideramos que os estudantes identificaram explicitamente o coeficiente linear da função ($b = 3{,}5$) e implicitamente a taxa de variação da função ($a = \frac{3{,}8}{100}$). Então, ao fazer a diferença entre valor pago ($f(x) = 24{,}4$) e o coeficiente linear ($b = 3{,}5$) dividido pela taxa de variação da função ($a = \frac{3{,}8}{100}$), inferimos que mobilizaram um conhecimento implícito que pode ser associado ao *TAV8: Se* $f(x) = ax + b$, *então* $x = \frac{f(x)-b}{a}$, *com* $a, x$ *e* $b \in \mathbb{R}$, *sendo* $a \neq 0$.

Apesar de não termos indicado a possibilidade da manifestação do TAV8 na análise *prévia* da situação 6 (seção 3.6.6), tínhamos conhecimento da sua modelação na investigação de Siqueira (2023). Essa autora identificou a mobilização do TAV8, ao observar a atividade de estudantes do 3º ano do EM, ao resolverem situações mistas envolvendo o conceito de função afim.

Quanto a classificação da situação 6 para os estudantes colaboradores, conjecturamos que E9B, E9C, E2A e E2C possuem competências necessárias para a resolução dessa situação, classificada para eles como do Tipo 1. Esses sujeitos, além de apresentaram indícios em suas ações da mobilização das ideias-base de função, demonstraram condutas automatizadas por meio da inferência de TAV para resolver a tarefa, evidenciando possuírem competências para a sua resolução quase imediata (Vergnaud, 1993). De acordo com Vergnaud (1993, p. 2), “As próprias competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores do comportamento”.

Feitas essas considerações, elaboramos o Quadro 16 com um resumo das análises realizadas quanto a mobilização das ideias-base de função, dos TA manifestados e da classificação da situação para o sujeito.

**Quadro 16**– Resultados da implementação da situação 6

| Ano | Estudante | Resposta[48] | TA | Ideias-base[49] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | E9A | **C:** a e c **E:** b | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E9B | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E9C | **C:** a, b e c | TAV1 e TAV8 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 1 | E1A | **C:** a e c **E:** b | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **C:** a **E:** b e c | TAV1 | D e V | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** a e c **E:** b | TAV1 e TAV8 | D, V e R | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 e TAV8 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a **E:** b e c | TAV1 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a, b e c | TAV1 e TAV8 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 3 | E3A | **C:** a **E:** b e c | TAV1 | D e V | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a **E:** b e c | TAV1 | D e V | Tipo 2 |
| | E3C | **C:** a **E:** b e c | TAV1 | D e V | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

[48] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada. Os itens sublinhados representam aqueles nos quais os estudantes optaram por deixar às respostas em branco.
[49] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

Com base nos resultados apresentados no Quadro 16, ao observarmos a mobilização das ideias-base de função, podemos considerar, assim como identificado na investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020), não existir diferença significativa entre os estudantes concluintes do EF e do EM, ao resolverem a situação 6.

Se considerarmos a classificação da situação 6 para o sujeito, que é realizada com base na apresentação de competências ao tratamento adequado da situação de uma forma automatizada, podemos inferir, de forma análoga ao observado em relação a mobilização das ideias-base de função, não existir diferenças significativas entre as competências dos estudantes concluintes do EF e os do EM, ao resolverem a situação 6. De acordo com a BNCC (2018), os conhecimentos apreendidos no EF devem ser aprofundados no EM, sendo que as funções polinomiais de primeiro grau (função afim) devem ser utilizadas para a modelação da resolução de problemas nos mais variados contextos.

Em relação a identificação dos TA mobilizados pelos estudantes, ao resolverem a situação 6, considerando os dados apresentados no Quadro 16, por um lado, observamos que o TAV1 foi manifestado por todos os estudantes colaboradores, ao resolverem o item "a", assim como citado na análise *prévia* (seção 3.6.6). Por outro lado, quatro estudantes (E9B, E9C, E2A e E2C) manifestaram em suas estratégias de resolução do item "c" indícios de um conhecimento que pode ser associado ao *TAV8: Se* $f(x) = ax + b$*, então* $x = \frac{f(x)-b}{a}$*, com* $a, x$ *e* $b \in \mathbb{R}$*, sendo* $a \neq 0$*,* que não estava previsto na análise *prévia.* Além disso, não foi identificada a mobilização do *TAF2: Se* $a$ *é a taxa, e* $b$ *é o coeficiente linear de uma relação funcional* $f$*, então* $f(x) = ax + b = ax$*, com* $a, b, x \in \mathbb{R}$*,* contrariando a análise *prévia* (seção 3.6.6).

Em relação a mobilização das ideias-base de função, assim como observado por Rezende, Nogueira e Calado (2020), os estudantes colaboradores desta tese tiveram maiores dificuldades com relação a generalização, sendo que somente quatro (E9B, E9C, E2A e E2C) apresentaram a generalização algébrica para o item "b". Na pesquisa dessas autoras, nenhum dos 12 estudantes (sendo seis do 9º ano do EF e seis do 3º ano do EM) apresentou estratégias corretas, ao resolver o item relacionado com essa ideia.

De posse dessas informações referentes as análises da atividade dos estudantes colaboradores, ao resolverem a situação 6, apresentamos na seção

subsequente uma descrição da análise relativa as atividades dos estudantes frente à situação 7.

### 4.2.7. Análise das resoluções da situação 7

A situação 7 (Figura 18), dentre as nove situações do instrumento desta tese, conforme indicado na seção 3.6, é a primeira a ser implementada somente com estudantes do EM. Inferimos que seu nível de dificuldade, com base em Bernardino (2022) e na BNCC (Brasil, 2018), é apropriado para estudantes em formação escolar do EM.

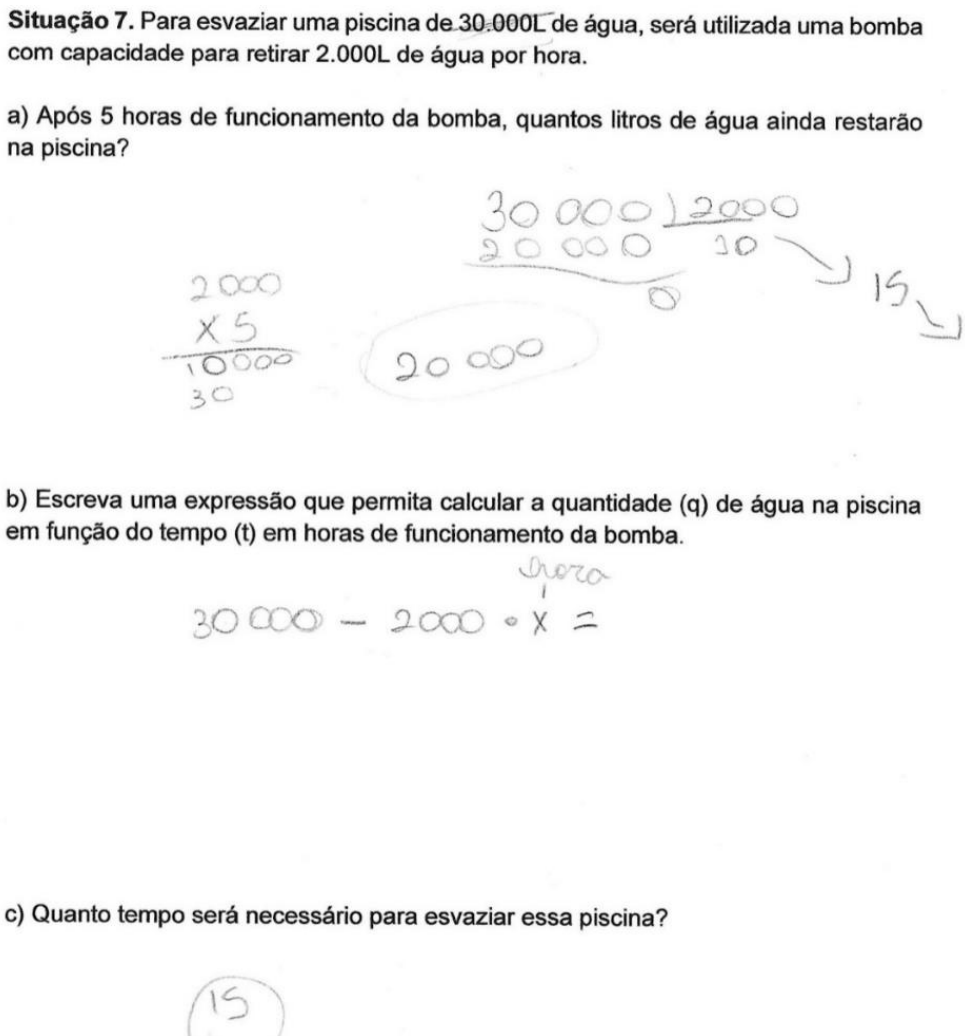



**Figura 18** – Resolução de E1C na situação 7
**Fonte:** da pesquisa

Ao resolver essa tarefa, a exemplo da resposta de E1C na Figura 18, todos os estudantes colaboradores resolveram corretamente o item “a”, analogamente ao ocorrido na situação 6. Na investigação de Bernardino (2022), ao implementar essa tarefa com estudantes do 3º ano do EM, nove, dentre os dez participantes, solucionaram corretamente o item “a”.

Na atividade dos estudantes, ao resolverem o item “a”, observamos, a exemplo da resolução de E1C (vide Figura 18), a identificação da capacidade da bomba de retirar 2000 litros de água por hora. Com base nisso, consideramos que os estudantes identificaram implicitamente, à exceção de E3B, que se a bomba retira 2000 litros de água em uma hora, então em cinco horas vai retirar cinco vezes essa quantidade, isso é, $5 \cdot 2000$. Em termos matemáticos, se considerarmos uma função linear $f_1$ que relaciona a quantidade de água retirada ($f_1(x)$) em função do tempo de funcionamento da bomba ($x$) por meio da lei $f_1(x) = 2000x$, podemos descrever a estratégia desses estudantes assim: se $f_1(1) = 2000$, então $f_1(5) = f_1(5 \cdot 1) = 5 \cdot f_1(1) = 5 \cdot 2000 = 10000$. Diante disso, consideramos que essa estratégia pode ser associada à mobilização implícita do *TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então* $f(nx) = f\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n\ parcelas} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, *com* $n, x \in \mathbb{N}$.

Identificamos indícios da possibilidade da mobilização do TAV6 nas entrevistas dos estudantes, a exemplo da fala de E1A: *O problema fala cinco horas tirando a água. Então, ela vai tirar 2000 litros por hora. Então, se fosse assim, cinco horas vezes dois [mil] ia dar 10000.*

Na continuidade dessa explicação, E1A disse: *Daí, esses 10000 eu joguei aqui pro lado. O total, 30000 litros menos o 10000, que ficaria 20000 litros o restante.* Observamos, a partir dos protocolos escritos e das entrevistas, que os estudantes colaboradores, com exceção de E3B, utilizaram essa estratégia, para responder quantos litros de água restariam na piscina, após cinco horas de funcionamento da bomba. Então, considerando os 30000 litros de água na piscina, como o estado inicial ($I$), $f_1(5) = 10000$ como a transformação ($T$) e o resultado da diferença entre o estado inicial e transformação, como o estado final ($F$), temos: $30000 - 10000 = 20000$ ($F = I - T$). Portanto, A exemplo do identificado na investigação[50] de Bernardino (2022),

[50] Bernardino (2022, p. 71) modelou assim esse TAV: “$c = a + (\pm b)$ com $a\ e\ b \in \mathbb{N}$”.

inferimos a mobilização do *TAV9:* Se $F$ é o estado final, $I$ o estado inicial e $T$ a transformação, então $F = I \pm T$, em observação a atividade desses estudantes.

O TAV9 foi indicado por Vergnaud (2007, p. 7 – tradução nossa), ao analisar uma solução de uma situação, na qual “[...] se uma diminuição faz passar do estado inicial para o estado final, então um aumento faz passar do estado final ao estado inicial. Se inverte o sentido da transformação”, com a seguinte modelação: “Se $F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$” (Vergnaud, 2007, p. 7).

Além dessas pesquisas, o TAV9 também foi identificado nos estudos de: Calado (2020), com estudantes do 3º ano do EM, Rodrigues (2021), com estudantes do 5º ano do EF e de Siqueira (2023), com estudantes do 3º ano do EM. Consideramos, nesta tese, em adotar a modelação para esse teorema em ação, como foi idealizada por essa última autora.

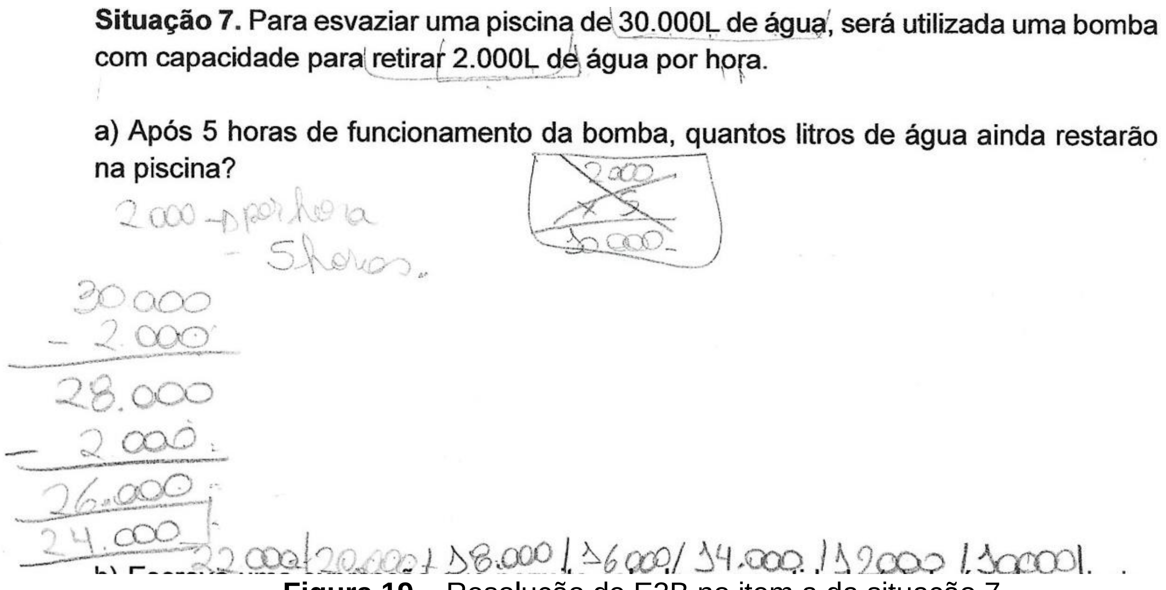



**Figura 19** – Resolução de E3B no item a da situação 7
**Fonte:** da pesquisa

O TAV9, com base na atividade de E3B, foi mobilizado implicitamente por esse estudante, ao resolver o item “a”. Porém, como pode ser observado na Figura 19, de uma forma diferente dos outros estudantes. Inferimos que E9B mobilizou o TAV9 nas cinco etapas que realizou, para responder o item “a”. Na primeira, correspondente a uma hora de funcionamento da bomba, fez: $30000 - 2000 = 28000$, onde podemos inferir que $I_1 = 30000, T = 2000$ e $F_1 = 28000$. Em seguida, na segunda etapa, fez: $28000 - 2000 = 26000$ ($I_2 =$

$28000, T = 2000$ e $F_2 = 26000$). Na terceira: $26000 - 2000 = 24000$ ($I_3 = 26000, T = 2000$ e $F_3 = 24000$). Na quarta: $24000 - 2000 = 22000$ ($I_4 = 24000, T = 2000$ e $F_4 = 22000$). Por fim, na quinta: $22000 - 2000 = 20000$ ($I_5 = 22000, T = 2000$ e $F_5 = 20000$). Portanto, de forma recorrente, observamos a mobilização do *TAV9:* Se $F$ é o estado final, $I$ o estado inicial e $T$ a transformação, então $F = I \pm T$, de tal forma que $F_i = I_{(i+1)}$, com $i = 1,2,3,4$ na estratégia utilizada por E9B. Podemos identificar indícios dessa manifestação em observação a sua explicação oral: *Eu estou fazendo 30 [mil] menos dois mil: uma hora, duas, três, quatro, cinco. Ficaria 20000.*

Ao observarmos as respostas dos estudantes colaboradores frente ao item "b" da situação 7, identificamos duas adequadas (E1C e E2A) e as outras sete (E1A, E1B, E2B, E2C, E3A, E3B e E3C) inadequadas. Tal resultado corrobora com o observado por Bernardino (2022) que, dentre 10 respostas dos seus participantes, considerou duas, como corretas.

A resposta de E1C, conforme Figura 18 ($30000 - 2000 \cdot x$), é semelhante à de E2A ($30000 - 2000 \cdot t$), com a diferença de que o primeiro denominou a variável tempo de funcionamento da bomba pela letra $x$ e o segundo, em conformidade com o solicitado no problema, pela letra $t$. Consideramos que esses estudantes responderam corretamente à questão, ao identificaram a taxa de variação da função ($a = -2000$) e o coeficiente linear da função ($b = 30000$), conforme explicado por E2A: *Aqui na b, a fórmula ficaria: 30000-2000t, que seria do tempo. Que, daí, os 30000 é o total da piscina menos os 2000 por hora que a bomba vai tirando, multiplicado.* Diante disso, conjecturamos que esses sujeitos mobilizaram explicitamente o *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.* Inferimos, com base em Vergnaud (1993, 2019), que esses sujeitos possuem competências para o tratamento de situações, as quais exigem a generalização algébrica referente a função afim.

Dentre as respostas consideradas inadequadas, E1B e E3A não apresentaram soluções ao item "b", conforme pode ser observado na resposta de E3A: *É assim, eu pulei essa aqui (item b), porque eu não vou conseguir fazer.* E2B escreveu no protocolo: $1h = 2000$ e $15h = 30000$ explicando assim: *É, escreva a expressão, não sou muito bom em escrever a expressão. Uma hora igual a 2000 e 15 horas igual a 30000. É para dois, tipo, uma hora para 2000 litros, eu quis dizer. Então, 15 horas,*

*para 30000 litros de água.* E3C escreveu duas frações assim: ($\frac{t}{1}$ $\frac{q}{2000}$) e explicou dessa forma: *Eu coloquei o quê, é quantidade de água que ele tira por hora e o tempo ele demora uma hora para retirar esses 2000 litros.* E1A e E3B responderam com as respectivas expressões errôneas: $q \cdot t = x$ e $q = t \cdot h$. Em todos esses casos, com base em Vergnaud (1993, 1996), inferimos que os estudantes ainda não têm acomodados em seus repertórios de esquemas o conhecimento relativo ao conceito de função afim relacionado a sua representação algébrica.

A outra resolução errônea ao item "b' foi identificada na resposta de E2C, conforme pode ser visualizado na Figura 20. Ao considerar a taxa de variação da função como $a = 2000$ e o coeficiente linear $b = -30000$, E2C apresentou uma expressão que não responde adequadamente à questão. Esse formato de resposta também foi identificado por Bernardino (2022), ao implementar a situação 7 com estudantes do 3º ano do EM. Segundo a autora, quatro estudantes que apresentaram a solução por meio da equação ($t$) = 2000$t$ – 30000 "Ao invés de subtrair da capacidade total de 30.000 litros da quantidade de água retirada pela bomba por hora, eles subtraíram da quantidade de água retirada pela bomba por hora a capacidade total da piscina [...]" (Bernardino, 2022, p. 97). Então, considerando a identificação dessa estratégia errônea de resolução pelos participantes da investigação de Bernardino (2022), inferimos que E2C mobilizou um conhecimento que pode ser associado ao *TAF3: Se $a \neq 0$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.* Bernardino (2022) também inferiu a manifestação desse TAF[51] na estratégia dos participantes da sua pesquisa.

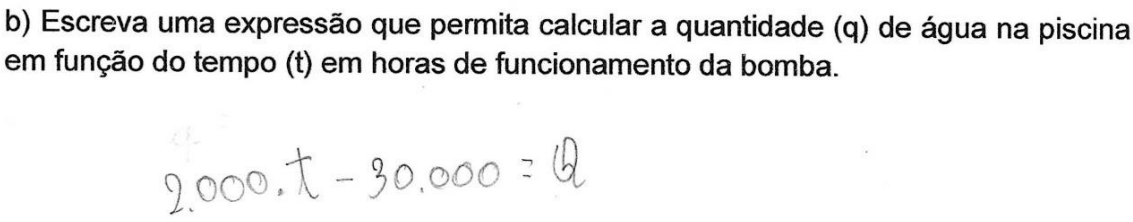



**Figura 20** – Resolução de E2C no item b da situação 7
**Fonte:** da pesquisa

Ao resolverem o item "c" da situação 7, à exceção de E1B que deixou sem resposta, os outros estudantes responderam de forma correta a questão. Na

[51] Bernardino (2022, p. 98) modelou esse TAF assim: "[...] $a$ - $f(bt)$ = $f(bt)$ - $a$ *com* $a$ $b$, *e* $t \in \mathbb{N}$".

investigação de Bernardino (2022), de forma semelhante, nove, dentre os dez participantes, responderam corretamente esse item.

Por um lado, ao observarmos os estudantes em atividade durante a resolução do item “c”, identificamos que E1A, E1C e E2B consideraram que se a bomba retirou 10000 litros de água em cinco horas, conforme os cálculos realizados no item “a”, então em 15 horas a bomba retiraria três vezes 10000, isso é, compreenderam que seriam necessárias 15 horas, para esvaziar a piscina. Isso pode ser observado na seguinte explicação realizada por E1C: *Aqui (item c), eu só olhei aqui nesse exercício (item a) e identifiquei que a cada cinco horas vai retirar 10000 litros de água. Multipliquei por três, que deu 15 que daí dá 30000.* Em termos matemáticos, se consideramos a função linear $f_1$ , a qual relaciona a quantidade de água retirada ($f_1(x)$) em função do tempo de funcionamento da bomba ($x$) por meio da lei $f_1(x) = 2000x$, definida no item “a”, podemos associar o conhecimento mobilizado por esses estudantes dessa forma: Se $f_1(5) = 2000 \cdot 5 = 10000$, então $f_1(15) = f_1(3 \cdot 5) = 3 \cdot f_1(5) = 3 \cdot 10000 = 30000$. Diante disso, inferimos que esses sujeitos mobilizaram implicitamente um conhecimento que pode ser associado ao *TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então* $f(nx) = f\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n\ parcelas} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, *com* $n, x \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, identificamos na atividade de sete estudantes colaboradores (E1B, E1C, E2A, E2C, E3A, E3B e E3C) a interpretação correta de que, para descobrir o tempo necessário, para esvaziar a piscina bastava dividir a quantidade inicial de água ($30000$ litros) pela taxa de capacidade de retirada de água pela bomba ($2000l/h$). Matematicamente, a estratégia utilizada por esses estudantes foi: $30000 \div 2000 = 15$, conforme pode ser visualizado na Figura 21. A partir disso, conjecturamos que esses estudantes mobilizaram, durante a resolução do item “c”, um conhecimento que pode ser associado ao *TAV3: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com* $a, x \in \mathbb{R}$.

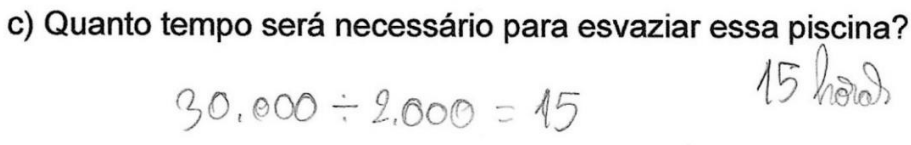



**Figura 21** – Resolução de E2C no item c da situação 7
**Fonte:** da pesquisa

Em relação a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes, ao resolverem a situação 7, inferimos que todos os participantes compreenderam, ao resolverem corretamente o item “a”, que, ao variar o tempo $x$ (horas) de funcionamento da bomba, variará a quantidade de água na piscina $f(x)$ (litros) por meio de uma taxa de retirada de 2000 litros por hora, evidenciando a manifestação implícita das ideias-base de dependência, regularidade e variável.

Assim como identificado na pesquisa de Bernardino (2022), os estudantes colaboradores desta tese tiveram dificuldades para expressar algebricamente a generalização na situação 7, ao resolverem o item “b”. Como vimos, somente dois estudantes (E1C e E2A) conseguiram mobilizar a ideia-base de generalização ao expressar a lei da função na sua forma algébrica nessa tarefa, sendo os únicos que conseguiram solucionar corretamente todos os itens.

A partir disso, inferimos a situação 7, como de Tipo 1 para E1C e E2A, por considerarmos que ao não apresentarem dúvidas no processo de resolução dessa tarefa, recorrendo a esquemas automatizados, com aporte em Vergnaud (1993), eles dispõem das competências para solucionar esse tipo de situação.

Feitas essas análises, elaboramos o Quadro 17 com um resumo das considerações descritas.

**Quadro 17** – Resultados da implementação da situação 7

| Ano | Estudante | Resposta[52] | TA | Ideias-base[53] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E1A | **C:** a e c **E:** b | TAV6 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **C:** a **E:** b e c | TAV6 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** a, b e c | TAV1, TAV3, TAV6 e TAV9 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV6 e TAV9 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a e c **E:** b | TAV3, TAV6 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e c **E:** b | TAV3, TAV6, TAV9 e TAF3 | D, V e R | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **C:** a e c **E:** b | TAV3, TAV6 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a e c **E:** b | TAV3 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3C | **C:** a e c **E:** b | TAV3, TAV6 e TAV9 | D, V e R | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

[52] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada. Os itens sublinhados representam aqueles nos quais os estudantes optaram por deixar às respostas em branco.
[53] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

Com base nos resultados apresentados no Quadro 17, identificamos que foi observado na ação dos estudantes, ao resolverem a situação 7, a mobilização de cinco teoremas em ação: quatro verdadeiros (TAV1, TAV3, TAV6 e TAV9) e um falso (TAF3). A manifestação dos TAV1, TAV6 e TAF3 tinham sido indicadas na análise *prévia* (seção 3.6.7). Já o TAV3 e o TAV9, apesar de não figurarem na análise *prévia* (seção 3.6.7), já tinham sido identificados na pesquisa de Bernardino (2022), ao implementar a situação 7 com estudantes do 3º ano do EM. Além disso, três teoremas em ação (TAV2, TAV4 e TAV5) foram citados, como candidatos a figurarem nas ações dos estudantes, ao resolverem a situação 7, na análise *prévia* (seção 3.6.7), mas isso não se confirmou nas nossas observações.

Findadas essas análises da situação 7, passamos a descrever os resultados da implementação da situação 8 com os estudantes colaboradores.

### 4.2.8. Análise das resoluções da situação 8

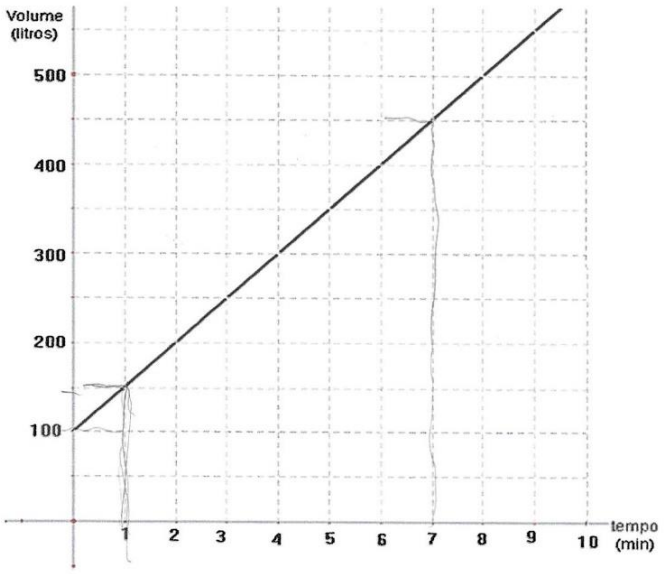
A situação 8, vide Figura 22, conforme Rezende, Nogueira e Calado (2020), embasadas na BNCC (Brasil, 2018), possui nível de complexidade apropriado para ser resolvida por estudantes em formação no EM. Na análise das autoras, para resolver os itens da situação, os estudantes precisam manifestar conhecimentos relativos ao conceito de função, tais como: ideias-base de função, intepretação gráfica e determinação da lei de formação da função. Diante disso, optamos em implementar a situação 8, a partir do 1º ano do EM.

Analogamente ao observado na pesquisa de Rezende, Nogueira e Calado (2020), com estudantes concluintes do EM, no momento das entrevistas, os estudantes recorreram à estratégia de analisar a representação gráfica para resolver os itens da situação 8. Podemos constatar tal comportamento dos estudantes, ao observarmos um trecho da entrevista de E1A: *Aqui (item a), eu vi que pediu para ver umas informações do gráfico. Então, aqui é o volume (eixo $y$), a quantidade que vai ter e aqui, é os minutos (eixo $x$). Então, em sete minutos ia ter 450 litros na caixa.*

**Situação 8.** Uma caixa de água tem capacidade de 1000 litros e possui certa quantidade de água em seu interior. Em determinado instante, uma torneira é aberta para encher a caixa d'água, conforme informações disponíveis no gráfico abaixo. Com estas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?

450




b) Qual a taxa de vazão de água da torneira?

64,2 L / M

c) Indique a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo?

X = L . T

**Figura 22** – Resolução de E2B na situação 8
**Fonte:** da pesquisa

Dentre os nove estudantes participantes, somente E1B e E1C não responderam corretamente o item "a". E1B não conseguiu interpretar as informações do gráfico e preferiu não responder nenhum item, deixando todos em branco, como pode ser identificado nessa fala dele: *Eu realmente não sei.* E1C identificou corretamente na representação gráfica que o tempo de sete minutos que a torneira permanece aberta corresponde a 450 litros de água na caixa. Porém, na sequência, interpretou de forma errada que para saber quantos litros de água haveria na caixa,

após sete minutos, era preciso somar os 100 litros iniciais com 450 litros, conforme explicou: *No exercício, ele não está dizendo quanto de água que já tinha na caixa de água. E ele deixou a torneira ligada durante sete minutos. Olhando no gráfico, é equivalente a 450 litros. (...) Aqui (item a), eu acho que na caixa de água já tinha 100 litros. Então vai dar 550 [litros]. (...) Porque, aqui, está pedindo quantos litros de água vai ter depois da torneira ficar aberta por sete minutos. Então, você tinha que somar o que já tinha com o que a torneira derramou.*

Ao observarmos as respostas dos participantes no item "b" da situação 8, identificamos três incorretas: além de E1B, que não respondeu a tarefa, E3B interpretou como uma relação de proporcionalidade e respondeu: *Eu faria assim (escreve uma regra de três, na qual sete corresponde a 450 e* $x$ *corresponde a 1000)*, mas não desenvolveu os cálculos associados a isso e não concluiu seu raciocínio. E2B interpretou erroneamente, ao considerar que a taxa de vazão da torneira resultaria do quociente $\frac{450}{7}$, considerando seu valor aproximado de $64{,}2$ litros por minuto, como pode ser visualizado na Figura 22. Influenciado pela resposta ao item "a", explicou seu raciocínio dessa forma: *Calma, eu errei no gráfico. (...) É dividido por sete (*$450 \div 7$*). Calma (faz na calculadora* $450 \div 7$*). Agora, eu acho que está certo (escreve:* $64{,}2\ L/m$*). (...) Se em sete minutos encheu 450 litros de água, que é o que estava aqui [no gráfico], eu só dividi 450 por sete, deu 64,2.*

Esses resultados demonstram uma incompreensão da representação gráfica de uma função afim por estes quatro estudantes (E1B, E1C, E2B e E3B). Na BNCC (Brasil, 2018), é recomendado que os estudantes do EM devem aprofundar os conhecimentos apreendidos durante a formação no EF, ficando implícito no documento a necessidade dos estudantes do EM desenvolverem a seguinte habilidade relativa ao 9º ano do EF: "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (Brasil, 2018, p. 317).

No item "c", cinco estudantes (E1A, E1B, E2C, E3A e E3B) optaram por não responder à questão, alegando não conseguirem indicar a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo, a exemplo das respostas seguintes: E3A: *Não sei a c,* E2C: *A c eu não consegui. Não sei te informar* e E3B: *Eu inventaria, na verdade (...). Não sei.* Conjecturamos, nesses casos, que esses

participantes ainda não desenvolveram competências, para tratar de situações envolvendo a representação gráfica da função afim, pois não conseguiram encontrar em seus respectivos repertórios de esquemas acomodados nenhum que pudesse resolver a tarefa. De acordo com Vergnaud (2007, p. 7, tradução nossa), quando os estudantes espontaneamente rejeitam o problema é, porque "[...] eles não podem encontrar em suas buscas os esquemas que lhes permitem dar sentido a essa situação".

Outros três estudantes (E1C, E2B e E3C) responderam erroneamente o item "c". Ao considerarem que o volume de água na caixa (em litros) era diretamente proporcional ao tempo (em minutos) que a torneira permanecesse aberta, com constante *de proporcionalidade* igual a vazão, esses participantes não identificaram o coeficiente linear ($b = 100$) da função. E2B, conforme pode ser visualizado na Figura 22, considerou que o volume ($x$, na sua notação) é igual ao produto entre a vazão ($L$, na sua notação) e o tempo ($T$, na sua notação) por meio da expressão: $x = L \cdot T$. E3C escreveu duas frações isoladas ($\frac{v}{50}$ $\frac{t}{1}$) e explicou assim: *Aqui, ele pediu a expressão. O 50 é o volume e um minuto é o tempo. (...) Então seria dois minutos vezes o 50 daria 100 litros.* Inferimos, com base nisso, que E3C considera a proporcionalidade dada pela correspondência $1 \rightarrow 50, 2 \rightarrow 100$, isso é, as frações isoladas ($\frac{v}{50}$ $\frac{t}{1}$) podem ser tratadas, como uma regra de três, que resultaria em: $v = 50t$ (o volume de água na caixa (em litros)) é proporcional ao tempo (em minutos) que a torneira permanece aberta com taxa de proporção igual a vazão (50l/min). De forma semelhante, E1C escreveu a seguinte lei de formação: $xm \cdot 50 = volume\ de\ água$, explicando assim: *Aqui (item c), eu coloquei o $xm$, que significa os minutos que, no caso, significa a variável, porque a gente não sabe quanto tempo ia levar. E o 50 é o valor que a cada minuto enche a caixa de água. E o resultado seria o volume total.*

Diante disso, inferimos que os conhecimentos mobilizados por esses três estudantes colaboradores (E1C, E2B e E3C) podem ser associados ao *TAF2: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.* Este resultado também foi observado nas pesquisas de Bernardino (2022) e Siqueira (2023), ao implementarem situações envolvendo o conceito de função afim com estudantes do 3º ano do EM.

Diante desses dados, consideramos que para oito estudantes participantes, à exceção de E2A, os conhecimentos necessários para fazer a transição do registro

gráfico de uma função afim para o algébrico não figuram nos seus repertórios de esquemas acomodados (Vergnaud, 1993). Tal resultado corrobora com o observado por Araújo, Silva e Teles (2024). Esses autores, fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, investigaram a abordagem em livros didáticos do 9º ano do EF e as estratégias de estudantes do 3º ano do EM, referentes ao processo de conversão dos registros de representação gráfico e algébrico da função afim. Os resultados indicam, conforme os autores, "[...] a predominância das conversões do registro algébrico para o gráfico na abordagem dos livros didáticos analisados [...]" (Araújo; Silva; Teles, 2024, p. 333), bem como "[...] apontam dificuldades dos estudantes para fazer a conversão no sentido oposto, ou seja, do registro gráfico para o algébrico" (Araújo; Silva; Teles, 2024, p. 333).

Dentre os estudantes colaboradores entrevistados, somente E2A (vide Figura 23) conseguiu expressar a generalização algébrica no item "c" da situação 8. Considerando que este estudante identificou a taxa de variação da função ($a = 50$) e o coeficiente linear ($b = 100$), inferimos que mobilizou, em sua ação, conhecimentos possíveis de serem associados ao *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*

c) Indique a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo?

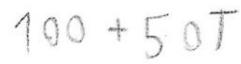



**Figura 23** – Resolução de E2A no item c da situação 8
**Fonte:** da pesquisa

Em relação as ideias-base de função, consideramos que somente E1B não mobilizou nenhuma. Ao optar por deixar todos os itens da situação em branco, isso é, sem resolução, consideramos que este estudante não compreendeu a situação 8. Para Vergnaud (1993, 2009a, 2009b, 2009c), os conceitos em ação, a exemplo das ideias-base de função, permitem ao sujeito a coleta das informações relevantes para a escolha dos teoremas em ação necessários aos cálculos à resolução de uma situação.

Ao identificarem a relação de dependência do volume de água na caixa $f(x)$ (em litros) em relação ao tempo $x$ (minutos) que a torneira fica aberta, consideramos que os estudantes colaboradores, a exceção de E1B, também manifestaram a

compreensão de que tanto o tempo (em minutos) que a torneira permanece aberta, quanto o volume de água na caixa (em litros) são variáveis. Um exemplo disso pode ser identificado na fala de E2C: *Se ficar mais tempo aberto, vai encher mais água.* De forma análoga, E3A disse: *O volume de água depende do tempo. Que quanto mais tempo a torneira ficar aberta, mais o volume da água vai aumentar.* Então, com exceção de E1B, inferimos que todos os demais mobilizaram as ideias-base de função dependência e variável, ao resolverem os itens “a” e “b” da situação 8.

No item “b”, era solicitado do estudante a identificação da taxa de vazão da torneira, remetendo à ideia-base de regularidade. Inferimos que os estudantes colaboradores, com exceção de E1B, E2B e E3B, mobilizaram adequadamente essa ideia-base de função, ao compreenderem que a cada minuto que a torneira permanecesse aberta aumentaria 50 litros de água na caixa, a exemplo das seguintes falas: E1C: *(...) a taxa de vazão seria 50, porque vai aumentando de 50 em 50;* E1A: *Eu não sei se está certo, mas eu pensei assim: tipo aqui, ele sobe de 50 em 50. Seria 50 litros por minuto;* E3A: *Eu analisei o gráfico de novo [e] vi que, tipo assim, do 100 ao 200 (...) são um minuto. Então, a taxa de vazão da água é de 50 litros por minuto.*

Resumindo essas análises, identificamos que oito estudantes colaboradores, com exceção de E1B, mobilizaram as ideias-base de função dependência e variável, ao resolverem a situação 8. Além disso, fora E1B, E2B e E3B, os demais identificaram a ideia-base de regularidade na resolução da tarefa, demonstrando a compreensão desse conceito. Mesmo assim, somente E2A conseguiu mobilizar a ideia-base de função generalização. De forma semelhante, no estudo de Rezende, Nogueira e Calado (2020), ao implementar a situação 8 com estudantes concluintes do EM, as autoras identificaram que a maioria dos participantes mobilizou as ideias-base de função dependência, variável e regularidade adequadamente. Apesar disso, segundo as pesquisadoras, nenhum estudante mobilizou adequadamente a ideia-base de função generalização.

Quanto a classificação da situação para o sujeito, consideramos que a situação 8 é do Tipo 1 para E2A, isso é, pertence à classe de situações para a qual o sujeito possui competências ao tratamento quase que instantâneo, de forma direta, por meio de um só esquema (Vergnaud, 1993). Para os demais, dado que não manifestaram, em ação ao resolverem a situação 8, esquemas acomodados para sua resolução (Vergnaud, 1993), consideramos que ela é do Tipo 2.

Diante dos resultados dessa análise dos estudantes em ação ao resolverem a situação 8, elaboramos o Quadro 18 na intenção de resumir os principais resultados da sua implementação.

**Quadro 18** – Resultados da implementação da situação 8

| Ano | Estudante | Resposta[54] | TA | Ideias-base[55] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E1A | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **E:** a, b e c | ------- | ---------- | Tipo 2 |
| | E1C | **C:** b **E:** a e c | TAF2 | D, V e R | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a **E:** b e c | TAF2 | D e V | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **C:** a e b **E:** c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E3C | **C:** a e b **E:** c | TAF2 | D, V e R | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

Com base nos resultados presentes no Quadro 18, como previsto na análise *prévia* da situação 8 (seção 3.6.8), por um lado foram mobilizados pelos colaboradores o TAV1 e o TAF2. Por outro lado, diferentemente do considerado previamente, não foram identificados na ação dos estudantes conhecimentos que pudessem ser associados ao TAV4: Se $f(x) = ax + b$ e $x \neq 0$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com $a, x \in \mathbb{R}$ e ao TAV6: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = f\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n\ parcelas} = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$.

Em relação as ideias-base de função, assim como identificado na investigação de Rezende, Nogueira e Calado (2020), à exceção de E2A, os demais estudantes não conseguiram manifestar a generalização, corroborando com a análise *prévia* da situação 8.

Dada que a classificação da situação para o sujeito é realizada com fundamento na identificação de competências para a sua resolução, considerando os resultados contidos no Quadro 18, inferimos que os estudantes do EM colaboradores deste estudo, fora E2A, não possuem competências, para tratar de situação, na qual é solicitada a intepretação da representação gráfica de uma função afim, em especial

[54] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada. Os itens sublinhados representam aqueles nos quais os estudantes optaram por deixar às respostas em branco.
[55] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

no tocante à conversão do registro gráfico para o registro algébrico desse tipo de função, assim como o observado por Araújo, Silva e Teles (2024).

Findada a análise dos resultados da implementação da situação 8, passamos, na próxima seção, a discussão e apresentação dos resultados da implementação da situação 9.

### 4.2.9. Análise das resoluções da situação 9

A situação 9, conforme Figura 24, como veremos, foi mais difícil que a situação 7 para os colaboradores deste estudo. Este resultado também foi observado por Bernardino (2022), ao implementar essas duas tarefas com estudantes do 3º ano do EM.

Ao resolverem o item “a” da situação 9, a exemplo da estratégia utilizada por E3B, conforme Figura 24, cinco estudantes colaboradores (E2A, E2B, E2C, E3B e E3C) recorreram adequadamente à regra de três[56]. Para tanto, consideraram que se um influencer com 250000 seguidores perde 5000 dólares por publicação não feita, Enzo perderia por publicação não feita um valor $x$ proporcional aos seus 100000 seguidores, de tal forma que: $\frac{250\,000}{5000} = \frac{100\,000}{x} \Leftrightarrow x = 2000$. Com base nisso, inferimos que esses estudantes mobilizaram conhecimentos que podem ser associados ao *TAV5: Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.* Um exemplo disso pode ser observado na resposta de E2B sobre como ele resolveu o item “a”: *Regra de três. Eu tentei fazer, porque não consegui de outro jeito. Ó, 250 é igual ao 100%, só que não utilizei porcentagem. 250 igual a 5000 dólares que ele perde. 250000, eu tirei os 1000. Ele tem 250000 seguidores e cada publicação que ele não faz, ele perde. Então eu fiz 250 igual a 5 e aqui 100 igual a $x$. Daí, eu só multipliquei cruzado, $250x$ [igual a] 500. Daí, dividi 500 por 250 que é igual a dois. Então, ele perde 2000 dólares por publicação não feita.*

[56] “Quando a correspondência $x \to y, x' \to y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a tradicional “regra de três”” (Lima *et al.,* 2006, p. 98).

**Situação 9.** Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.

a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5.000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

250.000 — 5000
100.000 — x

250.000x = 500000000
x = 11
250.000
x = 2.000

b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

V = 23.000
P = 6

2.000
x 6
12.000
−23.000
11.000

c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?

7 p.

**Figura 24** – Resolução de E3B na situação 9
**Fonte:** da pesquisa

Outra resposta correta ao item “a” foi dada por E1A. Recorrendo a estratégia de tentativa e erro, o estudante explicou que obteve a resposta dessa forma: *Nessa aqui (item a), eu diria que era, ele perde uns 2000. (...) Porque ele tem 150 [mil] seguidores a mais que esse Enzo. E ele perde, a cada vídeo não postado, ele perde 5000. Então eu fiz meio que por chute, sabe. Porque ele tem 150 [mil] seguidores a mais, então ele vai ter uma renda maior. Então eu chutei que esse aqui (o Enzo) ia*

*perder uns 2000 dólares [a] cada vídeo que ele não postasse.* Consideramos, diante disso, que E1A identificou a relação de proporcionalidade entre o valor por publicação não feita e o número de seguidores, apesar de não ter apresentado uma formalização matemática mais elaborada na sua resolução. Na investigação de Siqueira (2023), com estudantes do 3º ano do EM, também foi identificado o uso dessa estratégia por parte dos participantes, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim.

Três estudantes (E1B, E1C e E3A) não compreenderam a relação de proporcionalidade entre o valor por publicações não feitas e o número de seguidores, ao resolverem o item “a”. E1B, por exemplo, respondeu que explicaria a questão para um colega dessa forma: *Eu mandaria ele diminuir, um salário de 23000 por 5000 dólares, porque, se ele ganha 23000 por mês e ele não posta uma publicação por mês, por exemplo, ele perde 5000 dólares. Então, se ele perder uma, ele vai perder esse valor.* Inferimos, neste caso, que a falta de compreensão da tarefa levou E1B a dar uma resposta sem significado, indicando, conforme Vergnaud (1993), tratar-se de dar uma resposta para uma situação considerada nova para o sujeito, isso é, não trivial para ele.

E1C (vide Figura 25) e E3A resolveram o item “a”, erroneamente, por meio da estratégia de dividir o salário de Enzo, 23000 dólares, pelo número mínimo de publicações, 8 (oito), que ele precisa fazer para obtê-lo.

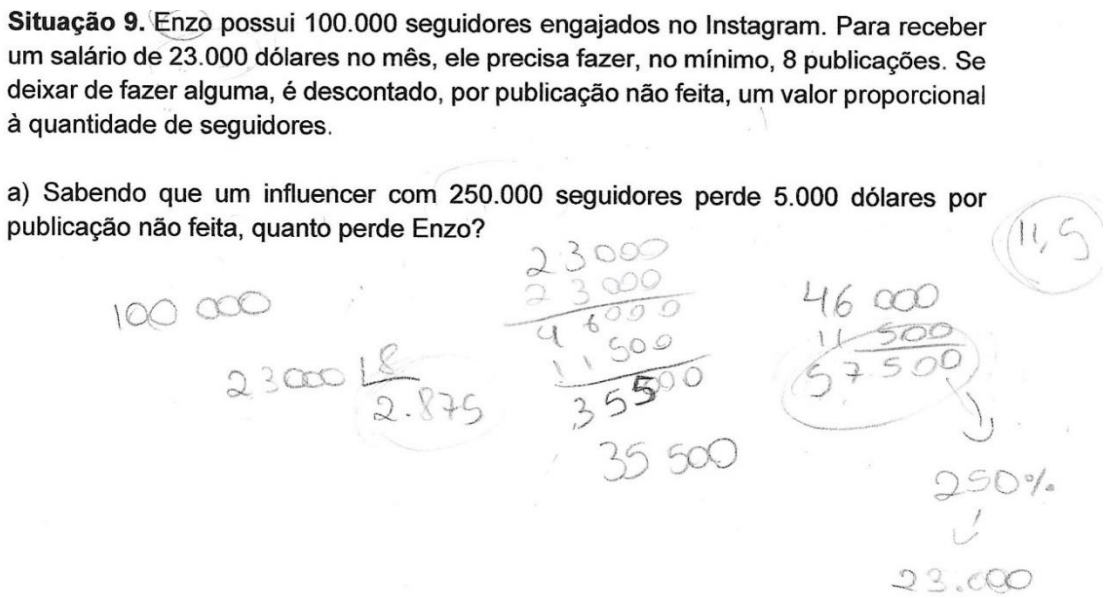



**Figura 25** – Resolução de E1C no item a da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

E1C explicou assim: *Eu acho que cheguei no resultado. Eu fiz 23000, que é o que ele recebe no mês, para ele receber isso, ele precisa fazer no mínimo oito publicações. Então, eu dividi esse valor por oito, que é o valor de cada publicação que ele faz. Então, seria esse o resultado da "a" (2875).* De forma análoga, E3A expôs que respondeu o item "a" dessa forma: *Eu fiz esse número aqui (23000) dividido por esse (8), porque, se oito publicações são 23000 dólares por mês, eu acho que cada publicação tem um valor fixo.*

No item "b", foi solicitado dos estudantes colaboradores a generalização da situação 9 por meio de uma expressão algébrica, na qual o valor que Enzo receberia, $v$ (em dólares) dependia da quantidade $p$ de publicações não realizadas. Como previsto na análise *prévia* dessa tarefa (seção 3.6.9), com base na investigação de Bernardino (2022), à exceção de E2A, todos os demais colaboradores não conseguiram expressar a generalização algébrica da situação 9.

Dentre as resoluções errôneas, E1A escreveu a expressão: $V - P = X$, explicando dessa forma: *Então, vamos dizer assim: que ele recebe um valor que é esse aqui (V). Daí, se ele não realizar as publicações, ele vai perder dinheiro. Então seria menos o pê (P), que daria igual o xis (X), que seria o valor que ia receber [o Enzo].* E3C, de forma análoga às suas resoluções nos itens que solicitavam a generalização nas situações 7 e 8, escreveu duas frações isoladas ($\frac{23000}{v}$ $\frac{8}{p}$). Ao ser questionado pelo pesquisador sobre a expressão, disse: *Aqui, ele pede a expressão algébrica que determina o valor que ele recebe em dólares, de acordo com a quantidade de publicações. Então, o vê ($v$) seria 23000 e o pê ($p$) seria 8.* E1B, E1C, E2B e E3A argumentaram que não entenderam o item "b", optando, consequentemente, por deixá-lo sem resposta, em branco. Diante disso, considerando Vergnaud (1993), conjecturamos que o simbolismo associado ao conceito de função afim não figura entre os conhecimentos presentes nos esquemas acomodados destes seis estudantes (E1A, E1B, E1C, E2B, E3A e E3C).

Outras duas resoluções consideradas errôneas, no item "b", foram apresentas por E2C e E3B. O primeiro, conforme Figura 26, ao considerar, de forma errada, a taxa de variação da função como $a = 2000$ e o coeficiente linear da função $b = -23000$, apresentou uma expressão que não responde adequadamente à questão, repetindo o mesmo erro cometido por ele na situação 7.

b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

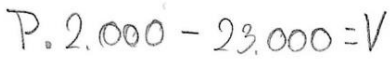



**Figura 26** – Resolução de E2C no item b da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

Já E3B, como pode ser visualizado na Figura 27, supôs que Enzo deixou de fazer seis publicações, explicando assim: *Mas não está dizendo quantas publicações ele não realizou. Eu faria que ele não realizou seis.* No seu protocolo, podemos observar que apresentou uma estratégia, na qual utiliza implicitamente os mesmos valores utilizados por E2C para a taxa de variação da função ($a = 2000$) e para o coeficiente linear da função ($b = -23000$). Diante disso, inferimos que estes dois estudantes (E2C e E3B) mobilizaram conhecimentos que podem ser associados ao TAF3: Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.

b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

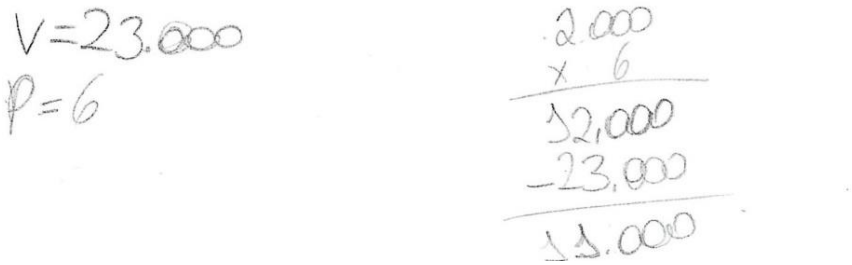



**Figura 27** – Resolução de E3B no item b da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

Dentre os estudantes colaboradores entrevistados, somente E2A conseguiu expressar a generalização algébrica no item “b” da situação 9, como pode ser observado na Figura 28. Considerando que este estudante identificou a taxa de variação da função ($a = -2000$) e o coeficiente linear ($b = 23000$), inferimos que mobilizou, em sua ação, conhecimentos possíveis de serem associados ao *TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.*

b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

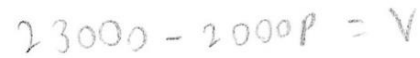



**Figura 28** – Resolução de E2A no item b da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

No item “c” da situação 9, identificamos quatro resoluções corretas e cinco incorretas. Dentre as consideradas inadequadas, E1B considerou erroneamente que Enzo deixou de fazer 14 publicações, como pode ser observado na sua explicação: *Se ele ganha 23000, ele perde 5000 dólares. Se ele recebeu só 9000 dólares, ele deixou de fazer, tem que diminuir aqui. Então, eu acho que ele deixou de fazer 14 publicações.* E3A, por sua vez, deixou sem resposta o item “c” por não conseguir identificar quanto Enzo perde por publicação, conforme explicou: *Se eu for seguir o que eu estava fazendo antes, que é um valor fixo por cada publicação, então eu saberia esse daqui (item c). Mas não tem um valor fixo por cada publicação.* E1C e E3C, de forma errônea, consideraram que Enzo perderia $\frac{23000}{8} = 2875$ dólares por publicação não feita e, diante disso, foram multiplicando esse valor por 1, 2, 3, até chegar em um valor aproximado de 9000. Podemos identificar isso na seguinte explicação de E3C: *(...) eu estou tentando descobrir quantas publicações ele fez que ganhou esses 9000 dólares. Ele fez três publicações. Mas ele está pedindo quanto ele deixou de fazer. Então, é só fazer esse três menos oito, que dá cinco publicações.* Também é possível de observar isso no protocolo escrito de E1C, conforme a Figura 29.

c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?

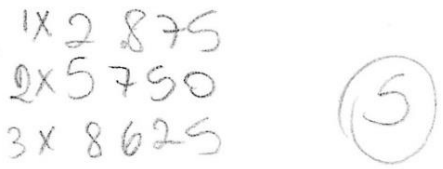



**Figura 29** – Resolução de E1C no item c da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

E1A, por sua vez, considerou erroneamente que a diferença entre 23000 e 9000 é igual a 12000. Diante desse erro de cálculo, fez a operação de $12000/2000$ e

concluiu que Enzo deixou de fazer seis publicações, para receber um salário de 9000 dólares.

De forma análoga à E1A, os quatro estudantes (E2A, E2B, E2C e E3B) que responderam corretamente o item “c” da situação 9, como pode ser visualizado na Figura 30, utilizaram a estratégia de dividir a diferença entre 23000 e 9000 por 2000, para obter o número de publicações que Enzo deixou de Fazer em fevereiro. O uso dessa estratégia pode ser observado na explicação de E2A: *Aqui (item c), daí eu tirei, 23000 menos 9000, deu 14000. E, daí, dividi por dois [mil] que deu sete publicações.* Consideramos, a partir disso, que esses cinco estudantes (E1A, E2A, E2B, E2C e E3B) utilizaram o resultado do item “a”, para atingirem a resolução do item “c”. Essa estratégia também foi utilizada por três dos 10 estudantes do 3º ano do EM colaboradores da investigação de Bernardino (2022), durante a implementação da situação 9. Assim como essa autora, não identificamos nenhum TA associado a essa forma de resolução.

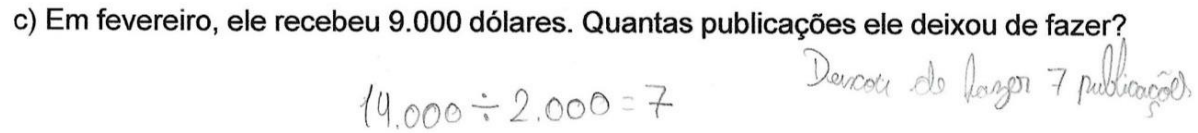



**Figura 30** – Resolução de E2C no item c da situação 9
**Fonte:** da pesquisa

Em relação a mobilização das ideias-base de função pelos estudantes ao resolverem a situação 9, inferimos que, com exceção de E1B, os demais colaboradores compreenderam, em ação ao resolverem o item “a”, que o valor cujo Enzo recebe $f(x)$ (em dólares) depende da quantidade $x$ de publicações não feitas, evidenciando a manifestação implícita das ideias-base de dependência e variável. E3C, por exemplo, ao ser questionado sobre o que é fixo e o que varia na situação 9, respondeu: *Varia quantas publicações ele publica, e também varia a quantidade que ele ganha. (...) Fixo, se ele fizer as oito publicações, ele ganha 23000.* Em reposta a mesma pergunta, E2C disse: *(...) eu acredito que ele seja fixo (se referindo aos 23000). O que varia, no caso, são as publicações (...) [e] varia o salário.*

No tocante à mobilização da ideia-base de regularidade, conjecturamos que os cinco estudantes (E1A, E2A, E2B, E2C e E3B), os quais utilizaram o resultado do item “a”, de que Enzo perde 2000 dólares por publicação não feita, para solucionar o item “c”, mobilizaram implicitamente esse conceito, dada a identificação que, ao variar o

número de publicações não realizadas por Enzo, tem-se uma regularidade nos valores assumidos no seu salário mensal.

Assim, como identificado na pesquisa de Bernardino (2022), com estudantes do 3º ano do EM, os colaboradores desta tese tiveram dificuldades, para generalizar algebricamente a situação 9, ao resolverem o item “b”. Como vimos, somente E2A expressou a generalização na forma algébrica nessa tarefa. Diante disso, inferimos que somente ele mobilizou essa ideia-base de função adequadamente na sua ação, ao solucionar a situação 9.

Com base nisso, por um lado, inferimos que a situação 9 pode ser considerada do Tipo 1 para E2A, isso é, por não apresentar dúvidas no processo de resolução dessa tarefa, recorrendo a esquemas automatizados, conjecturamos que o estudante possui competências para solucionar esse tipo de situação (Vergnaud, 1993). Por outro lado, conjecturamos que a situação 9 é do Tipo 2 para os demais colaboradores, ou seja, pertence à classe de situações para as quais o sujeito não dispõe, em seu repertório, das competências necessárias ao seu tratamento de forma automatizada, “[...] o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso” (Vergnaud, 1993, p. 02).

Diante desses resultados, elaboramos o Quadro 19 na intenção de resumir os principais resultados decorrentes da análise dos dados produzidos com a implementação da situação 9.

**Quadro 19** – Resultados da implementação da situação 9

| Ano | Estudante | Resposta[57] | TA | Ideias-base[58] | Classe de situação |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E1A | **C:** a **E:** b e c | Não identificado | D, V e R | Tipo 2 |
| | E1B | **E:** a, b e c | Não identificado | Não identificado | Tipo 2 |
| | E1C | **E:** a, b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| 2 | E2A | **C:** a, b e c | TAV1 e TAV5 | D, V, R e G | Tipo 1 |
| | E2B | **C:** a e c **E:** b | TAV5 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E2C | **C:** a e c **E:** b | TAV5 e TAF3 | D, V e R | Tipo 2 |
| 3 | E3A | **E:** a, b e c | Não identificado | D e V | Tipo 2 |
| | E3B | **C:** a e c **E:** b | TAV5 e TAF3 | D, V e R | Tipo 2 |
| | E3C | **C:** a **E:** b e c | TAV5 | D e V | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

[57] As siglas C e E representam, respectivamente, Correta e Errada. Os itens sublinhados representam aqueles nos quais os estudantes optaram por deixar às respostas em branco.
[58] As siglas representam as respectivas ideias-base: D – dependência, R – regularidade, V – variável e G – generalização.

Com base nos resultados apresentados no Quadro 19, observamos que seis estudantes (E1A, E2A, E2B, E2C, E3B e E3C) resolveram corretamente o item “a”, somente E2A resolveu adequadamente o item “b” e quatro colaboradores (E2A, E2B, E2C e E3B) acertaram o item “c”, ao resolverem a situação 9. Tal resultado corrobora com o observado na investigação de Bernardino (2022). Ao implementar a situação 9 com nove estudantes do 3º ano do EM, a autora observou o seguinte nas resoluções dos estudantes: seis estratégias adequadas no item “a”, uma estratégia adequada no item “b” e cinco estratégias adequadas no item “c”. Consideramos, a partir disso, que as dificuldades relativas ao conceito de função afim estão presentes durante toda a formação do EM.

Diante dos resultados apresentados no Quadro 19, identificamos que foi observado na ação dos estudantes, ao resolverem a situação 9, a mobilização de três teoremas em ação: o TAV1, o TAV5 e TAF3. A manifestação dos TAV1, TAV5 e TAF3 tinham sido indicadas na análise *prévia* (seção 3.6.9). Outros três teoremas em ação (TAV2, TAV6 e TAF2) foram citados, como candidatos a figurarem nas ações dos estudantes ao resolverem a situação 9, na análise *prévia* (seção 3.6.9), mas isso não se confirmou nas nossas observações.

Ao observarmos a mobilização das ideias-base de função, de acordo com os resultados resumidos no Quadro 19, identificamos que quatro estudantes (E1A, E2B, E2C e E3B), apesar de manifestarem a compreensão das ideias-base de função de dependência, variável e regularidade, não conseguiram expressar a generalização da situação 9, ao resolverem o item “b”. Resultado análogo foi observado por Bernardino (2022). Dentre nove estudantes do 3º ano do EM participantes da implementação da situação 9 na sua pesquisa, relata a autora, apenas um manifestou esquema adequado no item “b”, relativo à generalização da tarefa.

Ao finalizar essa análise dos resultados da implementação da situação 9 com os estudantes colaboradores, passamos a uma apresentação relativa ao desenvolvimento do conceito de função na próxima seção.

## 4.3. A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM AO LONGO DO PROCESSO DE ESCOLARIZAÇÃO

O nível de compreensão do conceito de função, por um sujeito, conforme Merli e Nogueira (2024), pode ser relacionado com a mobilização das ideias-base de função por esse sujeito (segundo descrito na seção 2.3).

Então, considerando os níveis de compreensão[59] do conceito de função (compreensão intuitiva, matematização inicial e abstração) e a mobilização das ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) pelos estudantes colaboradores, estabelecemos a seguinte relação: se o estudante mobilizou somente as ideias-base de dependência e variável, inferimos como compreensão intuitiva o seu nível de desenvolvimento do conceito de função afim; se mobilizou as ideias-base de dependência, variável e regularidade, seu nível de desenvolvimento do conceito de função afim é de matematização; e, por fim, se mobilizou as quatro ideias-base (dependência, variável, regularidade e generalização), seu nível de desenvolvimento do conceito de função afim é de abstração, conforme indicado no Quadro 20.

**Quadro 20** - Níveis de função e as ideias-base – EF (Anos Finais) e EM

| **Nível de desenvolvimento** | Compreensão intuitiva | Matematização | Abstração |
|---|---|---|---|
| **Ideias-base mobilizadas** | D e V | D, V e R | D, V, R e G |

Fonte: Adaptado de Merli e Nogueira (2024, p. 40-43)

Em observação a essa possibilidade de inferir o nível de desenvolvimento do conceito de função para o sujeito, com base na sua atividade em situação, considerando a mobilização das ideias-base de função, conforme exposto no Quadro 20, elaboramos o Quadro 21 com os resultados da análise das ações dos estudantes colaboradores, ao resolverem as quatro primeiras situações do nosso instrumento[60].

**Quadro 21** – Níveis de compreensão do conceito de função afim dos estudantes colaboradores do EF e EM, para as situações 1, 2, 3 e 4

| **Ano** | **Estudante** | **S1** | **S2** | **S3** | **S4** | **Nível de função** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | D, V e R | D, V, R e G | D e V | D, R, V e G | Matematização |
| | E6B | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |

[59] Não estamos considerando o nível de formalização de compreensão do conceito de função por entendermos, com aporte em Merli e Nogueira (2024), que esse nível só poderá ser consolidado pelos sujeitos com uma formação em curso de nível superior.

[60] Consideramos a identificação desses conceitos de forma representativa, isto é, em um número maior ou igual a ¾ de situações dentre as consideradas na análise. Caso isso não aconteça, inferimos o maior nível dentre os menores níveis de compreensão do conceito de função identificados ou o nível intermediário.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | E6C | D, V e R | D, V e R | D, V e R | D, R, V e G | Matematização |
| 7 | E7A | D, V e R | D, V, R e G | D, V e R | D, V e R | Matematização |
| | E7B | D | Nenhuma | D, V e R | Nenhuma | Compreensão intuitiva |
| | E7C | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |
| 8 | E8A | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |
| | E8B | D, V, R e G | D, V, R e G | D, R, V e G | D, R, V e G | Abstração |
| | E8C | D, V e R | D, V e R | D, V e R | D, R, V e G | Matematização |
| 9 | E9A | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |
| | E9B | D, V e R | D, V, R e G | D e V | D, R, V e G | Matematização |
| | E9C | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |
| 1 | E1A | D, V, R e G | D, V e R | D, V e R | D, R, V e G | Matematização |
| | E1B | D e R | D, V e R | D, V e R | D, V e R | Matematização |
| | E1C | D, V e R | D, V e R | D, V e R | Nenhuma | Matematização |
| 2 | E2A | D, V, R e G | D, V, R e G | D, R, V e G | D, R, V e G | Abstração |
| | E2B | D, V e R | D, V e R | D e V | D, V e R | Matematização |
| | E2C | D, V e R | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Matematização |
| 3 | E3A | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V e R | D, R, V e G | Abstração |
| | E3B | D e R | D, V e R | D, V e R | D, R, V e G | Matematização |
| | E3C | D, V e R | D, V e R | D, R, V e G | D, R, V e G | Matematização |

**Fonte:** da pesquisa

Em observação aos resultados apresentados no Quadro 21, identificamos que um estudante, E7B, ainda se encontra no nível de compreensão intuitiva do conceito de função afim. Outros 12 estudantes, (E6A, E6C, E7A, E8C, E9B, E1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C) estão no nível de compreensão de matematização do conceito de função. Destes, cinco são do EF (E6A, E6C, E7A, E8C e E9B) e os outros sete (1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C) são do EM. Por fim, oito estudantes (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C, E3A e E3A) estão no nível de abstração de compreensão do conceito de função. Destes estudantes, seis (E6B, E7C, E8A, E8B, E9A, E9C) são do EF e apenas dois (E3A e E3A) são do EM.

Dado que o nível de dificuldade das quatro situações consideradas, conforme apresentado no capítulo 3 (seções: 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3 e 3.6.4), é apropriado para o 5º ano do EF, consideramos que o nível de compreensão do conceito de função afim de 13 estudantes (E6A, E6C, E7A, E7B, E8C, E9B, E1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C), em especial para os sete (1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3B e E3C) em nível de escolarização do EM, mostrou-se abaixo do esperado nestas tarefas. De acordo com Merli e Nogueira (2024, p. 39), "[...] o conceito de função está sendo "matematizado" (leis matemáticas) nessa etapa da escolarização", no EF – Anos Finais, sendo esperado o desenvolvimento da abstração nesse nível de formação escolar.

No Quadro 22, como pode ser observado, apresentamos os resultados da análise do nível de compreensão do conceito de função afim, para os estudantes da etapa de escolarização do EM. Para tanto, consideramos somente a implementação das situações 7, 8 e 9 do instrumento, por se tratar, conforme apresentado no capítulo 3 (seções: 3.6.7, 3.6.8 e 3.6.9), de tarefas com nível de dificuldade apropriado para esse nível de formação escolar. Tanto é, que foram implementadas somente para os estudantes colaboradores do EM.

**Quadro 22** – Níveis de compreensão do conceito de função afim dos estudantes colaboradores do EM nas situações 7, 8 e 9

| Ano | Estudante | S7 | S8 | S9 | Nível de função |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | E1A | D, V e R | D, V e R | D, V e R | Matematização |
| | E1B | D, V e R | Nenhuma | Nenhuma | Compreensão intuitiva |
| | E1C | D, V, R e G | D, V e R | D e V | Matematização |
| **2** | E2A | D, V, R e G | D, V, R e G | D, V, R e G | Abstração |
| | E2B | D, V e R | D e V | D, V e R | Matematização |
| | E2C | D, V e R | D, V e R | D, V e R | Matematização |
| **3** | E3A | D, V e R | D, V e R | D e V | Matematização |
| | E3B | D, V e R | D e V | D, V e R | Matematização |
| | E3C | D, V e R | D, V e R | D e V | Matematização |

**Fonte:** da pesquisa

Diante dos resultados apresentados no Quadro 22, observamos que somente um estudante, E2A, está no nível de abstração quanto a compreensão do conceito de função afim. E1B está no nível de compreensão intuitiva e os outros sete estudantes (E1A, E1C, E2B, E2C, E3A, E3B e E3C) estão no nível de matematização. Inferimos, com base nisso, que oito estudantes colaboradores (E1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3A, E3B e E3C) ainda não tinham alcançado, no momento da realização das entrevistas,

o nível de compreensão de abstração do conceito de função afim, que já era o esperado com a finalização do EF – Anos Finais (Merli, Nogueira, 2024).

Essa defasagem no nível de compreensão do conceito de função afim pode resultar de vários fatores associados. Conjecturamos que, devido à suspensão das aulas presenciais[61], no ano de 2020, decorrente da pandemia de COVID-19, esses estudantes possam ter sido prejudicados em sua aprendizagem em geral, neste caso, no tocante ao conceito de função afim. De acordo com Saviani e Galvão (2021, p. 42, grifo dos autores), “No “ensino” remoto, ficamos com pouco ensino, pouca aprendizagem, pouco conteúdo, pouca carga horária, pouco diálogo. Em contrapartida, temos muitas tarefas”.

Outro ponto a ser considerado está relacionado com os programas da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (SEED/PR), a exemplo do *Se Liga!.* De acordo com a SEED, “Criado em 2019, o programa pretende intensificar a aprendizagem de todos os estudantes da rede de ensino estadual, promovendo o engajamento e o desenvolvimento de diferentes aprendizagens nas semanas finais do ano letivo” (PARANÁ, 2023).

Para Santos, Gonçalves e Rodrigues (2022), a implementação do *Se Liga!* nas escolas e colégios da rede estadual do Paraná resultou na aprovação de muitos estudantes à próxima série/ano escolar, sem a aquisição dos conhecimentos relativos à sua série/ano de formação. Segundo os autores, “[...] ao final do ano letivo de 2020, se colocou em prática a terapêutica do projeto “Se Liga” para supostamente recuperar os educandos em defasagem de conteúdos e que estavam com notas abaixo da média” (Santos; Gonçalves; Rodrigues, p. 8, grifo dos autores).

Em contrapartida, na investigação de Calado (2020), ao implementar um teste diagnóstico envolvendo o conceito de função afim com os estudantes de uma turma do 9º Ano do EF, colaboradores da sua investigação, no mês de julho de 2019, em um período precedente da suspensão das aulas presenciais por conta da pandemia de COVID-19, a autora observou dificuldades dos estudantes, ao resolverem uma situação envolvendo o conceito de função afim. Apesar de identificar que os estudantes já tinham estudado o conceito de função afim, a pesquisadora relata dificuldades deles para compreenderem o contexto da tarefa. Além disso, descreve

[61] “A partir do dia 20 de março de 2020, as aulas presenciais no Paraná foram suspensas por meio do Decreto nº 4.258, como medidas para enfrentamento da situação de emergência de saúde pública” (Santos; Gonçalves; Rodrigues, 2022, p. 5).

que nenhum, dentre os 29 participantes, apresentou estratégia correta para representar graficamente a função e para expressar a generalização na sua forma algébrica. Porém, após a implementação de uma sequência didática, com aporte na Teoria das Situações Didáticas, a pesquisadora observou, com o desenvolvimento da sua pesquisa, que os estudantes colaboradores apresentaram avanços nos seus conhecimentos relativos à generalização, em especial no tocante a expressão algébrica.

A dificuldade dos estudantes para generalizar situações envolvendo o conceito de função afim também foi observada por Rezende, Nogueira e Calado (2020). Ao implementarem três tarefas envolvendo o conceito de função afim a 12 estudantes, seis concluintes do EF e seis concluintes do EM, em dezembro de 2017, as autoras observaram que “[...] a generalização não foi mobilizada corretamente por nenhum dos estudantes investigados, em nenhuma das tarefas propostas” (Rezende; Nogueira; Calado, 2020, p. 48). Diante disso, as pesquisadoras consideram que, diferentemente do indicado pela BNCC (Brasil, 2018), os estudantes não compreendem a ideia-base de generalização ao término do EF e do EM.

Dado que para Vergnaud (2007, 2009c, 2013), a parte mais importante dos nossos conhecimentos são as competências, pois, enquanto expressão da forma operatória do conhecimento (saber fazer), são elas que permitem atuar de forma exitosa em uma situação, consideramos a classificação das situações para o sujeito, a fim de inferirmos sua competência, ou não, em relação ao conceito de função afim.

Ao classificar a situação para o sujeito, em do Tipo 1 ou do Tipo 2, consideramos os invariantes operatórios mobilizados em ação, ao resolverem as situações e o conceito de esquema imbricados entre si. Então, por um lado, para aqueles que a situação foi classificada, como de Tipo 1, considerou-se que, no momento da resolução, possuíam competências para o tratamento relativamente imediato da situação, coordenado por um único esquema (Vergnaud, 1993). Por outro lado, para os sujeitos que classificamos a situação como de Tipo 2, foi considerado que não possuíam, no momento da sua resolução, competências para o tratamento da situação, precisando de tempo para a reflexão, tentativas frustradas, chegando ao resultado ou não (Vergnaud, 1993).

Com base nisso, apresentamos, no Quadro 23, um resumo dos resultados da análise da ação dos estudantes em situação, ao resolverem as tarefas do instrumento, quanto a classificação das situações para o sujeito.

**Quadro 23** – Classificação das situações para os estudantes

| Ano | Estudante | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | S7 | S8 | S9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | E6A | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Não implementada | | | | |
| | E6B | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 1 | Não implementada | | | | |
| | E6C | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Não implementada | | | | |
| 7 | E7A | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Não implementada | | | | |
| | E7B | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Não implementada | | | | |
| | E7C | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 1 | Não implementada | | | | |
| 8 | E8A | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Não implementada | | | |
| | E8B | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Não implementada | | | |
| | E8C | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Não implementada | | | |
| 9 | E9A | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Não implementada | | |
| | E9B | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 1 | Não implementada | | |
| | E9C | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Não implementada | | |
| 1 | E1A | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| | E1B | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| | E1C | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| 2 | E2A | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 |
| | E2B | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| | E2C | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| 3 | E3A | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| | E3B | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |
| | E3C | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 1 | Tipo 1 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 | Tipo 2 |

**Fonte:** da pesquisa

A partir dos resultados apresentados no Quadro 23, inferimos que cinco estudantes colaboradores (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A), no momento da realização das suas entrevistas, demonstraram possuírem competências, para resolver situações associadas ao conceito de função afim. Diante disso, conjecturamos que

esses sujeitos são mais competentes em relação aos demais, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim.

Ao compararmos esses resultados com os observados em relação ao nível de compreensão do conceito de função, identificamos que esses cinco estudantes (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A), para os quais inferimos que possuem competências relativas ao conceito de função afim, estão no nível de abstração. A partir disso, podemos considerar que esses sujeitos alcançaram o nível de desenvolvimento do conceito de função de abstração, conforme o esperado, durante o processo de escolarização da Educação Básica, do EF – Anos Finais ao EM (Merli; Nogueira, 2024). Apesar disso, os outros 16 estudantes colaboradores ainda estavam, no momento da realização das entrevistas, nos níveis de compreensão do conceito de função de compreensão intuitiva, ou matematização inicial.

Na próxima seção, descrevemos como os objetivos da pesquisa foram atendidos com base em nossas escolhas teórico-metodológicas.

## 4.4. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos uma síntese dos resultados da investigação em observação aos objetivos da investigação.

Em relação ao primeiro objetivo específico: *Identificar possíveis conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes colaboradores*, consideramos que o aporte da TCC foi fundamental na análise da atividade dos estudantes, ao resolverem as situações, permitindo a inferência desses invariantes operatórios. Como vimos (seção 3.6), identificamos 10 teoremas em ação[62] na atividade dos estudantes, sendo: oito verdadeiros e dois falsos, conforme o Quadro[63] 24.

**Quadro 24** – Teoremas em ação inferidos

| Indícios da sua mobilização | Teoremas em ação (Verdadeiros e Falsos) |
|---|---|
| Ao somar o coeficiente linear da função $(b)$ com a multiplicação da taxa de variação da função $(a)$ por $(x)$ para obter $f(x)$. | **TAV1:** Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |

[62] Modelamos os teoremas em ação com base na modelação realizada por Siqueira (2023).
[63] A elaboração do Quadro 24 foi inspirada nas dissertações de Calado (2020) e Siqueira (2023).

| | |
|---|---|
| Ao multiplicar a taxa de variação da função $(a)$ por $(x)$ para obter $f(x)$. | **TAV2:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$. |
| Ao dividir $f(x)$ por $(a)$ para determinar $(x)$. | **TAV3:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $a, x \in \mathbb{R}$. |
| Ao identificar que a correspondência $(x_1 \to f(x_1), x_2 \to f(x_2)$ é uma proporcionalidade, faz $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$ para determinar um desses valores conhecendo os outros três. | **TAV5:** *Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.* |
| Ao identificar uma relação de proporcionalidade $f$, usa um valor conhecido $f(x)$ para obter $f(nx)$. | **TAV6:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$. |
| Ao identificar o primeiro termo $(f(1))$ e a razão $(a)$ de uma PA, usa o termo conhecido para encontrar o seguinte por meio da soma do valor da razão $(a)$. | **TAV7:** Seja $f$ uma progressão aritmética e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = f(1) + (x-1)a$, com $a, x \in \mathbb{N}$. |
| Ao dividir $f(x)$ menos o coeficiente linear da função $(b)$ pela taxa de variação da função $(a)$ para determinar $(x)$. | ***TAV8:*** *Se $f(x) = ax + b$, então $x = \frac{f(x)-b}{a}$, com $a, x, b \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.* |
| Ao aplicar a transformação $(T)$ ao estado inicial $(I)$ para encontrar o estado final $(F)$. | ***TAV9:*** Se $F$ é o estado final, $I$ o estado inicial e $T$ a transformação, então $F = I \pm T$. |
| Ao considerar para situações matematicamente representadas por $f(x) = ax + b$, somente $f(x) = ax$. | **TAF2:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| Ao considerar para situações matematicamente representadas por $f(x) = b - ax$, o seu oposto $f(x) = ax - b$. | **TAF3:** Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |

**Fonte:** da pesquisa

Dentre os TA presentes no Quadro 24, inferidos com base na observação da atividade dos estudantes em situação, somente o TAV7 não foi identificado na literatura considerada nesta tese. Relacionado a identificação do primeiro termo e da razão de uma PA, consideramos que ele foi mobilizado por 11 estudantes (E6C, E7A, E7C, E8A, E8C, E9A, E9C, E1A, E1B, E3A e E3B), em associação com a manifestação da ideia-base de função regularidade, ao solucionarem a situação 3.

O TAV1, como pode ser observado no Quadro 25, foi mobilizado, com exceção da situação 2, em todas as outras. Dado a sua modelação, diretamente vinculada com a notação da lei geral de uma função afim ($f(x) = ax + b$), inferimos sua mobilização por todos os estudantes que expressaram a generalização das situações do instrumento modeladas por uma função afim, com os coeficientes $a$ e $b$ diferentes de

zero, seja em linguagem natural ou algebricamente (à exceção da situação 2, que é modelada por uma função linear, isto é, com $b = 0$).

Apesar disso, observamos que a identificação, por parte dos estudantes, da taxa de variação da função $(a)$ e do coeficiente linear $(b)$, de forma implícita ao resolverem as situações, é uma condição necessária, mas não suficiente, para a expressão da generalização. Na situação 1, por exemplo, inferimos que nove estudantes (E6A, E6C, E7A, E8C, E9B, E1C, E2B, E2C e E3B), que não mobilizaram a ideia-base de função generalização, apresentaram indícios, em suas ações, ao resolverem os itens "a" e "b" da tarefa, relacionados com o cálculo do valor da função em um ponto, da mobilização do TAV1. De forma análoga, isso foi observado nas ações de estudantes em outras três situações, sendo: três (E7A, E1B e E2B) na situação 4, um (E1A) na situação 5 e oito (E9A, E1A, E1B, E1C, E2B, E3A, E3B e E3C) na situação 6.

**Quadro 25** – Teoremas em ação inferidos por situação

| Situação | Teoremas em ação inferidos |
|---|---|
| **1** | **TAV1:** Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| **2** | **TAV2:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = ax$, com $a, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAV3:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAV6:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ parcelas}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$. |
| **3** | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAV7:** Seja $f$ uma progressão aritmética e $a \neq 0$ é a taxa, então $f(x) = f(1) + (x - 1)a$, com $a, x \in \mathbb{N}$. |
| **4** | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| 5 | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| 6 | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.<br>***TAV8:*** *Se* $f(x) = ax + b$, *então* $x = \frac{f(x) - b}{a}$, *com* $a, x$ *e* $b \in \mathbb{R}$, *sendo* $a \neq 0$. |
| 7 | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAV3:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade e $a \neq 0$ é a taxa, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $a, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAV6:** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ parcelas}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ parcelas} = nf(x)$, com $n, x \in \mathbb{N}$. |

| | |
|---|---|
| | ***TAV9:*** Se $F$ é o estado final, $I$ o estado inicial e $T$ a transformação, então $F = I \pm T$.<br>**TAF3:** Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| 8 | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.<br>**TAF2:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |
| 9 | **TAV1:** Se $a$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$.<br>***TAV5:*** Seja $f$ uma relação de proporcionalidade, então $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$.<br>**TAF3:** Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. |

**Fonte:** da pesquisa

De forma semelhante ao observado em relação a mobilização do TAV1 pelos estudantes ao resolverem as situações 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, identificamos que o TAV2 só foi mobilizado na situação 2, conforme o Quadro 25. Com modelação vinculada com a notação da lei geral de uma função linear ($f(x) = ax$), o TAV2 foi mobilizado em associação com a ideia-base de função generalização, por 11 estudantes (E6A, E6B, E7A, E7C, E8A, E8B, E9A, E9B, E9C, E2A e E2C), em ação na resolução da situação 2. Outros oito estudantes (E6C, E8C, E1A, E1B, E1C, E2B, E3B e E3C), apesar de identificarem a taxa de variação da função $(a = 3)$, ao resolverem o item "a", não conseguiram expressar a generalização, seja algebricamente, ou em linguagem natural, ao solucionarem o item "c" da tarefa.

Ao observarmos a mobilização dos TA em cada situação, segundo apresentado no Quadro 25, identificamos que a situação 7 teve o maior número de diferentes TA inferidos na ação dos estudantes, sendo quatro verdadeiros e um falso (TAV1, TAV3, TAV6, TAV9 e TAF3) e as situações 1, 4 e 5, no outro extremo, tiveram somente o TAV1 identificado na ação dos estudantes, ao resolverem essas tarefas. Consideramos, com aporte em Vergnaud (2009a), que as situações 1, 4 e 5 envolvem menos relações e questões, quando comparadas com a situação 7.

Em observação aos resultados apresentados no Quadro 25, identificamos que somente nas situações 7, 8 e 9, implementadas especificamente com os estudantes do EM, foi inferida a mobilização de TAFs. O TAF3 foi identificado na ação de E2C, ao resolver as situações 7 e 9, e na ação de E3A, ao enfrentar a situação 9. Já o TAF2, foi identificado nas ações de E1C, E2B e E3C, ao resolverem a situação 8. O

TAF3 e o TAF2 também foram identificados na ação de estudantes do 3º ano do EM, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim, respectivamente, nas investigações de Bernardino (2022) e Siqueira (2023). Diante disso, conjecturamos que tais conhecimentos errôneos permeiam os esquemas disponíveis de estudantes do EM, para enfrentarem determinadas situações associadas ao conceito de função afim.

Em relação ao segundo objetivo específico: *Identificar competências de estudantes do EF e EM na resolução de situações-problema associadas à função afim,* consideramos que a TCC, em associação com os pressupostos do Método Clínico, empregados na realização das entrevistas semiestruturadas, possibilitaram a produção de dados pertinentes, para que inferíssimos a mobilização de invariantes operatórios e classificássemos as situações ao sujeito com base no conceito de esquema.

Ao classificarmos as situações para o sujeito, como do Tipo 1 ou do Tipo 2, respectivamente, com base na apresentação, ou não, de competências para o enfrentamento das situações, identificamos que cinco estudantes (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A) entrevistados apresentaram competências para resolverem situações associadas ao conceito de função afim. Diante disso, observamos que quatro dentre 12 estudantes colaboradores do EF – Anos Finais demonstraram competências ao enfrentamento da maioria das situações que resolveram. Entre os estudantes colaboradores do EM, um, dentre os nove sujeitos, demonstrou possuir competências relativas ao conceito de função afim.

Diante disso, recorremos às cinco premissas[64] que, juntas, permitem entender a noção de competência, indicadas por Vergnaud (2919), para inferirmos que E6B, E7C, E8B, E9C e E2A são mais competentes em relação aos demais, ao resolverem determinadas situações associadas ao conceito de função afim. Consideramos, em observação a atividade dos estudantes em situação, que esses cinco colaboradores apresentaram esquemas acomodados que lhes permitiram a mobilização de

[64] “[...] A é mais competente do que B se ele sabe fazer algo que B não sabe fazer [...] A é mais competente no tempo t' que no tempo t se ele sabe fazer aquilo que ele não sabia fazer [...] A é mais competente se ele se posiciona de uma maneira melhor [...] A é mais competente se ele dispõe de um repertório de recursos alternativos que lhe permitem adaptar sua conduta em diferentes situações que possam surgir [...] A é mais competente se ele é menos impotente diante de uma situação nova” (Vergnaud, 2019, p. 5-6).

invariantes operatórios (ideias-base de função e TAV's), para resolver e obter êxito no enfrentamento das tarefas.

Observamos que esses cinco estudantes (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A), para os quais inferimos que possuem competências relativas ao conceito de função afim, estavam, no momento da realização das suas entrevistas, no nível de abstração de desenvolvimento do conceito de função. Portanto, conjecturamos ser fundamental que os estudantes atinjam o nível de abstração de compreensão do conceito de função, para que desenvolvam competências, a fim de resolver situações associadas a esse conceito, assim como as implementadas no desenvolvimento desta tese.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da observação, no exercício da docência, acerca das dificuldades dos estudantes do Ensino Médio na mobilização do conceito de função afim, associada à nossa participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa, que busca estabelecer o campo conceitual de função afim, surgiu o interesse em desenvolver esta tese.

A partir de resultados de pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa, que comprovaram a mobilização das ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) por estudantes de diferentes anos escolares da Educação Básica, formulamos a seguinte hipótese de pesquisa: *É possível analisar o desenvolvimento das ideias-base de função de estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio mediante a identificação dos níveis de competência na mobilização dessas ideias na resolução de situações associadas ao conceito de função afim.*

A partir dessa hipótese, estabelecemos, como objetivo geral, *investigar o nível de competência de estudantes do EF e EM na mobilização das ideias-base de função.* Tal objetivo conduziu-nos a elaboração dos seguintes objetivos específicos: I) Identificar possíveis conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes colaboradores e II) Identificar competências de estudantes do EF e EM na resolução de situações-problema associadas à função afim.

Em observação à hipótese de pesquisa e aos objetivos, elegemos a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, enquanto referencial teórico para ancorar-nos tanto na análise, quanto na produção dos dados. Baseamo-nos na TCC, recorrendo às noções de conceitualização, campo conceitual, competências, situações e esquemas, para compreendermos a conceitualização e competências dos estudantes colaboradores, ao resolverem situações associadas à função afim.

Considerando nossa intenção, com aporte na TCC, de analisar a atividade em situação dos estudantes de diferentes níveis de escolarização, do sexto ano do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, recorremos ao par esquema-situação. Portanto, optamos em produzir os dados por meio de entrevistas semiestruturadas, constituídas por situações que permitem a mobilização das ideias-base de função (dependência, variável, regularidade e generalização) associadas ao conceito de função afim, sustentados pelo Método Clínico-Crítico Piagetiano.

Desenvolvido por Piaget (Delval, 2012), tal método permite ao pesquisador a realização de várias intervenções com o objetivo de inferir a organização do pensamento do sujeito, buscando a compreensão da componente privada do pensamento e o esclarecimento do que permanece implícito em sua ação.

A construção do instrumento de produção dos dados considerou, como descrito no capítulo 3, na análise *prévia* das situações, a possibilidade de mobilização das ideias-base de função na ação dos estudantes, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim. Foram entrevistados, individualmente, 21 estudantes (três de cada ano de formação escolar, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM) de uma escola pública do município de Quedas do Iguaçu, no Estado do Paraná. Os dados resultam, dessa forma, dos registros dos estudantes colaboradores nos respectivos protocolos e gravação de áudio.

Considerando os resultados apresentados na síntese, relativo ao primeiro objetivo específico - *Identificar possíveis conceitos e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes colaboradores* -, identificamos oito TAVs e dois TAFs na atividade dos estudantes, ao enfrentarem situações associadas ao conceito de função afim.

Dentre os TAVs, o mais mobilizado foi o TAV1: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. Inferimos sua manifestação na ação dos estudantes ao enfrentarem, dentre as nove situações do instrumento, as oito situações (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) com coeficiente linear diferente de zero ($b \neq 0$). Consideramos que esse TAV foi mobilizado em associação com as ideias-base de função tanto para a expressão da generalização das situações, quanto para o cálculo do valor da função em um ponto. Diante disso, conjecturamos que a identificação, por parte dos estudantes, da taxa de variação da função $(a)$ e do coeficiente linear $(b)$, de forma implícita ao resolverem às situações, é uma condição necessária, mas não suficiente, para a expressão da generalização.

Em relação aos TAFs, identificamos a mobilização do TAF2: Se $a$ é a taxa, e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = ax + b = ax$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$ e do TAF3: Se $a \neq 0$ é a taxa e $b$ é o coeficiente linear de uma relação funcional $f$, então $f(x) = b - ax = ax - b$, com $a, b, x \in \mathbb{R}$. O primeiro foi mobilizado por três estudantes (E1C, E2B e E3C), ao resolverem a situação 8 (seção 4.2.8), e o segundo foi mobilizado na ação de E2C, ao resolver as situações 7 e 9, e na ação de E3A, ao enfrentar a situação 9. Tais TAFs também foram identificados na ação de

estudantes do 3º ano do EM, ao resolverem situações associadas ao conceito de função afim, respectivamente, nas investigações de Bernardino (2022) e Siqueira (2023). Consideramos, portanto, a importância da oferta de uma diversidade de situações aos estudantes do EM, para que possam desconstruir esses conhecimentos errôneos, os quais permeiam seus esquemas, para enfrentarem determinadas situações associadas ao conceito de função afim.

Em relação a consecução do segundo objetivo específico - *Identificar competências de estudantes do EF e EM na resolução de situações-problema associadas à função afim* -, ao considerarmos os três níveis de compreensão do conceito de função (compreensão intuitiva, matematização inicial e abstração), que devem ser alcançados ao finalizar a etapa de formação do EF – Anos Finais e aprofundados no EM (Merli; Nogueira, 2024), identificamos um cenário semelhante ao nível de competência dos estudantes. Observamos que os estudantes colaboradores, os quais consideramos possuírem competências para o enfrentamento de situações associadas ao conceito de função afim estavam, no momento da realização das entrevistas, no nível de compreensão do conceito de função de abstração. Se considerarmos todas as situações resolvidas por cada estudante, somente esses estudantes (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A) estavam nesse nível de compreensão do conceito de função. Os demais encontravam-se preponderantemente no nível de matematização inicial.

A partir disso, conjecturamos que 16 estudantes colaboradores (E6A, E6C, E7A, E7B, E8A, E8C, E9A, E9B, E1A, E1B, E1C, E2B, E2C, E3A, E3B e E3C) ainda não tinham alcançado, no momento da realização das suas respectivas entrevistas, o nível de desenvolvimento do conceito de função de abstração. Conforme o indicado na BNCC (Brasil, 2018), é no decorrer do processo de escolarização da Educação Básica, do EF – Anos Finais ao EM, que os estudantes devem desenvolver as competências necessárias, para atingir o nível de abstração do conceito de função. Observamos, com base nisso, que apenas cinco estudantes (E6B, E7C, E8B, E9C e E2A), dentre os 21 entrevistados, já desenvolveram competências relativas ao nível de compreensão do conceito de função de abstração, sendo que cada um deles encontrava-se, no momento da investigação, em diferentes anos escolar, compreendendo cada um dos anos do EF- Anos Finais e somente um, do EM, do segundo ano.

Este fato surpreendeu-nos, posto que, segundo a BNCC, a formalização do conceito de função afim deve ocorrer no 9º ano do EF, o que pressupõe que as ideias-base já devessem ser mobilizadas por todos os estudantes e, mais ainda, pelos estudantes do EM, o que nos levou a rever nossa hipótese de pesquisa. Isto, porque dada essa heterogeneidade relativa aos níveis de compreensão do conceito de função observada na organização da atividade dos estudantes colaboradores, por meio de um estudo empírico da competência (Vergnaud, 2019), não foi possível estabelecer um processo de desenvolvimento hierárquico das competências em relação às ideias-base de função, com base no conjunto dos dados obtidos. Conseguimos identificar individualmente, para cada sujeito. Dito de outra forma: demonstramos o nível de desenvolvimento de cada sujeito, mas, olhando esse corpo de dados no conjunto, como se fosse um sujeito epistêmico, passando do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, não foi possível estabelecer uma hierarquia de dificuldade na mobilização das ideias-base, e, consequentemente, realizar a análise do desenvolvimento delas, conforme havíamos conjecturado.

Frente a isso, consideramos que dado o rigor adotado na análise e produção dos dados, seguindo os pressupostos dos nossos referenciais teóricos e metodológicos, a TCC e o Método Clínico-Crítico Piagetiano, conseguimos *investigar o nível de competência de estudantes do EF e EM na mobilização das ideias-base de função,* no decorrer de seu processo de escolarização, conforme objetivamos ao desenvolver essa investigação, ou seja, alcançamos o nosso objetivo geral. Isso possibilitou-nos inferir, com base no conjunto de dados obtidos, que os estudantes participantes desta investigação apresentaram níveis de competência e de compreensão do conceito de função muito próximos durante todo o período compreendido entre o 6º ano do EF e o 3º ano do EM, o que merece maiores investigações, pois trata-se de estudantes com idades muito distintas entre si, o que corresponde a níveis de desenvolvimento cognitivo também distintos. Podemos elaborar, a partir dessas inferências, outras conjecturas, como, por exemplo, o que levou os estudantes do EM terem um desempenho similar, ou mesmo inferior ao dos estudantes do EF – Anos Finais? Seriam efeitos ainda da pandemia da COVID-19?

Temos ciência das limitações que podem estar associadas ao desenvolvimento desta tese, como o tamanho da amostra, a pequena quantidade de estudantes entrevistados por ano escolar (três), a falta de uma diversidade de instituições escolares, de cidades, modalidades de ensino, o quantitativo de situações, etc.

Reconhecemos, com aporte na TCC, que a construção de um conceito como o de função, dado a sua complexidade, decorre do enfrentamento a uma grande variedade de situações por um longo período. Justamente por isso, conjecturamos a necessidade de serem ofertadas situações contextualizadas, como as implementadas neste estudo, para a aprendizagem do conceito de função.

Quanto a construção das ideias-base de função pelos estudantes, assim como indicado na BNCC, pesquisas de integrantes do GEPeDiMa têm evidenciado que seu ensino pode iniciar já nos Anos Iniciais do EF. Nossa investigação aponta que, na atividade dos estudantes em situação, a mobilização das ideias-base de função acontece de forma imbricada e, em situações contextualizadas, como as implementadas nesta tese, a manifestação da ideia-base de função generalização decorre da compreensão das ideias-base de dependência, variável e regularidade. Nossos resultados corroboram com os obtidos por pesquisas realizadas por integrantes do GEPeDiMa, de que a manifestação da ideia-base de função generalização é mais complexa aos estudantes, quando comparada às outras ideias-base.

Esse fato demanda a oferta de situações contextualizadas para os estudantes resolverem, ao longo do processo de escolarização, de forma que possibilitem a mobilização das ideias-base de função, com destaque para a expressão da generalização, tanto em linguagem natural, quanto para os anos de formação apropriados, na forma algébrica. Um exemplo disso pode ser encontrado na dissertação de Calado (2020). A autora propôs uma sequência didática com situações que levam os estudantes à compreensão da generalização da função afim.

Em relação a expressão algébrica da generalização, identificamos que, apesar da sua dificuldade para os estudantes colaboradores, a análise do conjunto de dados obtidos permite-nos inferir que ela pode ser alcançada a partir do 7º ano do EF. Diante disso, é possível conjecturarmos que, se os estudantes, durante o seu processo de formação escolar na Educação Básica, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM tiverem contato com uma variedade de situações associadas ao conceito de função afim, a expressão algébrica da generalização pode ser solicitada desde o 7º ano do EF.

Nesse sentido, consideramos que os resultados desta investigação podem contribuir com os professores de Matemática da Educação Básica, ao indicar conhecimentos verdadeiros e falsos, modelados na forma de teoremas em ação, passíveis de figurarem na ação dos estudantes ao longo da escolarização, do 6º ano

do EF ao 3º ano do EM, ao resolverem situações contextualizadas associadas ao conceito de função afim.

Como sugestão para futuras investigações, indicamos a possibilidade da implementação do instrumento desta tese a um número maior de estudantes, envolvendo mais de uma instituição escolar e mais de uma turma de estudantes de cada ano de formação escolar, do 6º ano do EF ao 3º ano do EM, para compararmos com os resultados dessa investigação.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ARAÚJO, J. R. de; SILVA, S. A. C. S. da; TELES, R. A. de M. Conversões entre registros gráfico e algébrico da função afim: duas perspectivas em diálogo. In: TELES, R. A. de M. *et al.* (Org.) **Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função** [recurso eletrônico]. Recife: UFPE, 2024, p. 308-341.

BERNARDINO, F. **Função afim e problemas mistos:** uma investigação com estudantes do ensino médio. 2022. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR. Campo Mourão, 2022.

BERNARDINO, F.; GARCIA, W. F. D. G.; REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio. **ACTIO**, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, mai./ago. 2019.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **REVEMAT.** Ed. Temática. Florianópolis, SC. vol. 9, p. 07-20, junho, 2014.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. *In:* TELES, R; MONTEIRO, C; BORBA, R. (Org.). **Investigações em Didática da Matemática**. Recife: UFPE, 2017. p. 100-131.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *In:* **Anais da 27ª reunião anual da Anped.** Caxambu (MG), 21-24 de nov. de 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum – BNCC.** Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2022.

BRIZUELA, B. M.; MARTINEZ, M. V. Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. *In:* CASTORINA, J. A. et al. (Org.). **Desarrollo cognitivo y educación:** Procesos de Conocimiento y Contenidos Específicos. Buenos Aires: Editorial Paidós, 2012. p. 263-286.

CALADO, T. V**. Invariantes operatórios relacionados à generalização:** uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 197 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARRAHER, T. N. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. Petrópolis: Vozes, 1983.

DELVAL, J. **Descubrir el pensamiento de los niños:** introducción a la práctica del método clínico. México: Siglo Veintiuno Editores, 2012.

DEZILIO, K. **Ideias de função e problemas mistos:** um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental. 2022. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR. Campo Mourão, 2022.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1.ed. São Paulo: PROEM, 2014.

KRUG, C. B. S.; NOGUEIRA, C. M. I. Ideias base de função e função afim: analisando o livro didático do Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 1-18, 2022.

KRUG, C. B. S.; ZANELLA, M. S. Panorama de pesquisas referentes ao campo conceitual multiplicativo nos anais do Enem. *In:* Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática, 4., 2023. **Anais...** Barra do Bugres/MT, On-line, p. 23-37. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ksuKB5mzRGCprwr65Jdt6ORvS9K2HooC/view. Acesso em: 28 nov. 2023.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. **Portal das cidades:** Quedas do Iguaçu – PR. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/Brasil/pr/quedas-do-iguacu/panorama. Acesso em: 18 set. 2024.

LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio** – Volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2004.

LORENCINI, P. B. M. **Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim.** 2019. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2019.

MERLI, R. F. **Do pensamento funcional ao Campo Conceitual de Função:** o desenvolvimento de um conceito. 2022. 2115f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2022.

MERLI, R. F.; NOGUEIRA, C. M. I. As relações entre as ideias-base do conceito de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). *In:* TELES, R. A. de M. *et al.* (Org.). **Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função** [recurso eletrônico]. Recife: UFPE, 2024, p. 24-57.

MIRANDA, C. de A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 160 f. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, C. Investigando o campo conceitual das funções: Primeiros resultados. *In:* **ReBECEM - Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 2, n. 3, p. 411-431, dez. 2018.

OTERO, M. R. **Competencias *¿para qué?*** *1 ed.* Buenos Ayres: Tandil, 2019.

OTERO, M. R. *et al.* **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física**. Buenos Ayres: Dunken, 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná – Seed. **Consulta a escolas**. Curitiba (PR), Secretaria da Educação. Disponível em: https://www.consultaescolas.pr.gov.br/consultaescolas-java/pages/templates/initial2.jsf;jsessionid=W64PfptAeNaANCQ_KzQAOmDlEU0j1n3wW8i6H4h-.sseed75003?windowId=378. Acesso em: 10 jul. 2024.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná – Seed. **'Se Liga!' intensifica estudos no final do ano letivo**. Curitiba (PR), Secretaria da Educação, 27 de nov. 2023. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/Noticia/Se-Liga-intensifica-estudos-no-fim-do-ano-letivo. Acesso em: 18 set. 2024.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD. A didática profissional. In: Gruber, Crislaine; Allain, Olivier; Wollinger, Paulo (Ed.). **Didática Profissional:** Princípios e referências para a Educação Profissional Florianópolis: Publicação do IFSC, 2019. p. 11-87.

PAVAN, L. R. **A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em Situações-Problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas.** 2010. S.f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PAVAN, L.R.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO, L. A. As relações entre o campo conceitual multiplicativo e as ideias básicas do conceito de função: um estudo com crianças da 4ª série (5ºano) do ensino fundamental. *In:* Encontro Paranaense de educação Matemática, X., 2009. **Anais ...** Guarapuava: UNICENTRO, 2009. p. 15-35.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas**. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 25-50, nov., 2020.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental.** 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2021.

RORATTO, C. **A história da matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função.** 199f. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SANTOS, A. R. de J.; GONÇALVES, J. A.; RODRIGUES, S. de O. A educação básica na pandemia no estado do Paraná: o que as pesquisas revelam? **Revista Olhares**, Guarulhos (SP), v. 10, n. 1, p. 1-18, 2022. Disponível em: https://periodicos.unifesp.br/index.php/olhares/article/view/12968/9591. Acesso em: 10 mai. 2023.

SAVIANI, D.; GALVÃO, A. C. Educação na pandemia: a falácia do “ensino” remoto. **Universidade e Sociedade,** Andes-SN, Brasília (DF), v. 31, n. 67, p. 36-49, janeiro de 2021. Disponível em: https://www.andes.org.br/img/midias/66ab954ec8f021a1b9ee3f68b131266d_1611672555.pdf. Acesso em: 19 set. 2024.

SILVA, A. S. da; TELES, R. A. de M. Relações entre a compreensão de função e pensamento funcional. *In:* TELES, R. A. de M. *et al.* (Org.). **Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função** [recurso eletrônico]. Recife: UFPE, 2024, p. 114-149.

SILVA, L. D. C. P. da. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa:** uma investigação das ideias base de função. 2021. 555 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2021.

SIQUEIRA. Fernanda Kelly da Silva**. Complexidade de situações mistas associadas à função afim:** uma investigação com estudantes do Ensino Médio. 2023. 231f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR, Campo Mourão - PR, 2023.

TIEPPO, S. M. **Panorama das situações relacionadas à função afim em teses e dissertações Brasileiras**. 2024. 232 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2024.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o Conceito de Função.** 4. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2002.

VARGAS, F. L. da S. **Ideias de Função mobilizadas por estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental em situações mistas.** 2023. 367f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Campo Mourão - PR, 2023.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. *In:* Seminário Internacional de Educação Matemática, 1., 1993. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 1993, p. 1-27.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas.** 1. ed. Lisboa: Instituto Piaget. Coleção Horizontes Pedagógicos, 1996. Cap. 3. p. 155 - 191.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. *In:* Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1., 2007. **Anais [...]**. Tandil: Unicen, 2007, p. 1-27.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução: Moro, Maria Lucia Faria. 1 ed. Curitiba: Editora da UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. A contribuição da psicologia nas pesquisas sobre a educação científica, tecnológica e profissional do cidadão. *In:* FÁVERO, Maria Helena; CUNHA, Célio da (Org.). **Psicologia do conhecimento:** o diálogo entre as ciências e a cidadania. Brasília: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Liber Livro Editora, 2009b, p. 39-60.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva dos campos conceituais.** 1. ed. Curitiba: Editora CRV, 2009c.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje - Journal for the Study of Education and Development**, Londres, v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013.

VERGNAUD, G. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju (SE), v. 9, n. 1, p. 5-28, 2019.

ZANELLA, M. S.; REZENDE, V. Ideias-base de Função Mobilizadas por Estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental em Situações de Proporção Simples. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro (SP), v. 38, n. 78, p. 1-21, 2024. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/wM5MsM6vm8CTfSyNNskGz8G/?lang=pt. Acesso em: 08 jul. 2024.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

*Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação*

*Comitê de Ética em Pesquisa – CEP*

*Aprovado na*

*CONEP em 04/08/2000*

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: A teoria dos campos conceituais associada ao método clínico piagetiano na educação matemática: investigando a evolução do conceito de função afim

Certificado de Apresentação para Apreciação Ética – "CAAE" N° 59654522.5.0000.0107.

Pesquisador para contato: Carbone Bruno Schmidt krug

Telefone: (__) _____-____

Endereço de contato (Institucional): Rua Universitária, 1619 – Bairro Universitário, Cascavel – PR.

Convidamos *seu filho* a participar de uma pesquisa sobre a aprendizagem do conceito matemático de função ao longo do processo de escolarização. O objetivo principal da investigação é analisar o desenvolvimento das ideias-base de função (correspondência, regularidade, variável, dependência e generalização), no decorrer do processo de escolarização, da Educação Básica ao Ensino Superior. O desenvolvimento dessa investigação será útil a área da Educação Matemática ao estudar os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função na formação escolar. Dessa forma, pesquisadores, professores, autores de livros didáticos e estudantes poderão se beneficiar dos resultados da pesquisa na intenção de melhorar a aprendizagem e o ensino do conceito matemático de função. De imediato, os colaboradores da pesquisa poderão ampliar seus conhecimentos matemáticos

relativos ao conceito de função. Para que isso ocorra, *seu filho* será submetido a uma entrevista individual, que será gravada em áudio e vídeo, com duração prevista em torno de 01 (uma) hora, durante a resolução de situações-problema (tarefas) envolvendo função afim. Cada entrevistado receberá as folhas com as questões matemáticas de função e conversará com o pesquisador durante a resolução das mesmas na intenção de esclarecer quais conhecimentos foram mobilizados. No entanto, apesar da pesquisa não apresentar riscos previsíveis, estaremos atentos a qualquer ocorrência que possa representar algum risco.

Se ocorrer algum transtorno, decorrente da participação *de seu filho* em qualquer etapa desta pesquisa, nós pesquisadores, providenciaremos acompanhamento e a assistência imediata, integral e gratuita. Havendo a ocorrência de danos, previstos ou não, mas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caberá a você, na forma da Lei, o direito de solicitar a respectiva indenização.

Também você *(e/ou seu filho)* poderá a qualquer momento desistir de participar da pesquisa sem qualquer prejuízo. Para que isso ocorra, basta informar, por qualquer modo que lhe seja possível, que deseja deixar de participar da pesquisa e qualquer informação que tenha prestado será retirada do conjunto dos dados que serão utilizados na avaliação dos resultados.

Você não receberá e não pagará nenhum valor para participar deste estudo, no entanto, terá direito ao ressarcimento de despesas decorrentes de sua participação.

Nós pesquisadores garantimos a privacidade e o sigilo de sua participação em todas as etapas da pesquisa e de futura publicação dos resultados. O seu nome *(e/ou seu filho)*, endereço, voz e imagem nunca serão associados aos resultados desta pesquisa, exceto quando você desejar. Nesse caso, você deverá assinar um segundo termo, específico para essa autorização e que deverá ser apresentado separadamente deste.

As informações que você *(e/ou seu filho)* fornecerem serão utilizadas exclusivamente nesta pesquisa. Caso as informações fornecidas e obtidas com este consentimento sejam consideradas úteis para outros estudos, você será procurado para autorizar novamente o uso.

Este documento que você vai assinar contém 03 (três) páginas. Você deve vistar (rubricar) todas as páginas, exceto a última, onde você assinará com a mesma assinatura registrada no cartório (caso tenha). Este documento está sendo

apresentado a você em duas vias, sendo que uma via é sua. Sugerimos que guarde a sua via de modo seguro.

Caso você precise informar algum fato decorrente da sua participação na pesquisa e se sentir desconfortável em procurar o pesquisador, você poderá procurar pessoalmente o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNIOESTE (CEP), de segunda a sexta-feira, no horário de 08h00 as 15h30min, na Reitoria da UNIOESTE, sala do Comitê de Ética, PRPPG, situado na rua Universitária, 1619 – Bairro Universitário, Cascavel – PR. Caso prefira, você pode entrar em contato via Internet pelo e-mail: cep.prppg@unioeste.br ou pelo telefone do CEP que é (45) 3220-3092.

Declaro estar ciente e suficientemente esclarecido sobre os fatos informados neste documento.

Nome do participante de pesquisa ou responsável:

Assinatura:

Eu, *Carbone Bruno Schmidt Krug,* declaro que forneci todas as informações sobre este projeto de pesquisa ao participante (e/ou responsável).

Assinatura do pesquisador

Cascavel, _____ de _____ de 20____.

**APÊNDICE B – Termo de Assentimento (TA)**

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

*Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação*
*Comitê de Ética em Pesquisa – CEP*
*04/08/2000*

*Aprovado na CONEP em*

**TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)**

Título do Projeto: A teoria dos campos conceituais associada ao método clínico piagetiano na educação matemática: investigando a evolução do conceito de função afim

Pesquisador responsável: Carbone Bruno Schmidt Krug Telefone: (__) _____-____

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de analisar o desenvolvimento das ideias-base de função (correspondência, regularidade, variável, dependência e generalização), no decorrer do processo de escolarização, da Educação Básica ao Ensino Superior**.** Para isso você terá que fazer uma entrevista individual, que será gravada em áudio e vídeo, durante a resolução de situações-problema (tarefas) envolvendo função afim. Cada entrevistado receberá as folhas com as questões matemáticas de função e conversará com o pesquisador durante a resolução das tarefas na intenção de esclarecer quais conhecimentos foram mobilizados.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do estudo, no momento da entrevista, você resolverá situações-problema (tarefas) envolvendo o conceito matemático de função afim. Você e o

pesquisador conversarão sobre sua forma de resolução em cada tarefa, detalhando como você pensou. Caso você sinta algum desconforto em responder alguma questão por escrito ou pergunta do pesquisador, poderá nos comunicar e/ou desistir da entrevista a qualquer momento. Nós, pesquisadores, providenciaremos acompanhamento e a assistência imediata, integral e gratuita. Havendo a ocorrência de danos, previstos ou não, mas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caberá a você, na forma da Lei, o direito de solicitar a respectiva indenização. Com a sua participação, você poderá ampliar seus conhecimentos matemáticos, em especial os referentes ao conceito de função. Ao expressar seus conhecimentos matemáticos de função, você estará contribuindo para os processos de ensino e aprendizagem desse conceito, auxiliando no avanço das pesquisas na área da Educação Matemática, em geral, e na pesquisa de doutorado do pesquisador, em particular. Assim, além de reforçar e ampliar seus conhecimentos em Matemática, poderá aprender, vivenciado essa experiência, detalhes de como a Ciência se constrói por meio do Método Científico.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone: (__) _____-____ ou via internet pelo e-mail: _____**.**

Declaro estar ciente do exposto e **desejo participar do projeto A teoria dos campos conceituais associada ao método clínico piagetiano na educação matemática: investigando a evolução do conceito de função afim.**

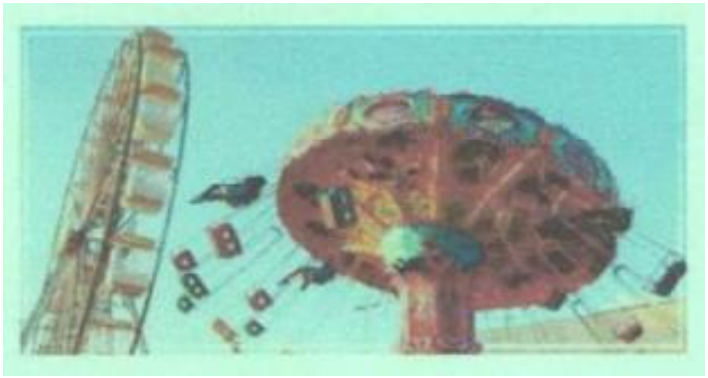
Nome do participante:

Assinatura:

Eu, **Carbone Bruno Schmidt Krug**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

Cascavel, _____ de _____ de 20____.

**APÊNDICE C – Instrumento de pesquisa**



**Situação 1.** Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

c) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

**Situação 2.** A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la.

Vamos completar a tabela relacionando os pulos da mãe com os do filho:

| | **Mãe** | **Filho** |
|---|---|---|
| **Número de pulos** | 1 | 3 |
| | 2 | |
| | | 9 |
| | 4 | |
| | 5 | |
| | | 18 |

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?

b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?

c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

**Situação 3.** Olhe com atenção a sequência de triângulos construídos com palitos de

fósforo:

a) Agora complete a tabela relacionando a quantidade de triângulos formados com o número de palitos de fósforo usados:

| **Número de triângulos** | 1 | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Palitos usados** | 3 | | 7 | |

b) Quantos palitos de fósforo são necessários para formar 5 triângulos? E para formar 9 triângulos?

c) Podemos encontrar a quantidade de palitos de fósforo que vamos usar para formar qualquer número de triângulos? Como devemos pensar para resolver esse desafio?

**Situação 4.** Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês.

| Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia | Gasto total no mês por Márcia |
|---|---|
| 20 | |
| 25 | |
| 30 | |
| 35 | |
| 40 | |

c) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

**Situação 5.** D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador.

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores?

b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

**Situação 6.** O restaurante Rango cobra R$ 3,80 pelo consumo de 100g de comida. Três pessoas foram ao restaurante Rango e cada uma consumiu uma lata de refrigerante que custa R$ 3,50, e as seguintes quantidades de alimentos:
Fabricia consumiu 200g. Fernando consumiu 400g. Lucas consumiu 500g.

a) Qual o valor pago por cada pessoa? Explique como você determinou cada um desses valores?

b) Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (v), incluindo o refrigerante.

c) Carla almoçou no restaurante Rango e pagou R$ 24,40 pela refeição com um refrigerante. Quantas gramas de comida Carla consumiu?

**Situação 7.** Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora.

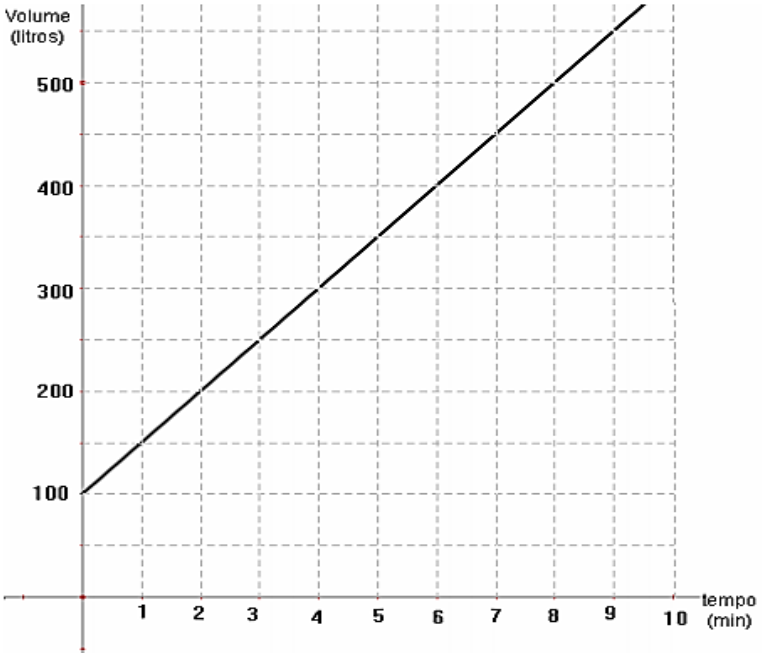
a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.

c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

**Situação 8.** Uma caixa de água tem capacidade de 1000 litros e possui certa quantidade de água em seu interior. Em determinado instante, uma torneira é aberta para encher a caixa d'água, conforme informações disponíveis no gráfico abaixo. Com estas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?




b) Qual a taxa de vazão de água da torneira?

c) Indique a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo?

**Situação 9.** Enzo possui 100.000 seguidores engajados no Instagram. Para receber um salário de 23.000 dólares no mês, ele precisa fazer, no mínimo, 8 publicações. Se deixar de fazer alguma, é descontado, por publicação não feita, um valor proporcional à quantidade de seguidores.

a) Sabendo que um influencer com 250.000 seguidores perde 5.000 dólares por publicação não feita, quanto perde Enzo?

b) Escreva uma expressão que determine o valor (v) que Enzo recebe em dólares de acordo com a quantidade (p) de publicações não realizadas.

c) Em fevereiro, ele recebeu 9.000 dólares. Quantas publicações ele deixou de fazer?