Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

GUILHERME GASPARINI LOVATTO

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE UMA PROVA EM FASES DE INTEGRAL

CASCAVEL – PR
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO/ PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE UMA PROVA EM FASES DE INTEGRAL

GUILHERME GASPARINI LOVATTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Dra. Andréia Büttner Ciani

CASCAVEL – PR
2024

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Gasparini Lovatto, Guilherme
Avaliação como oportunidade de aprendizagem: análise da produção escrita de uma prova em fases de integral / Guilherme Gasparini Lovatto; orientadora Andréia Büttner Ciani. -- Cascavel, 2024.
104 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2024.

1. Análise da Produção Escrita. 2. Prova em Fases. 3. Avaliação da Aprendizagem. I. Büttner Ciani, Andréia, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a Deus pela orientação e força durante toda essa jornada, por conceder-me sabedoria e discernimento para enfrentar os desafios e superar os obstáculos.

À minha amada família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo seu apoio incondicional, encorajamento e compreensão. Sem o amor e o suporte de vocês, essa conquista não seria possível.

À minha respeitável orientadora, Andréia Büttner Ciani, pela sua dedicação, paciência e orientação excepcionais ao longo deste processo. Seu conhecimento e experiência foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

À banca examinadora, composta pelos membros Angela Fontana Marques e Dulcyene Maria Ribeiro, durante a qualificação e defesa deste trabalho. Agradeço por suas contribuições valiosas, críticas construtivas e sugestões que enriqueceram este estudo e ajudaram a aprimorar sua qualidade.

À Unioeste e ao PPGECEM, pela oportunidade concedida e pelo suporte acadêmico e administrativo ao longo do curso. Agradeço o ambiente propício à pesquisa e ao aprendizado, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

À Capes, pela concessão da bolsa de estudos que viabilizou minha dedicação a esta pesquisa.

LOVATTO, Guilherme Gasparini. **AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM**: ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE UMA PROVA EM FASES DE INTEGRAL. 2024. 106f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, Cascavel, 2024.

Resumo: A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I exerce grande impacto na vida acadêmica dos estudantes de cursos de Ciências Exatas, refletido pelo elevado índice de reprovação e desistência. Essa realidade motivou a pesquisa, originada da sensibilização para os desafios enfrentados pela maioria dos estudantes ao ingressarem na universidade, especialmente nos cursos da área de Ciências Exatas, ao se depararem com essa disciplina. A adaptação à matemática acadêmica e à metodologia de ensino são fatores centrais nesse processo. Tradicionalmente vista como uma barreira, a avaliação é repensada nesta dissertação como uma prática investigativa que favorece a compreensão e continuidade dos estudantes. O objetivo deste estudo é descrever, analisar, apresentar e discutir as oportunidades geradas aos estudantes, a partir da análise de suas produções escritas em uma prova em fases, com o intuito de evidenciar o que sabem, promover a aprendizagem e fornecer feedback sobre suas resoluções. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de abordagem interpretativa, em que a avaliação é vista como uma prática investigativa e as premissas da análise de produção escrita são aplicadas para interpretar as produções dos estudantes na prova em fases da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A combinação dessa abordagem com as leituras horizontal e vertical possibilitou a realização de intervenções baseadas nas produções dos estudantes. Os resultados indicaram que a prova em fases, juntamente com a análise das produções escritas, permitiu a elaboração de feedbacks significativos para o progresso da aprendizagem, oferecendo caminhos a serem seguidos, além de proporcionar a identificação, reflexão e retificação de erros. Conclui-se que a utilização da prova em fases contempla pelo menos três princípios da avaliação relacionados à aprendizagem, sugerindo uma abordagem qualitativa e investigativa que rompe com o paradigma de uma avaliação focada apenas na atribuição de notas, priorizando, na verdade, a aprendizagem do estudante.

Palavras-chave: Análise da produção escrita. Prova em fases. Avaliação da aprendizagem.

LOVATTO, Guilherme Gasparini. **ASSESSMENT AS A LEARNING OPPORTUNITY**: ANALYSIS OF WRITTEN PRODUCTIONS IN A PHASED INTEGRAL CALCULUS EXAM. 2024. 106p. Dissertation (Master's). Graduate Program in Science Education and Mathematics Education. Western Paraná State University – Unioeste, Cascavel, 2024.

Abstract: The subject of Calculus I has a significant impact on the academic life of students in exact sciences courses, reflected in its high failure and dropout rates. This reality motivated the research, driven by the awareness of the challenges faced by most students upon entering university, especially in exact sciences courses, when encountering this subject. Adaptation to academic mathematics and teaching methodologies are central factors in this process. Traditionally seen as a barrier, assessment is reimagined in this dissertation as an investigative practice that fosters students' understanding and continuity. This study aims to describe, analyze, present, and discuss the opportunities generated for students through the analysis of their written productions in a phased exam, aiming to reveal their knowledge, promote learning, and provide feedback on their solutions. This qualitative research adopts an interpretative approach, where assessment is viewed as an investigative practice, and the premises of written production analysis are applied to interpret students' outputs in the phased exam of Calculus I. Combining this approach with horizontal and vertical readings enabled interventions based on the students' productions. The results indicated that the phased exam, along with the analysis of written productions, facilitated the development of meaningful feedback for learning progress, offering pathways for improvement, as well as allowing the identification, reflection, and correction of errors. It is concluded that the use of the phased exam aligns with at least three assessment principles related to learning, suggesting a qualitative and investigative approach that breaks away from the paradigm of assessment focused solely on grading, prioritizing, instead, the student's learning process.

Keywords: Written production analysis. Phased exam. Learning assessment.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem um grande impacto na vida acadêmica da maioria dos estudantes, tanto em cursos da área de Ciências Exatas quanto em outros que a incluam em sua grade curricular. Esse impacto está relacionado ao alto índice de reprovação que ocorre, tradicionalmente, nessa disciplina, e à elevada taxa de desistência dos estudantes nesses cursos.

A maioria das graduações em Engenharia, Física, Matemática e Química, por exemplo, inclui Cálculo Diferencial e Integral I como uma disciplina do primeiro ano. Nesse contexto, um dos motivos que contribuem para o alto índice de reprovação e desistência é o fato de que essa disciplina, em geral, representa o primeiro contato do estudante com a matemática acadêmica. Além disso, outro aspecto que motiva nossos estudos e pesquisas sobre o Ensino de Cálculo, respaldado pela nossa experiência acadêmica, é que esse impacto também decorre da forma como essa matemática "nova" é ensinada, ou seja, da metodologia de ensino utilizada pelo professor e, como parte desse processo, dos instrumentos avaliativos aplicados e das intenções que norteiam sua utilização.

A dificuldade enfrentada pelos estudantes na matemática acadêmica e as sucessivas reprovações geram acúmulo de carga horária e colocam o estudante em uma situação de estagnação da qual é difícil sair sozinho. A permanência nessa situação de exclusão, muitas vezes, acaba por resultar em sua desistência do curso.

Em nossa pesquisa, utilizaremos os termos "matemática escolar" e "matemática acadêmica" para se referir, respectivamente, à matemática ensinada na escola e àquela estudada no ensino superior.

> Matemática escolar, vista como um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática (que não se restringem ao que se ensina aos alunos na escola, porque inclui também, por exemplo, os saberes profissionais vinculados ao trabalho docente nesse processo); Matemática acadêmica, vista como um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal (David *et al.* 2013, p. 45).

Faz parte do imaginário coletivo a ideia de que a matemática escolar prepara o estudante para lidar com diferentes realidades envolvendo a Matemática, inclusive com aquelas que ele encontra ao ingressar em um curso de graduação em Ciências Exatas, cujo corpo de conteúdos científicos está totalmente amparado e sustentado pela matemática acadêmica, de cunho formalista.

Entretanto, o que o estudante encontra é um possível "abismo" entre a nova realidade da matemática acadêmica, muito distante da matemática escolar que ele aprendeu na Educação Básica. Frequentemente, é na disciplina de Cálculo que tal "abismo" se torna visível tanto para o estudante quanto para o professor e, dependendo da abordagem que lhe é dedicada, pode comprometer toda a trajetória acadêmica.

Cury e Bisognin (2006) afirmam que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem sido estruturada em uma primeira parte, que revisita o conteúdo de funções, e, em seguida, a sequência tradicional de conceitos (limite, continuidade, derivadas e integrais). Contudo, os conteúdos considerados pré-requisitos para o estudo do Cálculo nem sempre são ensinados no Ensino Fundamental ou Médio, o que faz com que a revisão realizada na disciplina de Cálculo não seja breve, mas, na prática, se configure como a introdução de novos conceitos matemáticos.

Lacaz, Carvalho e Fernandes (2007) realizaram uma pesquisa com estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de Engenharia da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG/UNESP) em 2006, com o objetivo de identificar as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes nessa disciplina e elaborar estratégias para superá-las ou minimizá-las. A partir das respostas ao questionário aplicado, os autores concluíram que os estudantes apresentavam conhecimento insuficiente da matemática escolar para obterem um bom desempenho em Cálculo, revelando dificuldades na transição da Educação Básica para o Ensino Superior. A análise dos resultados mostrou que, ao iniciarem o estudo de Cálculo, os estudantes percebem uma grande diferença entre o que aprenderam no Ensino Básico e o que lhes é exigido no ensino universitário, além de apresentarem dificuldades no entendimento da linguagem do professor (Lacaz, Carvalho, Fernandes, 2007).

A dificuldade frequente dos estudantes em Cálculo Diferencial e Integral muitas vezes está relacionada à forma como a avaliação é empregada. Quando encarada simplesmente como um método para atribuição de notas e critério de aprovação ou reprovação na disciplina, ela contribui para um aumento significativo na taxa de repetência. Esse ciclo vicioso implica que os estudantes se veem obrigados a revisitar a matéria repetidamente.

Esteban (2000) afirma que há um consenso sobre a necessidade e a viabilidade de realizar uma avaliação compatível com a ideia de conceber a aprendizagem como um processo contínuo. Os processos e resultados escolares são marcados pela ótica da homogeneidade, o que faz com que a avaliação seja sinônimo de julgamento. A avaliação realizada na sala de aula estabelece uma conexão entre diferentes sujeitos e contextos, confrontando uma variedade de conhecimentos que permeiam as esferas do saber, do fazer e do pensar, envolvendo estudantes, alunas, professores e professoras. O dinamismo presente nas práticas escolares cotidianas evidencia a impossibilidade de restringir a avaliação a momentos isolados que apenas unem fragmentos do processo de ensino-aprendizagem. Essa perspectiva não apenas limita, mas, em alguns casos, impede a construção de conhecimento por meio de interações dialógicas (Esteban, 2000).

A avaliação pode exercer uma função que favorece uma prática investigativa, ou seja, tornar possível que os estudantes compreendam todo o processo e os conhecimentos abordados, assim como aqueles que se mostram necessários para determinadas situações. Com isso, o professor pode replanejar sua prática e buscar novos planos de trabalho para os anos seguintes (Esteban, 2001). Nesse sentido, a sequência de reprovações pode ser interrompida quando a avaliação transcende seu papel puramente quantitativo e assume uma abordagem qualitativa. Quando os instrumentos avaliativos são direcionados para favorecer a aprendizagem dos estudantes, a avaliação deixa de ser uma barreira e passa a ser uma aliada no processo educacional. Sua concepção evolui para incorporar a ideia de investigação da aprendizagem, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais profunda do processo de ensino-aprendizagem. Em vez de meramente medir o conhecimento, a avaliação se torna um meio de explorar como os estudantes adquirem e aplicam conceitos.

Desse modo, ao adotar uma perspectiva de avaliação como prática investigativa, os professores têm a oportunidade de transformar o ambiente de aprendizagem. Em vez de perpetuar um ciclo de repetições, a avaliação pode se tornar dinâmica, a fim de identificar lacunas na compreensão, adaptar o ensino e promover o entendimento real dos conceitos. Ao conscientizar os estudantes sobre seu próprio processo de aprendizagem, a avaliação deixa de ser uma barreira e se converte em um meio eficaz para impulsionar o progresso acadêmico.

Um dos instrumentos de avaliação que busca ir além de medir o conhecimento é a prova em fases. Esse instrumento foi concebido inicialmente como prova em duas fases, proposta por De Lange (1987), e foi sendo modificado ao longo de novas pesquisas, como é o caso de Trevisan (2013) e Mendes (2014). A prova é composta por quantas fases forem necessárias. Inicialmente, o professor propõe um conjunto de tarefas que englobam determinados conteúdos, a fim de que os estudantes possam desenvolver suas resoluções ao longo das fases. Vale ressaltar que a prova ocorre em um período predeterminado (bimestre, trimestre, semestre ou ano letivo), sendo elaborada apenas uma vez, contendo tarefas que abordam o conteúdo do período. Em cada uma das fases, os estudantes respondem às tarefas que acham pertinentes, cabendo ao professor analisar e, se possível, intervir nas produções escritas dos estudantes.

A intervenção na prova em fases é uma etapa fundamental no processo, considerando que é nessa ação que o professor irá analisar o que os estudantes demonstram saber a partir de seus registros, podendo utilizar os erros como uma forma de investigar e propor caminhos que os conduzam à compreensão do conceito envolvido. As intervenções podem explorar o conhecimento do estudante por meio de novas tarefas propostas, além de possíveis indagações que façam o estudante refletir sobre sua resolução.

Uma das abordagens que permite analisar cuidadosamente os registros dos estudantes é a análise da produção escrita. A fim de promover intervenções que realmente favoreçam a aprendizagem, uma abordagem pautada na análise da produção escrita possibilita um olhar individual sobre a forma como cada estudante lida com determinado conceito.

A análise da produção escrita está ligada à ideia de avaliação como prática investigativa e busca conhecer em detalhes as maneiras como os estudantes lidam com situações matemáticas e as dificuldades que encontram. Como forma de não olhar apenas para as formas corretas de resolver um problema, a análise da produção escrita considera as maneiras de lidar (Viola dos Santos, 2007), ou seja, analisa as estratégias e procedimentos que os estudantes desenvolveram, sem expressar juízo de valor, considerando cada produção como uma fonte de informações fundamentais para compreender o processo de ensino-aprendizagem.

Justificativa

Este trabalho pretende avançar no estudo realizado na monografia do autor, cujo objetivo foi identificar a maneira como um grupo de estudantes integrantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do ano de 2019, em um curso de Engenharia, lidava com a matemática escolar na resolução de questões envolvendo o conceito de Limite. Na monografia, Lovatto (2020) utiliza a análise da produção escrita para compreender as maneiras como os estudantes resolvem questões envolvendo o conceito de limite em uma prova escrita.

Com isso, o autor destaca que a análise da produção escrita evidenciou que a matemática escolar tem um grande impacto na matemática acadêmica, uma vez que os estudantes demonstraram saber os conhecimentos relacionados à matemática acadêmica, mas foram impossibilitados de concluir a resolução por conta de dificuldades em lidar com a matemática escolar. Além disso, a pesquisa trouxe à tona a predominância do mecanicismo ao utilizar a matemática escolar. A análise mostrou que a dificuldade no Cálculo Diferencial e Integral não reside apenas na matemática acadêmica; a maioria dos estudantes não resolveu as questões envolvendo o conceito de limite devido a problemas com a matemática escolar.

Na pesquisa de monografia, o autor destaca três propostas de intervenção baseadas na Educação Matemática Realística, na avaliação como prática de investigação e na análise da produção escrita: prova em fases, vaivém e tarefas de análise da produção escrita. Nesta pesquisa de mestrado, buscamos avançar nas discussões e utilizar o instrumento avaliativo prova em fases em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia Civil.

A intenção de utilizar a prova em fases como instrumento avaliativo na disciplina foi possibilitar que os estudantes tomassem consciência sobre seu processo de aprendizagem, uma vez que o instrumento permite a realização de intervenções e feedbacks acerca do que os estudantes mostram saber por meio de suas produções escritas. Superar as dificuldades relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral é um grande anseio do autor, considerando sua trajetória enquanto estudante e reflexões sobre as possibilidades de enfrentar e minimizar o número de reprovações de forma significativa, ou seja, para que os estudantes compreendam os conceitos e não apenas reproduzam algoritmos mecanicamente.

Desenvolver e conduzir instrumentos avaliativos que possibilitem a investigação requer esforço e atenção constante na forma como isso irá impactar a maneira com que os estudantes lidam com o conhecimento e a aprendizagem. Nessa busca, esta pesquisa de natureza qualitativa tem como tema a avaliação da aprendizagem à luz dos princípios da análise da produção escrita. Buscamos responder à problemática e seus entornos: como as produções escritas dos estudantes em uma prova em fases, que envolve mostrar o que sabem, aprender com suas resoluções e receber feedback, geram oportunidades de aprendizagem?

Objetivo

Descrever, analisar, apresentar e discutir aspectos referentes as oportunidades geradas aos estudantes, a partir da análise de suas produções escritas em uma prova em fases, de mostrar o que sabem, de aprender e de receber feedback de suas resoluções.

Objetivos específicos

Identificar indícios de feedback gerados a partir da análise da produção escrita dos estudantes.

Identificar indícios de oportunidade de aprendizagem no processo de avaliação.

Identificar situações que se caracterizem como oportunidade de os estudantes mostrarem o que sabem do conteúdo avaliado.

As seções seguintes apresentam desde a metodologia até as referências.

Na segunda seção (Metodologia), evidenciamos o contexto da pesquisa, além da trajetória e dos métodos utilizados para que o estudo se concretizasse. Na terceira seção (Avaliação da aprendizagem como prática de investigação), oferecemos um aporte teórico que busca enfatizar uma avaliação significativa para estudantes e professores, rompendo com a ideia de uma avaliação discriminatória. Na quarta seção (Análise da produção escrita), analisamos a produção escrita como meio de conhecer, em detalhes, as maneiras com que os estudantes lidam com o conteúdo. Na quinta seção (Prova em fases), apresentamos um instrumento avaliativo que possibilita a regulação da aprendizagem, denominado prova em fases. Na sexta seção (Intervenções a partir das produções escritas), realizamos a análise das produções escritas dos estudantes por meio de uma leitura flutuante, horizontal e vertical. Na sétima seção (Referências), apresentamos as referências utilizadas ao longo do estudo.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Contexto da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), campus Cascavel, no ano de 2022. Nesta turma, havia sessenta e nove estudantes matriculados inicialmente; no entanto, alguns cancelaram a matrícula no decorrer do ano letivo.

A professora responsável pela turma organizou um cronograma de seis provas escritas durante o ano letivo, sendo que o instrumento de pesquisa (prova em fases) foi desenvolvido por último. Com o objetivo de conhecer a turma antes da aplicação da prova em fases, nos propomos a observar a turma durante um determinado período, em que foi possível acompanhar de perto o andamento das atividades. Vale ressaltar que essa observação está atrelada ao Estágio de Docência realizado pelo pesquisador.

Durante as observações, foi possível notar que parte dos estudantes estava interessada em compreender os conceitos relacionados ao Cálculo, enquanto outra parte estava cumprindo a carga horária necessária para não ser reprovada por falta na disciplina, uma vez que não desenvolviam as atividades propostas e apresentavam comportamentos inadequados. Por outro lado, uma pequena parte da turma realizava as atividades propostas na plataforma, mesmo que a professora atribuísse uma pontuação extra para quem as desenvolvesse. Com isso, percebemos que propor atividades extraclasses não teria grande aderência por parte dos estudantes.

Materiais e métodos

O material utilizado para esta pesquisa foi as produções escritas dos estudantes no instrumento avaliativo prova em fases. Com relação à avaliação, nos pautamos em uma abordagem qualitativa, na qual a avaliação é contínua e investigativa. Além disso, para se avaliar, deve-se ter explícito qual é o objetivo, para assim determinar o instrumento avaliativo. É importante ter clareza sobre o que cada instrumento pode revelar (Buriasco; Ferreira; Junior, 2014). Portanto, rumo à avaliação como prática de investigação, utilizamos a prova em duas fases como instrumento avaliativo.

A prova em fases utilizada nesta pesquisa como instrumento avaliativo foi composta por duas fases. Além disso, as tarefas que compõem a prova abrangem os seguintes conteúdos:

- Áreas entre curvas;
- Volumes;
- Volumes por cascas cilíndricas;
- Substituição trigonométrica;
- Integração de funções racionais por frações parciais;
- Integrais impróprias.

A dinâmica da prova foi pensada para que cada espaço dela fosse reservado para uma atividade desenvolvida, seja a primeira fase, os comentários do professor ou a segunda fase. Com isso, tivemos clareza do desenvolvimento do estudante desde o primeiro momento com a prova até o último. Podemos verificar um exemplo na figura abaixo.

Figura 1 – Exemplo de tarefa na prova em fases

3ª) Calcule as integrais: a) $\int \frac{3x}{x^2-4x-5}\,dx$.	
1ª fase	**Comentários e 2ª fase**

Fonte: Acervo da pesquisa

No exemplo, podemos verificar que há um espaço destinado apenas para a primeira fase, um espaço exclusivo para comentários (sugestões ou novas tarefas) e a segunda fase. Vale destacar que o estudante estava ciente do formato da prova, pois foi incluída uma observação no cabeçalho para que compreendesse a dinâmica.

Com relação às provas, foi necessário utilizar três modelos de prova, com tarefas diferentes, mas com os mesmos assuntos, ou seja, mudando apenas algumas características. Essa ação foi necessária considerando que os estudantes estavam compartilhando respostas nas provas anteriores. Portanto, a professora responsável pela disciplina decidiu elaborar três provas, seguindo o modelo da prova em fases.

As três provas utilizadas na pesquisa podem ser encontradas no QR Code abaixo ou no link (https://shre.ink/rdHw).

Figura 2 – QRcode da prova em fases

Fonte: Acervo da pesquisa

A prova foi desenvolvida em três semanas seguidas, com uma semana de intervalo entre as duas fases. Todas as tarefas referentes aos conteúdos específicos de integral foram propostas para os estudantes resolverem na primeira fase.

No intervalo de uma semana, a professora responsável pela disciplina e o pesquisador corrigiram as provas individualmente, atribuindo uma nota a cada estudante. Após essa correção, foi realizada uma leitura horizontal das provas, ou seja, a produção escrita de todos os estudantes na primeira tarefa foi analisada simultaneamente. Isso evidenciou produções comuns para cada tarefa. Posteriormente, foi realizada a leitura vertical de cada prova, ou seja, a leitura da produção individual de cada estudante, o que gerou intervenções escritas em forma de comentários e questionamentos em cada prova, na coluna direcionada à segunda fase.

Assim, a análise da produção escrita gerou duas propostas de intervenção: a primeira foi a elaboração de intervenções em forma de tarefas, as quais foram direcionadas aos estudantes em sala de aula, utilizando o aplicativo Kahoot, para atender o que ficou evidenciado na leitura horizontal. A segunda foi propor comentários individuais em cada prova e nas tarefas que os estudantes resolveram, de acordo com a necessidade, além de elaborar tarefas com base nas dificuldades mais recorrentes identificadas na primeira fase da prova, por meio da leitura vertical.

Na leitura horizontal, analisamos a mesma tarefa em todas as provas, buscando maneiras de lidar que não levaram à resposta correta de forma generalizada. Dessa maneira, elaboramos um conjunto de tarefas com base nas maiores dificuldades do grupo de estudantes. Vale ressaltar que, além das tarefas, a leitura possibilitou que os conteúdos com maiores dificuldades fossem abordados na monitoria da disciplina antes da segunda fase da prova.

Os comentários, como vimos anteriormente, tinham um campo específico nas provas para serem escritos. Foram construídos de acordo com a necessidade específica de cada estudante, observando suas individualidades e dificuldades. Para realizar esta intervenção, utilizamos a leitura vertical, em que analisamos individualmente cada produção escrita dos estudantes. O desenvolvimento das tarefas propostas no Kahoot e os comentários realizados nas provas, com base nas produções escritas da primeira fase, serão discutidos na seção "Intervenções a partir das produções escritas".

Na aplicação da segunda fase, os estudantes puderam continuar a resolução das tarefas da prova, considerando também os comentários sugeridos. O Quadro 1 resume as atividades desenvolvidas durante a prova em fases.

Quadro 1 – Resumo de atividades

Atividade	Objetivo
Primeira fase – prova em fases	Iniciar a resolução da prova em fases com os conhecimentos adquiridos durante as aulas e estudos.
Análise das produções escritas: leitura horizontal	Analisar todos os registros produzidos em cada tarefa da prova, a fim de produzir tarefas para o *Kahoot*.
Kahoot	Propor tarefas no *Kahoot* a fim de provocar o estudo dos conteúdos para os quais os estudantes apresentaram maior dificuldade a resolução por tarefa.
Monitoria	Realizar um momento de estudos para resolução de problemas envolvendo o conteúdo da prova, discutir dificuldades encontradas na prova.
Análise das produções escritas: leitura vertical	Analisar cada registro produzido pelos estudantes nas tarefas da prova a fim de propor intervenções.
Comentários	Construção de comentários individuais com base na análise das produções escritas.
Segunda fase – prova em fases	Continuar a resolução da prova em fases, com vistas nas intervenções propostas.

Fonte: Acervo da pesquisa

A análise da produção escrita foi fundamental neste trabalho, pois forneceu suporte para a materialização da avaliação contínua da aprendizagem. Nesse sentido, ao analisar as produções escritas dos estudantes, nos inspiramos nas premissas da análise de conteúdo (Bardin, 2016), seguindo as diferentes fases propostas por Bardin (2016), organizadas em três polos: pré-análise, exploração do material, e tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

A pré-análise é a fase inicial de organização na análise de conteúdo, focada em sistematizar ideias iniciais. Ela tem três missões principais: escolha dos documentos, formulação de hipóteses e objetivos, e elaboração de indicadores para a interpretação final. Nessa fase, realiza-se a leitura flutuante, um contato inicial com os documentos que permite obter impressões e orientações preliminares.

A exploração do material envolve a aplicação de decisões sistemáticas, como codificação e decomposição, de acordo com regras previamente estabelecidas.

Na fase de tratamento dos resultados, inferência e interpretação, os dados são tratados para que sejam significativos e válidos, resultando em quadros, figuras e modelos que condensam as informações analisadas. Com resultados significativos, o analista pode propor inferências e interpretações sobre os objetivos previstos ou sobre descobertas inesperadas.

Para construir a análise, entrelaçando os três polos, utilizamos diferentes formas de examinar as produções escritas, incluindo a leitura flutuante, a leitura vertical e a leitura horizontal. Com a prova em fases e as intervenções, objetivamos estabelecer uma conexão entre a matemática escolar, conhecida pelos estudantes, e a matemática acadêmica, enfatizando as maneiras de pensar com base no que os estudantes mostraram saber, desconstruindo a ideia de avaliação a partir de uma leitura pela falta. Assim, não nos concentramos no que os estudantes deixaram de fazer, mas, a partir do que fizeram, buscamos identificar as bases em que se apoiavam para resolver as questões.

A análise da produção escrita permeou todo o processo de avaliação da aprendizagem, sendo um dos principais pilares desta pesquisa, pois possibilitou a investigação, intervenção e feedback aos estudantes. Após a conclusão da segunda fase da prova em fases, analisamos os registros dos estudantes para evidenciar os indícios de aprendizagem manifestados nas resoluções das tarefas. Vale destacar que o material de pesquisa é composto por um documento com 37 provas, totalizando 517 páginas.

Para codificar e referenciar as produções escritas, optamos por realizar a identificação por página, uma vez que cada pergunta ocupa uma página. Assim, P1 refere-se à página 1, P2 à página 2, e assim por diante. Algumas produções escritas não foram consideradas na pesquisa; para isso, adotamos os seguintes critérios de exclusão: segunda fase da prova em branco; produções escritas repetidas, uma vez que a intervenção realizada na segunda fase da prova foi a mesma em resoluções que apresentaram a mesma estratégia e procedimento.

A AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM COMO PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO

O momento da prova é aquele em que o estudante pode expressar seu conhecimento sobre o assunto avaliado; a pressão, o tempo e a dificuldade são fatores que afetam seu desempenho, deixando, muitas vezes, aquela impressão de "dar branco". Em geral, o estudante é avaliado pelo que deixou de fazer na prova, onde o principal interesse é a nota, ou seja, apenas algo quantificável. No entanto, o que o estudante mostra saber diante de uma tarefa, através de sua resolução, e a maneira como utiliza seus conhecimentos são mais valiosos do que a simples dicotomia certo/errado.

O professor deve se desprender da ideia de avaliação como um produto que define a trajetória do estudante; é necessário trazer à tona a forma como o estudante lida com seus conhecimentos, além de verificar certo e errado. Considerar as abordagens do estudante pode fornecer elementos úteis ao professor para aprofundar ou redirecionar o aprendizado. Se assim for, a avaliação pode exercer um papel fundamental enquanto prática investigativa. Esteban (2000, p.11) afirma que esta prática

> [...] se configura pelo reconhecimento dos múltiplos saberes, lógicas e valores que permeiam a tessitura do conhecimento. Nesse sentido, a avaliação vai sendo constituída como um processo que indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, os percursos previstos, as relações estabelecidas entre as pessoas, saberes, informações, fatos, contexto.

A título de exemplo, a maioria das escolas adota um sistema de avaliação voltado ao rendimento escolar. Um exemplo desse sistema é o IDEB, que funciona como

> um indicador nacional que possibilita o monitoramento da qualidade da Educação pela população por meio de dados concretos, com o qual a sociedade pode se mobilizar em busca de melhorias. Para tanto, o Ideb é calculado a partir de dois componentes: a taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho nos exames aplicados pelo Inep. Os índices de aprovação são obtidos a partir do Censo Escolar, realizado anualmente (Brasil, 2007).

Esse índice varia de 0 a 10. O resultado do IDEB de 2019 para o ensino médio das escolas públicas estaduais foi de 3,9, enquanto a meta era 4,9, e para 2021, a meta é de 4,9 (IDEB, 2020). Essa política busca atuar na defasagem por meio de melhorias no ensino e de projetos que incentivem a aprendizagem. No entanto, a verdadeira oportunidade de aprimorar a aprendizagem está relacionada à forma como os exames são utilizados. Em outras palavras, o que o estudante responde nessas provas pode subsidiar a metodologia com que os assuntos são abordados em sala de aula e avaliados. Luckesi (1996) apud Buriasco (2000, p. 160) considera que

> a avaliação precisa ser vista como um dos fios condutores da busca do conhecimento, de modo a dar pistas ao professor sobre qual o caminho já percorrido, onde o estudante se encontra, que práticas ou decisões devem ser revistas ou mantidas para que juntos, possam chegar à construção do resultado satisfatório.

Essa não é a realidade da maioria das instituições de ensino, onde a avaliação é utilizada apenas como um conjunto de provas. Ao final do período letivo, calcula-se a média aritmética dessas provas, um número que distingue os estudantes entre aprovados e reprovados. Estes últimos terão que estudar tudo de novo e da mesma forma, o que não garante que realmente aprenderão. Esteban (2000, p. 1) afirma que as escolas 'continuam profundamente marcadas pela ótica da homogeneidade, fazendo coincidir avaliar e julgar', focando-se em estabelecer parâmetros que avaliem a qualidade da dinâmica pedagógica a partir da hierarquização dos estudantes pela nota.

Buriasco (2000) afirma que a avaliação educacional exerce um papel de seleção, sobretudo no ensino da Matemática. A autora diz ainda que a avaliação

> tem servido para selecionar, classificar, rotular, controlar e, através dela, o professor decide, muitas vezes, a trajetória escolar do estudante. Na maioria das vezes, os estudantes são estimulados a se dedicarem a uma memorização desarticulada e que, por sua falta de sentido, tende a desaparecer logo após as sessões de avaliação do rendimento escolar. (Buriasco, 2000, p.157-158).

Podemos notar que o problema mencionado acima persiste até os dias atuais, ou seja, a avaliação ainda é utilizada apenas como uma etapa final do ensino, e seus instrumentos não são empregados como meios no processo de aprendizagem. Segundo Buriasco (2000), para avaliar é necessário ter explícitos os objetivos a serem alcançados, estabelecer os instrumentos e definir os caminhos para utilizá-los. Dessa forma, a avaliação visa construir resultados previamente definidos.

Para tanto, é necessário ampliar a compreensão da forma de pensar e de associar os conhecimentos de cada estudante, desconstruindo a criminalização do “erro” e passando a considerá-lo como uma pista que revela indícios do conhecimento que o estudante possui, a fim de utilizá-lo como uma oportunidade de aprendizagem.

É importante proporcionar diferentes experiências para os estudantes. Assim, os instrumentos avaliativos devem se desvincular do modelo tradicional e ir ao encontro do uso do conhecimento do estudante para possibilitar novos aprendizados. Nesse sentido, destacamos a prova em fases, que será discutida em seção específica. Essa prova permite a realização de intervenções e a proposição de novas tarefas com base nas produções escritas dos estudantes em cada fase, possibilitando um novo olhar sobre as estratégias e os procedimentos utilizados por eles.

No Brasil, Vianna (1998) é um dos pioneiros a abordar aspectos da avaliação escolar. O autor defende a ideia de que instrumentos de medida bem elaborados podem estimular o estudante na busca por aprendizagem e na apropriação de novos conhecimentos, sendo um desafio para o seu interesse e sua curiosidade intelectual, além de orientar e avaliar seu progresso. Vianna argumenta que não se deve apontar um formato de avaliação como o problema e que a forma de avaliar o aprendizado não está sendo atualizada na mesma velocidade em que a sociedade se modifica.

De Lange (1999) define, para a avaliação educacional, nove princípios que buscam redefinir o propósito e a natureza do processo de avaliação nas instituições de ensino. Quando compreendidos e implementados, esses princípios promovem uma perspectiva mais abrangente e centrada no estudante, a saber: (De Lange, 1999, p. 10).

1. o objetivo principal da avaliação escolar deve ser a aprendizagem;
2. a matemática deve estar imersa em problemas que sejam realísticos e "valham a pena";
3. os métodos de avaliação devem permitir que os estudantes revelem mais aquilo que sabem ao invés do que não sabem;
4. a avaliação deve ser balanceada e incluir múltiplas e variadas oportunidades para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações;
5. as tarefas de avaliação devem operacionalizar todas as metas do currículo;

6. os critérios de classificação devem ser públicos e consistentemente aplicados;
7. o processo de avaliação, incluindo os critérios de pontuação e classificação, deve ser acessível aos estudantes;
8. os estudantes devem ter oportunidade de receber feedback do seu trabalho;
9. a qualidade de uma tarefa deve ser definida por características como autenticidade e equidade.

Em primeiro lugar, a premissa fundamental de que o objetivo principal da avaliação escolar deve ser a aprendizagem redefine a avaliação como uma ferramenta para catalisar o desenvolvimento dos estudantes, indo além da simples atribuição de notas. Além disso, De Lange (1999) propõe que a matemática, ou qualquer disciplina, seja apresentada aos estudantes por meio de problemas realistas e relevantes, garantindo que o aprendizado seja significativo e aplicável à vida cotidiana.

O terceiro princípio destaca a importância de os métodos de avaliação permitirem que os estudantes demonstrem aquilo que sabem, em vez de enfatizar suas lacunas ou erros. Essa abordagem construtiva visa valorizar o conhecimento adquirido e encorajar o crescimento contínuo. A busca pela equidade e pela compreensão do desempenho do estudante é refletida no quarto princípio, que preconiza uma avaliação balanceada, incorporando diferentes tipos de tarefas para proporcionar uma visão abrangente das realizações dos estudantes.

O quinto princípio enfatiza a importância de que as tarefas de avaliação estejam alinhadas com as metas do currículo, garantindo que o processo de avaliação realmente meça o que se pretende ensinar. Em seguida, a transparência e a consistência emergem como elementos cruciais nos princípios seis e sete, em que os critérios de classificação devem ser públicos e aplicados de maneira uniforme, enquanto o processo de avaliação deve ser acessível aos estudantes.

No oitavo princípio, De Lange destaca a necessidade de os estudantes receberem feedback construtivo, promovendo uma compreensão mais profunda de seu desempenho e proporcionando oportunidades para aprimoramento. Finalmente, o nono princípio sublinha que a qualidade de uma tarefa de avaliação deve ser determinada por características como autenticidade e equidade, garantindo que as avaliações sejam justas e representativas das habilidades dos estudantes.

Ao adotar esses princípios, a avaliação transcende a mera mensuração de conhecimento para se tornar uma ferramenta integral no processo educacional, promovendo um ambiente de aprendizado enriquecedor, equitativo e centrado no desenvolvimento do estudante.

De Lange (1999) coloca que esses princípios formam uma “lista de verificação” para os professores que levam a avaliação em sala de aula a sério. Na lista de princípios, o conteúdo é mencionado de diferentes maneiras (matemática relevante, do mundo real) e em vários níveis de pensamento e raciocínio matemático, considerando que um dos objetivos da Educação Matemática é capacitar os indivíduos a lidar com a matemática envolvida em problemas do mundo real. Isso é necessário para a vida atual e futura de cada indivíduo, para a vida profissional (trabalho ou educação) e para a compreensão e valorização da matemática como uma disciplina científica (De Lange, 1999).

A avaliação, quando adotada como uma prática de investigação, surge como resposta à impossibilidade de reduzir os processos ao que é imediatamente observável. Ela vai além de simplesmente aceitar as respostas, questionando sua configuração e buscando identificar as relações que as compõem. Essa abordagem não se contenta em meramente constatar acertos ou erros; ao contrário, diante de uma resposta, ela formula novas perguntas (Esteban, 2000). Cabe destacar que o foco não deve estar na resposta, mas no caminho percorrido, nas estratégias e nos procedimentos de resolução.

Essencialmente, como prática de investigação, a avaliação não rejeita o erro nem o classifica de maneira negativa. Pelo contrário, considera o erro como um elemento crucial na tentativa de compreender a complexidade dos processos e na criação de práticas que incorporem essa complexidade. O erro fornece indícios sobre os conhecimentos, práticas, processos e valores presentes na relação pedagógica, muitas vezes invisíveis à primeira vista. Além disso, o erro carrega consigo conhecimentos, processos, lógicas e formas de vida frequentemente silenciados e negados pelo pensamento hegemônico (Esteban, 2000). Nessa perspectiva, a avaliação desafia e desvenda o que está aparente, buscando revelar o que está oculto nos processos de aprendizagem e quais lógicas de raciocínio levaram o estudante a resolver de uma determinada maneira e não de outra.

Esteban (2001) afirma que a avaliação não tem como objetivo simplesmente aprovar ou reprovar a turma, mas sim compreender o processo vivido pelos estudantes, os conhecimentos elaborados e aqueles que se mostraram necessários. Além disso, a avaliação busca contribuir para a formulação de um plano de trabalho para o ano seguinte, com base nas vivências adquiridas. Sem a imposição de uma classificação, o intuito é permitir que cada estudante prossiga em seu processo de construção de conhecimento. Diante disso, torna-se evidente um avanço significativo na consolidação da avaliação como uma prática de investigação e como um instrumento para a formação do professor como um profissional reflexivo.

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

A comunicação é uma habilidade fundamental no campo da matemática. Embora muitas vezes associemos a matemática a números e cálculos, a capacidade de expressar conceitos matemáticos de forma clara e precisa por meio da produção escrita desempenha um papel crucial na compreensão e na resolução de problemas matemáticos. A análise da produção escrita em matemática é um campo de estudo que busca desvendar a riqueza da linguagem matemática e entender como ela influencia o aprendizado, o ensino e a pesquisa.

Ao longo das décadas, a Educação Matemática tem passado por mudanças significativas em sua abordagem. A ênfase tem se afastado da simples memorização de fórmulas e procedimentos, focando-se mais na compreensão profunda dos conceitos matemáticos e na capacidade de comunicar esses conceitos de maneira eficaz. Isso levou ao reconhecimento crescente da importância da produção escrita em matemática como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do pensamento crítico, da resolução de problemas e da construção de argumentos lógicos.

Nesta dissertação, exploramos a análise da produção escrita em matemática sob diversas perspectivas, abordando questões como a evolução das abordagens pedagógicas, as estratégias para avaliar a qualidade da produção escrita dos estudantes, a influência da linguagem na construção do conhecimento matemático e as implicações práticas para o ensino e a aprendizagem. À medida que avançamos nesta jornada de exploração, esperamos lançar luz sobre o valor intrínseco da produção escrita em matemática e seu impacto significativo na formação dos estudantes e na resolução de desafios matemáticos complexos.

A análise da produção escrita em matemática é uma área de estudo que se beneficia significativamente da base de conhecimento acumulada por pesquisas anteriores. A investigação de trabalhos acadêmicos e estudos empíricos prévios relacionados a essa temática é essencial para o avanço do campo, uma vez que essas pesquisas fornecem insights valiosos sobre os métodos, as abordagens e as descobertas que moldaram nossa compreensão atual. Ao examinarmos os resultados de estudos anteriores, podemos identificar tendências, desafios comuns e lacunas no conhecimento, orientando-nos para uma análise mais aprofundada e informada da produção escrita em matemática. Além disso, a integração dessas pesquisas prévias em nossa dissertação permitirá uma contextualização sólida e uma base para a construção de nossas próprias descobertas e contribuições para o campo.

A palavra "análise" tem origem na palavra grega *análysis* (dissolução, método de resolução, examinar, dentre outros), que significa o "estudo pormenorizado de cada parte de um todo, para conhecer melhor sua natureza, suas funções, relações, causas" (Houaiss, 2023). Com isso, vemos que o significado de "análise" envolve desmembrar algo complexo em partes menores e estudá-las cuidadosamente, a fim de compreender melhor o todo.

Buriasco (1999) coloca que o trabalho que os estudantes desempenham é posto em função da nota/conceito. Nesse aspecto, os erros não são discutidos, as experiências não são ressignificadas, e as metodologias dificilmente são modificadas, mesmo diante do fracasso de muitos estudantes. A autora ainda apresenta que a função da avaliação é fornecer informações ao estudante que o auxiliem na compreensão. A interrogativa que nos fica é: como utilizar os erros para trilhar um caminho de investigação?

Segundo Cury (1995, p. 40), "analisar os erros cometidos pelos estudantes em questões de provas de verificação é uma das tarefas desempenhadas pelos professores de Matemática, em qualquer nível de ensino." No entanto, a autora destaca que a forma de avaliar esses erros pode variar dependendo do professor.

> Alguns estão preocupados, unicamente, em detectar os erros, sem discuti-los com os alunos; outros, aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão, permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros, ainda, exploram os erros com os alunos, questionando os limites da validade da resposta dada ou, mesmo, tentando entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão (Cury, 1995, p. 40).

Errar é intrínseco ao ser humano; utilizá-lo como oportunidade de aprendizagem é uma subversão. No entanto, a concepção do erro como algo negativo percorre a sociedade há muito tempo. A ação de errar levou a punições severas, como é o caso do ambiente escolar.

> Num passado não muito distante, o erro na escola estava associado ao castigo físico. Muitos de nós já ouvimos histórias de nossos pais e avós sobre a palmatória, sobre ajoelhar-se sobre grãs de milho, fazer cópias de palavras, frases, contas e tabuadas. Tudo isso para corrigir uma resposta considerada inadequada, um erro (Perego, 2005, p. 19).

Nesse aspecto, Buriasco (2000) afirma que os erros são tomados como um parâmetro de que o estudante não sabe fazer, não tem estudado, e não como um parâmetro de que o estudante não sabe algo parcialmente, trazendo a ideia de que existe apenas o saber e o não saber. Com isso, Buriasco (2000) propõe que é necessário utilizar o erro, ou conhecimento parcial, para construir o correto. Isso significa que a tarefa do professor é tornar o erro observável ao estudante, para que ele tome consciência de forma positiva de sua ação.

Segundo Garnica (2006), a maneira mais utilizada pelo professor em sala de aula para olhar para o erro é a 'leitura pela falta', ou seja,

> o professor detectará o que falta ao aluno: falta aprender conteúdos anteriores, falta a ele exercitar-se mais, faltam a ele certos conceitos, falta aprender a operacionalizar certos conceitos ou encaminhar melhor certas operacionalizações, falta a ele ler mais cuidadosamente o problema, falta um lar estruturado etc. (Garnica, 2006, p. 4).

Analisar o erro pode ser ferramenta valiosa na educação, mas é importante que esse processo tenha um cuidadoso respeito pelo estudante. Isso envolve a discussão aberta dos resultados da avaliação com o estudante, o desenvolvimento de estratégias de trabalho variadas nos pontos onde os erros foram mais comuns e uma análise crítica dos erros, proporcionando aos estudantes a oportunidade de refletir sobre suas falhas e auxiliando na construção de conceitos. Além disso, a utilização dos erros em sala de aula deve ser feita com cautela. Simplesmente fornecer uma série de exercícios repetitivos semelhantes aos erros cometidos pelo estudante não garante a construção efetiva do conhecimento nem a superação dessas falhas. Portanto, a análise dos erros deve ser parte de um processo educacional mais amplo e cuidadosamente planejado para ser eficaz na promoção do aprendizado (Cury, 2004 apud Perego, 2006).

Nesse sentido, Negrão de Lima (2006) coloca que o erro apresentado a partir de uma análise pode direcionar o olhar docente para o contexto e para o processo do conhecimento do estudante, utilizando o questionamento, diálogo, reflexão como “[...] meio de tornar a práxis consciente uma constante no ambiente educativo, a fim de provocar nos educandos a promoção da sua autonomia” (p. 40).

Como uma alternativa, Viola dos Santos (2007) emprega o termo maneiras de lidar, apresentando

> uma mudança no foco dessa discussão, substituindo "erro", que em muitos casos acreditamos estar ainda caracterizando os alunos pela falta, por maneiras de lidar, expressão que considerarmos mais adequada para os processos de resolução de uma questão, com a qual acreditamos estar caracterizando os alunos pelo que eles já têm num determinado momento (Viola dos Santos, 2007, p. 23).

Então, é necessário um olhar mais abrangente sobre cada modo de lidar, suas particularidades e o que o estudante demonstra saber, como utiliza conhecimentos anteriores, sem caracterizá-los pela falta, ou seja, pelo 'erro' cometido, mas sim pelas maneiras de lidar (Viola dos Santos, 2007).

Viola dos Santos (2007) ainda coloca que a análise da produção escrita é uma das formas de buscar conhecer em detalhes a maneira com que os estudantes lidam com problemas matemáticos, as dificuldades encontradas, levando em consideração as maneiras de lidar do estudante, diferentes da correta.

Dessa forma, em alguns casos, a exploração do erro ocorre de maneira qualitativa, a fim de que auxilie na superação de dificuldades e na compreensão do raciocínio do estudante. Reconhecendo a amplitude do seu significado, a palavra 'análise' pode nos dizer muito sobre as dificuldades em compreender conceitos matemáticos. Para Ferreira (2009), a análise da produção escrita possibilita a inferência das formas com que os estudantes procedem na execução das estratégias adotadas, além de identificar como utilizam conteúdos matemáticos. Inferir sobre as interpretações feitas permite ter indícios do que os estudantes mostram saber e perceber relações estabelecidas com as informações dos enunciados.

Uma das abordagens que se alinha com a ideia de utilizar a avaliação como uma prática de investigação, visando uma compreensão mais aprofundada da forma como os estudantes lidam com os desafios matemáticos, como se desenvolvem seus processos de aprendizagem e quais obstáculos encontram, é a análise da produção escrita. Isso significa examinar minuciosamente os trabalhos, exercícios e respostas escritas dos estudantes para descobrir informações valiosas sobre seu progresso e sua compreensão dos conceitos matemáticos (Viola dos Santos, 2007). O autor ainda destaca que "a produção escrita possibilita tanto conhecer quais conteúdos os estudantes demonstram ter, seus 'erros' e dificuldades, quanto ter uma compreensão de como usam seus conhecimentos matemáticos escolares” (p. 28).

Silva (2005, p. 113), coloca que

> Com as informações sobre a produção escrita dos alunos, que apresentam tanto as suas dificuldades quanto as suas possibilidades, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento dos alunos.

Nesse sentido, ao analisar essas produções escritas, os professores podem identificar não apenas as respostas corretas, mas também as estratégias utilizadas pelos estudantes, as abordagens equivocadas e as áreas onde eles enfrentam dificuldades. Essa abordagem oferece insights importantes sobre a natureza do processo de aprendizagem matemática de cada estudante, ajudando os educadores a adaptarem seu ensino de maneira mais eficaz.

Essa prática não se limita a verificar apenas se as respostas estão corretas ou erradas, mas busca entender como os estudantes pensam, quais conceitos estão sólidos e quais precisam ser reforçados. Além disso, valoriza a aprendizagem como um processo dinâmico, no qual os erros e as tentativas fazem parte do caminho em direção ao entendimento completo dos conceitos matemáticos. Portanto, a análise da produção escrita se mostra uma valiosa estratégia de ensino, proporcionando uma visão mais abrangente e detalhada do progresso dos estudantes na matemática.

Pesquisas no campo da análise da produção escrita em Educação Matemática, realizadas por autores como Silva (2005), Negrão de Lima (2006), Viola dos Santos (2007), Dalto (2007), Celeste (2008), Almeida (2009), Ferreira (2009), Ciani (2012), Trevisan (2013), Santos (2014) e Barreto (2018), destacam a importância fundamental dessa abordagem para compreender os processos de ensino e aprendizagem. Esses estudos ressaltam a relevância de uma abordagem pedagógica centrada no processo de aprendizagem, valorizando tanto os erros quanto os acertos dos estudantes como fontes valiosas de informações. Em vez de simplesmente corrigir erros, os professores são encorajados a compreender a lógica por trás deles, identificando os obstáculos específicos enfrentados pelos estudantes ao resolver problemas matemáticos.

Uma das conclusões importantes dessas pesquisas é que a análise da produção escrita permite uma compreensão mais profunda da matemática, promovendo um ambiente de aprendizado mais inclusivo. Esses estudos destacam a necessidade de uma abordagem flexível e diversificada, reconhecendo a diversidade de caminhos que os estudantes podem seguir na resolução de problemas matemáticos.

Além disso, os pesquisadores ressaltam que a avaliação não se limita apenas a verificar o conhecimento adquirido, mas também serve como uma prática de investigação contínua, projetada para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem. Os resultados dessas investigações oferecem insights valiosos para orientar tanto os estudantes quanto os professores em direção ao aprimoramento contínuo, destacando a importância de uma abordagem pedagógica que considere as necessidades e a diversidade dos estudantes.

Dalto (2007) afirma que, em um processo avaliativo cujo objetivo seja contribuir para o ensino e a aprendizagem, a produção escrita do estudante pode fornecer informações sobre o grau de desenvolvimento do seu pensamento algébrico, além de evidenciar como o estudante mobiliza o conhecimento que possui para a resolução de problemas.

Ferreira (2009) considera a análise da produção escrita como uma prática que pode proporcionar ao professor um olhar mais refinado sobre o envolvimento dos estudantes com a matemática ao trabalharem com as situações propostas. Além disso, a autora coloca que não acredita que essa prática possibilite uma leitura “transparente” e “imparcial” das produções escritas; a ideia promissora é realizar uma leitura “plausível”, ou seja, “uma forma de tentar imaginar o que supostamente o estudante pensou ao desenvolver uma tarefa” (p. 29). Com isso, é possível enxergar a diversidade de processos que os estudantes podem ter desenvolvido ao produzir conhecimento, além de reconhecer a multiplicidade de formas de resoluções possíveis para um problema.

Santos e Buriasco (2010) defendem que toda produção escrita dos estudantes é importante, seja obtida por meio de provas ou outros instrumentos, pois

> [...] ao analisar e interpretar a produção escrita dos estudantes na resolução de um problema, o professor pode perceber que, por meio dessa resolução, seja ela considerada totalmente correta, parcialmente correta ou, incorreta, é possível obter informações sobre o que eles sabem do conteúdo envolvido, ter pistas do que podem vir a saber futuramente, além de também ter pistas de como ele, o professor, pode auxiliá-los em suas aprendizagens. Além disto, o professor pode identificar possíveis dificuldades dos estudantes, analisar os erros

> encontrados, obter indícios das causas dos erros para, a partir dessas informações, de conversas com eles, planejar novas ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos envolvidos (Santos; Buriasco, 2010, p. 105).

Diante disso, notamos que analisar a produção escrita dos estudantes ao resolver problemas matemáticos é uma prática essencial para os professores. Essa prática vai além de simplesmente verificar se as respostas estão corretas, pois oferece uma janela para o mundo do pensamento dos estudantes. Independentemente de a resposta ser considerada completamente correta, parcialmente correta ou incorreta, essa análise fornece informações valiosas. O professor pode identificar não apenas o que os estudantes já sabem sobre o conteúdo envolvido, mas também pistas sobre o que eles têm o potencial de aprender futuramente.

A análise da produção escrita ajuda a romper com a cultura do "certo/errado", que está atrelada à exclusão e à competição. Essa ideia deve ser substituída pela valorização da multiplicidade de maneiras de lidar com os conhecimentos, que

> [...] está ligada à solidariedade e à cooperação, pois, por meio dessa prática, eles podem buscar conhecer os alunos em sua complexidade e heterogeneidade, respeitando suas vivências e idiossincrasias, na perspectiva de ampliar os modos de produzir significados em detrimento de legitimar e substituir um determinado modo em relação ao outro (Ciani, 2012, p. 42).

Santos (2014) considera que, de modo geral, a análise da produção escrita em matemática possibilita a (re)orientação da avaliação escolar e a (re)orientação da prática pedagógica. Para que a análise da produção escrita seja utilizada como uma estratégia de ensino, é necessária a realização de ações como: leitura vertical, leitura horizontal, inferência e interpretação.

As ações definidas por Santos (2014) foram desenvolvidas a partir de um amplo estudo em trabalhos acadêmicos relacionados à análise da produção escrita. Abaixo, destacamos as quatro ações segundo as interpretações de Santos (2014).

Quadro 2 – Ações da análise da produção escrita

Ação	Descrição
Leitura vertical	Leitura de toda as produções de um mesmo estudante. Permite que o professor conheça como o estudante lida com tarefas, quais estratégias de resolução utiliza, que dificuldades apresenta. Possibilita encontrar similaridades nas produções do estudante e a construção de um perfil do modo de lidar com as questões.

Leitura horizontal	Leitura das produções de todos os estudantes em uma mesma questão ou problema. Possibilita perceber semelhanças entre essas produções, o que auxilia a identificar, estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados, inventariar e analisar os acertos e erros mais frequentes. Auxilia na construção de um perfil do modo que a turma de estudantes lida com as questões. Tanto a leitura vertical quanto a horizontal permitem que o professor levante hipóteses acerca das produções dos estudantes e propiciam a obtenção de informações que auxiliam, durante a inferência e interpretação, a ratificar ou refutar algumas dessas hipóteses.
Inferência	Busca ir além do que é encontrado na produção do estudante para tentar complementar informações a respeito do seu modo de lidar que não estão visíveis à primeira vista.
Interpretação	Auxilia a compreender como os estudantes lidam com as questões. Constitui-se em movimentos para tentar atribuir significados à produção escrita analisada, para compreender o que é encontrado na produção escrita do estudante.

Fonte: Elaborado pelo autor com a interpretação de Santos (2014, p. 27)

Nesse sentido, Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) lançam alguns questionamentos podem nortear a análise da produção escrita.

> As dificuldades de 'interpretação' estão relacionadas à linguagem utilizada no enunciado, ao conteúdo matemático envolvido, a ambos, ou a outros aspectos? Como saber se o enunciado da questão é suficientemente claro para que o estudante a resolva? O enunciado da questão pode servir de contexto para se produzir significado a partir dele? As informações presentes no enunciado da questão fazem parte do conjunto de circunstâncias que tornam a questão acessível aos estudantes? (Buriasco; Ferreira; Ciani, 2009, p. 79).

Vale ressaltar que a análise da produção escrita não visa atribuir nota ou conceito, mas sim obter informações que possibilitem a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem, além de fundamentar decisões que auxiliem o professor e o estudante a organizar e orientar seus trabalhos (Santos; Buriasco, 2015).

Seguindo o pensamento de Ciani (2012), a análise da produção escrita com uma abordagem solidária e cooperativa representa um caminho para a construção de uma educação mais inclusiva e enriquecedora, na qual a diversidade é celebrada e as vozes individuais são valorizadas. Isso contribui para a formação de estudantes mais críticos, criativos e conscientes, capazes de produzir significados de maneiras diversas, promovendo, ao mesmo tempo, a igualdade de oportunidades no processo de ensino e aprendizagem.

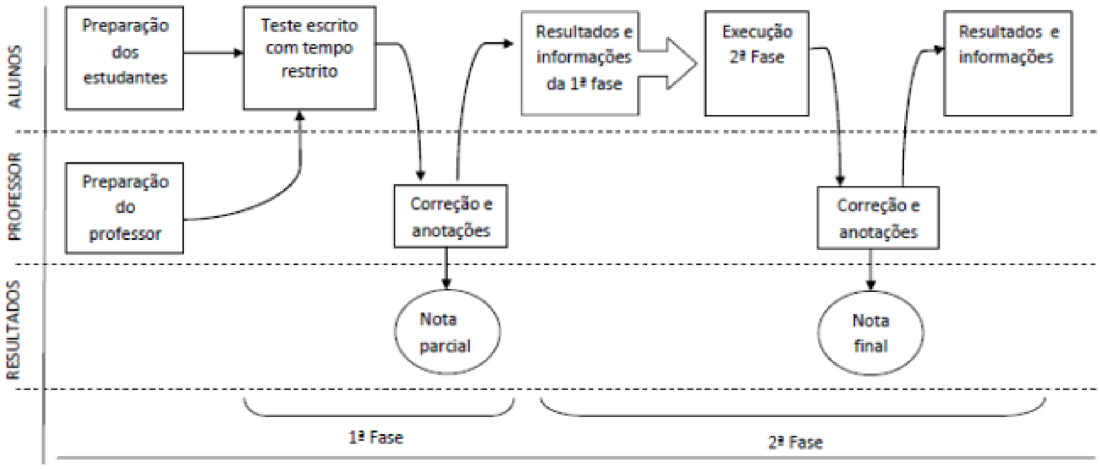
A PROVA EM FASES

A avaliação desempenha um papel duplo: para o estudante, funciona como uma ferramenta de regulação da aprendizagem, capacitando-o a desenvolver autonomia ao identificar suas dificuldades, analisá-las e traçar estratégias para superá-las. Por outro lado, para o professor, a avaliação é crucial ao fornecer insights que possibilitam a reflexão e o aprimoramento de sua prática pedagógica, permitindo compreender e intervir nas estratégias empregadas pelos estudantes. Nesse sentido, a avaliação beneficia tanto professores quanto estudantes, priorizando seus interesses e necessidades em detrimento das exigências do sistema educacional (Nagy-Silva, 2005).

Seguindo a ideia de avaliação da aprendizagem como uma prática investigativa e reguladora, um dos instrumentos avaliativos que favorecem essa concepção é a prova em fases, originalmente conhecida como prova em duas fases, idealizada por De Lange (1987).

De acordo com De Lange (1987), a primeira fase é realizada como uma prova escrita tradicional e cronometrada, em que o estudante responde ao máximo de tarefas possíveis dentro de um tempo predeterminado, tendo liberdade para escolher as tarefas que deseja responder. Ao concluir esta fase, as provas são entregues ao professor, que realiza a análise e atribui pontuações. Na segunda fase, com base nas observações do professor, o estudante refaz o trabalho em casa, sem restrições e livre para responder às perguntas de forma mais aprofundada. Após um período determinado, os estudantes entregam seus trabalhos ao professor, que atribui as notas com base nas duas fases. A figura abaixo representa o esquema da prova em duas fases proposta por De Lange (1987).

Figura 3 – Esquema da prova em duas fases proposta por De Lange (1987)



Fonte: De Lange (1987, p. 186, traduzido por Mendes (2014, p. 44))

De Lange (1987) ainda destaca que não se deve considerar a segunda fase como uma segunda chance para melhorar os resultados da primeira fase. As duas etapas têm objetivos diferentes. Somente para os problemas da primeira fase que não foram resolvidos com êxito, a segunda fase oferece uma nova oportunidade.

Trevisan (2013) apresenta, em sua tese de doutorado, algumas angústias relacionadas à utilização da avaliação como prática de investigação: como tornar a avaliação uma prática que possibilite ao professor interpretar, incluir, regular e mediar os processos de ensino e aprendizagem? O autor ressalta que

> [...] naquele momento minha concepção de avaliação resumia-se em "fazer prova". Portanto, reconceitualizar a avaliação implicaria, basicamente, modificar o instrumento de avaliação (a prova). Mas não muito... afinal, nas aulas de Matemática, a prova escrita é vista como algo "sacrossanto" e recoberto por uma "aura de glória" (Trevisan, 2013, p. 22-23).

A fim de modificar essa concepção, ao ingressar no doutorado, Trevisan decidiu explorar a ideia de prova em duas fases (proposta por De Lange). Ele elaborou uma prova que abrangesse todo o conteúdo anual de uma disciplina a ser ministrada naquele ano, realizando todas as fases em sala de aula, diferentemente do modelo de De Lange, no qual a segunda fase era feita em casa pelos estudantes. Dessa forma, Trevisan (2013) utilizou o termo "prova em fases" em vez de "prova em duas fases", estruturando-a em seis etapas.

Vale destacar que apenas na quarta fase os estudantes receberam um retorno sobre as tarefas resolvidas até então. Esse feedback foi dado por meio de questionamentos, sem indicar se as respostas estavam certas ou erradas, com o objetivo de levá-los a refletir sobre suas resoluções.

Trevisan (2013) relatou que, ao final da quarta fase, a sensação foi de frustração. Ele percebeu que os questionamentos inseridos nas provas dos estudantes não contribuíram de maneira significativa. Além disso, afirmou que, em cada fase, sentia que não havia escolhido as tarefas com o devido cuidado. Apesar de acreditar, inicialmente, que as tarefas eram bem selecionadas, abrangendo todos os tópicos planejados para o semestre e semelhantes às que costumava usar em sala de aula, a execução prática trouxe desafios inesperados.

Grande parte das tarefas apresentava poucas estratégias possíveis para resolução, o que obrigou Trevisan a trabalhar em sala atividades semelhantes às da prova. Isso gerou a sensação de que as aulas estavam maçantes, já que não havia tempo para abordar outros conteúdos além das tarefas da prova.

Na posição de professor, Trevisan (2013) esperava que os estudantes aprimorassem ou alterassem suas resoluções ao longo das fases da prova. Também acreditava que os questionamentos ao lado das resoluções contribuiriam para o refinamento ou a modificação dessas respostas. Contudo, ao final do semestre, a sensação era de que tudo havia dado errado. Trevisan (2013) usou essa experiência negativa para refletir, levantando os seguintes questionamentos: quais seriam as razões para o “fracasso” no uso da prova em fases como instrumento de avaliação? Por que os estudantes não “abraçaram” a ideia? Por que meus questionamentos não foram efetivos?

Com isso, Trevisan propôs mudanças na organização da prova, como incluir tarefas que mobilizassem diferentes níveis de competência, permitindo aos estudantes mostrarem o que sabem e resolvê-las por diferentes estratégias. Ele também sugeriu realizar feedbacks mais frequentes sobre as produções dos estudantes, informar as notas parciais de cada fase, utilizar as informações de cada etapa para adaptar as aulas e gerir os erros encontrados, explorando suas possíveis causas durante as aulas.

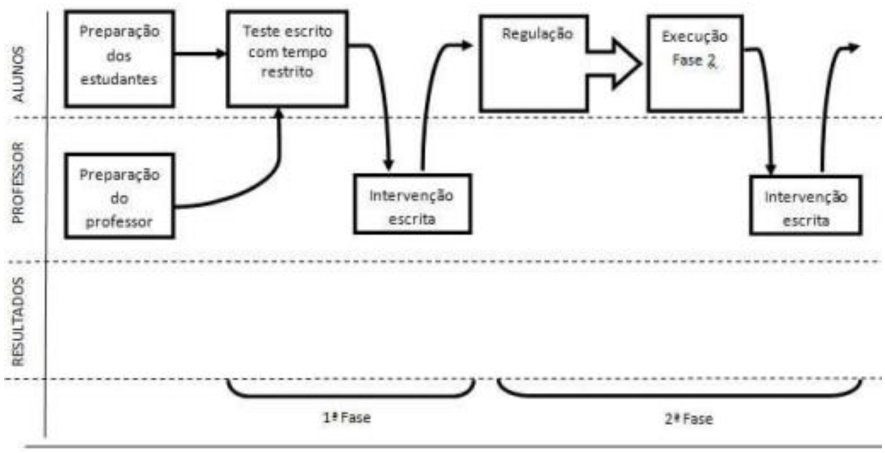
Ao tentar encontrar um equilíbrio entre o conceito ideal de avaliação e sua aplicação prática, Trevisan (2013) destacou que, a cada nova experiência com a prova em fases, surgem oportunidades de aprendizado. Ele concluiu que não existe um método de avaliação universal ou perfeito, mas que cada experiência contribui para melhorar tanto o método quanto as práticas pedagógicas.

Mendes (2014) também se baseou nos princípios da prova em duas fases proposta por De Lange (1987). Semelhante a Trevisan (2013), Mendes utilizou a prova em fases com a expectativa de "aperfeiçoar sua natureza didática reconhecida no devir entre as fases e torná-la um meio que favorece a regulação da aprendizagem a partir da análise da produção escrita" (p. 46).

Mendes (2014) explicou que, na primeira fase, o estudante conhece a prova, observa as tarefas e já pode começar a resolvê-las, produzindo os primeiros registros escritos. Com base nessa análise inicial, o professor realiza intervenções escritas — que não são correções, mas sim sugestões e questionamentos, sem indicar se as respostas estão certas ou erradas. Essas intervenções têm o objetivo de ajudar o estudante a interpretar e decidir qual caminho seguir para resolver as tarefas da prova. É importante destacar que, por meio dessa análise, "o professor pode indicar livros, sites ou sugerir atendimentos individuais, esperando que esse instrumento favoreça a aprendizagem. Assim, amplia-se a função do instrumento, tornando-se também uma ferramenta de ensino e aprendizagem" (Mendes, 2014, p. 47).

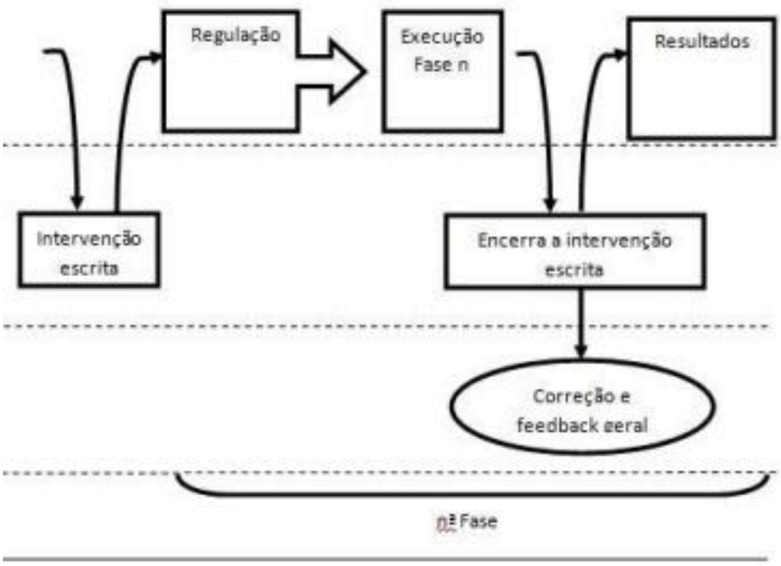
A segunda fase tem início quando o professor devolve a prova aos estudantes, para que observem e interpretem os questionamentos e, em seguida, respondam a eles, além de resolver novas tarefas da prova. Essa fase se encerra após o professor analisar as novas produções e realizar novas intervenções. Posteriormente, o professor devolve a prova para que os estudantes respondam novamente, iniciando a terceira fase. Esse ciclo se repete até que todas as fases sejam concluídas (Mendes, 2014). Com esse dinamismo, Mendes propôs um esquema para ilustrar a abordagem (figuras 4 e 5).

Figura 4 – Esquema para a prova em fases (parte 1)



Fonte: Mendes (2014, p. 48)

Figura 5 – Esquema da prova em fases (parte 2)



Fonte: Mendes (2014, p. 48)

No contexto do ensino, na prova em fases, o professor guiava o estudante a "construir ou a fazer uso de seus conhecimentos relativos aos conteúdos necessários para resolver as tarefas da prova por meio das intervenções escritas" (Mendes, 2014, p. 56). No que dizia respeito à aprendizagem, "o estudante construía ou fazia uso de seus conhecimentos a partir do lidar com as tarefas, das intervenções do professor, das apreciações de sua produção escrita ao longo das fases e regulava seu próprio percurso de aprendizagem" (p. 56). Com relação à avaliação, "as fases favoreciam uma avaliação integrada ao processo de ensino e de aprendizagem" (p. 56). Ainda em relação à avaliação, a autora destacou que "a nota final surgia a partir da correção das escolhas das estratégias ao longo da prova, dos procedimentos escolhidos para efetivação das estratégias, das respostas dadas aos problemas, assim como das intervenções escritas” (p. 56).

Inicialmente, a prova em fases proposta por Mendes (2014) era composta por sete fases, seguindo um cronograma predeterminado. No entanto, ao apresentar este cronograma para a turma, os estudantes demonstraram a intenção de ampliar o número de aulas para resolver a prova, modificando-a de sete para dez fases.

A escolha pelas produções escritas que analisou na pesquisa foi tomando forma no decorrer das dez fases. Durante o processo, a pesquisadora analisava as produções escritas e desenvolvia intervenções conforme a necessidade individual de cada estudante, gerando, por consequência, novas interpretações, que, por sua vez, eram discutidas com mais profundidade em sua pesquisa. Mendes (2014) afirmou que as primeiras impressões ao utilizar a prova em fases foram: os estudantes revisavam suas produções para orientar as novas produções; as intervenções realizadas estavam a serviço da aprendizagem do estudante; a qualidade das intervenções interferia na qualidade da regulação da aprendizagem; os estudantes realizavam buscas externas à produção escrita para guiar sua nova produção.

Com base na análise das produções escritas durante as fases da prova, a autora realizou uma seleção para descrição e análise dos dados obtidos, escolhendo uma produção de cada uma das vinte e cinco tarefas. A seleção foi feita por conveniência, buscando alinhar a análise com os objetivos da pesquisa. Com essa análise, Mendes (2014) buscou evidenciar a prova em fases como um recurso para o ensino e aprendizagem e características de “boas tarefas” para uma prova em fases.

Segundo Mendes (2014), a prova em fases mostrou-se um recurso adequado para contemplar o propósito de assistir os estudantes, pois cada fase permitia que a pesquisadora conhecesse o perfil de cada estudante e, com isso, elaborasse intervenções mais adequadas a este perfil. Além disso, o instrumento permitiu que a matemática fosse abordada como uma atividade humana, ao habituar os estudantes com as diferentes situações matemáticas e por guiar o estudante na construção da formalização matemática.

As intervenções escritas geradas a partir das produções dos estudantes na prova em fases favoreceram o desenvolvimento da regulação da aprendizagem com relação à: identificação, reflexão e retificação de erros; busca por compreender o enunciado; avaliação de sua produção; elaboração de hipóteses; orientação com base em produções anteriores; revisão do processo de resolução.

Diante da análise, Mendes (2014) concluiu que as potencialidades da prova em fases como um recurso de ensino mostraram-se diretamente relacionadas à qualidade das intervenções realizadas, pois era por meio delas que o professor guiava o estudante em sua aprendizagem, fazendo com que ele desempenhasse um papel de protagonista no processo. A prova em fases, aliada à análise da produção escrita, mostrou ser um meio de romper com a ideia de um modelo tradicional classificatório, possibilitando à professora/pesquisadora rever sua ação e suas escolhas didáticas.

Mendes (2014) ainda destacou que uma das limitações do uso da prova em fases em sala de aula estava atrelada à sobrecarga do professor, pois a maior parte das atividades estava centralizada nele, uma vez que as intervenções eram individuais, tornando cada prova personalizada. Uma forma de diminuir a sobrecarga seria escolher um número reduzido de tarefas e buscar, a cada fase, formar grupos de estudantes com intervenções comuns.

Nas palavras de Mendes (2014, p. 206), “a experiência de fazer esse estudo mostrou que era possível o professor, por meio de intervenções escritas, guiar o estudante para o entendimento do que se desejava na disciplina em tela”. Como possibilidades de novas pesquisas na área de Cálculo Diferencial e Integral, a autora destacou a utilização de tarefas em ambientes que oferecessem aos estudantes oportunidades de matematizar, a fim de “re-inventar” a matemática, cujo intuito seria desenvolver competências de conexão e reflexão, além de explorar a intuição e a capacidade de organizar matematicamente situações possíveis de realizar, para que, guiados pelo professor, construíssem conceitos formais acerca do Cálculo Diferencial e Integral.

INTERVENÇÕES A PARTIR DAS PRODUÇÕES ESCRITAS

Os dados produzidos consistiram em 37 provas escritas, as quais foram escaneadas e numeradas por páginas, conforme descrito anteriormente, resultando em 517 páginas.

Iniciamos a análise do material de forma abrangente, verificando se os estudantes responderam a todas as questões ou deixaram algumas em branco. Esse processo incluiu uma leitura flutuante, permitindo uma visão geral sobre o conteúdo e suas características. Esse olhar inicial possibilitou direcionarmos a leitura horizontal.

Após conhecer o material em sua totalidade, prosseguimos com a análise utilizando a leitura horizontal para examinar as produções escritas dos estudantes por tarefa, ou seja, analisamos a primeira tarefa em todas as provas, depois a segunda tarefa, e assim sucessivamente. Com isso, identificamos maneiras de abordagem comuns a mais de uma produção. Essa leitura gerou a primeira intervenção, composta por 14 tarefas, que foram apresentadas aos estudantes na aula seguinte por meio do aplicativo Kahoot.

Posteriormente, realizamos uma leitura vertical, analisando cada prova individualmente. Primeiramente, excluímos aquelas questões ou resoluções em que a tarefa estava resolvida corretamente e apresentava uma explicação clara dos passos e das escolhas feitas até chegar ao resultado, não necessitando de uma segunda fase.

Em seguida, elencamos as tarefas que continham produções de naturezas distintas, as quais julgamos que uma intervenção adequada poderia incentivar o estudante a dar continuidade à resolução da questão e a demonstrar mais conhecimentos.

Nas próximas subseções, apresentamos a discussão com base na análise das produções escritas dos estudantes, buscando esclarecer como as intervenções foram geradas a partir delas.

Primeira intervenção – elaboração de tarefas

Após a aplicação da primeira fase da prova, realizamos a leitura horizontal das resoluções dos estudantes a fim de identificar maneiras comuns e peculiares de resolução. Essa análise durou uma semana e exigiu grande concentração de nossa parte.

Ao realizarmos a leitura de todas as resoluções, por tarefa, identificamos 14 tipos de erros comuns a mais de uma produção. Consideramos que essa foi a nossa leitura horizontal das produções. Esses tipos de dificuldades dos estudantes em concluir a tarefa geraram 14 novas tarefas, as quais foram apresentadas aos estudantes na aula seguinte, por meio do aplicativo Kahoot, e estão presentes no arquivo direcionado pelo QR code (figura 6).

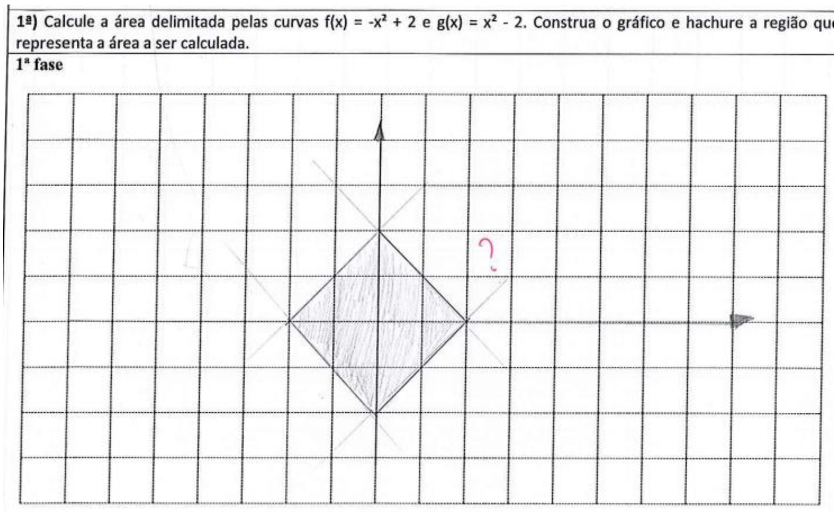
Figura 6 – QRcode tarefas

Fonte: Acervo da pesquisa

A leitura horizontal possibilitou identificar dificuldades comuns entre os estudantes e intervir por meio de tarefas que orientaram o estudo. Para exemplificar, apresentamos abaixo elementos da leitura horizontal que levaram à elaboração das novas tarefas.

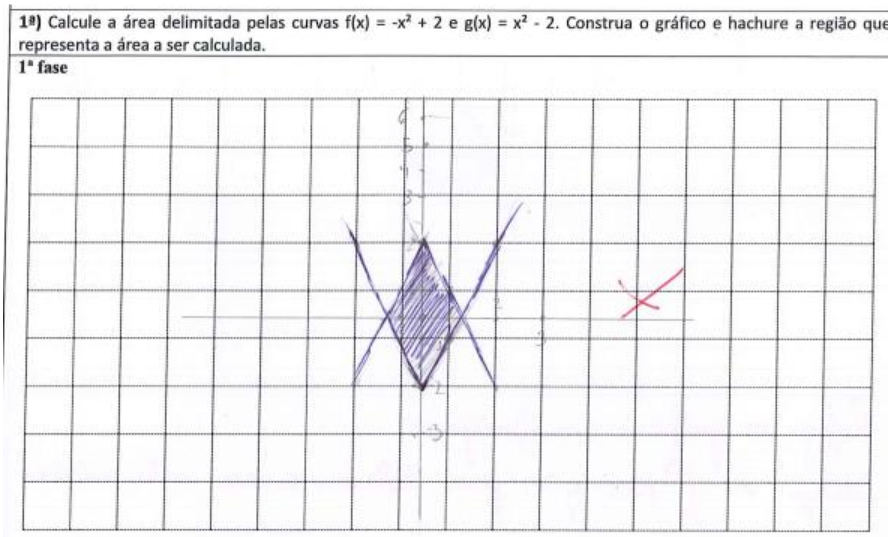
A primeira tarefa da prova exigia que os estudantes calculassem a área delimitada entre duas curvas, além de construírem o gráfico das funções para verificar qual área era formada pelas curvas. Na leitura flutuante, constatamos que diversos estudantes apresentaram dificuldade em construir os gráficos das funções, ou seja, não realizaram corretamente a conversão da função da forma algébrica para a forma gráfica, como vemos nas figuras abaixo.

Figura 7 – Produção P15



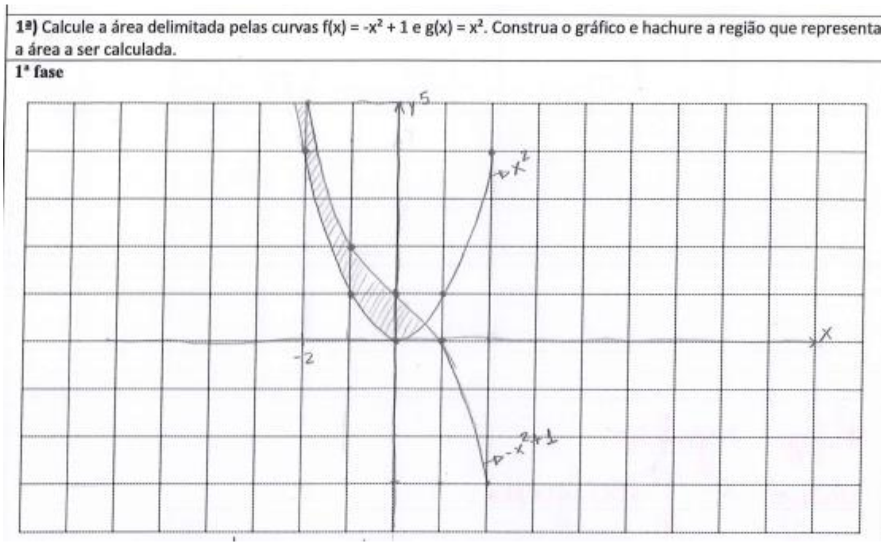
Fonte: Acervo da pesquisa

Figura 8 – Produção P297



Fonte: Acervo da pesquisa

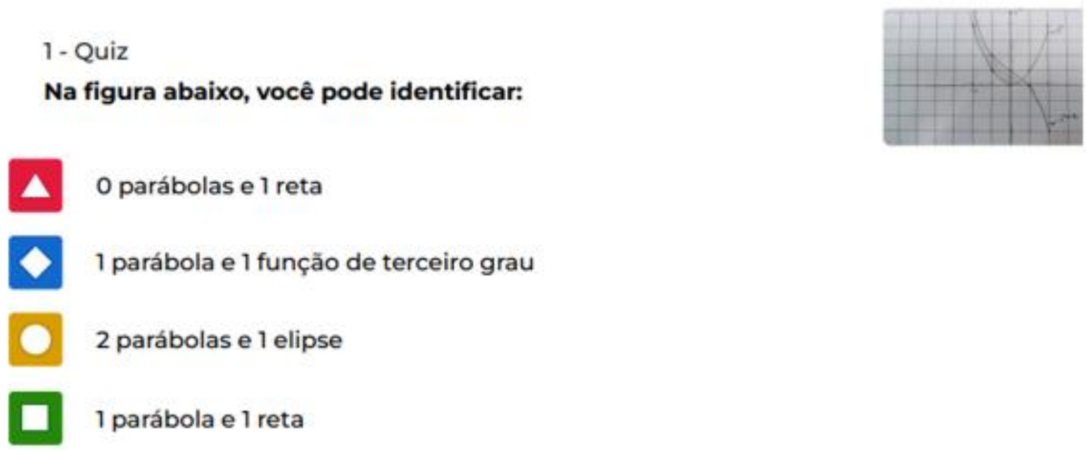
Figura 9 – Produção P270



Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 7, ao representar graficamente duas funções do segundo grau, o estudante obtém uma área delimitada que sugere ser um quadrado. Na figura 8, ao construir o gráfico das funções do segundo grau, o estudante apresenta gráficos semelhantes aos da função modular. Já na figura 9, o estudante representa corretamente a função $f(x) = x^2$, mas ao representar $f(x) = -x^2 + 1$, obtém um gráfico semelhante ao de uma função de terceiro grau. Nesse sentido, propomos a seguinte tarefa.

Figura 10 – Tarefa 1 *kahoot*

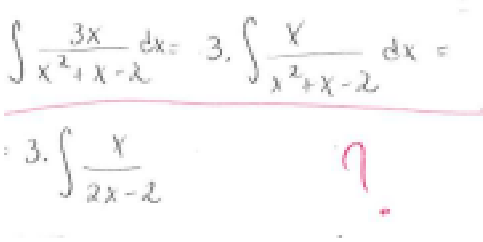


Fonte: Acervo da pesquisa

Esta tarefa teve o objetivo de fazer com que os estudantes refletissem e relacionassem gráficos de funções. Para tanto, utilizamos o próprio exemplo destacado na figura 9.

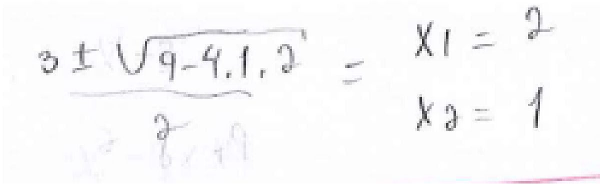
As tarefas da prova que solicitavam a integração de uma função racional nos mostraram, em diversas produções, a dificuldade em fatorar o polinômio e decompor uma fração racional em frações parciais. Abaixo, destacamos alguns exemplos.

Figura 11 – Produção P5



Fonte: Acervo da pesquisa

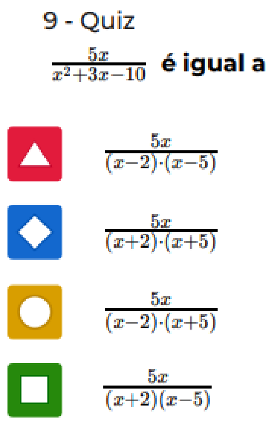
Figura 12 – Produção P45



Fonte: Acervo da pesquisa

Nas figuras 11 e 12, notamos que os estudantes apresentam dificuldade na fatoração de polinômios. Um deles chega a calcular as raízes do polinômio, mas não as escreve na forma fatorada. Dessa forma, sem a fatoração, não é possível prosseguir com a resolução e utilizar as frações parciais. Assim, propomos a seguinte tarefa.

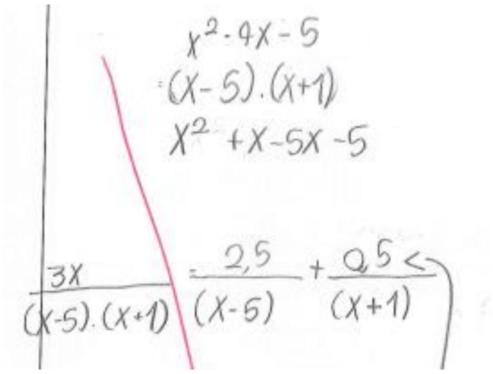
Figura 13 – Tarefa 9 *kahoot*



Fonte: Acervo da pesquisa

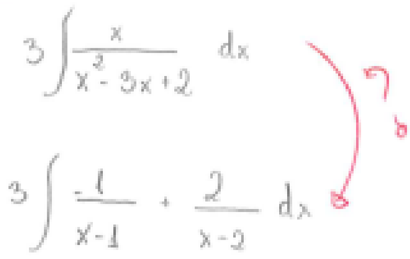
A intenção ao propor essa tarefa foi que os estudantes fatorassem o polinômio do denominador da fração, além de reforçar a igualdade entre a fração inicial e a obtida após a fatoração. Não foram todos os estudantes que não realizaram a fatoração ou a realizaram de forma equivocada; alguns tiveram dificuldade no passo seguinte, que é a utilização das frações parciais, como podemos notar abaixo.

Figura 14 – Produção P145



Fonte: Acervo da pesquisa

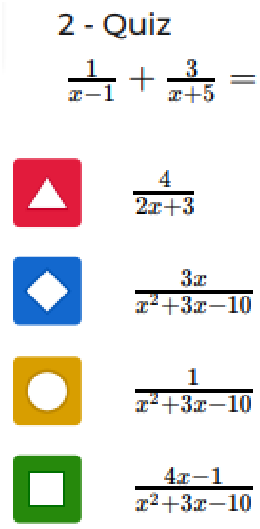
Figura 15 – produção P86



Fonte: Acervo da pesquisa

As figuras 14 e 15 mostram que os estudantes fatoraram o polinômio, mas não conseguiram realizar corretamente a estratégia das frações parciais. Dessa forma, propomos a tarefa abaixo.

Figura 16 – Tarefa 2 *kahoot*



Fonte: Acervo da pesquisa

Esta tarefa solicita que os estudantes realizem a adição entre as duas frações, ou seja, já está na forma de frações parciais. Ao realizar a adição, o resultado é uma fração que representa a função racional a ser integrada na tarefa proposta na prova.

Vale ressaltar que as tarefas propostas no Kahoot não foram apenas lançadas aos estudantes para que resolvessem. A aplicação dessas tarefas foi um momento de estudo para que os estudantes pudessem esclarecer dúvidas ou até mesmo tomar consciência dos erros que estavam realizando em suas resoluções.

Como mencionado anteriormente, foram propostas 14 tarefas, mas não discutiremos a formação de todas. Trouxemos esses exemplos para mostrar a forma como conduzimos esta atividade na disciplina, pois todas as tarefas foram pensadas com base nas produções escritas dos estudantes. A seguir, realizamos uma análise mais detalhada (leitura vertical) das produções escritas, na qual exploramos as individualidades e a proposição de comentários para que os estudantes realizassem a segunda fase da prova em fases.

Segunda intervenção – comentários

Considerando a individualidade das produções escritas dos estudantes ao resolverem as tarefas propostas na prova, realizamos uma leitura vertical. Nesta análise, buscamos entender a abordagem de cada estudante na resolução das tarefas. Assim, os erros encontrados foram vistos como oportunidades de aprendizagem, permitindo a elaboração de comentários conforme as necessidades de cada estudante.

A seguir, destacamos a leitura vertical em quatro tipos de integrais, cujas estratégias exigidas são: decompor uma função racional em frações parciais; substituir relações trigonométricas por outras; e substituir expressões algébricas dentro de uma raiz por funções trigonométricas.

Vale ressaltar que foram aplicadas três provas com tarefas distintas, mas com as mesmas estratégias de resolução. Por isso, algumas tarefas analisadas aqui se diferem apenas nos polinômios.

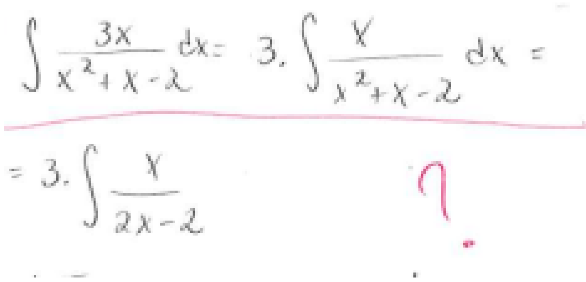
Primeira tarefa

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}dx,\ \int \frac{3x}{x^2-3x+2}dx \text{ e } \int \frac{3x}{x^2-4x-5}dx.$$

Vamos utilizar a primeira tarefa para exemplificar as estratégias e procedimentos para resolvê-la. A primeira estratégia para resolver a tarefa é a fatoração, e, posteriormente, a utilização das frações parciais. Para realizar a integral utilizando a técnica das frações parciais, o estudante deveria inicialmente fatorar o polinômio $x^2 + x - 2$, a fim de obter $x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$. Desta forma, podemos escrever $\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{3x}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} \cdot \frac{B}{(x+2)}$, o próximo passo é obter os valores de A e B utilizando um sistema de equações.

Grande parte dos comentários elaborados nessas tarefas partiu da fatoração até a separação da função racional em frações parciais, considerando que o estudante necessita desses procedimentos para concluir a resolução, e grande parte dos estudantes apresentou dificuldades ou maneiras de lidar diferentes da correta.

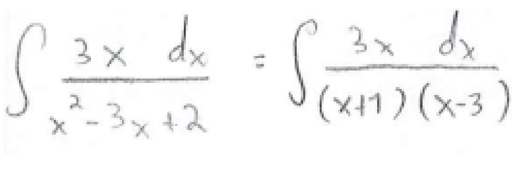
Figura 17 – Produção P5



Fonte: Acervo da pesquisa

Podemos notar que, inicialmente, o estudante retira o coeficiente 3 do monômio $3x$, utilizando-o como constante para multiplicar a integral. Além disso, ao comparar $x^2 + x - 2$ e $2x - 2$, podemos inferir que, para o estudante, $x^2 + x = 2x$. Com isso, o primeiro comentário questiona o estudante se $\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{x}{2x+1}$, pois é essa conclusão que podemos tirar de sua produção. Além disso, em outra intervenção, solicitamos que o estudante fatorasse o polinômio $x^2 + x - 2$, considerando que este seria o primeiro passo para que o estudante pudesse realizar a integração. Esse comentário possibilitou que o estudante refletisse acerca de uma igualdade que não é válida, além de indicar o caminho a ser percorrido inicialmente para resolver a tarefa. Nesta produção escrita, destacamos que o estudante respondeu ao primeiro comentário afirmando que a igualdade não é válida e, para verificar, substituiu a incógnita por um número inteiro, constatando resultados diferentes nos membros da equação; portanto, a igualdade não é válida. Além disso, o comentário que solicita que seja realizada a fatoração do polinômio instigou o estudante a continuar a resolução utilizando as frações parciais, possibilitando a conclusão da tarefa.

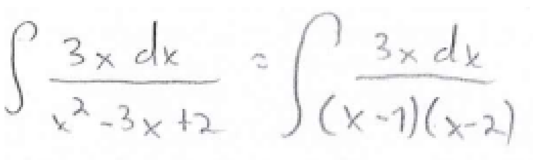
Figura 18 – Produção P91 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Nesta produção (figura 18), podemos notar que o estudante fatorou o polinômio $x^2 - 3x + 2$, resultando em $(x + 1) \cdot (x - 3)$, prosseguindo a resolução até o fim com o polinômio fatorado desta maneira. Portanto, podemos inferir que o estudante utilizou as estratégias corretas para resolver a tarefa; no entanto, realizou a fatoração incorreta do polinômio, implicando um resultado diferente do esperado para a tarefa. Nesse sentido, propomos que o estudante verificasse o produto da multiplicação $(x+1)\cdot(x-3)$ e fatorasse novamente o polinômio. Com isso, teve o seguinte resultado.

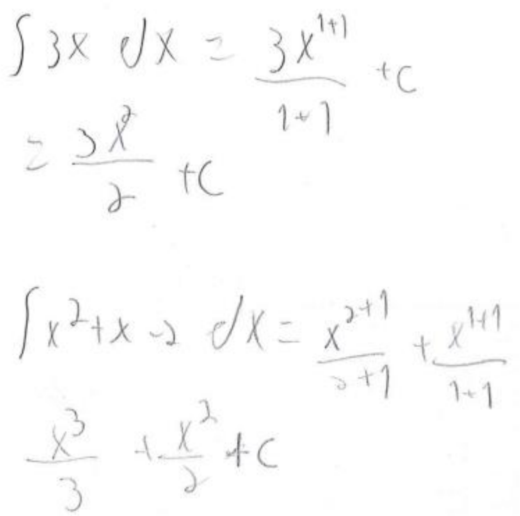
Figura 19 – Produção P91 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Dessa forma, o estudante verificou que a fatoração realizada inicialmente estava errada, refazendo-a e obtendo o resultado correto, a fim de retificar a resolução da tarefa.

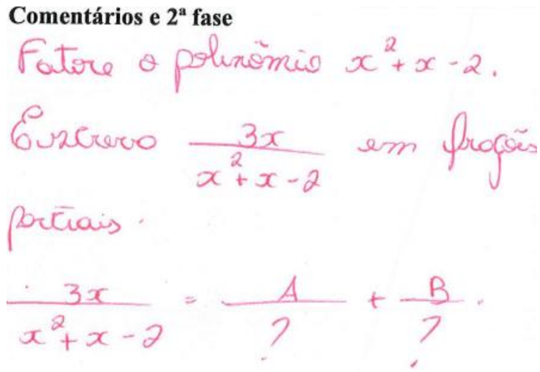
Figura 20 – Produção P132



Fonte: Acervo da pesquisa

Nesta produção (figura 20), ao realizar $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$, podemos inferir que o estudante considerou possível realizar a integração separada do numerador e denominador da função racional, ou seja, calculou $\int 3x\,dx$ e $\int x^2+x-2\ dx$. Nosso comentário sugeriu que o estudante realizasse a fatoração do polinômio e utilizasse frações parciais (figura 21).

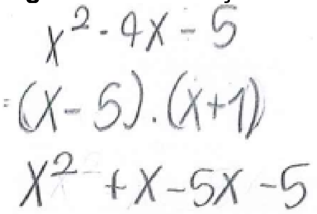
Figura 21 – Comentário P132



Fonte: Acervo da pesquisa

No entanto, neste caso, o comentário não surtiu efeito, pois o estudante não apresentou registros na segunda fase. Talvez, uma outra maneira de abordar essa situação seria partir da concepção de integral que o estudante apresentou, ou seja, primeiramente mostrar que não é possível separar a integral da função racional em duas partes, considerando numerador e denominador de forma independente, pois a função é composta por ambos juntos e não separadamente.

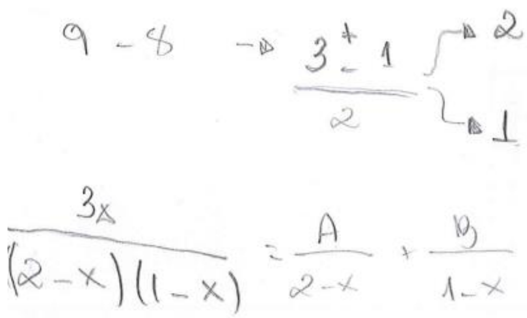
Figura 22 – Produção P145



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso (figura 22), o estudante realizou a fatoração adequada, mostrando que conhece a estratégia inicial para resolver a tarefa. No entanto, não prosseguiu com a resolução. Com isso, nosso comentário sugere que o estudante utilize as frações parciais, ou seja, escrever $\frac{3x}{x^2-4x-5}$ como frações parciais, utilizando a fatoração que calculou anteriormente, a fim de obter $\frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{x+1}$. Diante deste comentário, o estudante utilizou a técnica e concluiu a resolução da tarefa.

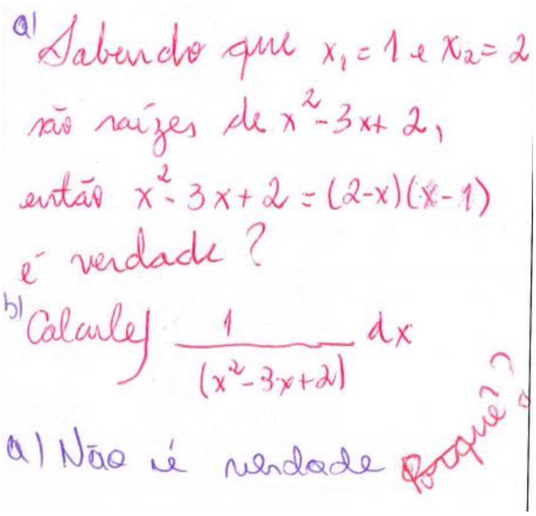
Figura 23 – Produção P173



Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 23, vemos um registro em que o estudante calcula das raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, obtendo, de fato, valores que satisfazem a igualdade. No entanto, ao escrever o polinômio de grau 2 na forma fatorada, ou seja, $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, podemos notar que o estudante escreveu da forma $(x_1 - x) \cdot (x_2 - x)$. Dessa forma, ao utilizar a distributividade na multiplicação $(2 - x) \cdot (1 - x)$, não obtemos $x^2 - 3x + 2$. Nesse sentido, nosso comentário sugeriu que verificasse a fatoração (figura 24).

Figura 24 – Comentário P173



Fonte: Acervo da pesquisa

Podemos notar (em vermelho) que o comentário questiona a veracidade da igualdade $x^2 - 3x + 2 = (2 - x) \cdot (x - 1)$. Podemos observar que há um pequeno erro no comentário ao utilizar $(x - 1)$ em vez de $(1 - x)$, mas a intenção foi de que o estudante verificasse a igualdade, considerando sua fatoração. Diante disso, o estudante conclui que a igualdade não é verdadeira, mas não apresenta uma nova solução. Vale ressaltar que não houve comentários relacionados à utilização da técnica de frações parciais, pois o estudante demonstrou domínio da técnica, mesmo com a fatoração realizada de forma incorreta.

Algumas conclusões sobre esta parte da análise:

1) **Importância da fatoração e frações parciais:** A maioria dos estudantes encontrou dificuldades na resolução das integrais ao não aplicarem corretamente a fatoração e as frações parciais. Isso evidencia a importância desses procedimentos como passos iniciais para integrar funções racionais. A fatoração é essencial para decompor expressões complexas em termos mais simples, facilitando a aplicação das frações parciais e tornando visíveis as possíveis técnicas de integração que possam resolver a tarefa.
2) **Necessidade de intervenção:** Os comentários produzidos foram importantes direcionadores para os estudantes na resolução das tarefas. Comentários que solicitaram a fatoração correta dos polinômios e a aplicação das frações parciais demonstraram-se importantes na orientação dos estudantes. Isso ressalta a importância do feedback individualizado e da orientação dos professores para ajudar os estudantes a superarem dificuldades e compreenderem melhor os conceitos.
3) **Variações individuais de compreensão**: Alguns estudantes demonstraram compreender parcialmente os conceitos, como evidenciado pela correta fatoração dos polinômios, mas não desenvolveram etapas subsequentes. Isso ressalta a necessidade de uma abordagem flexível para atender às diferentes necessidades dos estudantes. Cada um pode ter uma compreensão única dos conceitos, e os professores precisam estar preparados para fornecer suporte individualizado conforme necessário.
4) **Domínio da técnica de frações parciais**: Alguns estudantes mostraram domínio na aplicação das frações parciais, mesmo quando a fatoração inicial estava incorreta. Isso sugere que, uma vez compreendida a técnica, os estudantes podem superar dificuldades iniciais na resolução das integrais. Esse domínio demonstra a

importância de proporcionar aos estudantes uma compreensão sólida dos métodos de integração, permitindo-lhes aplicar essas técnicas a fim de resolver a tarefa.

5) **Verificação de resultados**: Os comentários que solicitaram aos estudantes verificarem seus resultados foram importantes para corrigir equívocos. Isso ressalta a importância da validação dos passos intermediários na resolução de tarefas matemáticas. Verificar os resultados permite aos estudantes identificarem e retificarem erros, regulando sua aprendizagem, desenvolvendo habilidades de autoavaliação e garantindo a precisão de suas soluções.

Segunda tarefa

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^3(x) \cdot \sec(x)\, dx.$$

Este tipo de tarefa exige que o estudante utilize as técnicas de integração trigonométrica, sendo necessário fazer o uso das identidades trigonométricas para resolver esse tipo de exercício. Podemos verificar na figura abaixo a técnica utilizada para resolver este tipo de integral.

Figura 25 – Técnica de integração

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x\, dx = \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

$$\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$$

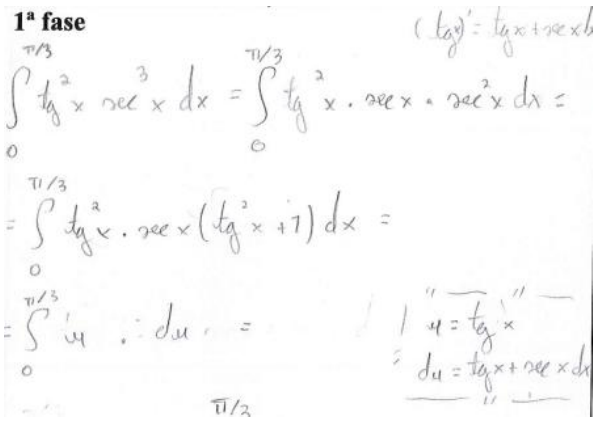
A seguir, substitua $u = \sec x$.

Fonte: Stewart (2013, p. 428)

Logo depois de explanar esta estratégia, Stewart (2013) afirma que, para outros casos, as regras não são tão simples, sendo necessário usar identidades trigonométricas e integração por partes, como no caso de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx$.

Destacamos abaixo alguns exemplos de produções e comentários com base nas integrais trigonométricas.

Figura 26 – Produção P93

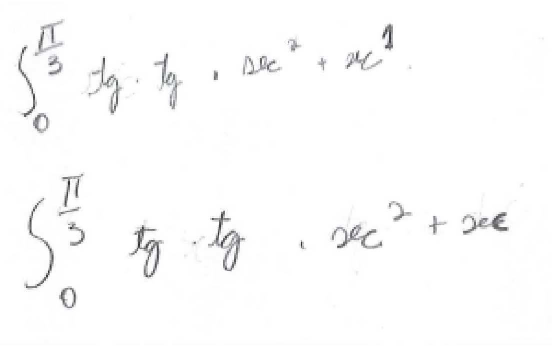


Fonte: Acervo da pesquisa

Nos registros da figura 26, podemos notar que o estudante utiliza a propriedade de multiplicação de potências de mesma base ao reescrever $\sec^3(x) = \sec(x) \cdot \sec^2(x)$, para então utilizar a identidade trigonométrica $\sec^2(x) = tg^2(x) + 1$. Além disso, podemos observar que o estudante tentou utilizar a regra da substituição ao registrar $u = tg(x)$ e $du = tg(x) + \sec(x)\, dx$. No entanto, a derivada da tangente está incorreta, uma vez que $\frac{d}{dx} tg(x) = \sec^2(x)$. Esta tarefa impede, inicialmente, que o estudante utilize diretamente a técnica para calcular integrais trigonométricas. Essa situação recai nos casos mencionados por Stewart (2013), que afirma que a regra não é tão simples, sendo necessário utilizar outras identidades antes de aplicar a regra vista na figura 14. Portanto, sugerimos, primeiramente, que o estudante verifique a derivada da tangente, para que observe que seu resultado está incorreto. Posteriormente, sugerimos que o estudante resolva $\int tg^3(x) \cdot \sec^2(x)\, dx$, visto que este caso se enquadra nos itens (a) e (b) da técnica de integração de integrais do tipo $\int tg^m(x) \cdot \sec^n(x)\, dx$.

Embora a tentativa tenha sido de fazer o estudante avaliar e perceber as incoerências do caminho escolhido, pautado na derivada da tangente, sugerimos uma tarefa mais simples. No entanto, o estudante apresentou a derivada da tangente como $tg(x) + sec^3(x)$, inviabilizando a utilização da técnica e a conclusão da tarefa proposta.

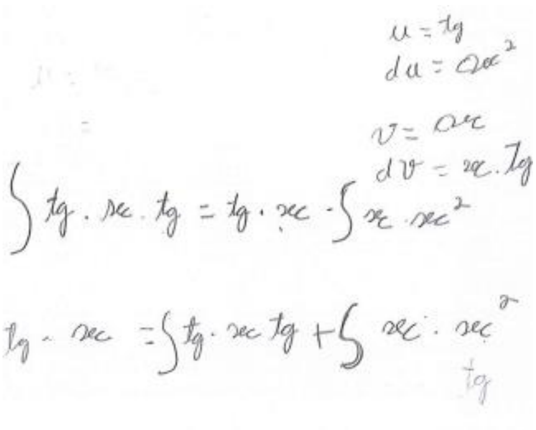
Figura 27 – Produção P106 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste outro exemplo, ao resolver $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx$, interpretamos que o estudante considerou que $tg^2(x) = tg(x) \cdot tg(x)$ e $sex^3(x) = \sec(x) \cdot sec(x) + sec(x)$, ou seja, utilizou a potenciação da forma adequada em $tg^2(x)$, mas de forma incorreta em $\sec^3 x$. Além disso, a produção escrita figura 28 apresenta indícios de que o estudante tentou resolver a integral utilizando a regra da substituição, pois apresenta as novas variáveis, mas não as utiliza na integração.

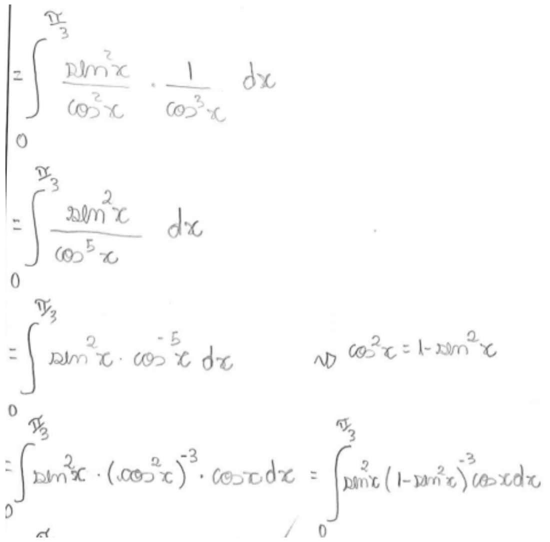
Figura 28 – Produção P106 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse sentido, a primeira sugestão deveria ser que verificasse se $sex^3(x) = \sec(x) \cdot \sec(x) + \sec(x)$, para conseguir prosseguir com a resolução. No entanto, nossos comentários sugeriram que calculasse $\int tg^3(x) \cdot \sec^2(x)\, dx$ utilizando $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$, pois, como visto em Stewart (2013), este caso se enquadra no item (b) das estratégias para calcular este tipo de integral. Destacamos que, após os comentários, mesmo o estudante não apresentando a resposta correta, utilizou a técnica adequada para resolver a integral, por meio da identidade trigonométrica sugerida e da regra de substituição.

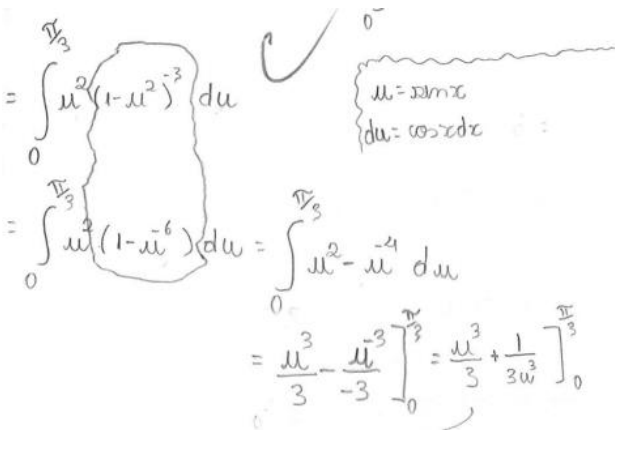
Figura 29 – Produção P63 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, podemos observar que ao resolver $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx$, o estudante utiliza $tg^2(x) = \frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}$ e $\sec^3(x) = \frac{1}{\cos^3(x)}$. A partir disso, realiza manipulações até chegar na última integral da figura 29. Neste momento, o estudante utiliza a regra da substituição.

Figura 30 – Produção P63 (2)

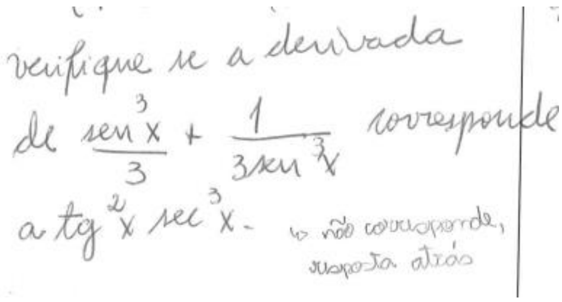


Fonte: Acervo da pesquisa

Utiliza $u = sen(x)$ e $du = \cos{(x)}$, resultando em $\int_0^{\frac{\pi}{3}} u^2(1-u^2)^{-3}du$. No entanto, ao obter $(1-u^2)^{-3} = (1-u^{-6})$ inferimos que, para o estudante, é válido $(a-b)^n = (a^n - b^n)$.

Além disso, podemos ver que o estudante conclui que $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{u^3}{3} + \frac{1}{3u^3}$. Realizando a mudança de variável, isso seria o equivalente a $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^3(x)}{3} + \frac{1}{3sen^3(x)} dx$. Teoricamente, ao derivar $\frac{sen^3(x)}{3} + \frac{1}{3sen^3(x)}$, o resultado deveria ser $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)\ dx$. No entanto, como sabemos que o estudante cometeu um erro ao trabalhar com a mudança de variável, a derivada do resultado não irá retornar à expressão inicial.

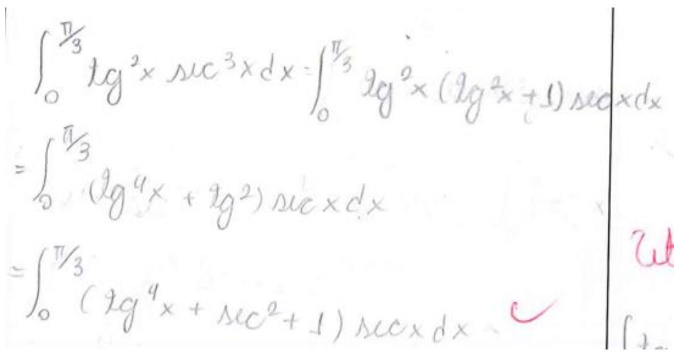
Figura 31 – Comentário P63



Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 31, podemos observar o comentário que solicita ao estudante calcular a derivada de $\frac{sen^3(x)}{3} + \frac{1}{3sen^3(x)}$ com o intuito de verificar que seu resultado não satisfaz a teoria. É possível notar que o estudante faz uma flecha nesse comentário, respondendo que, de fato, o resultado não corresponde. Por meio da derivação, ele concluiu que o resultado não cumpre o esperado. Caso o estudante quisesse, poderia corrigir sua resolução, mas também sugerimos resolver $\int tg^3(x) \cdot \sec^2(x)\ dx$.

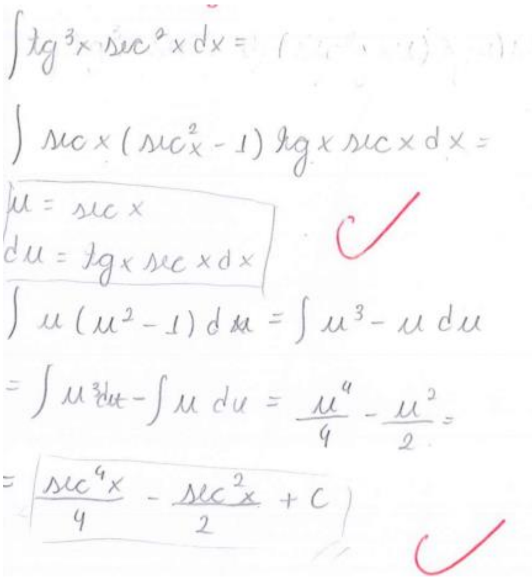
Figura 32 – Produção P142



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, podemos notar que o estudante utiliza a identidade $\sec^2(x) = tg^2(x) + 1$. Utilizando a distributividade, obtém $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(tg^4(x) + tg^2(x)) \cdot \sec(x)dx$. Além disso, é possível observar que, do segundo para o terceiro passo, o estudante substitui $tg^2(x)$ por $\sec^2(x) + 1$, quando deveria ter utilizado $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$. Ao obter esta última integral, o estudante não continua desenvolvendo a resolução, pois acreditamos que não encontrou maneiras de utilizar a regra da substituição para calcular a integral. Considerando que ele não prosseguiu com a resolução e, possivelmente, teria mais dificuldades, sugerimos que resolvesse $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)\, dx$, além de considerar a identidade correta $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$. Abaixo podemos verificar a resolução após os comentários.

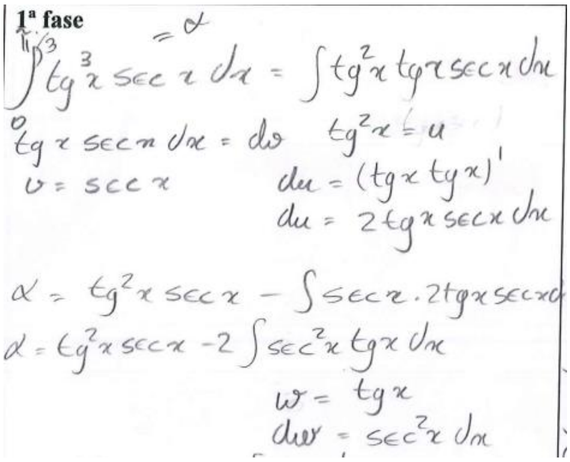
Figura 33 – Produção P142 (segunda fase)



Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 33, podemos notar que, após os comentários, o estudante utilizou a identidade trigonométrica de forma adequada e realizou a mudança de variável por meio da regra da substituição. Assim, ele conseguiu realizar a integração e retornar à variável inicial, concluindo a tarefa proposta.

Figura 34 – Produção P156


1ª fase

$= \alpha$

$\int_0^{\pi/3} tg^3 x \sec x \, dx = \int tg^2 x \, tg x \sec x \, dx$

$tg x \sec x \, dx = dv$ $\quad tg^2 x = u$

$v = \sec x$ $\quad du = (tg x \, tg x)'$

$du = 2 tg x \sec x \, dx$

$\alpha = tg^2 x \sec x - \int \sec x . 2 tg x \sec x d$

$\alpha = tg^2 x \sec x - 2 \int \sec^2 x \, tg x \, dx$

$w = tg x$

$dw = \sec^2 x \, dx$

Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, o estudante deveria resolver $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^3(x) \cdot \sec(x)\, dx$. Podemos observar que, inicialmente, o estudante reorganiza $tg^3(x) \cdot \sec(x)$ como $tg^2(x) \cdot tg(x) \cdot \sec(x)$. A estratégia adotada foi utilizar a regra de integração por partes para resolver a situação, ou seja, $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$ (STERWART, 2013). Nesse caso, o estudante definiu $u = tg^2(x)$ e $du = 2 \cdot tg(x) \cdot \sec\,(x)$, $dv = tg(x) \cdot \sec\,(x)$ e $v = \sec\,(x)$. Contudo, ao aplicar a regra do produto na derivação, o correto seria $du = 2 \cdot tg(x) \cdot \sec^2(x)$. Apesar disso, é possível verificar que as substituições realizadas satisfazem a integração por partes, conforme mostrado a seguir:

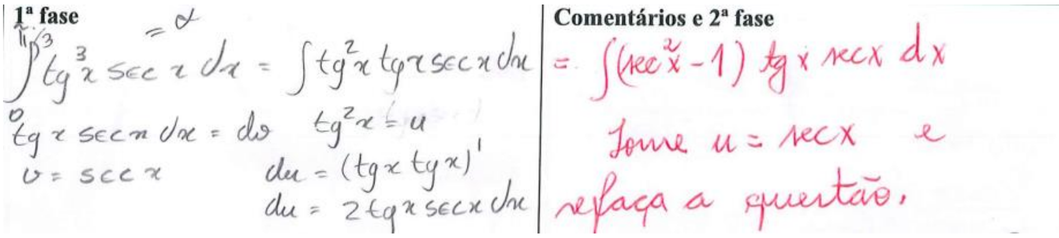
$$\int tg^2(x) \cdot tg(x) \cdot \sec(x)\, dx$$

$$= tg^2(x) \cdot \sec(x) - \int \sec(x) \cdot 2 \cdot tg(x) \cdot \sec^2(x) dx.$$

Até este momento, o primeiro comentário para a segunda fase deveria sugerir que o estudante verificasse se a derivada de $tg^2(x)$ realmente é $2 \cdot tg(x) \cdot sec\,(x)$. Com a derivada correta, o estudante poderia dar continuidade à resolução, explorando as técnicas de integração, como fez na terceira substituição ao utilizar $w = tg(x)$ e $dw = \sec^2(x)$. Desconsiderando o erro da derivação, essa substituição em $\int \sec^2(x) \cdot tg(x)\, dx$ resolveria a integral. No entanto, considerando a forma correta da derivada, o estudante precisaria utilizar outra substituição para finalizar a integração.

percalço que o estudante encontrou ocorreu na derivação de $tg^2(x)$. Este erro pode ter sido fruto de um pequeno descuido, já que, para realizar essa derivação, é necessário reconhecer que a derivada de $tg(x)$ é $sec^2(x)$. Observamos que o estudante demonstrou saber essa igualdade, uma vez que utilizou $w = t(x)$ e $dw = \sec^2(x)$. Embora nosso comentário pudesse ter sugerido a correção desse ponto específico, optamos por apresentar outro caminho ao estudante, talvez mais curto e simples para resolver o problema. Contudo, apenas o estudante poderia avaliar se, de fato, esse caminho era o mais adequado para ele, desde que fosse executado corretamente.

Figura 35 – Comentário produção P156



Fonte: Acervo da pesquisa

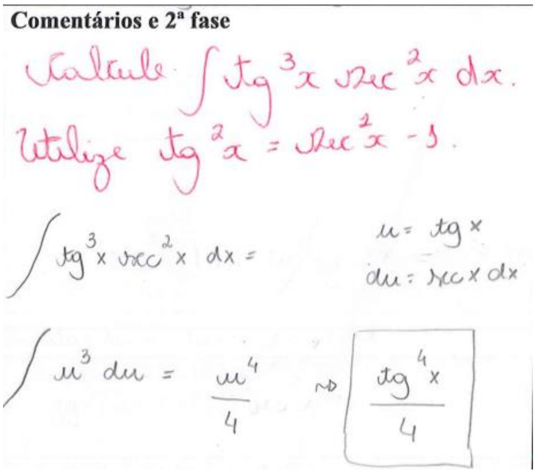
Na figura 35, podemos observar a sugestão de resolver $\int(sec^2(x) - 1) \cdot tg(x) \cdot \sec{(x)}\, dx$ pondo $u = \sec{(x)}$. O estudante seguiu o caminho sugerido, elaborou sua resolução com procedimentos matematicamente corretos e conseguiu resolver a integral. Inicialmente, seria mais apropriado sugerir que o estudante verificasse sua derivada e refizesse a resolução inicial. Posteriormente, poderíamos orientar a utilização do caminho destacado na segunda fase e, por fim, propor que verificasse se as respostas finais obtidas pelos dois métodos seriam equivalentes.

Figura 36 – Produção P182

Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo (figura 36), podemos observar que o estudante não apresentou estratégias ou procedimentos para resolver $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx$. Não é possível afirmar, de imediato, se isso ocorreu por falta de tempo ou por desconhecimento das técnicas de integração necessárias para resolver a tarefa. Assim, propusemos que o estudante tentasse resolver uma outra integral, conforme mostrado na figura 37.

Figura 37 – Comentário produção P182

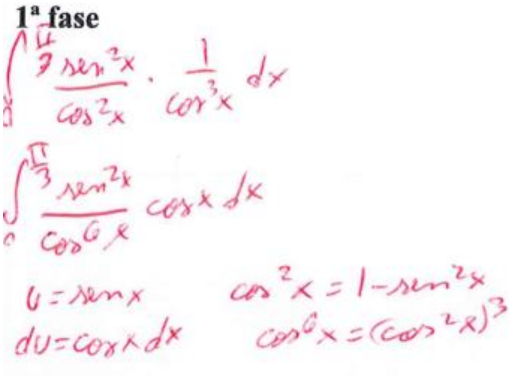


Fonte: Acervo da pesquisa

Sugerimos que calculasse $\int tg^3(x) \cdot \sec^3(x)dx$ utilizando a identidade $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$ como estratégia inicial. É possível observar que o estudante resolveu a integral utilizando outra abordagem, sem aplicar a identidade trigonométrica sugerida. Ele baseou-se na regra da substituição para realizar a mudança de variável, considerando $u = tg(x)$ e $du = \sec^2(x)$. Vale ressaltar que, embora o estudante tenha escrito $du = \sec(x)$, em algum momento, ele aplicou corretamente $du = \sec^2(x)$, na mudança de variável, conforme indicado em outro trecho da prova.

Esse caso evidencia que o estudante conhece estratégias para resolver integrais trigonométricas, ainda que elas não se apliquem a todas as situações. Além disso, ele optou por descartar o uso da identidade $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$, preferindo uma substituição direta. Existem várias estratégias e procedimentos para resolver esse tipo de tarefa; neste exemplo, o estudante foi capaz de escolher aquela que considerou mais adequada e, possivelmente, mais simples.

Figura 38 – Produção P210 (1)

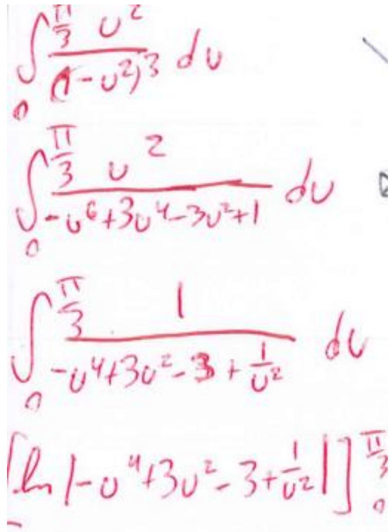


Fonte: Acervo da pesquisa

A figura 38 nos mostra outro exemplo de resolução de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2(x) \cdot \sec^3(x)dx$. Inicialmente, o estudante utiliza $tg^2(x) = \frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}$ e $\sec^3(x) = \frac{1}{\cos^3(x)}$. Com isso, o estudante realiza uma multiplicação de frações, resultando em $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^2(x)}{cos^6(x)} \cdot \cos(x)\, dx$. A intenção do estudante foi reescrever $tg^2(x) \cdot \sec^3(x) = \frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^3(x)} = \frac{sen^2(x)}{\cos^5(x)} = \frac{sen^2(x)}{cos^6(x)} \cdot \cos(x)$, no entanto, a última igualdade não é válida, pois o correto seria $\frac{sen^2(x)}{cos^6(x)} \cdot \cos^{-1}(x)$.

Acreditamos que o estudante pensou dessa forma para utilizar a substituição $u = sen(x)$ com $du = \cos(x)$, além de $\cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$. Considerando isso, o estudante realizou a tentativa de resolver a integral a partir dessa abordagem.

Figura 39 – Produção P210 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Para chegar em $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3} du$, o estudante utiliza:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^2(x)}{cos^6(x)} \cdot \cos{(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^2(x)}{\left(cos^2(x)\right)^3} \cdot \cos{(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen^2(x)}{(1-sen^2(x))^3} \cdot \cos{(x)}\, dx.$$

Posteriormente, o estudante substitui $u = sen(x)$ e $du = \cos{(x)}$, desenvolvendo a resolução. Da segunda para a terceira linha, o estudante utiliza $u^2 = \frac{1}{u^{-2}}$ para que o numerador seja 1 e utilize $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$, como podemos observar na quarta linha. Em seguida, ele aplica os limites de interação 0 e $\frac{\pi}{3}$ para calcular a integral definida.

Diante disso, poderíamos ter intervindo no início de sua resolução, sugerindo que o estudante verificasse se as propriedades de potência que utilizou estão corretas e considerasse que $\frac{sen^2(x)}{\cos^5(x)} = \frac{sen^2(x)}{cos^6(x)} \cdot \cos^{-1}(x)$. Porém, essa sugestão não foi feita. O estudante apresentou uma estratégia interessante para resolver a integral, mas os erros nos procedimentos impediram que ele chegasse à resposta correta. Esses erros poderiam ser solucionados por meio de comentários mais detalhados.

Algumas conclusões sobre esta parte da análise:

1) **Complexidade das identidades trigonométricas**: A resolução de integrais trigonométricas envolve o uso de identidades que podem ser complexas e exigir habilidades específicas dos estudantes. A dificuldade em manipular essas identidades foi evidenciada em várias produções, nas quais os estudantes cometeram erros na aplicação delas. A compreensão das identidades trigonométricas é fundamental para resolver integrais de funções trigonométricas, destacando a importância de um domínio sólido desses conceitos.
2) **Importância da verificação de resultados**: Os comentários realizados destacaram a importância de verificar os resultados obtidos pelos estudantes, especialmente no que diz respeito às derivadas e identidades trigonométricas. Essa verificação é imprescindível para corrigir erros e orientar os estudantes na resolução correta das integrais. A validação dos resultados permite aos estudantes identificarem e corrigir erros, garantindo a precisão de suas soluções e promovendo uma melhor compreensão dos conceitos.
3) **Necessidade de orientação específica**: A orientação específica nos comentários, sugerindo estratégias alternativas e correções nas abordagens errôneas dos estudantes, mostrou-se importante para direcioná-los na resolução das integrais trigonométricas. Isso ressalta a importância de uma intervenção significativa por parte dos professores durante o processo de aprendizado. O feedback personalizado e direcionado permite aos estudantes corrigirem seus erros e aprimorarem suas habilidades de resolução de problemas.
4) **Variedade de estratégias**: Os estudantes apresentaram uma variedade de estratégias para resolver as integrais trigonométricas, incluindo a aplicação de regras de substituição e integração por partes. Isso demonstra uma compreensão diversificada das técnicas de integração, embora nem sempre tenham sido aplicadas corretamente. A capacidade de utilizar diferentes abordagens mostra flexibilidade estratégica e uma compreensão ampla das ferramentas disponíveis para resolver problemas matemáticos.
5) **Orientação e regulação da aprendizagem**: A capacidade dos estudantes de ajustar suas abordagens de resolução com base nos

feedbacks recebidos sugere uma habilidade de reflexão sobre sua aprendizagem. Isso indica que, mesmo diante de desafios, os estudantes são capazes de revisar e melhorar suas estratégias de resolução. O processo de receber feedbacks e fazer ajustes demonstra um crescimento contínuo e um compromisso com o aprimoramento das habilidades matemáticas.

Terceira tarefa

$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4}}dx$, $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$ e $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx.$

Para resolver essa integral, a melhor alternativa é utilizar substituições trigonométricas. O primeiro passo é identificar a substituição adequada. Stewart (2013) apresenta uma tabela de substituições trigonométricas que pode ser aplicada a diferentes casos.

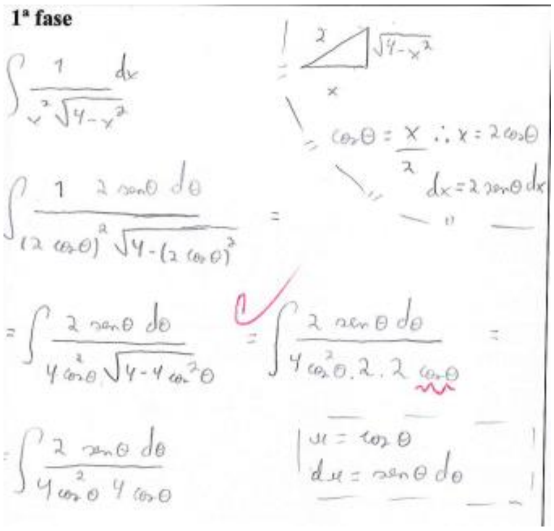
Figura 40 – Substituições trigonométricas

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

Fonte: Stewart (2013, p. 432)

Com a substituição adequada identificada, inicia-se a resolução utilizando manipulações que, por vezes, fazem uso de outras técnicas de integração. Esta foi uma das tarefas que tiveram um dos menores índices de resolução. Portanto, a discussão sobre as resoluções será mais breve em comparação com as demais tarefas.

Figura 41 – Produção P95 (1)



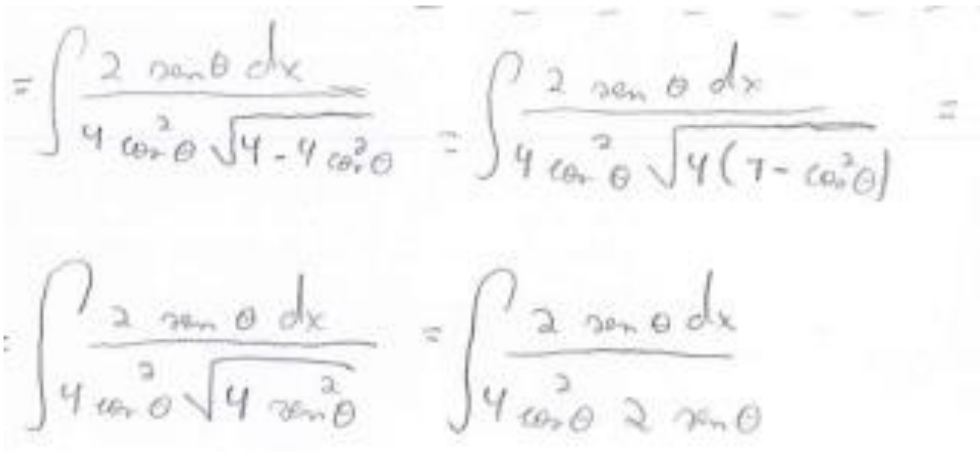
Fonte: Acervo da pesquisa

No exemplo da figura 41, o estudante deveria calcular $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$. Observa-se que ele construiu um triângulo retângulo para identificar a melhor substituição trigonométrica para resolver a situação. O triângulo, com catetos x e $\sqrt{4-x^2}$ e hipotenusa 2, leva à relação $x = 2 \cdot \cos\theta$. Essa construção facilita a visualização e a aplicação das funções trigonométricas necessárias para resolver a integral, ajudando a entender as variáveis envolvidas no contexto geométrico.

Embora Stewart (2013) sugira que a melhor substituição seja $x = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta,$ o estudante opta por $x = 2 \cdot \cos\theta$. A partir dessa escolha, ele calcula $dx = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta\ d\theta$, porém, a derivada correta seria $dx = -2 \cdot \operatorname{sen}\theta\ d\theta$. Com base em x e dx, o estudante realiza a substituição trigonométrica e obtém $\int \frac{2\cdot \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{d}\theta}{4\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{4-4\cdot\cos^2\theta}}$. Ao manipular $\sqrt{4-4\cdot\cos^2\theta}$ obtém $2\cdot 2\cdot\cos\theta$, no entanto, deveria ser $\sqrt{4-4\cdot\cos^2\theta} = \sqrt{4\cdot(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{4\cdot(1-\cos^2\theta)}$. Neste ponto, a melhor substituição seria $1-\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$. O erro ao manipular a raiz quadrada impediu a realização dessa substituição trigonométrica. Desconsiderando o erro, podemos notar que o estudante chega em $\int \frac{2\cdot \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{d}\theta}{4\cdot\cos^2\theta\cdot 4\cos\theta}$ e propõe a substituição $u = \cos\theta$ com $du = \operatorname{sen}\theta\ d\theta$, embora o correto seja $du = -\operatorname{sen}\theta\ d\theta$.

Considerando sua resolução, o comentário foi para que verificasse o resultado de $\sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2 \theta}$ e continuasse a resolução. Vejamos a seguir como o comentário surtiu efeito positivo na segunda fase.

Figura 42 – Produção P95 (2)

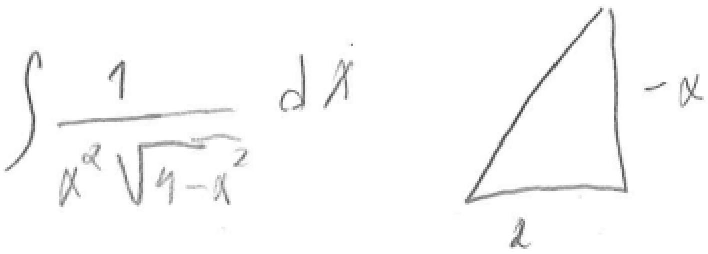


Fonte: Acervo da pesquisa

O estudante manipulou adequadamente $\sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2 \theta}$ obtendo $2 \cdot \operatorname{sen} \theta$. O comentário ajudou a corrigir esse erro, permitindo que o estudante avançasse na resolução da integral. No entanto, deveríamos ter alertado o estudante para o detalhe da derivada de $\cos \theta$, já que ele não considerou o sinal negativo, o que poderia ter causado mais confusão.

Apesar de alguns impasses que impediram a resolução correta, é evidente que o estudante possui conhecimento das técnicas de resolução de integrais por substituições trigonométricas. Ele soube seguir a estratégia correta de forma geral, embora alguns ajustes precisassem ser feitos ao longo do processo.

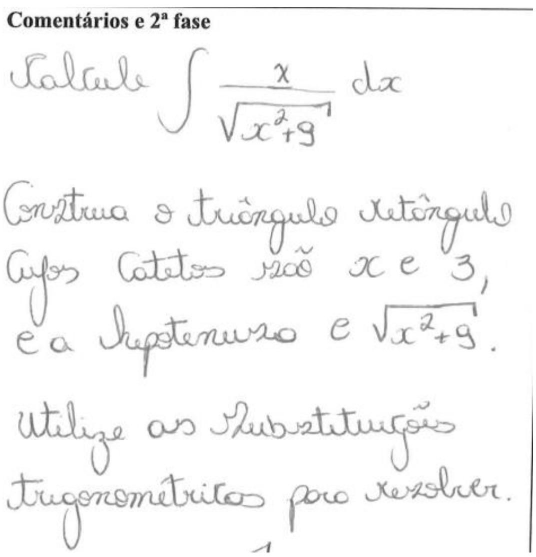
Figura 43 – Produção P37 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, ao tentar resolver $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$, o estudante fez um esboço de um triângulo retângulo para encontrar a substituição trigonométrica adequada. A construção do triângulo é uma boa estratégia, pois ajuda a visualizar as relações trigonométricas necessárias para a substituição. No entanto, sugerimos que o estudante resolvesse uma integral talvez um pouco mais simples primeiro, a fim de reforçar a compreensão do processo e da técnica de substituição trigonométrica. Além disso, seria útil apresentar o caminho completo de construção do triângulo, detalhando cada etapa para garantir que o estudante compreenda totalmente a relação entre as variáveis e as funções trigonométricas envolvidas.

Figura 44 – Comentários produção P37



Comentários e 2ª fase

Calcule $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

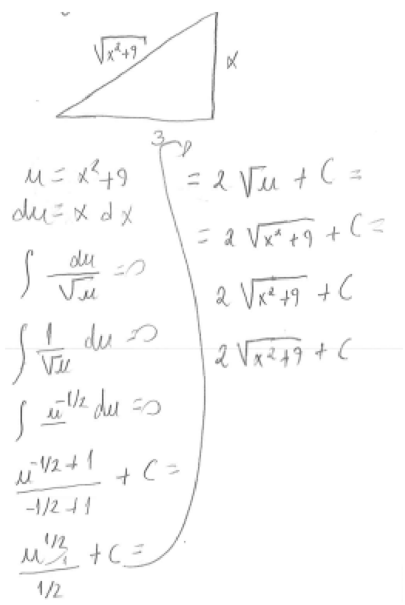
Construa o triângulo retângulo
cujos catetos são x e 3,
e a hipotenusa é $\sqrt{x^2+9}$.

Utilize as substituições
trigonométricas para resolver.

Fonte: Acervo da pesquisa

Este comentário sugere um possível caminho para resolver a integral indicada e, além disso, poderia auxiliar na resolução da integral anterior, iniciando com uma tarefa mais simples e avançando para uma mais complexa. No entanto, o estudante não utilizou nenhuma substituição trigonométrica ao tentar resolver a integral proposta. Esse erro pode ter ocorrido por falta de familiaridade com as substituições trigonométricas ou pela falta de confiança nas ferramentas matemáticas necessárias. O comentário poderia ter enfatizado a importância da substituição trigonométrica como uma técnica fundamental para resolver integrais desse tipo.

Figura 45 – Produção P37 (2)

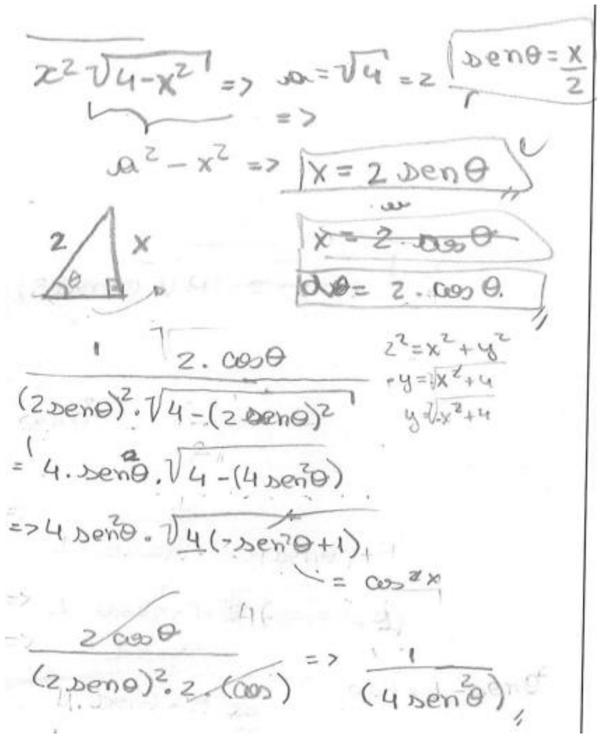


Fonte: Acervo da pesquisa

Podemos notar que, inicialmente, o estudante construiu o triângulo conforme indicado no comentário, mas não utilizou a substituição trigonométrica para resolver a integral. Em vez disso, ele optou por fazer a substituição $u = x^2 + 9$ e $du = x\,dx$, mas a derivada correta seria $du = 2x\,dx$. Essa mudança, ao invés de simplificar, acabaria tornando a resolução mais complexa, o que destaca que a substituição trigonométrica seria a melhor opção para esse tipo de integral.

A partir desse comportamento, podemos inferir que o estudante tem certa dificuldade em lidar com tarefas que envolvem substituições trigonométricas. Isso é evidenciado pela falta de tentativa ou aplicação das substituições trigonométricas em duas situações distintas. Esse padrão sugere que o estudante pode precisar de mais prática e orientação para utilizar corretamente essas técnicas nas integrais, um conceito central para esse tipo de problema.

Figura 46 – Produção P51 (1)

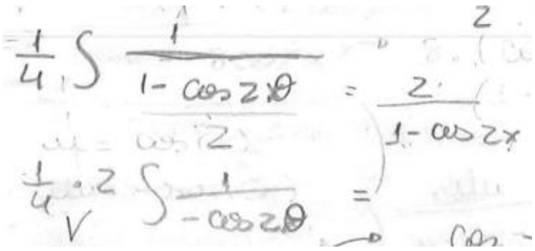


Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, ao resolver $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$, o estudante fez a substituição adequada $x = 2 \cdot \operatorname{sen} \theta$ e $dx = 2 \cdot \cos \theta$, que são de fato as substituições trigonométricas corretas para este tipo de integral. O estudante também utilizou o triângulo retângulo para visualizar a relação entre as variáveis, o que é uma abordagem bastante útil e adequada.

Após a substituição, o estudante chegou à expressão correta para a integral, ou seja, $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{(4 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta)}$. Neste ponto, o procedimento ideal seria substituir $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}$ por $\operatorname{cossec}^2 \theta$, o que simplificaria a integral e permitiria que a integração fosse realizada de forma mais direta. Após integrar, a última etapa seria retornar à variável x por meio da substituição inversa. No entanto, o estudante optou por utilizar a identidade $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, o que, embora matematicamente válido, complicou o procedimento subsequente. Após essa substituição, a sequência de passos seguidos pelo estudante não foi clara, o que indicou que houve uma perda de direção no raciocínio e na execução dos procedimentos. Isso gerou dificuldades na continuação da resolução da integral de forma adequada, já que os próximos passos não seguiram uma lógica bem definida para simplificação ou retorno à variável x.

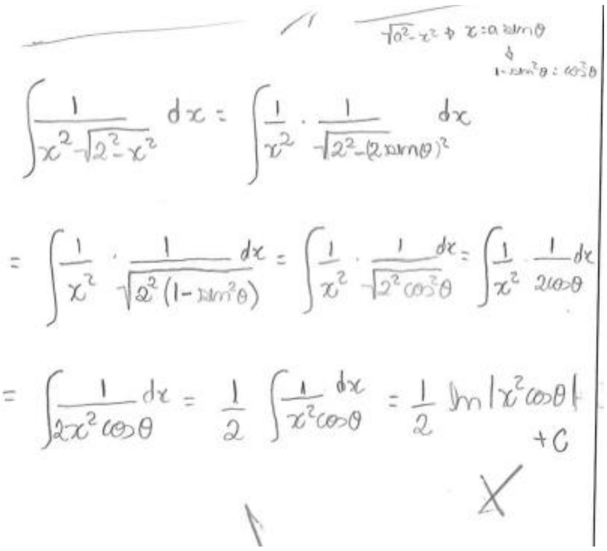
Figura 47 – Produção P51 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, poderíamos sugerir ao estudante que utilizasse $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{cossec}^2\theta$ para continuar a resolução. Mas sugerimos que o estudante derivasse o resultado que obteve da integral para verificar se a derivada do resultado da integral resultava na expressão inicial, pois verificamos que o resultado estava incorreto.

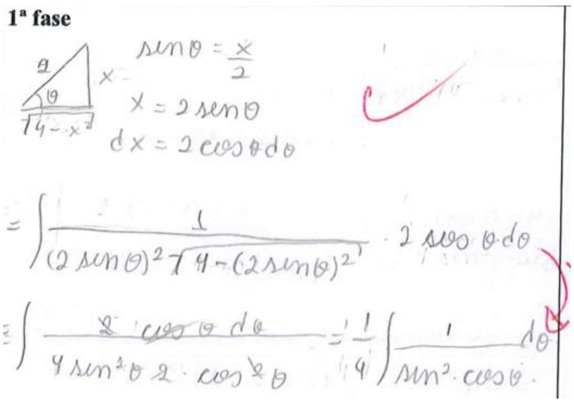
Figura 48 – Produção P65



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, ao resolver $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ o estudante utiliza $x = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta$, realizando parcialmente a substituição na expressão $\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. No entanto, podemos observar que ele não calcula dx, ou seja, a derivada de $2 \cdot \operatorname{sen}\theta$, o que torna a mudança de variável incorreta. A mudança de variável foi parcial, pois o estudante substituiu $x = 2 \cdot sen\,\theta$ apenas na variável x^2 dentro da raiz, mas em x^2 que está multiplicando a raiz não foi substituída. omo consequência, o resultado obtido está incorreto. Sugerimos que ele tomasse cuidado com a mudança de variável para que não ficasse com duas variáveis, ou seja, que ficasse com θ como a única variável após a substituição. No entanto, mesmo com a sugestão, verificamos que, na segunda fase, o estudante continuou utilizando duas variáveis ao calcular a integral.

Figura 49 – Produção P144 (1)

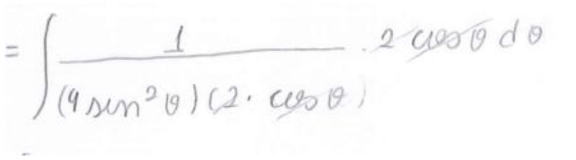


Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 49, podemos observar a resolução de $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ em que o estudante utiliza o triângulo retângulo para obter a $x = 2 \cdot \text{sen}\,\theta$, substituindo na função. Ao substituir x e dx, ou seja, o realizar a mudança de variável, é possível notar uma flecha apontando de uma passagem para outra, indicando um procedimento equivocado na resolução. No denominador, o estudante substitui $x = 2 \cdot \text{sen}\,\theta$ e obtém $(2 \cdot \text{sen}\,\theta)^2 \cdot \sqrt{4-(2 \cdot \text{sen}\,\theta)^2}$ igualando isso a $4 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot 2 \cdot \cos^2\theta$. No entanto, o correto seja $4 \cdot \sin^2\theta \cdot 2 \cdot \cos\theta$. O erro está na aplicação incorreta da identidade $1 - \text{sen}^2\,\theta = \cos^2\theta$ e ao calcular a raiz quadrada.

Nesse sentido, solicitamos que o estudante revisasse a passagem destacada com a flecha e corrigisse sua resolução. Com relação ao procedimento incorreto, o estudante revisou e resolveu a integral corretamente.

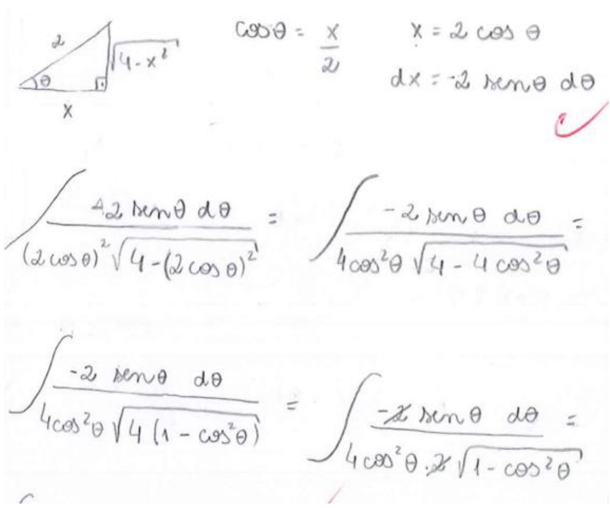
Figura 50 – Produção P144 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Portanto, o comentário permitiu que o estudante refletisse sobre sua resolução e realizasse novamente os procedimentos adequadamente, obtendo uma solução correta para a integral.

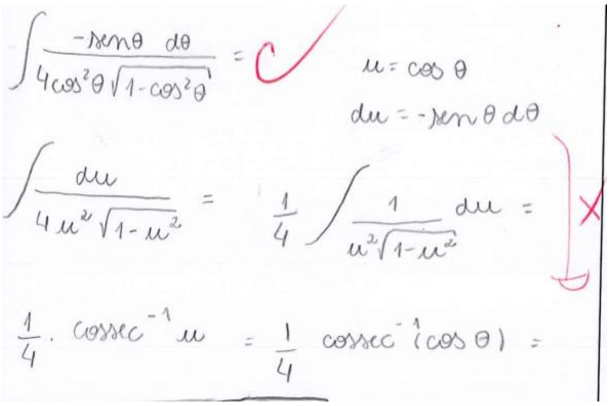
Figura 51 – Produção P184 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

A figura 51 nos mostra uma resolução da tarefa $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$, que utiliza o triângulo retângulo para obter a relação que será utilizada na mudança de variável. O estudante faz a substituição de x por $2 \cdot \cos(\theta)$ e $dx = -2 \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Posteriormente, realiza os procedimentos até obter $\int \frac{-\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{4 \cdot \cos^2\theta \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta}}$. Neste momento, o ideal seria usar a identidade trigonométrica $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, mas o estudante prefere realizar uma nova substituição utilizando $u = \cos\theta$ e $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$, como podemos ver na figura 51. A substituição utilizada está correta; no entanto, não foi possível compreender qual caminho que levou o estudante a concluir $\frac{1}{4} \cdot \operatorname{cossec}^{-1}$.

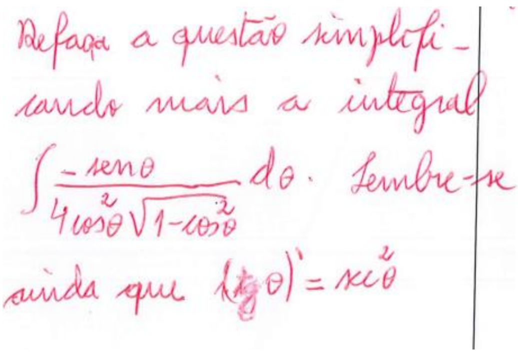
Figura 52 – Produção P184 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Diante disso, propusemos o seguinte comentário.

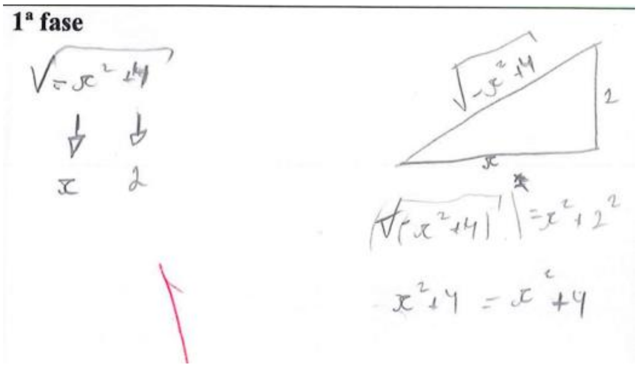
Figura 53 – Comentário produção P184



Fonte: Acervo da pesquisa

Embora não tenhamos sugerido o uso de $1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\,\theta$, ao realizar a simplificação indicada no comentário, o estudante fez uso da identidade trigonométrica, em vez de utilizar a substituição de u e du. Além disso, sugerimos que considerasse $(\text{tg}\,\theta)' = \sec^2\theta$, pois, ao realizar a simplificação, iria se deparar com $\int \sec^2\theta \; d\theta$, cuja integral tem como resultado $\text{tg}\,\theta + c$. Nesse sentido, o último passo seria retornar à variável x. O estudante levou em consideração o comentário, realizou a simplificação e obteve o resultado correto da integral.

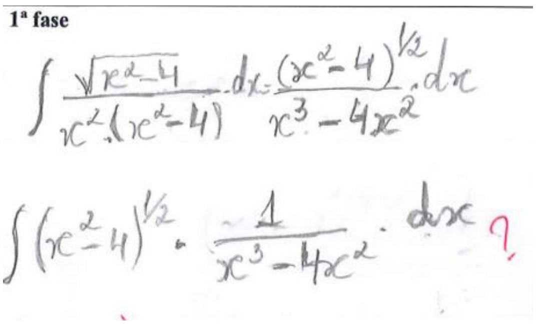
Figura 54 – Produção P250



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, o estudante deveria resolver $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4}}dx,$ podemos observar que o estudante utiliza o triângulo retângulo para identificar a substituição adequada para a situação. No entanto, o estudante não chega a uma conclusão sobre qual substituição utilizar. Além disso, com base no registro do canto superior esquerdo, podemos inferir que para o estudante $\sqrt{x^2+4} = x+2$, para podermos confirmar essa hipótese, sugerimos no comentário que o estudante resolvesse $\sqrt{-3^2+4}$. No entanto, não obtivemos registros na segunda fase da prova.

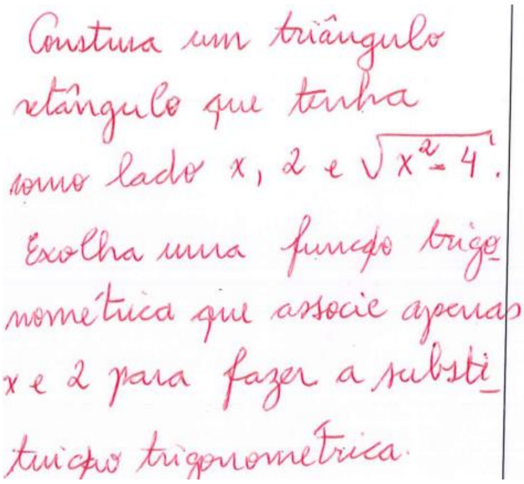
Figura 55 – Produção P318 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 55, ao resolver $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$, podemos notar alguns erros de procedimentos. Por exemplo, ao utilizar $x^2 \cdot (x^2-4) = x^3 - 4x^2$, o erro aparece na aplicação da propriedade distributiva, quando efetua $x^2 \cdot x^2$ ao resultar em x^3, sendo que o correto seria x^4. O estudante não desenvolve sua resolução além do que é ilustrado na figura, ou seja, inicialmente deveria identificar a substituição adequada para a função. Portanto, sugerimos que construísse o triângulo retângulo com lados x, 2 e $\sqrt{x^2-4}$, como indicado na figura 56.

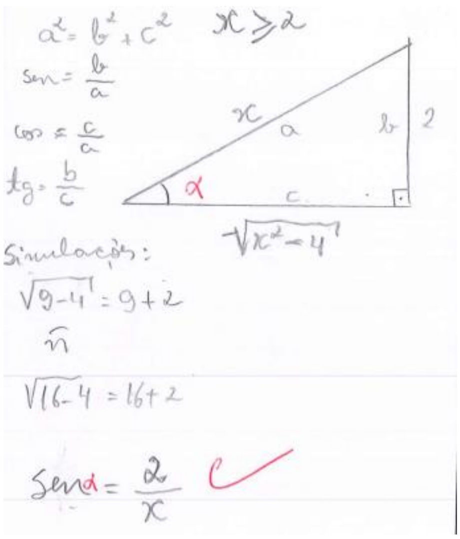
Figura 56 – Comentário produção P318



Fonte: Acervo da pesquisa

Diante disso, o estudante constrói o triângulo e obtém a relação para substituir na integral que deseja calcular.

Figura 57 – Produção P318 (2)



Fonte: Acervo da pesquisa

Com base na figura 57, podemos notar que o estudante conclui que $sen\,\alpha = \frac{2}{x}$. Embora não tenha resolvido a integral por completo, apresentou um grande avanço ao encontrar a substituição adequada. Caso houvesse uma terceira fase, poderíamos sugerir que realizasse a mudança de variável para continuar a resolução.

Algumas conclusões sobre esta parte da análise:

1) **Conhecimento e utilização das substituições trigonométricas**: Embora os estudantes demonstrem estar cientes das substituições trigonométricas como uma estratégia para resolver integrais, nem sempre escolheram a substituição mais adequada. Isso pode ser resultado de falta de prática ou uma falha na compreensão dos conceitos envolvidos. É importante enfatizar que a escolha da substituição correta pode fazer uma grande diferença na facilidade do desenvolvimento da resolução da integral.
2) **Dificuldades com identidades trigonométricas**: As identidades trigonométricas são ferramentas fundamentais na resolução de integrais, especialmente quando se trata de manipulações algébricas para simplificar expressões. Os desafios encontrados na aplicação das identidades trigonométricas apontam para a importância de oferecer aos estudantes mais oportunidades de praticarem com novas tarefas. Uma compreensão sólida dessas identidades é essencial para simplificar expressões e resolver integrais de forma adequada.
3) **Necessidade de revisão dos procedimentos**: Os comentários fornecidos na segunda fase desempenharam um papel fundamental ao destacar os erros cometidos pelos estudantes e orientá-los na direção correta. Isso ressalta a importância da revisão cuidadosa dos procedimentos durante a resolução de integrais. Os estudantes precisam desenvolver a capacidade de identificar e retificar erros por conta própria, o que é uma habilidade valiosa não apenas em matemática, mas em muitas outras áreas da vida acadêmica e profissional.
4) **Aplicação do conhecimento geométrico**: O uso do triângulo retângulo como uma ferramenta para visualizar e relacionar variáveis trigonométricas foi uma estratégia útil para alguns estudantes. Isso destaca a importância de conectar conceitos matemáticos, ou seja, as ligações entre a linguagem algébrica e geométrica, o que pode facilitar a compreensão e a aplicação dos conceitos.
5) **Progresso ao longo da resolução**: É encorajador observar que muitos estudantes foram capazes de retificar seus erros e fazer progresso ao longo da resolução das integrais, especialmente após

receberem feedback. Isso destaca a importância do processo de aprendizado significativo, no qual os estudantes têm a oportunidade de identificar e corrigir erros à medida que avançam. Isso reflete uma abordagem de aprendizado na qual os estudantes estão envolvidos ativamente na resolução de problemas e na reflexão sobre seus próprios processos de construção de uma solução para a tarefa.

Quarta tarefa

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta.$

Esta integral, caracterizada como integral trigonométrica, pode ser resolvida utilizando as identidades dos ângulos-metade:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \text{ e } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

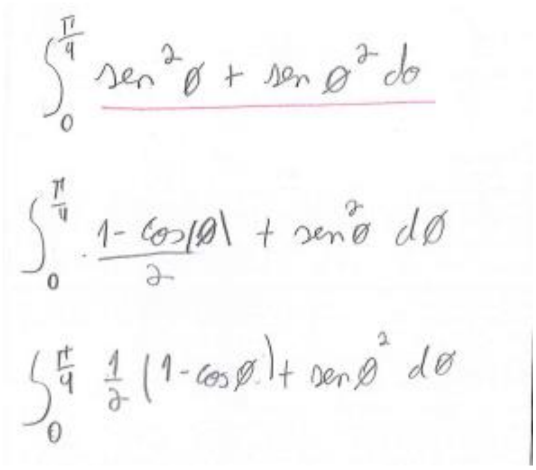
Além disso, em alguns casos é útil a identidade $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

No caso da tarefa, podemos escrever $\operatorname{sen}^4 \theta = (\operatorname{sen}^2 \theta)^2$. Com isso, utilizando $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, temos que $\operatorname{sen}^4 \theta = (1 - \cos 2\theta)^2$, e, por consequência, $\operatorname{sen}^4\theta = 1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta$. Reescrevendo a integral e utilizando a integral da soma, obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2\theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\theta \, d\theta.$$

A partir disso, deve-se calcular cada integral para obter o resultado, utilizando os limites de integração. Vejamos agora alguns exemplos de resolução e comentários da tarefa proposta.

Figura 58 – Produção P110



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2 \emptyset + sen\, \emptyset^2\, d\emptyset$$

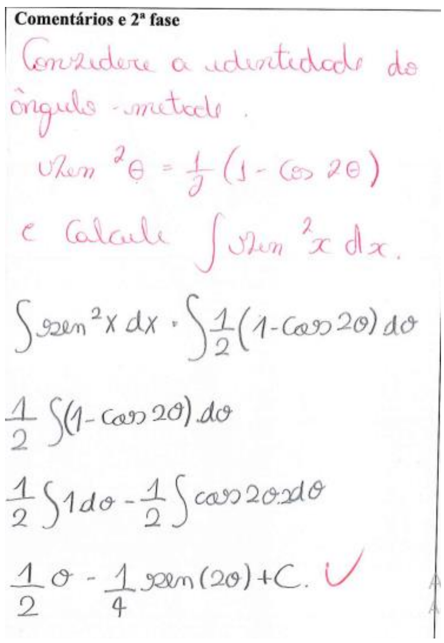
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(\emptyset)}{2} + sen^2\emptyset\, d\emptyset$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos\emptyset) + sen\,\emptyset^2\, d\emptyset$$

Fonte: Acervo da pesquisa

A figura 58 ilustra uma resolução em que o estudante separa $sen^4 \theta$ como $\mathrm{sen}^2\,\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta$, sendo que é um procedimento incorreto. Podemos observar nos registros que o estudante não utiliza nenhuma identidade dos ângulos-metade. Com isso, a fim de questioná-lo acerca do erro de procedimento, solicitamos que verificasse se a igualdade $2^4 = 2^2 + 2^2$ é válida, uma vez que o procedimento realizado é semelhante a este. Além disso, propusemos que utilizasse as identidades dos ângulos-metade. No entanto, não obtivemos retorno na segunda fase.

Figura 59 – Comentários produção P151



Comentários e 2ª fase

Considere a identidade do ângulo-metade.

$sen^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

e Calcule $\int sen^2 x\, dx$.

$$\int sen^2 x\, dx \cdot \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

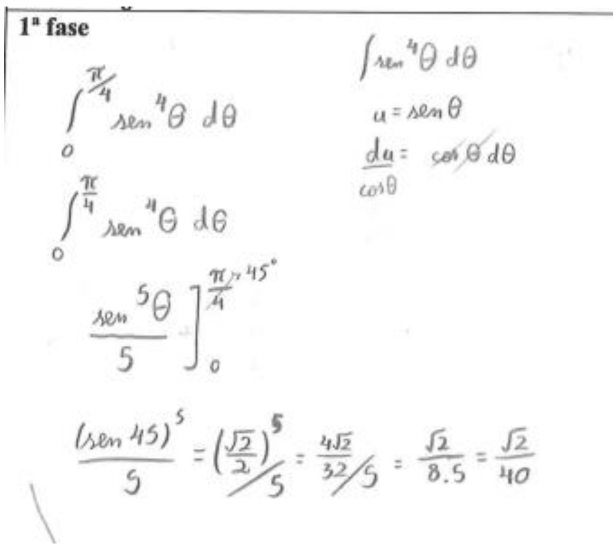
$$\frac{1}{2}\int 1\, d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \cdot 2\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} sen(2\theta) + C.$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Na figura 59, podemos observar os comentários realizados na segunda fase da tarefa proposta. Apresentamos diretamente os comentários, pois o estudante não forneceu registros na primeira fase. Assim, sugerimos que utilizasse a identidade do ângulo-metade para calcular $\int \operatorname{sen}^2 x$. Escolhemos essa função para a integral, pois o estudante não apresentou uma estratégia para resolver a tarefa inicial. Com isso, o estudante utilizou diretamente a identidade sugerida e obteve a solução da integral. Podemos inferir que o estudante possui o conhecimento necessário para resolver integrais trigonométricas, mas precisa de auxílio para identificar a estratégia adequada.

Figura 60 – Produção P25



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, podemos notar que o estudante opta por uma substituição com $u = \operatorname{sen}\theta$. Os registros nos mostram que calcula $\frac{du}{\cos\theta} = \cos\theta \ d\theta$, simplificando $\cos\theta$ e obtendo $du = d\theta$. No entanto, a forma correta de du seria $du = \cos\theta \ d\theta$, e, para substituir na integral, teria que utilizar $d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$. Como utilizou $du = d\theta$, conseguiu calcular a integral e retornar à variável inicial, mas, por usar du inadequadamente, a resposta final ficou incorreta. Caso tivesse utilizado a substituição correta, a integral ficaria mais complicada de calcular, tornando o uso das identidades dos ângulos-metade a melhor opção. Nesse sentido, realizamos os seguintes comentários.

Figura 61 – Comentários produção P25

Comentários e 2ª fase

Considere as identidades dos ângulos - metade e tente resolver.

$$sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

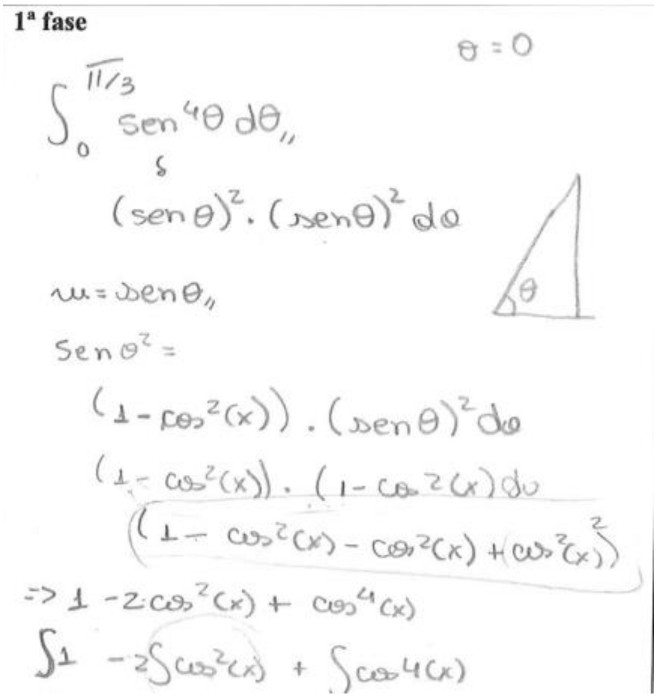
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

verifique se a derivada de $\frac{sen^5 \theta}{5}$ resulta em $sen^4 \theta$.

Fonte: Acervo da pesquisa

O primeiro comentário sugere a utilização das identidades dos ângulos-metade, considerando que o estudante não as aplicou como estratégia para resolver a integral. Para ele, a substituição de u e du parecia correta, já que desenvolveu um raciocínio que incluía estratégias e procedimentos, chegando a um resultado para a integral. Contudo, sugerimos que calculasse a derivada de $\frac{\text{sen}^5\,\theta}{5}$ para verificar se o resultado seria $\text{sen}^4\,\theta$. Sabemos que os resultados não coincidem, mas nosso objetivo era que o estudante identificasse o erro que levou à resposta incorreta. Mesmo com os comentários realizados, não obtivemos retorno na segunda fase.

Figura 62 – Produção P53 (1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, o estudante reescreve $\text{sen}^4\,\theta$ como $\text{sen}^2\,\theta \cdot \text{sen}^2\,\theta$ para utilizar $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$. Em vez de utilizar a identidade do ângulo-metade, optou por usar a identidade fundamental. Dessa forma, obteve $\int 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta\, d\theta$ e utilizou a regra da integral da soma para calcular a integral de cada termo separadamente.

Figura 63 – Produção P53 (2)

Fonte: Acervo da pesquisa

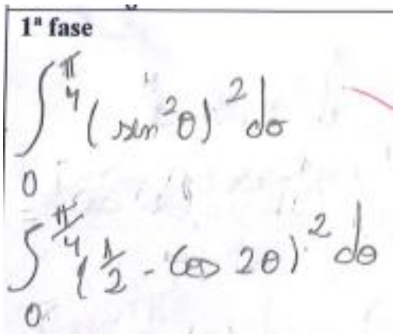
Conforme a figura 63 nos mostra, o estudante registra $\int 1 = \theta$ e, para calcular $\int \cos^2 \theta \, d\theta$, utiliza a regra da substituição, definindo $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x \, d\theta$, sem atentar-se à mistura das variáveis x e θ. Após a substituição, obtém $\frac{1}{-\operatorname{sen}\theta} \cdot u^2$, mas não realiza a integração dessa expressão, resultando em uma solução incompleta.

Para calcular $\int \cos^4 \theta \, d\theta$, o estudante utiliza a técnica de integração por partes, definindo $u = 4\theta$, $du = 4$, $dv = \operatorname{sen}\theta$ e $v = \cos\theta$. Ao adotar $u = 4\theta$, o estudante parece modificar a função inicial $\cos^4 \theta$ para $\cos 4\theta$, o que não é uma alteração correta. O estudante conclui a integração e utiliza os resultados para calcular o valor final com base nos limites de integração.

Embora $\cos^4 \theta \neq \cos 4\theta$, o estudante parece considerar que essa igualdade é válida. Um comentário possível seria sugerir que verificasse se a igualdade realmente procede, utilizando valores de θ para demonstrar que os resultados são diferentes. No entanto, durante a análise, esse problema não foi identificado, e esse comentário não foi sugerido.

O comentário fornecido ao estudante sugeriu o uso das identidades dos ângulos-metade para recalcular a integral e verificar se o novo resultado coincidia com sua solução inicial. O estudante iniciou uma nova resolução, mas não a completou.

Figura 64 – Produção P102



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, a intenção do estudante foi em utilizar uma das identidades dos ângulos-metade. No entanto, ao fazer a substituição utilizou $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \cos 2\theta$, embora o correto seja $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ ou ainda $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$. Nesse sentido, sugerimos que o estudante verificasse se a igualdade $\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} - \cos 2\theta$ é válida, uma vez que os registros mostram que ele realizou este procedimento. Em resposta ao nosso comentário, o estudante escreveu corretamente $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, demonstrando que conhece a forma correta da identidade do ângulo-metade, mas que cometeu inicialmente um erro de conceituação.

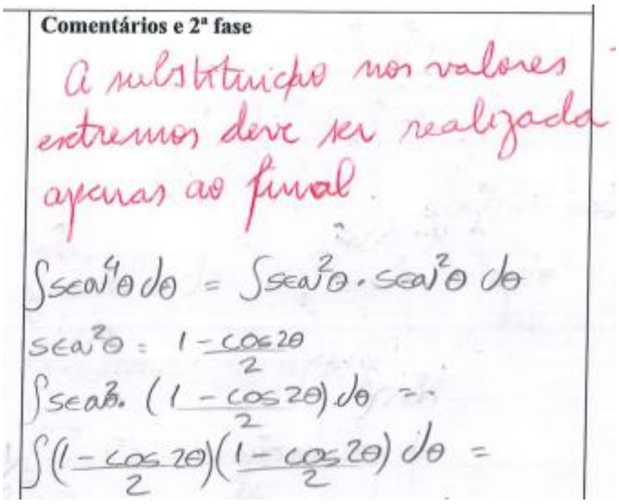
Figura 65 – Produção P160

Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, o estudante registra inicialmente $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 0\, \pi\, d\theta$, ou seja, realiza a substituição dos valores dos extremos logo no início da resolução. Continua sua resolução, calculando apenas $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{4} d\theta$, pois $\operatorname{sen} 0 = 0$. Para resolver esta integral, utiliza como estratégia inicial a identidade $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, obtendo $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{4}\right) d\theta$. A partir disso, separa em duas integrais, ou seja, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} d\theta$ e substitui $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{2}$, concluindo em $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{2}\, d\theta$.

Nesta primeira resolução, a produção escrita do estudante mostra que tem domínio acerca dos conceitos relacionados às integrais trigonométricas, ou seja, das estratégias para resolver uma integral. No entanto, ao substituir os extremos da integral no início, demonstra uma falta de compreensão sobre as integrais definidas. Nesse sentido, realizamos o seguinte comentário.

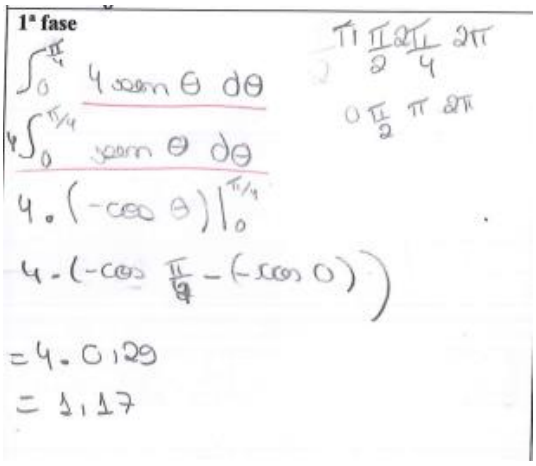
Figura 66 – Comentários produção P160



Fonte: Acervo da pesquisa

Trouxemos ao estudante a ideia de como resolver uma integral definida, ou seja, primeiro se resolve a integral e, apenas no final, realiza-se a substituição dos extremos. Como o estudante tinha conhecimento de integrais trigonométricas, este comentário foi suficiente para que ele conseguisse resolver a tarefa por completo da forma correta.

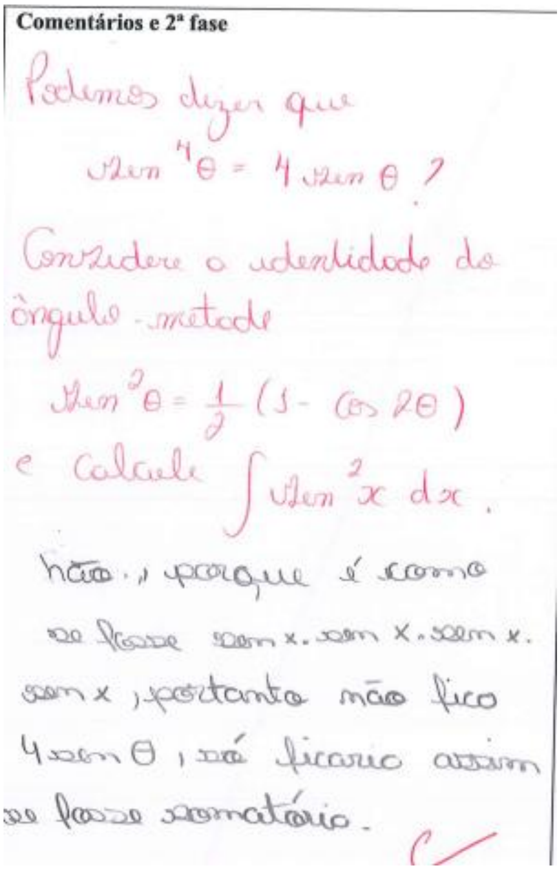
Figura 67 – Produção P172



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, o estudante reescreve $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta$ como $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cdot \operatorname{sen} \theta \, d\theta$, ou seja, considera que $sen^4 \theta = 4 \cdot \operatorname{sen} \theta$. Nesse sentido, questionamos o estudante sobre a validade dessa igualdade.

Figura 68 – Comentários produção P172


Comentários e 2ª fase

Podemos dizer que

$sen^4 \theta = 4 \, sen \, \theta$?

Considere a identidade do ângulo-metade

$sen^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$

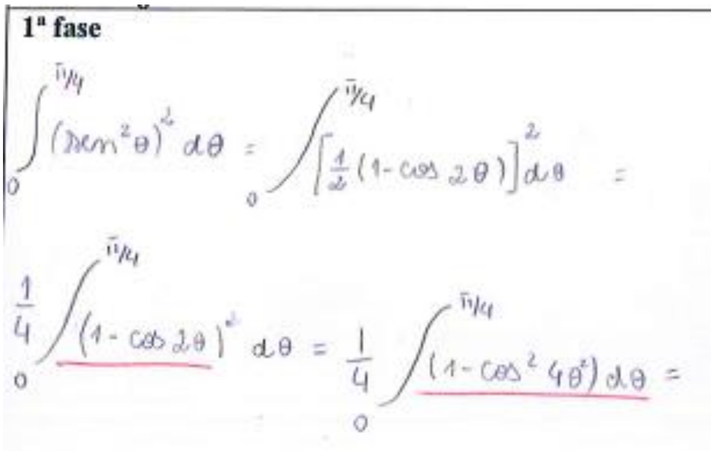
e calcule $\int sen^2 x \, dx$.

não., porque é como se fosse sen x . sen x . sen x . sen x, portanto não fica 4 sen θ, só ficaria assim se fosse somatório.

Fonte: Acervo da pesquisa

Além de questionar se $\operatorname{sen}^4 \theta = 4 \cdot \operatorname{sen} \theta$, sugerimos ao estudante que utilizasse a identidade do ângulo-metade $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$, para resolver $\int \operatorname{sen}^2 x \; dx$. Em relação à igualdade, o estudante nos respondeu que ela não é válida, explicando que o correto seria $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$. Apesar de demonstrar saber que $\operatorname{sen}^4 \theta \neq 4 \cdot \operatorname{sen} \theta$, o estudante não resolveu a nova integral proposta.

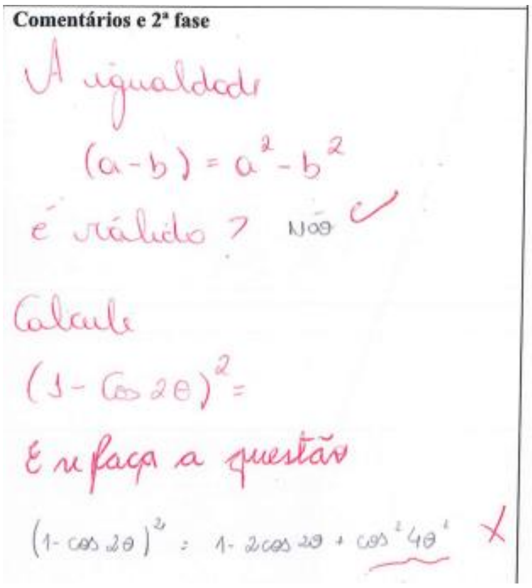
Figura 69 – Produção P186



Fonte: Acervo da pesquisa

A figura 69 nos mostra que, nesta resolução, o estudante utiliza adequadamente a substituição da identidade $\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, no entanto, ao registrar $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - \cos^2 4\theta^2\, d\theta$, nos mostra que, para o estudante, $(1-\cos 2\theta)^2 = 1^2 - \cos^2 4\theta^2$. Nesse sentido, realizamos o seguinte comentário na segunda fase.

Figura 70 – Comentários produção P186

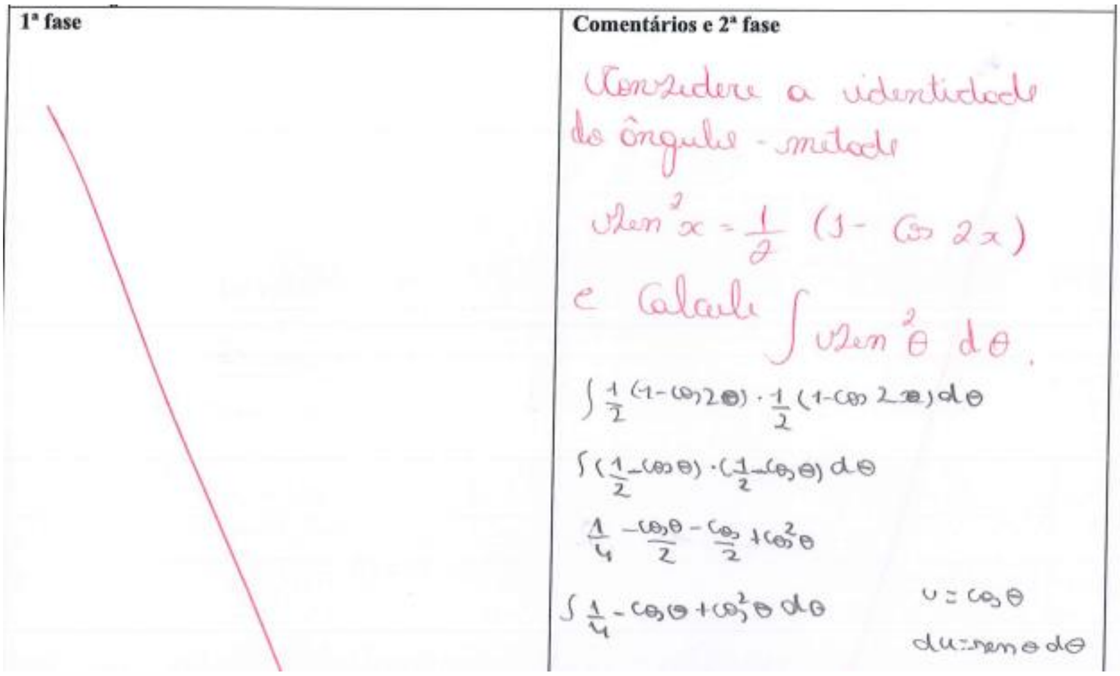


Fonte: Acervo da pesquisa

Solicitamos que verificasse a validade da igualdade $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, pois foi justamente essa forma que o estudante utilizou para resolver $(1-\cos 2\theta)^2$. Recomendamos que desenvolvesse $(1-\cos 2\theta)^2$, obtendo a expressão $1 - 2\cos 2\theta + \cos 4\theta^2$.

O termo $\cos 4\theta^2$ também nos mostra uma compreensão equivocada ao resolver $(\cos 2\theta)^2$, pois o correto seria $\cos^2 2\theta$. Como não nos atentamos nisso inicialmente, já que o estudante faz isso na resolução inicial, não sugerimos comentários acerca dessa concepção, mas poderíamos ter questionado se $\cos 4\theta^2 = \cos^2 2\theta$ para $\theta = 0$, ou algum outro valor. O estudante se depararia com resultados diferentes, portento a igualdade está errada. Apesar desse último equivoco, o estudante desenvolveu a resolução da integral na segunda fase.

Figura 71 – Produção P226

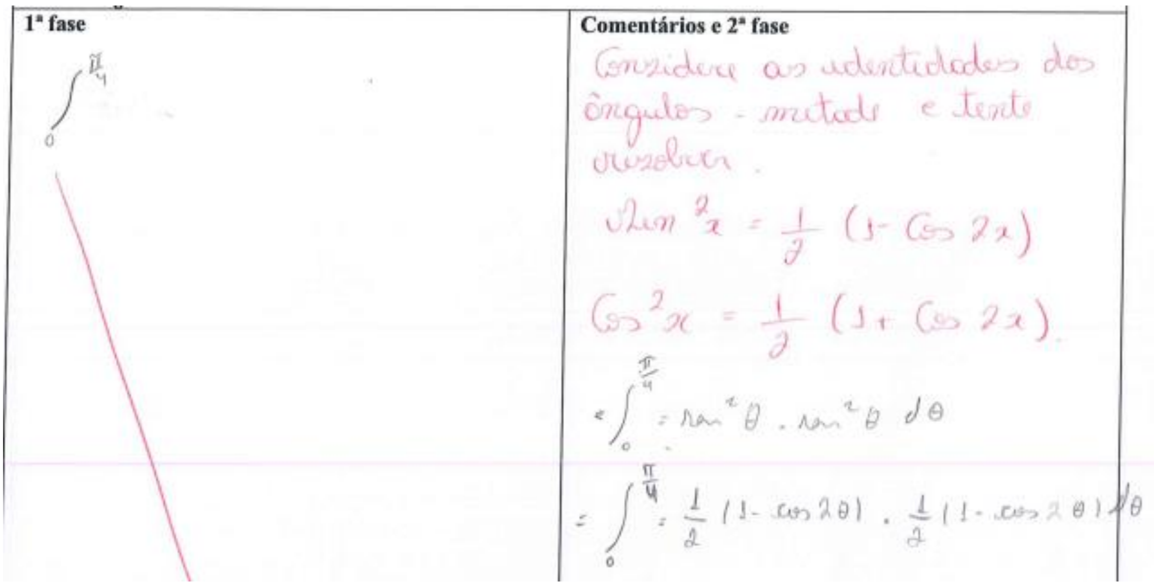


Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, podemos notar que o estudante não apresentou registros na primeira fase da tarefa. Para orientar sua resolução, sugerimos que considerasse a identidade $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ e calculasse $\int \text{sen}^2\, x\ dx$, pois essa integral é mais simples de resolver e serve como ponto de partida para a resolução da tarefa completa. No entanto, percebemos que o estudante não observou o índice 2 corretamente e acabou resolvendo $\int \operatorname{sen}^2 x \ dx$ em vez de $\int \operatorname{sen}^4 x \ dx$.

Embora o estudante tenha conseguido resolver a integral, o que indica que a sugestão inicial de fornecer uma estratégia para iniciar a resolução foi útil, é importante reforçar que a identidade usada deveria ter sido aplicada para $\operatorname{sen}^2 x$, e não $\operatorname{sen}^4 x$. Muitas vezes, ao resolver uma tarefa de matemática, podemos esquecer alguns conceitos ou ter dificuldades no início, o que pode causar o famoso "branco". Nesse sentido, uma dica direcionada pode facilitar o raciocínio e a resolução.

Figura 72 – Produção P252

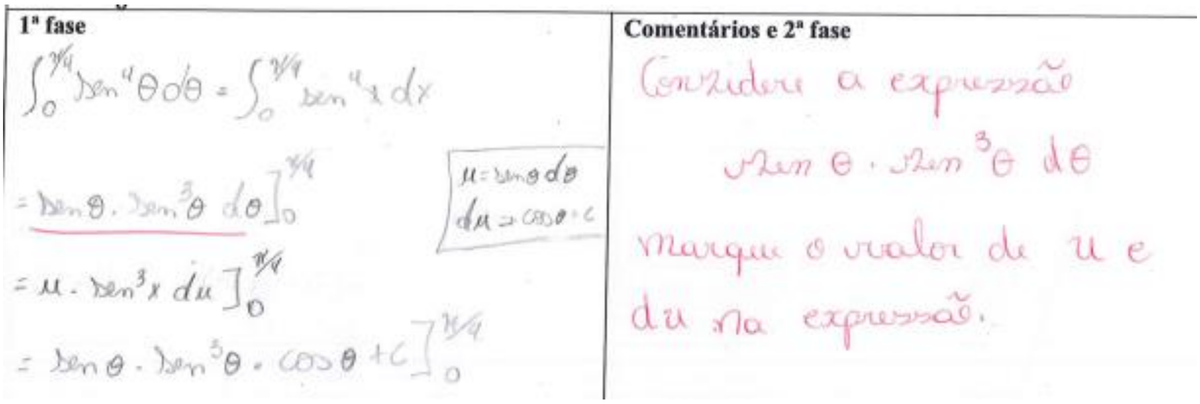


Fonte: Acervo da pesquisa

No caso apresentado, o estudante não iniciou a resolução com uma estratégia clara. Para orientá-lo, sugerimos o uso das identidades dos ângulos-metade, como mostrado na figura 61. O estudante optou por separar $\operatorname{sen}^4 \theta$ em $\operatorname{sen}^2 \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$ permitindo substituir $\operatorname{sen}^2 \theta$ por $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Esse procedimento indica um avanço no entendimento das integrais trigonométricas, pois o estudante conseguiu aplicar uma identidade fundamental para simplificar a integral.

Apesar de ainda ser necessário um aprimoramento no manejo das identidades e técnicas de integração, essa escolha demonstra que o estudante está desenvolvendo a compreensão necessária para resolver integrais trigonométricas com maior confiança

Figura 73 – Produção P293



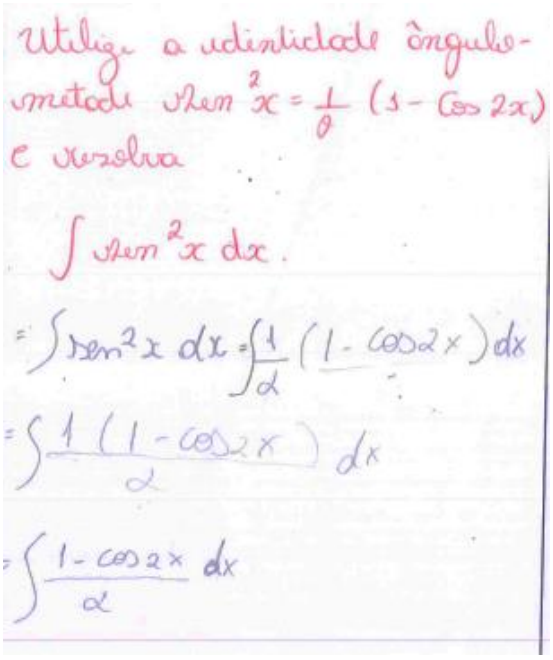
1ª fase	Comentários e 2ª fase
$\int_0^{\pi/4} sen^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} sen^4 x\, dx$ $= sen\,\theta \cdot sen^3\theta\, d\theta \Big]_0^{\pi/4}$ $\boxed{u = sen\,\theta\, d\theta \quad du = cos\,\theta + c}$ $= u \cdot sen^3 x\, du \Big]_0^{\pi/4}$ $= sen\,\theta \cdot sen^3\theta \cdot cos\,\theta + c \Big]_0^{\pi/4}$	Considere a expressão $sen\,\theta \cdot sen^3\theta\, d\theta$ marque o valor de u e du na expressão.

Fonte: Acervo da pesquisa

Neste exemplo, o estudante reescreve $\operatorname{sen}^4\theta$ como $sen\,\theta \cdot \operatorname{sen}^3\theta$ e decide realizar a substituição $u = sen\,\theta$ e $du = \cos\theta + c$. No entanto, essa substituição não é adequada, pois a função contém $\cos\theta$, o que implica que o procedimento precisa ser ajustado. Ao substituir, o estudante deixa de lado o termo du, o que torna a substituição incompleta e imprecisa.

Sugerimos que o estudante marcasse claramente as expressões de u e du na função $\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}^3\theta$, pois é impossível encontrar o termo du apenas com a substituição de u de forma isolada. Além disso, como o estudante não utilizou as identidades trigonométricas para resolver, também sugerimos que ele considerasse o uso dessas identidades, como a identidade dos ângulos-metade, que poderia simplificar a integral de forma mais eficaz

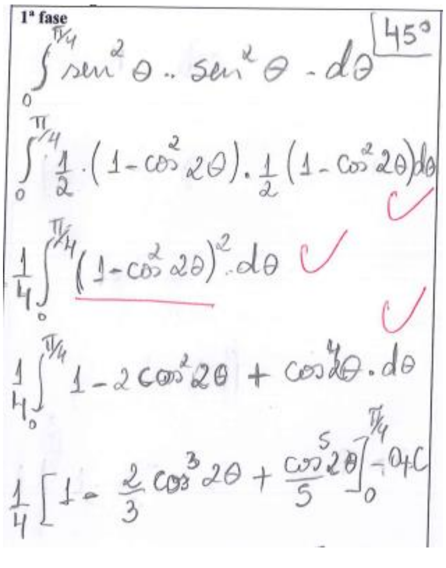
Figura 74 – Comentários produção P293



Fonte: Acervo da pesquisa

O estudante seguiu nossa sugestão em utilizar $\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ e resolver $\int \mathrm{sen}^2\, x \;\, dx$. Embora não tenha concluído a resolução, o fato de ter conseguido aplicar a identidade do ângulo-metade demonstra que o estudante está no caminho certo para resolver a integral trigonométrica de forma adequada.

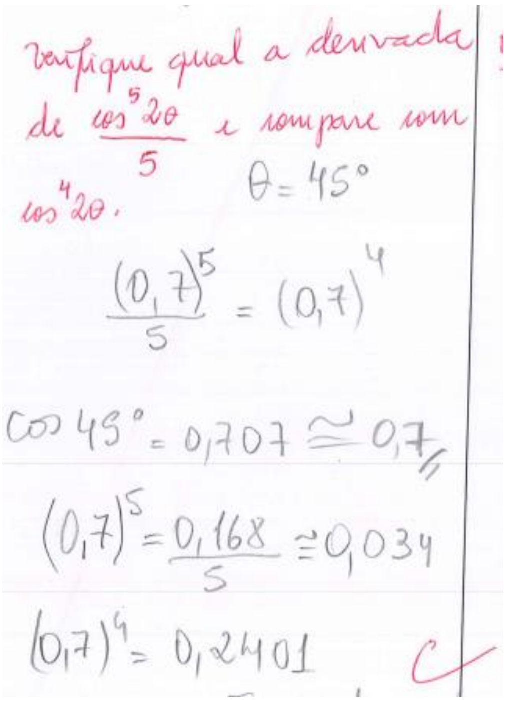
Figura 75 – Produção P320



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste caso, o estudante faz o uso da identidade $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ em $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2\,\theta \cdot \text{sen}^2\,\theta\, d\theta$. Realizando novos procedimentos, obtém $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - 2\cos^2 2\theta + \cos^4 2\theta$. Para calcular essa integral, utiliza a regra da integral da soma. No entanto, se observarmos a passagem da quarta para a quinta linha, podemos notar que escreveu $\int \cos^4 2\theta = \frac{\cos^5 2\theta}{5}$, ou seja, realizou a integração utilizando a técnica de integrar um polinômio. No entanto, essa técnica não pode ser utilizada para $\cos^4 2\theta$. Diante disso, realizamos o seguinte comentário.

Figura 76 – Comentários produção P320



Fonte: Acervo da pesquisa

Solicitamos que verificasse a derivada de $\frac{\cos^5 2\theta}{5}$ para ver se o estudante obteria $\cos^4 2\theta$. No entanto, o estudante optou por um interessante raciocino, embora incorreto, de atribuir um valor para θ e verificar se os resultados seriam diferentes. Dizemos que é incorreto, pois a comparação deveria ser da derivada de $\frac{\cos^5 2\theta}{5}$ com $\cos^4 2\theta$.

Pontuando alguns resultados:

1) **Utilização das identidades trigonométricas**: Houve uma melhora perceptível na aplicação das identidades trigonométricas ao longo das análises, observando a resolução da primeira para a segunda fase. Estudantes que inicialmente não as utilizaram corretamente demonstraram um melhor entendimento e aplicação dessas identidades na segunda fase.
2) **Necessidade de compreensão das substituições**: Alguns estudantes tentaram realizar substituições para simplificar a integral, mas muitas vezes essas substituições foram feitas de forma incorreta ou incompleta. Isso indica a necessidade de uma compreensão mais profunda das técnicas de substituição e de como aplicá-las corretamente.
3) **Abordagem de resolução das integrais**: Houve uma variedade de abordagens na resolução da integral proposta, incluindo o uso de identidades trigonométricas, substituições e integração por partes. Isso ressalta a importância de entender e ser capaz de aplicar diferentes técnicas de resolução de integrais, bem como a capacidade de escolher a estratégia mais adequada para cada situação. O fato de os estudantes terem experimentado diferentes abordagens indica uma tentativa de explorar e desenvolver habilidades em cálculo integral.
4) **Consolidação da utilização das identidades trigonométricas**: Ao longo das análises, os estudantes demonstraram uma consolidação gradual na aplicação das identidades trigonométricas, evidenciando um maior domínio desses conceitos ao resolver integrais. Esse progresso sugere uma melhoria na compreensão das relações entre as funções trigonométricas e suas propriedades.
5) **Progresso na compreensão das integrais definidas**: Embora muitos estudantes tenham enfrentado dificuldades iniciais na manipulação de integrais definidas, houve uma melhora gradual na compreensão de como lidar com os limites de integração após a resolução da integral. Isso reflete um avanço no entendimento dos conceitos básicos de cálculo integral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo descrever, analisar, apresentar e discutir aspectos relacionados às oportunidades geradas aos estudantes, a partir da análise de suas produções escritas em uma prova em fases, com o intuito de mostrar o que sabem, aprender e receber feedback de suas resoluções. Esta pesquisa partiu do pressuposto de que a avaliação não deve ser apenas um meio de mensurar o conhecimento dos estudantes, mas também uma ferramenta que promova a aprendizagem de forma contínua. Ao implementar a prova em fases e analisar a produção escrita dos estudantes, buscou-se entender como essas abordagens podem contribuir para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, ou seja, trilhar o caminho da avaliação como forma de investigação da aprendizagem.

Conforme Esteban (2000), a avaliação não se limita a mensurar acertos e erros, mas sim a explorar os processos de pensamento e as estratégias utilizadas pelos estudantes. Ao adotar essa perspectiva, busca-se compreender a complexidade das aprendizagens e utilizar as maneiras de lidar com as dificuldades como ponto de partida para investigações mais profundas.

Um instrumento avaliativo que favoreça a regulação da aprendizagem significa possibilitar ao estudante identificar suas dificuldades e superá-las. Nesse sentido, a prova em fases se mostrou um instrumento dinâmico para o progresso da aprendizagem dos estudantes, pois eles tiveram a oportunidade de analisar, revisar e resolver novamente as tarefas propostas, o que lhes proporcionou uma melhor compreensão dos conceitos. Este formato de avaliação permitiu um feedback contínuo, essencial para o processo de ensino-aprendizagem.

A análise da produção escrita possibilitou entender como os estudantes lidam com conceitos matemáticos e promover intervenções individualizadas. A produção escrita dos estudantes foi minuciosamente analisada para identificar as estratégias utilizadas nas tarefas propostas.

A análise detalhada das produções escritas apresentou caminhos para intervenções, ou seja, o fornecimento de feedbacks específicos e construtivos, que ajudaram os estudantes a refletirem sobre suas próprias compreensões e estratégias. Esse processo de reflexão e feedback contínuo contribuiu significativamente para o aprendizado dos estudantes, permitindo que eles reconhecessem e superassem suas dificuldades.

A leitura horizontal das produções escritas dos estudantes possibilitou identificar as tarefas em que os estudantes mais apresentaram dificuldades durante a primeira fase da prova, enriquecendo o momento de estudos realizado antes da segunda fase, o que trouxe um possível progresso na aprendizagem do estudante. A leitura vertical mostrou as dificuldades individuais dos estudantes cujas produções foram discutidas. Este olhar permitiu a realização de feedbacks construtivos que ajudaram os estudantes a concluírem a resolução de algumas tarefas ou até mesmo iniciar a resolução com base nas orientações propostas nos comentários. Conforme Mendes (2014), as intervenções devem favorecer a regulação da aprendizagem por parte do estudante, ou seja, identificar, refletir e retificar erros, orientar a resolução com base em produções anteriores e revisar o processo de resolução.

O estudo destacou como a prova em fases, ao permitir que os estudantes revisassem e melhorassem suas respostas, oferece uma oportunidade única para a aprendizagem contínua. Esta abordagem se alinha diretamente ao primeiro princípio de avaliação proposto por De Lange (1987), que enfatiza que o objetivo da avaliação deve ser a aprendizagem. Através das intervenções e feedbacks constantes, os estudantes puderam identificar, refletir e retificar seus erros, desenvolvendo novas compreensões dos conceitos matemáticos. Em diversos casos na análise e discussão de dados, tivemos evidências de que os estudantes progrediram em suas resoluções, inclusive alguns que não haviam apresentado estratégia alguma para resolver a tarefa. Este aspecto é fundamental, pois reflete uma mudança de paradigma na avaliação, que passa a ser vista não apenas como uma ferramenta de medição, mas como um meio de promover o desenvolvimento do estudante.

O terceiro princípio de avaliação proposto por De Lange (1987) enfatiza a importância de uma avaliação que permita aos estudantes revelarem mais o que sabem, ao invés do que não sabem. A prova em fases, ao oferecer oportunidades para estudo, revisões de conteúdo e retomada de resolução, incentivou os estudantes a se engajarem ativamente no processo de aprendizagem. A possibilidade de receber feedback detalhado e específico sobre suas produções motivou os estudantes a buscarem uma melhor compreensão e a superar suas dificuldades. Mostrar o que sabem não significa resolver da forma correta, mas evidenciar o conhecimento que utilizaram na tentativa de resolver algo. Nossa tarefa é, a partir do que o estudante nos apresentou, propor caminhos que levem e guiem para a construção do conhecimento necessário para resolver as tarefas.

Por fim, o oitavo princípio de avaliação proposto por De Lange (1987), que sugere a necessidade de a avaliação ser usada para fornecer feedback sobre o trabalho do estudante, foi identificado no decorrer da análise. As intervenções realizadas, tanto pela leitura horizontal quanto pela vertical, permitiram um feedback contínuo e construtivo, orientando os estudantes na retificação de seus erros e no aprimoramento de suas habilidades. Foi possível observar que os comentários realizados nas provas foram impactantes em diversos casos, fazendo com que os estudantes refletissem sobre suas estratégias e procedimentos. O feedback direcionado foi essencial para o aprimoramento das habilidades dos estudantes. Além disso, a capacidade de utilizar estratégias alternativas para o mesmo tipo de tarefa mostrou uma flexibilidade cognitiva. Este processo de feedback foi crucial para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes.

Concluímos que a prova em fases, juntamente com a análise da produção escrita e intervenções específicas, mostrou ser uma abordagem capaz de promover uma aprendizagem contínua e baseada na reflexão. Este estudo contribui para a discussão sobre práticas avaliativas na Educação Matemática, destacando a importância de instrumentos que não apenas avaliem, mas também promovam o aprendizado, rompendo com a ideia de que a avaliação serve apenas para selecionar, classificar, rotular e controlar os estudantes através de uma nota (Buriasco, 2000). Espera-se que os resultados desta pesquisa inspirem práticas pedagógicas inovadoras e pesquisas futuras que continuem a explorar e expandir o potencial dessas abordagens no ensino.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e de Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BARRETO, Ana Cláudia. **Procedimentos da análise da produção escrita em matemática no contexto do GEPEMA**: um olhar para dentro. 2018. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Algumas considerações sobre avaliação educacional**. 2000. Disponível em: http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/arti cle/view/2221. Acesso em: 16 set. 2023.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

BURIASCO, Regina Luzia Corio. de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; JUNIOR, Osmar Pedrochi. Aspectos da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação. In: BURIASCO, Regina Luzia Corio de (org.). **GEPEMA: espaço e contexto de aprendizagem**. Curitiba: Editora CRV, 2014. p. 13-32.

BURIASCO, Regina Luzia Corio; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; CIANI, Andréia Büttner Ciani. Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, v. 33, p. 69-96, 2009.

CELESTE, Letícia Barcaro. **A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 87f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 3, p. 39-50, abr. 1995.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni. Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros de engenharia. In: XXXIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 200, Passo Fundo. **Anais** do XXXIV COBENGE: Ensino de Engenharia: empreender e preservar. Passo Fundo: COBENGE, 2006, p. 16 - 24.

DE LANGE, Jan. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assesstment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achivement in Mathematics and Science, 1999.

DALTO, Jader Otavio. **A Produção Escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

DAVID, Maria Manuela; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; TOMAZ, Vanessa Sena. **Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação**. 2013. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/349. Acesso em: 20 ago. 2020.

ESTEBAN, Maria Teresa. A avaliação no processo ensino/aprendizagem: os desafios postos pelas múltiplas faces do cotidiano. In. **24º Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**, 2001. Disponível em < https://www.scielo.br/j/rbedu/a/LzrRLxY6MqFdv5cs8JqRK8z/ >. Acesso em 10 nov. 2023.

ESTEBAN, Maria Teresa. **Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano**. 2000. Disponível em: https://servicos.educacao.rs.gov.br/pse/binary/down_sem/DownloadServlet?arquivo=textos/maria_esteban_aval_ato_tecido_imprec_cotid.pdf. Acesso em: 28 set. 2023.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 173f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **Erros e leitura positiva: proposta, exercícios e possibilidades**. 2006. Disponível em: http://docs.upf.br/download/jem/trabalhos-2006/mesas/MRED_GARNICA_.pdf. Acesso em: 15 out. 2023.

HOUAISS. **Dicionário Houaiss**. Eletrônico: Houaiss, 2023.

LACAZ, Tânia Maria Vilela Salgado; CARVALHO, Maria Tereza Lima; FERNANDES, José António Silva. Implicações das dificuldades dos alunos na aprendizagem da disciplina cálculo diferencial e integral I da FEG/UNESP para as práticas pedagógicas. In: XXXV CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 2007, Curitiba. **Anais** do XXXV COBENGE: Novos paradigmas da Educação em Engenharia. Curitiba: ABENGE, 2007, p. 1-12.

LOVATTO, Guilherme Gasparini. **Maneiras de lidar com a matemática:** o que estudantes de um curso de Engenharia mostram saber diante de questões envolvendo o conceito de Limite. 2020. 54 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 274 f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

BRASIL. **Ideb - Apresentação**. 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/busca-geral/138-programas-e-acoes-1921564125/ideb-indice-de-desenvolvimento-da-educ-basica-878961830/180-apresentacao-sp-1643264658. Acesso em: 27 jan. 2024.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina Nagy. **Do observável para o Oculto**: um estudo da Produção Escrita de Alunos da 4ª. Série em Questões de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. 202f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, Franciele. **O que a produção escrita pode revelar?** Uma análise de questões de matemática. 2006. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, Sibéle Cristina. **Questões abertas de matemática**: um estudo de registros escritos. 2005. 119f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157f. (Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, Edilaine Regina dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita em matemática como uma estratégia de ensino: algumas considerações. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 119-136, dez. 2015.

SANTOS, Edilaine Regina dos; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em uma Questão Não Rotineira de Matemática. **Unión**, São Paulo, v. 24, n. 10, p. 103-115, dez. 2010.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TREVISAN, André Luis. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 160 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VIANNA, Heraldo Marelim. **Medidas referenciadas a critério**: uma introdução. Série Ideias, n. 8, São Paulo: FDE, 1998. p. 145-159.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática?** 2007. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.