unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

LUCIANE THIELE

APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: UM ENFOQUE FENOMENOLÓGICO

CASCAVEL
2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: UM ENFOQUE FENOMENOLÓGICO

LUCIANE THIELE

CASCAVEL – PR

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: UM ENFOQUE FENOMENOLÓGICO

LUCIANE THIELE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientador (a): Tiago Emanuel Klüber
Coorientador (a): Arthur Belford Powell

CASCAVEL – PR
2023

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Thiele, Luciane
Aprendizagem de frações no 6° ano do ensino fundamental na perspectiva de medição: um enfoque fenomenológico / Luciane Thiele; orientador Tiago Emanuel Klüber; coorientador Arthur Belford Powell. -- Cascavel, 2023.
207 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2023.

1. Frações. 2. Unidade de medida. 3. Aprendizagem. 4. Fenomenologia. I. Klüber, Tiago Emanuel, orient. II. Belford Powell, Arthur , coorient. III. Título.

FOLHA DE ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA DE DEFESA

LUCIANE THIELE

Aprendizagem de frações no 6º ano do Ensino Fundamental na perspectiva de medição: um enfoque fenomenológico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestra em Educação em Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:

Orientador - Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Arthur B. Powell
Coorientador - Arthur Belford Powell
Rutgers University

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Instituto Federal do Espírito Santo (IFES)

Adlai Ralph Detoni
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Richael Silva Caetano
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

CASCAVEL - PR
2023

À minha querida família que tanto admiro, dedico esse trabalho, resultado do esforço realizado ao longo deste percurso.

AGRADECIMENTOS

Realizando uma retrospectiva de acontecimentos, tenho muitos motivos para sentir orgulho deste trabalho e por tudo o que alcancei até aqui. Neste momento, quero deixar um agradecimento especial...

A Nossa Senhora por iluminar meus passos, por todas as bênçãos e proteção!

À minha filha Maísa. Obrigada por toda a compreensão da minha ausência em momentos em que eu estava me dedicando aos estudos. Eu amo você!

Ao meu esposo Christian pela paciência e companheirismo. Agradeço por sua compreensão e por “tomar conta de tudo” nos muitos momentos de minha ausência. Pelo incentivo e apoio em todas as situações, obrigada de coração!

Ao meu orientador, professor Tiago, por tanto conhecimento compartilhado. Pela paciência e por me auxiliar sempre que o procurei. Obrigada pela oportunidade, pelo incentivo, pelos conselhos, enfim, por estar comigo nesta pesquisa.

Ao meu coorientador, professor Arthur. Agradeço por ter aceitado o convite de colaborar com essa pesquisa. Foi uma honra tê-lo como coorientador.

Aos professores membros da banca, Adlai, Richael e Maria. Agradeço por terem aceitado o convite e pelas ricas contribuições. Foi uma honra tê-los como participantes deste trabalho.

À minha mãe Lucia e ao meu Pai Afonso. Agradeço por serem meu porto seguro. Obrigada por sempre acreditarem em mim e pela torcida para que este sonho se realizasse.

À direção, equipe pedagógica, professores e funcionários da Escola Municipal Joaquim Nabuco, pela compreensão nas reorganizações de horários, pela amizade, pela parceria e por todo o incentivo.

Aos meus alunos, obrigada por colaborar na implementação das atividades que fazem parte deste trabalho.

À minha colega de turma Denise, obrigada por sua amizade, pelas leituras, sugestões, pela troca de experiências e por me incentivar sempre a seguir em frente.

Ao grupo de pesquisa, pela acolhida, pelos momentos de estudo, pelas leituras dos trabalhos, pela amizade e pelas valiosas sugestões.

À equipe do PPGECEM, professores, coordenação e colegas de turma. Sou grata por poder ter conhecido e compartilhado experiências com profissionais tão competentes e dedicados.

THIELE, L. **Aprendizagem de frações no 6° ano do Ensino Fundamental na perspectiva de medição**: um enfoque Fenomenológico. 2023. 207 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2023.

RESUMO

O ensino e a aprendizagem de frações são temas importantes, recorrentes nas pesquisas em Educação Matemática e perpassam por inúmeras abordagens ou modos de ensinar e aprender os números fracionários. O enfoque na perspectiva da parte-todo é predominante tanto em documentos quanto nas pesquisas. Frente a isso, compreende-se que se faz necessário investir em pesquisas sob outra perspectiva, neste caso, a de medição, que tem características histórico-epistemológicas para a compreensão e construção do número fracionário. Essa perspectiva foi investigada sob a interrogação de pesquisa: *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? Assumiu-se a pesquisa qualitativa em uma perspectiva fenomenológica. Para tanto, os dados desta pesquisa foram constituídos a partir da experiência vivida da professora nas suas aulas de matemática. As atividades baseadas na perspectiva de medição foram implementadas em uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental. Todo o material produzido, diálogos (entre professora e alunos ou entre alunos) e registros simbólicos ou não simbólicos (representações figurais) dos estudantes ou da professora foram gravados, transcritos e, posteriormente, analisados. Nessa análise, utilizou-se como instrumento facilitador o *software* de análise qualitativa, *Atlas.ti* e procedemos segundo a perspectiva fenomenológica, destacando as Cenas Significativas e, a partir delas, mediante reduções sucessivas, chegou-se às Unidades de Significado. Em busca do que se manifestava, foi realizada a articulação das unidades que convergiam e, dessas, a elaboração das categorias. A pesquisa culminou em sete categorias abertas: C1) Compreensões iniciais sobre frações; C2) Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa; C3) A unidade e sua relativização; C4) A necessidade e o reconhecimento da unidade; C5) Manifestação do sentido da igualdade; C6) Simbolização e/ou representação das frações; e C7) Compreensão das frações sem barras. Essas categorias foram interpretadas hermeneuticamente e evidenciaram o sentido da unidade como aspecto central para a compreensão dos números fracionários. Essa unidade não é fixa, é escolhida, elegida no contexto da própria medição. Além disso, a comparação se mostrou como a ação mais recorrente e merece destaque, uma vez que o entendimento da unidade comum foi se mantendo nas várias possibilidades de arranjo entre as barras.

Palavras-chave: Frações; Unidade de medida; Aprendizagem; Fenomenologia.

THIELE, L. **Learning Fractions in the 6th Year of Elementary School from the Perspective of Measurement**: A Phenomenological Approach. 2023. 207 p. Dissertation (Master in Science Education and Mathematics Education) - Graduate Program in Science Education and Mathematics Education, State University of Western Paraná - UNIOESTE, Cascavel, 2023.

ABSTRACT

The teaching and learning of fractions are important, recurring subjects in Mathematics Education researches and undergo numerous approaches or methods of teaching and learning fractional numbers. The focus on the part-whole perspective is predominant in both documents and researches. Faced with this, it is understood that there is a need to invest in researches on another perspective, in this case, that of measurement, which has historic-epistemological characteristics for the comprehension and construction of a fractional number. This viewpoint was investigated under the research's questioning: What shows about the learning of fractions taught from the measurement perspective, with emphasis on the idea of magnitude and unit construction? The qualitative research took on a phenomenological approach. For this purpose, this paper's data was gathered from the lived experience of the teacher in her mathematics classes. The activities based on the perspective of measurement were implemented in a class of the 6th grade at Elementary School. All of the material produced, dialogs (between the teacher and the students or between students) and symbolic records or non symbolic (figurative representations) of the students or of the teacher were recorded, transcribed and, later on, analyzed. In this analysis, the qualitative analysis software, Atlas.ti, was used as a facilitating instrument and we proceeded according to the phenomenological perspective, highlighting the Meaningful Scenarios and, starting from them, through successive reductions, got to the Meaning Units. Seeking what was being demonstrated, the converging units were articulated and, from them, the categories were elaborated. The research culminated in seven open categories: C1) Inicial understandings about fractions; C2) Common unit of measurement relationship with multiplicative relationship; C3) The unit and its relativism; C4) The necessity and recognition of the unit; C5) Demonstration of the equivalent meaning; C6) Symbolization and/or representation of the fractions; and C7) Comprehension of fractions without rods. These categories were interpreted hermeneutically and emphasized the unit's meaning as a central aspect for the understanding of fractional numbers. This unit is not fixed, it is chosen, elected in the context of its own measurement. Furthermore, the comparison revealed itself as the most recurrent action and deserves a spotlight, once the understanding of the common unit was maintained in the various arrangement possibilities between the rods.

Keywords: Fractions; Unit of measure; Learning; Phenomenology.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEC - Antes da Era Comum

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CREP- Currículo da Rede Estadual Paranaense

ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática

LDB - Lei de Diretrizes e Bases

PCN - Parâmetro Curriculares Nacionais

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

PPGECEM - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

SEED/PR – Secretaria de Educação e do Esporte do Paraná

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta um estudo orientado pela seguinte interrogação: *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? O modo como compreendemos a pesquisa se alinha àquilo que Bicudo (2011, p. 21), afirma quando explica que pesquisar é "[...] perquirir sobre o que nos chama a atenção e que nos causa desconforto e perplexidade, de modo atento e rigoroso [...]". A autora ainda esclarece que "[...] pesquisar é perseguir uma interrogação em diferentes perspectivas, de maneira que a ela podemos voltar uma vez e outra e mais outra [...]" (p. 22-23). Esse movimento de ir e vir na busca do que é interrogado ilumina o caminho desta pesquisa. Por isso, compreendemos que o sucesso na pesquisa de abordagem fenomenológica está na compreensão do sentido do que se mostra, no significado dado à experiência vivida e na explicitação do compreendido, que desvela, de maneira clara, a estrutura do fenômeno interrogado (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010).

Em vista disso, nesta introdução, exporemos experiências vividas que levaram à explicitação da interrogação que norteou esta pesquisa. Exporemos, também, os motivos que conduziram à opção pela fenomenologia como postura assumida para sustentar os procedimentos metodológicos e a organização da estrutura deste trabalho.

1.1 Da experiência vivida à interrogação da pesquisa

Em 2006, iniciei[1] o curso de Formação de Docentes no município de Missal - PR, município em que ainda resido. Desde o início do referido curso, ser professora era a profissão almejada. Durante este período, decidi por prestar vestibular para o curso de matemática, área de atuação que me chamava a atenção. Após o ingresso na faculdade em 2010, comecei minha trajetória profissional desde o primeiro ano de curso. Em 2011, com um ano de graduação, iniciei como professora do Ensino

[1] Essa primeira seção está escrita, em sua maioria, na primeira pessoa do singular por se tratar da experiência vivida. O restante do texto será escrito na primeira pessoa do plural por considerar que o trabalho foi desenvolvido na relação intersubjetiva estabelecida estreitamente com o orientador e coorientador. Assim, é expressa uma compreensão compartilhada daquilo que aqui está registrado.

Fundamental - Anos Finais e Ensino Médio em escolas públicas de Missal e municípios vizinhos. Em 2015, período que já estava formada, prestei concurso para professora municipal de Missal e comecei a atuar como docente no Ensino Fundamental - Anos Iniciais.

Ao longo dos anos, sempre em busca de aprimorar minha prática docente em sala de aula, participei de variados cursos ofertados pela rede Municipal e Estadual de Educação. A procura por esses cursos foi movida pela vontade de conhecer mais sobre assuntos pertinentes a minha profissão e para ampliar a compreensão de mundo, de educação e, também, meus conhecimentos teórico-metodológicos acerca do ensino e da aprendizagem. No ano de 2020, o grupo de formação de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática, coordenado pelo professor Tiago Emanuel Klüber, realizou o evento *online*, "Diálogos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática", durante o qual passei a conhecer o Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - PPGECEM, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, *campus* Cascavel e pesquisar sobre Modelagem Matemática. No mesmo ano, estimulada pelas falas apresentadas nesse encontro, fiz minha inscrição para o processo seletivo de alunos regulares ao mestrado, sendo aprovada.

Impulsionada pelo desejo de dar mais um passo para avançar nos estudos e carregando na "bagagem", aproximadamente, nove anos de experiência em sala de aula, meu tema de pesquisa tratava do Ensino das Frações e Modelagem Matemática. Esse tema emergiu das minhas experiências vividas como professora nos mais variados anos do Ensino Fundamental, especificamente nos Anos Finais, no qual foi possível observar que os alunos apresentavam dificuldades na construção do conceito e na realização de operações com frações, mesmo já tendo passado pelo processo de escolarização nos anos anteriores, conforme legislação vigente do Ensino Fundamental, apresentada na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Esse incômodo, decorrente da minha prática, me colocou em movimento de indagação e de busca por compreender, em termos de pesquisa, o que seria possível realizar para superar, em alguma medida, esses problemas da aprendizagem dos estudantes. Nesse movimento, compreendi que perquirir possíveis modos de desenvolver o senso fracionário nos alunos é um tema sempre atual e emergente de pesquisas no âmbito da Educação Matemática (POWELL; ALI, 2018), sendo recorrente desde as primeiras pesquisas que foram desenvolvidas no campo da Educação Matemática Brasileira na década de 1980. Isso pode ser visto desde o primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, ocorrido em 1987, no qual encontramos os trabalhos intitulados: Frações através de Jogos (BORGES; COSTA, 1987) e Frações (DAUD, 1987), o que mostra a preocupação dos autores e professores em ensinar esse conteúdo, trazendo novas propostas de abordagem. Essa preocupação, também, é uma inquietação profissional minha, enquanto professora do Ensino Fundamental, pois vivencio a manifestação de uma compreensão limitada dos alunos ao lidar com as frações. Há pesquisas, ainda, que relatam essa limitação também por parte dos professores (SOUZA, 2021).

Os autores Powell e Ali (2018) apresentaram uma teoria que chamaram de “senso fracionário”, um significante e específico subconjunto do senso numérico que é descrito em termos de três categorias que se sobrepõem e interagem: a flexibilidade, razoabilidade e a magnitude. O senso fracionário, inclui a habilidade de tomar decisões sobre tamanhos de números e a flexibilidade e razoabilidade requerem conhecimentos relativos à magnitude de número. Mais detalhes sobre esses termos são abordados mais adiante em uma seção específica.

As dificuldades no ensino e na aprendizagem das frações são apontadas por vários autores, como: Scheffer e Powell (2019), Souza (2021), Amaral (2021), Graça, Ponte e Guerreiro (2021), e a sua incompreensão, conforme destaca Kieren (1980), acarreta dificuldades futuras em outros conteúdos matemáticos, como a álgebra, visto que sua aprendizagem é inerente a conceitos de números racionais.

De acordo com o que foi descrito até o momento, é possível afirmar que as dificuldades decorrem do modo como são abordados e compreendidos os significados de frações, portanto, metodológica, epistemológica e “ontologicamente”. Ao remeter-se ao significado das frações, esse conteúdo pode ser visto e abordado de maneiras distintas, como: parte-todo, quociente, razão, operador multiplicativo, medida e medição (KIEREN, 1980; POWELL, 2019a; BEHR *et al*., 1983). Considerando o que recomenda o Currículo da Rede Estadual Paranaense (PARANÁ, 2019), podemos dizer que o ensino de frações, no sexto ano, deve ser orientado exclusivamente pela interpretação parte-todo. No entanto, há pesquisas que sugerem a medição como primeira abordagem para o desenvolvimento do senso fracionário (POWELL; ALI, 2018; POWELL, 2018; SOUZA; POWELL, 2021), uma vez que precede, historicamente, à estruturação da ideia de parte-todo (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991; VENENCIANO; DOUGHERTY, 2014). Assim, esse sentido histórico indica também uma visão epistemológica que pode contribuir para superar a visão mais mecanizada e formalizada da concepção de parte-todo. Pela perspectiva de medição, a ontologia das frações surge de problemas de medição, que é resultado da comparação multiplicativa de pares de magnitudes (CARAÇA, 1951; POWELL, 2018).

Essa ontologia não está focada apenas nas representações tardias comumente utilizadas no ensino de frações e muito menos em criações didáticas que focam apenas o significado estruturado de parte-todo. Enfoca a ideia de que as frações se constituem em relações conceituais distintas daquelas mais operatórias, porque tratam de sua origem e existência nas relações humanas estabelecidas com objetos que careciam de medição[2]. Essa visão epistemológica e ontológica implica em uma mudança, também, metodológica para o ensino e para a aprendizagem das frações, de tal maneira que é possível, no mínimo, ampliar as possibilidades de compreensão das frações para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, que estão no momento de aprendizagem deste conteúdo escolar.

Desse modo, esta pesquisa investiga uma sequência de atividades planejadas com enfoque nos números fracionários, centrada num paradigma distinto, no qual o enfoque não é dado na parte-todo, como é tradicionalmente abordada e estruturada tanto nos documentos orientadores, quanto nos livros didáticos brasileiros. Assim, redirecionamos o foco da aprendizagem no significado da fração como resultado de uma medição.

A ênfase tradicional na parte-todo pode contribuir com uma compreensão inicial equivocada de que a fração seja um aglomerado de dois números independentes nomeados por numerador e denominador. Dessa forma, ao lidar com esse conteúdo, usa-se o conhecimento dos números naturais (e de inteiros) na expectativa de que funcione com a fração, como se pode ver amplamente em termos de “obstáculos epistemológicos” (JOSÉ; VIZOLLI, 2022).

Frisamos, aqui, que não estamos rejeitando o ensino de frações pela perspectiva parte-todo, mas defendemos, a partir de resultados de pesquisas da comunidade científica, que seu uso exclusivo limita a compreensão sobre frações

[2] Esse parágrafo é uma interpretação do professor Tiago Emanuel Klüber sobre a “ontologia” dos números fracionários, abordada nos trabalhos do professor Arthur Belford Powell. Ressalta-se que esse não é o sentido ontológico fenomenológico, no qual não há objetos em si, mas sempre na correlação do ver-visto, ou seja, aquele que vê um fenômeno que se manifesta apenas para quem o vê.

pelos alunos. Conforme aponta Powell (2019a), ao se trabalhar frações como a divisão em partes iguais de um objeto, prejudica o significado de uma fração imprópria (uma fração cujo numerador é maior que o seu denominador) e implica em dificuldades cognitivas. No entanto, interpretar a fração como o resultado de uma medição, respaldado na ideia de magnitude, remete à ideia de um único número e à origem ontológica das frações, como abordaremos no próximo capítulo. Magnitude é uma propriedade que todo número real possui, incluindo inteiros e frações (POWELL, 2019b). Pensar as frações com esse significado favorece o seu reconhecimento como um número.

Para o desenvolvimento das atividades planejadas nessa perspectiva, decidiu-se trabalhar frações com o auxílio do material Cuisenaire, resultado dos meus encontros de orientação como professor Arthur Belford Powell[3]. Ao utilizar esse material manipulativo como recurso para as atividades a serem implementadas com os estudantes, permite-se "[...] representar[4] uma relação multiplicativa entre os comprimentos de duas quantidades comensuráveis e assim representar um número fracionário qualquer" (POWELL, 2019b, p. 59), indicando que é um material manipulável com características adequadas para a abordagem dos números fracionários na perspectiva de medição, ainda que outros pudessem ser utilizados, como barbantes, elásticos ou quaisquer outros aparatos que favoreçam a ação de medir.

As atividades, implementadas com os estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental[5], promoveram a construção de conceitos do conteúdo de frações, como: equivalência, comparações (maior/menor), mínimo múltiplo comum, frações próprias e impróprias e operações de adição e subtração, focados na construção da ideia de

---

[3] Arthur Belford Powell possui vários escritos utilizando o material Cuisenaire para trabalhar frações pela perspectiva de magnitude, como: "Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais (POWELL, 2019b)" e "Como uma fração recebe seu nome?" (POWELL, 2019a).

[4] É pertinente esclarecer que, ao mencionarmos o termo "representar" aqui, não estamos assumindo-o no sentido fenomenológico, em outras palavras, o texto é trazido na atitude natural.

[5] Antes da implementação de atividades com os alunos do sexto ano, foi realizada uma primeira experiência com alunos da Educação Infantil, que resultou no texto: "O uso das barras de Cuisenaire para o desenvolvimento do senso de medida para alunos da Educação Infantil" (THIELE; POWELL; KLUBER, 2022). Um dos intuitos desse estudo era permitir que a professora-pesquisadora, deste trabalho, se familiarizasse com o uso das barras de Cuisenaire com alunos e suas relações, visto que a utilização desse material não fazia parte da sua rotina escolar. Essa experiência facilitou a implementação das atividades sobre frações que esta pesquisa sugere, porém não se caracterizou como um piloto, mas mobilizou conhecimentos antes da produção dos dados de pesquisa.

unidade de medida das frações pelos próprios estudantes. Essa unidade de medida é de suma importância, pois o estudante terá que decidir qual irá utilizar para medir certo comprimento. Ele poderá chegar a um resultado, uma quantidade, a qual representa o número de iterações necessárias para medir este comprimento.

Diante disso, a interrogação desta pesquisa solicita que se busque, nos modos de expressão, toda gesticulação linguística, como nos diálogos, gestos corporais, registros simbólicos ou não simbólicos (representações figurais) e compreensões intersubjetivas compartilhadas e explicitadas. Focaremos, aqui, nos diálogos (entre professora e alunos ou entre alunos) e registros simbólicos ou não simbólicos dos estudantes ou da professora, que revelem o que é indagado na interrogação, uma vez que os vídeos não puderam ser utilizados com a qualidade esperada. Desse modo, busca o que se mostra naquilo que concerne à compreensão dos alunos trabalhando frações na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade de medida para seu ensino. Demais esclarecimentos sobre "aprendizagem" e "frações" serão abordados em uma seção específica.

1.2 Fenomenologia, interrogação e estrutura da dissertação

Nesse tópico, são explicitados aspectos da postura fenomenológica de investigação assumida, por meio da qual buscamos compreender questões ligadas ao ensino e aprendizagem de frações, a partir de um movimento de reflexão sobre a experiência vivida da educadora/pesquisadora, bem como as experiências vividas dos discentes ao estudarem fração na perspectiva de medição.

Mas por que fenomenologia? A fenomenologia é um convite para questionar o que parece óbvio, que nos parece dado e certo, ou seja, o que nos é naturalizado. Essa Filosofia, iniciada pelo matemático e posteriormente filósofo Edmund Husserl (1859-1938), visa descrever o conteúdo da consciência, livre de critérios julgadores prévios. Desse modo, a fenomenologia não está interessada em explicar os fenômenos com constructos externos a ele, mas sim em descrevê-los, deixando que a experiência vivida com esse fenômeno possa efetivamente se expressar.

Portanto, mesmo que tenhamos assumido a teoria e as orientações práticas para o ensino de frações na perspectiva de medição, não temos essa teoria como norte de análise primário ou como uma "lente", uma vez que lançamos sobre ela e sobre a experiência vivida com os estudantes um olhar fenomenológico. Esse suspende, deixa de lado as crenças iniciais para compreender o fenômeno em sua estrutura. Entendemos que sob essa atitude é possível, mesmo que timidamente, compreender o fenômeno da aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade para seu ensino. Dito de outro modo, a produção dos dados de pesquisa se dirige ao vivido e expressado pelos estudantes, ao serem submetidos a atividades planejadas sobre frações embasadas na teoria proposta pelo professor Arthur Belford Powell, que ressalta a importância da introdução desse conteúdo a partir da perspectiva de medição.

Desse modo, mesmo correndo o risco de se repetir, destacamos que ainda que seja uma exigência de a atitude fenomenológica suspender a atitude natural acerca dos fenômenos investigados, não a ferimos, pois, ao assumir uma teoria para o desenvolvimento das práticas, não a assumimos como lente analítica da pesquisa. As crenças sobre a teoria também são postas em suspensão. A atitude fenomenológica se dirige à atitude natural para esclarecê-la, portanto, pode se dirigir também às práticas vividas, assumidas ou não com teorias científicas estruturadas ou de qualquer modo prático de organização pedagógica.

Assim, para avançar com essa pesquisa, segundo uma abordagem qualitativa, buscamos trabalhar com as qualidades dos dados à espera de análise. Bicudo (2006, p. 106) entende que:

> O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho etc.

O método fenomenológico de pesquisa, segundo Holanda (2006. p. 371), “[...] constitui-se numa abordagem descritiva, partindo da ideia de que se pode deixar o fenômeno falar por si, com o objetivo de alcançar o sentido da experiência”. Consequentemente, os dados desta pesquisa se originaram do movimento humano nas aulas, focando nos diálogos e registros dos estudantes ou da professora.

Assumindo uma postura fenomenológica, será possível aproximar-se do fenômeno investigado, que está na interrogação: *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? E, ao reportar-se a ele, é necessário, a princípio, desconfiar das nossas intuições e preconceitos, sobre o que conhecemos dela e de que forma se dá a aprendizagem desse conteúdo, pois estes podem desfigurar a visão daquilo que se mostra. Na investigação fenomenológica, busca-se perseguir aquilo que se manifesta e que se revela do fenômeno por meio da consciência (BICUDO, 2010). Esse movimento, que busca transcender o que está individualmente descrito e avançar em direção à estrutura do fenômeno, é conhecido como "redução eidética ou redução à essência" (BRITO, 2018). Portanto, é o caso desta investigação, em que voltamos a atenção para o fenômeno, buscando nos afastar de preconceitos e preconcepções teóricas que podem rotular o que ele é, olhar para o fenômeno como se fosse a primeira vez que se tem contato com o assunto, colocando-o em um estado de *epoché*[6].

Nossa interrogação interroga os modos de manifestação da aprendizagem dos estudantes no desenvolvimento de atividades sobre frações na perspectiva de medição. Conforme exposto até o momento, dando conta daquilo que a nossa interrogação de pesquisa solicita e os caminhos que a sua compreensão nos abre, fazemos uma breve incursão em nossa região de inquérito, explicitando-a no Capítulo 2, em busca da compreensão dos pressupostos que sustentam a visão de mundo e de conhecimento sobre o objeto pesquisado e, com isso, efetuarmos um movimento "redutivo"[7].

O Capítulo 3 apresenta os desdobramentos metodológicos da abordagem fenomenológica. Nesse capítulo, são apresentados os aspectos gerais do desenvolvimento das tarefas sobre frações e se coloca em evidência como investigamos as experiências práticas de aprendizagem dos estudantes sem prejulgamentos e sem projetar pensamentos prontos na análise dessas experiências. Além disso, explicitamos o modo como se deu o delineamento do cenário da pesquisa. Por fim, apresentamos os procedimentos para a organização e análise dos dados registrados na investigação.

[6] Segundo Bicudo (2010, p. 32), *Epoché* é "também chamada de redução ou ato de colocar em evidência. Refere-se a dar destaque ao que está sendo interrogado, de maneira que os atos da consciência constitutivos da geração do conhecimento sejam expostos". Termo sinônimo presente nos escritos de Husserl (2001) "epoqué".

[7] "Deve se esclarecer que redução, no âmbito da fenomenologia, não se refere a uma simplificação ou a um resumo do apresentado no texto, mas a um movimento de pensar articulador em que os sentidos vão se entrelaçando com mais sentidos e pelos significados atribuídos, postos em linguagem, vão se configurando em ideias que os abrangem em uma totalidade compreensiva" (BICUDO, 2017, trecho retirado de BARBARIZ, 2017, p. 61).

O Capítulo 4 contém a Análise Ideográfica das Cenas Significativas, constituídas a partir de registros em filmagens, áudios ou material escrito das aulas em que se deram as atividades práticas. Cada Unidade de Cena é seguida de uma ou mais Unidades Significativas, que expressam ideias nucleares e remetem ao núcleo do fenômeno.

O Capítulo 5, por sua vez, apresenta as convergências entre as Unidades Significativas da Cena, obtidas a partir de uma análise “nomotética”. Essas convergências formam os “núcleos de ideias” ou também denominadas de “categorias abertas", pois solicitam interpretação hermenêutica. Este tipo de categorização é mais do que encontrar palavras similares, mas se trata de uma articulação criteriosa e rigorosa de unidades que levam a uma compreensão mais ampla no contexto histórico, cultural, social, antropológico, epistemológico e sociológico e, certamente, exige um esforço distinto do pesquisador que assume a fenomenologia como concepção (KLÜBER; BURAK, 2012), pois, mesmo estando em uma comunidade científica e sabendo da validade e extensão das teorias, fica impedido de enquadrar a análise, precisa ir ao logos hermenêutico que sustenta a própria teoria e as proposições[8]. Realizamos, ainda, um movimento reflexivo, no qual tecemos interpretações dessas categorias, buscando compreender nosso fenômeno. O Capítulo 6 é dedicado à exposição de algumas considerações sobre a trajetória realizada. Por fim, apresentamos as referências utilizadas para a escrita do trabalho e os apêndices.

[8] Compreensão do Prof. Tiago Emanuel Klüber sobre a pesquisa fenomenológica dirigida ao rigor que é próprio da atitude fenomenológica.

CAPÍTULO 2

FRAÇÕES, APRENDIZAGEM E A PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO

Neste capítulo, realizamos uma breve, mas necessária, incursão sobre a região de inquérito que trata sobre frações, números fracionários, aprendizagem e a perspectiva de medição. Há um histórico sobre frações, bem como as orientações sobre o ensino e aprendizagem de frações nos documentos orientadores do Paraná. Naquilo que concerne ao ensino e à aprendizagem das frações, são apresentadas concepções e o modo como esse ensino aparece no livro didático do 6° ano utilizado na Rede Estadual de Educação do Paraná. Por último, apresentamos a perspectiva de medição para o desenvolvimento do senso fracionário e a abordagem instrucional para o ensino e a aprendizagem de frações, de autoria do professor Arthur Belford Powell, nomeada de 4A-Instructional Model.

2.1 Um breve histórico sobre o conhecimento das frações

Segundo Powell (2018a), “para compreender sua natureza ou a ontologia de um objeto matemático, devemos iniciar com uma análise histórica da sua origem” (p. 79). Em sentido Heideggeriano, ontologia é o "estudo dos entes enquanto tais", mas pode ser uma ontologia "regional", preocupada com o SER ou a natureza de, por exemplo, números, espaço ou uma obra da literatura (XXII, 8) (INWOOD, 2002, p. 11). Há diversas perspectivas ontológicas e diversas abordagens de classificação das ontologias. Dessa maneira, o matemático, ao investigar, por exemplo, o ser do “ente número”, assim como na filologia ao se questionar sobre o “ser” de uma obra literária em específico, faria ontologia. “Essas ontologias” seriam “regionais”, pois apresentariam um caráter limitador de investigação do ser e não do ser de um modo mais geral, que é a tarefa da Ontologia Fundamental Heideggeriana. Em termos fenomenológicos, a ontologia se refere à manifestação do ser para a presença, a qual em terminologia Husserliana é a pessoa em sua estrutura. Portanto, não se refere ao estudo dos entes em si, mas ao ser que jamais pode ser captado integralmente e não está além de sua manifestação enquanto fenômeno. Em certo sentido, levar em conta a história da produção do conhecimento é um caminho importante para pensar a ontologia do objeto; porém, fenomenologicamente, entendemos que historicidade é da pessoa que vive e não é fatídica. É nesse sentido que, mesmo que de perspectivas distintas, encontramos convergência com o modo de proceder ao ensino e aprendizagem de frações do professor Arthur Belford Powell, pois entendemos que partir da medição é favorecer a experiência vivida com a possibilidade de medição e os seus desdobramentos ideativos.

Especificamente, naquilo que concerne à *framework,* conforme esboçado pelo professor Arthur Belford Powell e seus colaboradores, para melhorar a epistemologia dos números fracionários, é provável que pesquisadores e educadores de Educação Matemática necessitem buscar uma nova ontologia dos mesmos, e nisso estamos de acordo. Segundo o autor "a consciência da gênese do objeto influenciará nossas perspectivas acerca de como se adquire conhecimento dele, ou seja, sobre sua epistemologia" (POWELL, 2018a, p. 79). Sobre essa gênese, nós a entendemos também de modo distinto, porém, articulado. Em suma, a gênese ou origem do conhecimento de número é dada na subjetividade que pensa o seu próprio pensar. Por isso a mudança de perspectiva teórica sobre o ensino de frações se alinha às preocupações Husserlianas sobre o esvaziamento técnico da simbologia e operações mecânicas. Desse modo, podemos trabalhar com essa perspectiva sem abnegar da atitude fenomenológica.

Em uma perspectiva historicista do conhecimento matemática, a necessidade de contar estava presente na rotina dos povos como uma questão de sobrevivência, conforme afirma Caraça (1951, p. 3):

> Toda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exigem que, a cada momento, se façam contagens – o pastor para saber se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho, o operário para saber se recebeu todo o salário que lhe é devido, a dona de casa ao regular suas despesas pelo dinheiro de que dispõe, o homem de laboratório ao determinar o número exato de segundos que deve durar uma experiência – a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias, a realização de contagens.

Partindo dessa necessidade de contagem, ordenação e comparações de quantidades, surgiram os números. Segundo esse mesmo autor, não se sabe exatamente por quantos séculos se arrastou a criação dos números, mas sabe-se que foram se formando lentamente pela prática diária de contagens e que o homem primitivo de há 20.000 anos, ou mais, não tinha o mesmo conhecimento de número que temos hoje.

Com o início da prática da agricultura nas culturas mesopotâmicas e egípcias, por toda a extensão dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, e nós entendemos que há em diversas outras em que não há registros, e com as condições materiais e climáticas da época, surgiu a necessidade desses povos delimitarem suas terras, frequentemente, devido às esperadas inundações nas épocas de grandes volumes de chuvas. Como resultado, houve a valorização dessas terras e o surgimento dos famosos "esticadores de corda" (STRUIK, 1948/1967, p. 11 *apud* POWELL, 2018a). Esses agrimensores tinham a função de medir os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida fictícia estava marcada. Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a unidade de medida cabia no terreno, mas nem sempre essa medida cabia inteira nos lados do terreno, necessitando uma subunidade.

Nessas situações em que a unidade de medida tomada como padrão não cabia um número exato de vezes no objeto medido, surgiu a necessidade de "[...] subdividir a unidade de medida num certo número de partes iguais" (CARAÇA, 1951, p. 32).

De maneira simbólica,

> [...] para saber a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u, nem sempre era o caso de d ser exatamente k unidades de medida u, onde k é um número inteiro. Ou seja, não é garantido que d, medido por u, seja exatamente igual a $k \times u$. [...] Em geral, se d não for igual a um múltiplo exato de u, poderá existir uma subunidade da medida v, de modo que d seja igual a exatamente m subunidades de v, isto é, d=m×v; e u é igual a exatamente n subunidades de v, ou seja, u=n×v, o que implica que v=1/n×u. Como $d = m \times v$, então d=m×1/n×u; isto é, d=m/n×u. Assim, a distância d é igual à razão m enésimos (ou m um-enésimo) da unidade de medida u, onde m/n é uma fração. Essa expressão—d=m/n×u— representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis d e u (POWELL, 2019a, p. 706-708).

Esse foi um grande avanço na construção de um novo campo numérico, os números racionais, que compreende os números inteiros mais os formados pelos números fracionários em suas diferentes representações, os quais surgiram da necessidade de medição, conforme destacado por Caraça (1951, p. 38, inserção nossa): "A origem concreta dos números racionais, isto é, o seu significado [é visto] como expressão numérica de medição de segmentos".

No entanto, de início, nos povos egípcios, eram conhecidas somente as frações unitárias, ou seja, frações com numerador um e, para escrevê-las, eram colocados símbolos ovais sobre o denominador, simbolizando frações $\frac{1}{n}$. Havia ainda uma exceção para frações do tipo $\frac{n}{n+1}$, consideradas um complemento da fração unitária, como exemplo “[...] atribuíam à fração $\frac{2}{3}$ um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso” (BOYER, 1996, p. 9).

As demais frações com numerador diferente de um eram escritas como combinações de frações unitárias, conforme destaca Boyer (1996, p. 9): “A fração $\frac{3}{5}$ para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como soma de três frações unitárias $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{15}$”. De acordo com esse autor, o modo de composição de frações como soma de frações unitárias era encontrada em registros no Papiro de Ahmes (1650 AEC). Esse documento contém uma série de tabelas e problemas, que descrevem métodos de multiplicação e divisão dos egípcios e que apresentam, também, uma forma de transformar frações gerais em soma de frações unitárias.

Porém, de acordo com Aleksandrov (1963, *apud* POWELL, 2018a), o surgimento histórico de frações não está ligado à ideia de divisão de números inteiros, nem a múltiplos de frações unitárias, e sim da dependência da distinção fundamental entre uma unidade usada para contar e para medir. O autor ainda afirma que apenas objetos inteiros são contados por números inteiros, ou seja, a unidade escolhida não é divisível ao contar, porém, ao medir a unidade escolhida é divisível.

Este é um grande diferencial conceitual comparado à apresentação ontológica das frações que resulta da divisão de números inteiros, partes de um todo discretizado ou como múltiplos de frações unitárias exibidas em uma reta numérica, que se apresentam como base nos livros didáticos e nos documentos orientadores brasileiros vigentes, como apresentaremos nas próximas seções.

No entanto, essa apresentação ontológica dominante se impôs como uma intepretação única e hegemônica, tanto por sua eficiência em termos da matemática quanto de habilidades de cálculo dos matemáticos, porém, obscureceu aspectos históricos e práticos que compõem uma ontologia dos números fracionários. Em certo sentido, essa intepretação foi tomada como uma ontologia dos números fracionários a partir da partição de uma área ou conjunto e não de suas origens históricas, inibindo outras formas de conceber o número fracionário.

Essa intepretação ganha força com os matemáticos formalistas no século XX, que acreditavam que toda a matemática poderia ser formulada sem qualquer referência aos seus significados ou contextos práticos, priorizando, assim, regras para manipulação de fórmulas (POWELL, 2019a). É o que se pode ver em Snapper (1989), quando afirma a crença de uma linguagem sem conteúdo ser o fundamento para toda a matemática, ontologicamente, sendo tomada como linguagem. Em outras palavras, "os formalistas sustentam que os objetos iniciais do pensamento matemático são os próprios símbolos matemáticos e não quaisquer significados atribuídos a eles" (SIMONS, 2009, *apud* POWELL, 2019a, p. 701). Portanto, uma definição formalista de números racionais na forma fracionária é a seguinte:

> Os números racionais representados como frações comuns são símbolos bipartidos que expressam quocientes ou proporções de dois números inteiros, a/b, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Na expressão, a/b, a é chamado de dividendo ou numerador e b de divisor ou denominador (POWELL, 2019a, p. 701).

Contudo, essa representação simbólica mostrou-se insuficiente ou mesmo epistemologicamente indesejável para sustentar a compreensão dos alunos (POWELL, 2019c). Daí, decorre a urgência de que seu ensino precisava de suporte, bem como a concepção sobre frações deveria ser alterada, enriquecida ou ampliada. Nesse ponto, Davydov e Tsvetkovich (1991 *apud* POWELL, 2019c, p. 5, tradução nossa) observam o seguinte:

> A alunos da quinta série e crianças em idade escolar ainda mais jovens, não podem ser submetidos ao princípio daquela divisão que leva a frações em uma forma simbólica. Seu correlato visual tinha que ser encontrado. É neste papel que apareceu a chamada divisão das próprias coisas, sua subdivisão em partes que, no curso do ensino, podem ser ligadas com relativa facilidade a termos característicos para definir frações ordinárias.

Nesse sentido, "[...] os educadores matemáticos inventaram correlações visuais para frações que envolvem particionar itens do cotidiano" (DAVYDOV; TSVETKOVICH, 1991; SCHMITTAU, 2003, *apud* POWELL, 2019a, p. 701), como círculos, pizzas e barras de chocolate. Embora esses significados contrariem o que propõem os formalistas, esse tipo de interpretação, nomeado como perspectiva da partição (POWELL, 2019a), fornece às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e sua representação simbólica, $\frac{a}{b}$.

Disso tudo, conhecer aspectos históricos e a necessidade dos povos mais antigos, e perceber que proporcionaram a criação de diferentes conteúdos matemáticos, é tão significativo, que nos possibilita, além de conhecermos a história da matemática, nos nutrirmos do contexto histórico cultural de algumas civilizações, como afirma D'Ambrósio (2012, p. 29) "a história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto de sua época". Fenomenologicamente, é possível compreender e "escavar" atos originários com os quais cada povo, em seu tempo e mundo vida, na tradição em que estavam imersos em plena articulação com este tempo. Por isso, o sentido de medição é o que fica como relevante para "ser re-ativado" nas situações de aprendizagem.

Esses aspectos históricos se consolidaram na tradição e se consumam nos currículos escolares mundo afora. Porém, como o nosso campo de estudos é no estado do Paraná, focaremos em seus documentos orientadores, os quais dialogam com os documentos nacionais.

2.2 Documentos orientadores nacionais e do Paraná e suas orientações de ensino

A Educação Básica é um direito garantido a todos os cidadãos brasileiros, previsto na Constituição Federal de 1988, que possui um caráter democrático e garante em seu texto direitos fundamentais, que são indispensáveis para a promoção da dignidade humana. Embasada na Constituição Federal, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 1996) assegura ao cidadão o direito ao acesso à educação de forma gratuita e de qualidade, e compreende a educação como um processo que se desenvolve em vários espaços, sendo eles a família, a convivência humana, a instituição de ensino e a sociedade em geral. Além disso, a instituição de ensino agrega diferentes papéis na formação do indivíduo, em consonância com o contexto histórico, social e cultural.

Pensando nos aspectos que a instituição de ensino possui, visando ao progresso e a uma melhor organização do sistema educacional, são elaborados regularmente documentos que norteiam o trabalho dos envolvidos nesta instituição. Esses documentos existem com variados níveis de abrangência, quais sejam: nacionais, estaduais, municipais e da própria instituição.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), que, embora não seja considerado lei e não esteja vigente, proporcionavam a garantia de uma orientação comum e foram extensamente citados e visados por pesquisadores e professores. Eles surgiram como uma proposta de superação dos guias curriculares, impostos durante a ditadura militar e das propostas curriculares ao romper com a ideia de conteúdos ordenados e, apesar de proporem uma seleção e uma sequência, tinham como princípio a autonomia dos professores (FILIPE; SILVA; COSTA, 2021). Nesse documento, alguns conteúdos foram selecionados e organizados em blocos, para compor os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental. Os blocos de conteúdos previstos eram: 1) Números e Operações; Espaço e Forma; 2) Grandezas e Medidas; e 3) Tratamento da Informação. Esses conteúdos são dispostos em quatro ciclos de aprendizagem. Os dois primeiros ciclos contemplam as séries iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, 1ª, 2ª, 3ª e 4ª séries às quais, após a reformulação para o Ensino Fundamental com nove anos, correspondem, respectivamente, aos 2º, 3º, 4º e 5º anos, e os últimos ciclos contemplam as séries finais do Ensino Fundamental, 5ª a 8ª séries, atualmente, do 6º ao 9º ano, respectivamente.

O conteúdo de frações nos PCN (BRASIL, 1997) é apresentado no bloco Números e Operações e é recomendado que o seu ensino deva ser iniciado a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental. Isso equivale aos 4° e 5° anos do Ensino Fundamental, aprovado em 2006, e aponta como prática relevante a exploração do conceito de fração a partir de situações que estão implícitas na relação parte-todo.

O documento mais recente em nível nacional, que rege a Educação Básica, é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), considerada "[...] uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas" (BRASIL, 2018, p. 5), o documento presenta normas que definem um conjunto de aprendizagens consideradas essenciais para que os estudantes as desenvolvam até o término da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013), a BNCC direciona a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

O Ensino Fundamental é a etapa com o maior tempo de duração, sendo ela dividida entre Anos Iniciais (1° ao 5° ano) e Anos Finais (6° ao 9° ano). Levando em consideração o Ensino Fundamental – Anos Finais, a BNCC preconiza que nessa etapa é preciso retomar e ressignificar aquilo que foi assimilado nos anos iniciais e ainda enuncia que, ao longo do Ensino Fundamental – Anos Finais, "Os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas” (BRASIL, 2018, p. 60).

Em consonância, mas também com características próprias aos documentos orientadores de ensino, em nosso estado, temos o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (PARANÁ, 2018), elaborado a partir da Base Nacional Comum Curricular. Esse documento orienta todas as instituições públicas e particulares do estado, e foi elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Paraná - SEED/PR. O Referencial Curricular do Paraná:

> [...] segue a estrutura da BNCC trazendo para a realidade paranaense discussões sobre os princípios e direitos basilares dos currículos no estado e suscitando a reflexão sobre a transição entre as etapas da Educação Infantil para o Ensino Fundamental e entre os anos iniciais e os anos finais deste, bem como sobre a avaliação como momento de aprendizagem. Em seguida, o documento traz as etapas Educação Infantil e Ensino Fundamental com as discussões pertinentes a cada uma e seus organizadores curriculares, os quais correspondem à estrutura dos conhecimentos que respaldam o trabalho pedagógico (PARANÁ, 2018, p. 8).

Do mesmo modo, como a BNCC apresenta, o Referencial Curricular expõe que o Ensino Fundamental - Anos Finais - deve representar a continuação da etapa anterior, ou seja, a continuidade do Ensino Fundamental - Anos Iniciais. Afirma-se que, nesta fase, os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, os quais envolvem conhecimentos sistematizados, próprios de cada componente curricular e se faz necessário o fortalecimento da autonomia dos estudantes por meio de diferentes conhecimentos e informações.

A partir disso, a Secretaria de Estado de Educação e do Esporte do Paraná (SEED/PR), em 2019, produziu outro documento voltado apenas para a rede estadual de ensino (6° ao 9° ano), o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP) (PARANÁ, 2019) que, segundo a secretaria, complementa o Referencial Curricular do Paraná. Esse documento, apesar de ter sido elaborado em 2019, foi apresentado aos professores em 2020, não havendo oportunidade de discussão ou colaboração, portanto, “[...] gerou desconforto aos professores, porque tal documento inclui, altera e exclui elementos da BNCC” (OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, p. 2).

No ano de 2021, a Secretaria de Estado da Educação e do Esporte do Paraná (SEED/PR) elaborou outro documento denominado Caderno Currículo Priorizado, com o intuito de orientar as ações de retomadas de alguns conteúdos essenciais, a fim de preencher lacunas de aprendizagem surgidas do contexto emergencial do ano de 2020. Esse documento apresenta uma seleção e uma reorganização dos objetivos de aprendizagem de Matemática, para os Anos Finais do Ensino Fundamental, com a finalidade de aproximar as aprendizagens dos/as estudantes aos conhecimentos propostos na Base Nacional Curricular Comum e do Referencial Curricular do Paraná, e passou a ser o documento principal de orientação a respeito dos conteúdos para os professores. Na próxima seção, apresentamos as orientações dos documentos analisados anteriormente para o ensino das frações.

2.2.1 Orientações para o ensino de frações

Ao analisar os documentos descritos anteriormente, buscando informações sobre o que eles propõem para o estudo das frações, partindo da BNCC, que orienta que este conteúdo seja iniciado no 4° ano, diferente do que propõe o Referencial Curricular do Paraná. Esse último, por sua vez, orienta que o conteúdo de frações se inicie no 3º ano, conforme está disposto na unidade temática "Números e álgebra" e, no item objetivos de aprendizagem, descreve: "Estabelecer relações entre as partes e o todo, em uma fração, no contexto de resolução de problemas utilizando apoio em imagens e material manipulável" (PARANÁ, 2018, p. 833).

Nos anos seguintes, o Referencial Curricular e o Currículo Priorizado recomendam que esse conteúdo seja aprofundado gradativamente, inserindo-se os conceitos de equivalência, de simplificação e de comparação, bem como as operações com frações. No 6º ano, o conteúdo de frações tem como intuito que o aluno reconheça a fração como: parte de um todo e quociente; entenda o significado de numerador e denominador; simplifique e obtenha frações equivalentes; compare frações com denominadores iguais e diferentes e resolva problemas que envolvam as quatro operações (PARANÁ, 2018, 2019, 2021). Com base nesses documentos, os alunos desse ano escolar devem ter a aptidão em identificar frações como sendo parte de um todo, obter frações equivalentes, simplificar e comparar frações, bem como, resolver problemas.

Em suma, os documentos orientam que o estudo das frações seja abordado exclusivamente como: parte-todo até o quinto ano; parte-todo e resultado de uma divisão para o 6º ano; parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador para o 7º ano. Nesse sentido, não é impróprio afirmar que, mesmo que se aprenda por meio de uma abordagem mais aberta, focada em aspectos da realidade, as crenças sobre a natureza dos números fracionários se assentam em uma interpretação ontológica de características formalistas, na qual a linguagem formal se sobrepõe aos aspectos epistemológicos e históricos focados na “necessidade” humana de contar. Para além das recomendações dos documentos, é importante explicitar, ainda que de maneira breve, concepções de aprendizagem em pesquisas sobre o tema na Educação Matemática.

2.3 Uma concepção inicial sobre a aprendizagem

Ao voltar-se ao termo “aprendizagem”, se faz necessário compreendê-lo em nosso horizonte primário. Em uma acepção mais comum, dicionarizada, aprendizagem significa a “aquisição de uma técnica qualquer, simbólica, emotiva ou de comportamento, ou seja, mudança nas respostas de um organismo ao ambiente, que melhore tais respostas com vistas à conservação e ao desenvolvimento do próprio organismo” (ABBAGNANO, 2007, p. 75). Disso, pode-se dizer que a aprendizagem está atrelada ao desenvolvimento do próprio sujeito, à melhoria das respostas a determinadas situações.

Em sentido cognitivista, Becker (2008, p. 53) relata que “Um dos conceitos que mais resistem às contribuições da ciência é o de aprendizagem”. Nesse sentido, podemos dizer que questões relacionadas à aprendizagem enfrentam um dilema que perpassa os anos de escolarização e concernem a algumas especificidades que implicam no seu desenvolvimento. Assim, diante das variadas concepções sobre a aprendizagem, explicitamos, a seguir, concepções históricas de aprendizagem, como de Platão, Aristóteles e Jean Piaget.

Na concepção inatista de Platão (427-347 AEC), a alma antecede o corpo e, antes de encarnar, o sujeito tem acesso ao conhecimento; talvez, este foi o ponto de partida para as discussões em torno do conhecimento humano. Becker (2001, p. 20) afirma que, de acordo com essa concepção, “[...] o ser humano nasce com o conhecimento já programado na sua herança genética”, caberia assim ao professor entrar em ação como um “facilitador” da aprendizagem, interferindo o mínimo possível na construção do conhecimento.

Já a concepção empirista de Aristóteles (348-322 AEC) contraria a concepção inatista. Embora nasçamos com a capacidade de aprender, é necessário que aconteçam experiências ao longo da vida, para que a capacidade de aprendizagem se realize. De acordo com Becker (2001, p. 17), nessa concepção “O professor considera que seu aluno é tábula rasa não somente quando ele nasceu como ser humano, mas frente a cada novo conteúdo estocado na sua grade curricular, ou nas gavetas de sua disciplina”. Ademais, acredita-se que o papel do professor seja proporcionar condições que priorizem a memorização e repetição de conteúdo.

Na concepção construtivista de Jean Piaget (1896-1980), a aprendizagem ocorre por meio do engajamento do aluno na construção do seu próprio saber, na interação com o meio tanto físico como social. Piaget, ao se propor a estudar a gênese do conhecimento centrado na ação do sujeito, ou de como se dá o desenvolvimento de sua inteligência, questiona sobre o que é a aprendizagem para a psicologia genética. Esse questionamento é respondido por ele ao esclarecer a diferença entre desenvolvimento e aprendizagem:

> [...] desenvolvimento é um processo que diz respeito à totalidade das estruturas de conhecimento. Aprendizagem apresenta o caso oposto. Em geral, a aprendizagem é provocada por situações provocadas por psicólogos experimentais; ou por professores em relação a um tópico específico; ou por uma situação externa. Em geral, é provocada e não espontânea. Além disso, é um processo limitado a um problema único ou a uma estrutura única. Assim, eu penso que desenvolvimento explica aprendizagem, e esta opinião é contrária à opinião amplamente difundida de que o desenvolvimento é uma soma de experiências discretas de aprendizagem (PIAGET, 1964 *apud* FERRACIOLI, 1999, p. 187).

Portanto, o autor compreende que a aprendizagem acontece como função do desenvolvimento total e não como um fator que o explica. Ele restringe a aprendizagem à aquisição de um conhecimento novo e específico derivado do meio, mas, para ele, o sujeito possui uma certa estrutura mental; dessa forma o indivíduo assimila o estímulo (meio) e, após uma interação ativa, emite uma resposta. Em outras palavras, o conhecimento adquirido é devido a uma interação mútua do estímulo sobre o sujeito e ao mesmo tempo do sujeito sobre o estímulo.

Becker (2001, p. 72) reforça que “Não se pode esquecer que, em Piaget, aprendizagem só tem sentido se coincide com o processo de desenvolvimento do conhecimento, com o movimento de estruturas da consciência”. Dessa, forma o conhecimento é dado sempre como algo inacabado e que necessita da ação da consciência.

Rogers (1902-1987), que é considerado um representante da psicologia humanista e da corrente humanista em educação, propõe que a educação deve se assegurar os significados que os alunos dão ao conteúdo apresentado. Chama esse processo de “aprendizagem significante”. Essa aprendizagem significante deve proporcionar uma mudança no indivíduo no sentido de provocar alterações nas suas crenças, valores, personalidade, no cognitivo, entre outras instâncias. O aluno é o centro, ele é responsável por iniciar sua aprendizagem. Os humanistas entendem o ser humano como um ser que evolui, buscando construir valores, realização pessoal e bem-estar no mundo. Nessa corrente ainda, o professor também deve criar um ambiente “facilitador” de aprendizagem (SILVA, 2004).

Expondo características da aprendizagem, nesse momento, sob a luz da fenomenologia, Brito (2018) anuncia três características essenciais: pessoalidade, transformação e índice existencial. O autor menciona que o fenômeno aprendizagem é indissociável da pessoa que aprende, logo, a pessoalidade da aprendizagem é uma de suas características essenciais, e que o fenômeno da aprendizagem somente se expressa em uma pessoa devido a algum tipo de inacabamento. “É por conta desse inacabamento que a aprendizagem se mostra como um florescer contínuo de possibilidades de ser e de viver, isto é, se manifesta como *transformação*” (BRITO, 2018, p. 30). Silva (2004) também afirma que a aprendizagem acontece quando o indivíduo incorpora como seu, o conhecimento. Esse conhecimento é capaz de modificar a realidade, dar dimensões novas e transformadoras para o indivíduo, possibilitando seu desenvolvimento.

Essas caracterizações dadas por Brito se assemelham à concepção construtivista, pois o sujeito de aprendizagem tem papel fundamental na sua aprendizagem e ela ocorre devido a algum inacabamento. No entanto, se distanciam dela porque não focam a aprendizagem como um edifício a ser construído, ainda que aceite algum grau de estruturação.

Na fenomenologia, a aprendizagem se expressa de maneiras distintas, como na fala, nos gestos, olhares, registros simbólicos, modos de agir, enfim, em gesticulações linguísticas do corpo que dizem do nosso modo ser e de viver, esses modos de expressão são conhecidos como um “índice existencial” (BRITO, 2018). A percepção vai ser resultado do “dar-nos” conta. Segundo Alles Bello (2006, p. 31):

> Esse "dar-se conta" é a consciência de algo, por exemplo, a consciência de tocar alguma coisa. Nós conseguimos registrar os atos de ver e tocar, mas onde nós registramos esses atos e como os registramos? Aqui está a novidade, pois Husserl diz que o ser humano tem a capacidade de ter consciência de ter realizado esses atos, enquanto ele está vivendo esses

> atos, sabe que os está realizando. Sabe que está realizando esses atos na relação com algo que está vendo ou tocando.

Logo, fenomenologicamente, o conhecimento é constituído. A aprendizagem é um fenômeno das vivências espirituais, psíquicas e perceptivas, unidas, mas distintas. Ver e tocar são vivências e*,* por serem vivências, podemos dizer, então, que são registradas por nós e delas temos consciência. A aprendizagem, e, portanto, a significação, só se dá entre as vivências da pessoa que visa um fenômeno, seja ele decorrente da percepção sensível a objetos da fisicalidade, seja da percepção interna dos objetos das vivências psicológicas ou espirituais.

Na próxima seção, apresentamos algumas concepções sobre o ensino e aprendizagem de frações e, para isso, recorremos à literatura considerada relevante para a nossa pesquisa.

2.3.1 O ensino e a aprendizagem das frações na Educação Matemática

Pesquisadores da Educação Matemática, da Psicologia Cognitiva e da Neurociência (POWELL, 2018a; SIEGLER *et al.*, 2013) revelam dificuldades no ensino e na aprendizagem de frações, podendo impactar, de modo negativo, em tópicos mais avançados da matemática, por exemplo, na álgebra (POWELL, 2018b; SCHEFFER; POWELL, 2019; SIEGLER *et al*., 2013; KIEREN, 1980).

Historicamente, as frações foram construídas a partir de diferentes necessidades e significações (KIEREN, 1980) conforme destacamos no início deste capítulo. Desse modo, há vários obstáculos encontrados por professores para ensinar e por alunos em compreender a lógica operacional das frações. Powell (2018a, p. 79), baseado nos autores Clarke *et al*. (2006) e Ma (1999), afirma que “os professores dos anos iniciais veem como um desafio complexo ensinar frações”.

Portanto, ao ensinar frações para os estudantes, nós, professores, nos questionamos em relação a seu ensino, por exemplo: Como devemos iniciar o conteúdo de frações? É conveniente o professor abordar primeiramente a ideia de fração como parte-todo? Iniciar por grandezas discretas ou contínuas? Frações simbólicas ou não simbólicas? Quais “tipos” de frações abordar primeiramente, as frações próprias ou impróprias? Qual ou quais significado(s) das frações devemos abordar com os estudantes?

Não por menos que são tantas as dúvidas presentes, pois ao recorrer a pesquisas, como Kieren (1980) e Behr *et al*. (1983), pesquisadores da Educação Matemática afirmam que, para aprender frações, é necessário compreender seu conceito que é bastante complexo, pois as frações não podem ser definidas por um único significado. Logo, para entender frações, é preciso conhecer suas diferentes interpretações (KIEREN, 1980).

Thiele, Klüber e Powell (2022, no prelo) ao analisarem trabalhos publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, das treze primeiras edições (1987 a 2019), sobre modos de ensinar frações no Ensino Fundamental e as interpretações atribuídas a elas, apontam para a presença de diversificados modos de ensino para o conteúdo de frações. Os autores dos trabalhos analisados utilizaram de: materiais manipuláveis; *softwares*; aspectos do cotidiano dos alunos; sequências de atividades que envolvem figuras, desenhos ou situações-problema. Naquilo que concerne às interpretações atribuídas à natureza das frações, os autores destacam que os trabalhos analisados se apoiam, em sua maioria, em um única intepretação, como parte-todo, dando ênfase às frações próprias.

Scheffer e Powell (2020), em um recente estudo, analisaram uma amostra de 56 pesquisas entre 2013 e 2019 sobre o conhecimento de frações na Educação Básica, no qual constataram que as dissertações, teses e artigos enfatizam as interpretações de parte-todo.

Embora essa perspectiva de partição (parte-todo) apareça com força nas pesquisas, seja como foco dos documentos orientadores brasileiros, seja a comumente utilizada para o ensino das frações nas escolas e se apresenta como a única perspectiva nos livros didáticos brasileiros, não é a única forma de introduzir o ensino desse conteúdo e nem a mais indicada.

Outro ponto a ser destacado das pesquisas de Scheffer e Powell (2020) e de Thiele, Powell e Klüber (2022, no prelo), diz respeito à predominância de materiais manipuláveis, como a exploração da representação figural e da utilização de tecnologias digitais no ensino de frações. Eles salientam que trabalhos envolvendo atividades lúdicas, como dobraduras e montagem de robôs, assumem um caráter motivacional de apoio ao raciocínio, contribuindo para a construção do conhecimento dos alunos.

Em sentido fenomenológico, entendemos para além disso. Ao material é atribuído, implícita ou explicitamente, o sentido de medição que transcende a motivação em sentido psicológico. Considerando que o sentido da medida inicia na corporeidade, em um corpo vivente (cognição, emoção e corpo físico) e pelas vivências intelectivas ou espirituais (analogia, identidade imaginária ou figural, etc.) são transferidas a ela, a ideia de poder medir objetos que não sejam o próprio corpo, portanto é um fenômeno que é visado e não o material. Assim, aquilo que Piaget chama de abstração empírica, no sentido Kantiano de convergência entre a razão e a empiria, não faz sentido para nós, pois aquilo que é tocado é tocado no ato de tocar de quem o toca. O que há é um sentido, uma ideia de medição, que é transferida para algo que é tocado ou visto como passível de manter o sentido da medida que se inicia pela pessoa que atua com o fenômeno que lhe chega[9].

Retomando pesquisas sobre saberes e formação de professores, segundo Santos (2005, p. 112), elas mostram que "[...] parece haver uma lacuna entre o conhecimento do professor, conteúdo a ser ensinado e a forma como ele pode ser aprendido". Além disso, afirma que os conhecimentos dos professores sobre os conceitos matemáticos são marcados por pouca compreensão. O mesmo autor, em estudo realizado com professores polivalentes e especialistas, destacou que, em atividades com frações sem o uso de material didático pedagógico, estes recorrem a conceitos e a estratégias utilizadas no seu tempo de estudante da Educação Básica, baseada na repetição de mecanismos de resolução. Dessa forma, o autor defende que é preciso investir na formação inicial com enfoques didático-pedagógicos sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de fração.

Embora o material manipulável seja um grande aliado no ensino e na aprendizagem, não podemos depositar o alcance dos objetivos escolares no seu uso, inclusive pela concepção fenomenológica que explicitamos. Segundo Thompson e Lambdin (1994), devemos olhar para a totalidade do ambiente instrucional para entender o uso eficaz de materiais concretos, de modo especial que os professores percebam o que eles pretendem ensinar e as imagens das atividades nas quais eles são convidados a participar. "A ideia que você quer que seus alunos vejam está na maneira como você entende o material e na maneira como você entende suas ações com ele" (THOMPSON; LAMBDIN, 1994, p. 3, tradução nossa). Dessa forma, o professor precisa estar ciente das múltiplas interpretações dos materiais que os

[9] Esse parágrafo é uma compressão do professor Dr. Tiago Emanuel Klüber sobre a constituição da medida e sua relação com objetos do mundo fenomênico, registrado aqui, pela primeira vez, para auxiliar no entendimento da concepção fenomenológica de aprendizagem.

alunos podem ter, e isso é importante para o fortalecimento de outras relações, mas o professor precisa estar preparado para lidar com elas.

Behr *et al*. (1983) ao se referirem à utilização de algum material manipulável no ensino dos números racionais, afirmam não existir uma única ajuda manipulativa que é "melhor" para todas as crianças e para todas as situações. Um modelo concreto que é significativo para uma criança em uma situação pode não ser significativo para outra criança na mesma situação, nem para a mesma criança em uma situação diferente. O objetivo é identificar atividades, usando materiais concretos cuja estrutura se ajusta à estrutura do conceito particular de número racional que está sendo ensinado, como, por exemplo, dobrar papel pode ser excelente para representar relações parte-todo ou frações equivalentes, mas pode ser uma atividade enganosa para representar a adição de frações, principalmente quando envolve frações impróprias.

Outrossim, para Scheffer e Powell (2019), uma abordagem inicial coerente e sólida para o ensino e a aprendizagem de frações está na história das frações, que surgiram devido à necessidade de medição. Essa postura epistemológica para o conhecimento das frações, que não se orienta inicialmente na contagem ou partição, se ampara na história dos números fracionários como resultado de uma medição e na magnitude das frações.

Powell desenvolveu uma abordagem instrucional chamada de 4A-Instructional Model, que será abordada na seção 2.4.1 desse trabalho, para apoiar a construção do conceito de fração pela perspectiva de medição, usando como apoio o material pedagógico barras de Cuisenaire. Essa abordagem é uma possibilidade de construção do conceito de frações por meio de experiências respaldadas em interpretações ontológicas e epistemológicas das frações. Para Powell (2018a), o contato com o material manipulável barras de Cuisenaire permite ao aluno experimentar as ideias e os conceitos matemáticos antes de formalizá-los, favorecendo o processo de aprendizagem.

O autor mencionado no parágrafo anterior, ao falar sobre os fundamentos teóricos e empíricos do 4A-Instructional Model, baseado em Gattegno (1987), afirma que a aprendizagem da matemática ocorre por meio da comunicação em um contexto social sobre objetos e em relações entre os objetos. Ainda corrobora que, “A atividade de fazer matemática envolve o emprego de gêneros discursivos (explicação, argumentação, etc.) e inscrições matemáticas (numerais, operadores, gráficos, figuras geométricas, notações, etc.)” (POWELL, 2018b, p. 411, tradução nossa).

A perspectiva de medição apoiada na ideia de magnitudes promove o desenvolvimento do conceito de fração pela sua ontologia e evita algumas dificuldades epistemológicas, como a ideia de frações impróprias e a diferença conceitual e das operações dos números racionais com os números naturais, encontradas frequentemente na perspectiva de partição (MACK, 1993; POWELL, 2018a). Dessa forma, o professor Arthur Belford Powell, define as frações como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma espécie que possuem uma unidade de comensurabilidade. Portanto, as práticas pedagógicas apoiadas na construção visual de representações equiparticionados não estão conceitualmente relacionadas com a origem histórica das frações e, segundo o autor, limita a compreensão dos alunos a respeito das magnitudes de frações (POWELL, 2019a).

Outros investigadores, como Caraça (1951), Kieren (1993) e Behr *et al*. (1983), já haviam frisado a unidade de medida e a medição como um ponto a ser considerado no estudo de frações. Amaral (2021), em sua pesquisa, também aponta benefícios do estudo de frações baseado em perspectivas ontológicas e na valorização e no reconhecimento da unidade de medida para a compreensão desse conteúdo. Segundo Souza (2022), o conhecimento da unidade de medida como um referencial em contextos de números fracionários pode evitar equívocos, como ao comparar $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, quando alguns dos alunos insistem em responder que $\frac{1}{3}$ é maior baseados no fato de 3 ser maior do que 2.

Powell e Ali (2018), baseados na literatura Cognitiva e da Neurociência, indicam que o ensino das frações deve considerar diferentes dimensões, como: a flexibilidade, razoabilidade e o senso de magnitude[10], além do entendimento conceitual e processual de representações não simbólicas e simbólicas que são cruciais para uma compreensão mais ampla e profunda das frações para operar e avaliar a razoabilidade dos resultados aproximados ou computados. Portanto, segundo o exemplo de comparação, abordado anteriormente, ao julgar a fração $\frac{1}{3}$ como a maior, aponta que os estudantes não tiveram um sentido da razoabilidade, bem como, não levaram em consideração a unidade de medida e acabaram por utilizar de maneira errônea as mesmas propriedades dos números naturais aos racionais.

O sentido de Classes de Equivalência também é favorecido pela perspectiva

[10] Mais esclarecimentos sobre os termos *flexibilidade*, *razoabilidade* e senso de *magnitude,* serão abordados na seção 2.4.

de medição. Nesse contexto de produção científica e atuação docente, consideramos necessário, inicialmente, esclarecer e discutir os significados dos termos: números racionais, números fracionários, fração e representação fracionária, uma vez que a prática docente nos permitiu perceber que, por repetidas vezes, esses termos se confundem. De acordo com Lamon (2012), quaisquer números racionais podem ser escritos na forma de fração, com a, b ϵ $\mathbb{Z}$ e b ≠ 0, mas nem toda fração $\frac{a}{b}$, representa um número racional. Em relação ao último caso, o autor cita $\frac{\pi}{2}$, que apesar de ser uma fração, ou seja, tenha representação fracionária, não é um número racional. Assim, fração ou representação fracionária é qualquer notação do tipo $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0 e a, b ϵ $\mathbb{R}$. Já número fracionário é aquele que pode ser representado por uma classe de equivalência (SILVA, 2005). As classes de equivalência de frações, são consideradas como um conjunto das frações equivalentes a uma fração dada (SILVA; SODRÉ, 2020), como exemplo, temos a classe de equivalência da fração $\frac{1}{2}$, representada por $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \ldots\right\}$. No entanto, a dada fração $\frac{\pi}{2}$, apresentada anteriormente, faz parte de a classe de equivalência representada por $\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{4}, \ldots\}$, mas não é um número fracionário.

Kieren (1993), ao voltar-se às propriedades dos racionais, ressalta alguns aspectos que merecem atenção especial dos educadores por se constituírem em dificultadores para a construção do conceito, como: i) o duplo papel do número 1, que serve como unidade divisível que forma a base de comparação e como base conceitual para a formação dos inversos multiplicativos, além de ser, o elemento neutro da multiplicação; ii) os números racionais por diversas vezes adquirem um papel de quociente (o número de partes em que um todo foi dividido) ou de razão (uma propriedade relacional entre dois números) e; iii) o fato de que nas operações de adição e a multiplicação são independentes, diferente dos números naturais, uma vez que nos naturais uma multiplicação sempre produz números maiores para quaisquer números diferentes de 0 ou 1, nos racionais isso não é válido, e a multiplicação pode até ser interpretada como uma divisão.

A seguir, apresentaremos uma análise das principais abordagens utilizadas no livro didático do 6° ano, utilizado pela Rede Estadual de Educação do Paraná para o conteúdo de frações, para esclarecer aspectos de nossa região de inquérito.

2.3.2 Ensino das frações no livro didático do 6° ano utilizado na Rede Estadual de Educação do Paraná

Em nosso percurso reflexivo, também guiamos um olhar atento aos livros didáticos utilizados e a sua abordagem para o conteúdo das frações, visto que este é o principal material de apoio utilizado pelos professores para o ensino de matemática, e um dos recursos que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e operações com eles (POWELL, 2018).

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com início em 1937, já passou por variadas denominações e mudanças e é o mais antigo dos programas de distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira (SCHEFFER; POWELL, 2019). Ele concebe um conjunto de ações que tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de obras didáticas, literárias, pedagógicas entre outros materiais de apoio, voltados aos alunos da educação básica. As escolas participantes do PNLD recebem os livros de forma gratuita, atualmente em ciclos quadrienais e a escolha do livro didático é feita pelos professores.

Após a escolha, as escolas indicam uma primeira e uma segunda opção de coleções de Livros Didáticos e estas são inscritas no programa via *online*. No entanto, as escolas nem sempre recebem o livro didático escolhido, e os que o substituem, muitas vezes, são considerados inadequados pelos professores para implementar a proposta de ensino em sua escola.

No estado do Paraná, a última escolha para livros do Ensino Fundamental - Anos Finais, aconteceu em 2019. Nesse ano, a Secretaria de Educação e do Esporte (SEED) optou em selecionar uma única coleção de 6° ao 9° ano, para toda a rede estadual de ensino. Os professores puderam escolher uma coleção entre as disponíveis e, assim, o material com maior número de designações seria o utilizado em toda rede de ensino estadual. Após ser realizada esta escolha, foi adotado o livro: A Conquista da Matemática, dos autores Júnior e Castrucci (2018) para a utilização escolar, o qual será aqui o foco de nossa análise.

Essa breve análise busca compreender o modo pelo qual o conteúdo de frações é organizado no livro. Focamos, aqui, os aspectos conceituais e procedimentais, bem como a relação entre representações simbólicas e não simbólicas (representações figurais).

A obra analisada apresenta as seguintes características gerais: capa colorida com mais de quatro cores; impressão e papel de boa qualidade; e apresenta uma unidade dirigida especificamente ao estudo de frações.

Esta unidade dirigida aos estudos das frações, é dividida em oito capítulos não muito extensos (de duas a quatro páginas), abrangendo: I) A ideia de fração; II) Problemas envolvendo frações; III) Comparação de frações; IV) Frações equivalentes; V) A adição e subtração de frações; VI) A forma mista; VII) As frações e a porcentagem e; viii) Probabilidade.

Ao iniciar o capítulo, se dá um amplo destaque à ilustração de situações concretas de utilização das frações, ligando seu estudo à geometria e à arte, como a partir de divisão de uma folha em partes iguais. Seguidamente, ao iniciar o primeiro capítulo, apresenta um apanhado geral da história das frações, explicitando que elas surgiram da necessidade de representar a repartição de uma medida. Apresenta ainda, a fração como sendo parte de um todo e como o resultado de uma divisão de dois números naturais. De forma visual, utiliza-se de representações não simbólicas, como: retângulos, círculos, pizzas, relógios e chocolates, particionados igualmente. Essa introdução dá importância exclusivamente às frações próprias (aquelas em que o numerador é menor que o denominador) e, para escrever uma fração, utilizam a parte colorida da figura, com a unidade pré-estabelecida, conforme mostra a Figura 1. Isso indica aquilo que foi afirmado anteriormente, sobre criações didáticas para dar sentido à interpretação formalista das frações.

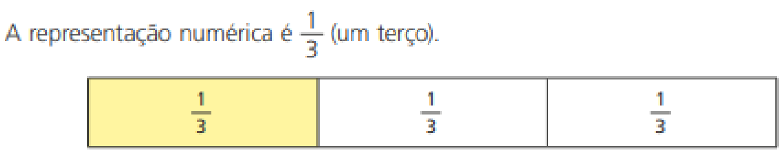


Figura 1: Representação figural da fração $\frac{1}{3}$.
Fonte: Júnior e Castrucci (2018, p. 133).

Nessa abordagem, os alunos são conduzidos a pensar que I) a origem de frações está na divisão de objetos em partes iguais, apesar de que, na história abordada, ela se origina da necessidade de uma fragmentação de uma medida; II) uma fração é a relação entre duas quantidades discretizadas e III) utiliza-se da contagem para nomear a fração e; IV) uma fração caracteriza-se de uma dupla contagem de unidades discretizadas (número de partes destacadas em relação ao número total de partes).

Para comparar frações, a obra utiliza de círculos particionados, nos quais algumas partes estão hachuradas. A comparação de frações acontece exclusivamente de forma figural.

A equivalência de frações inicia-se com representações não simbólicas de retângulos de mesmo tamanho particionados de maneiras diferentes, representando a mesma porção do total. Novamente essas representações das frações equivalentes dá ênfase às frações próprias (Figura 2).

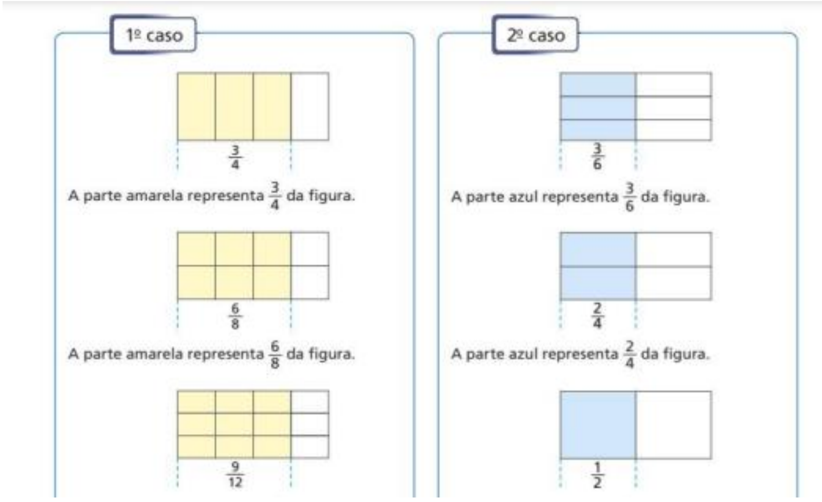


Figura 2: Obtendo frações equivalentes.
Fonte: Júnior e Castrucci (2018, p. 142).

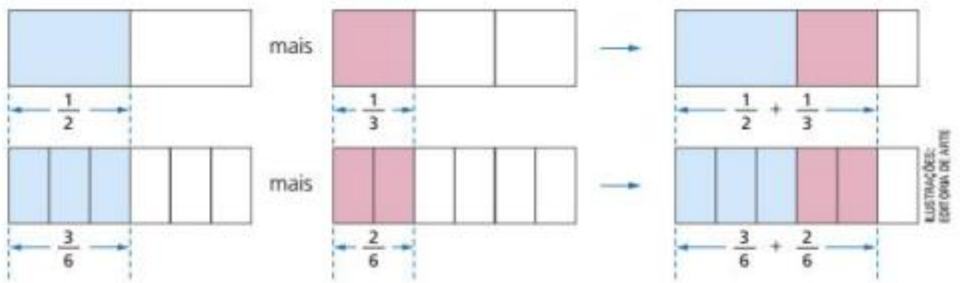
Seguidamente, definem-se as frações equivalentes e apresentam-se procedimentos técnicos para encontrá-las, dividindo ou multiplicando os numeradores e denominadores pelos mesmos números.

Para iniciar os capítulos das operações de adição e subtração, utiliza-se de uma situação ilustrada que pretende apresentar aos alunos as primeiras noções de adição e subtração de frações com denominadores iguais para, mais tarde, partir para denominadores diferentes. Ao efetuar as operações com denominadores diferentes (Figura 3), não citam o mínimo múltiplo comum como ponto de partida, só afirmam ser necessário encontrar frações equivalentes com um denominador comum, mas não explicam o motivo (Figura 4).

3 Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Representando geometricamente:



As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Então: $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$

Helena gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

Figura 3: Adição de frações com denominadores diferentes.
Fonte: Júnior e Castrucci (2018, p. 150).

Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm denominadores diferentes, primeiro encontramos frações equivalentes às frações dadas que tenham um denominador comum. Em seguida, efetuamos a adição ou a subtração com essas frações.

Figura 4: Explicação de como resolver as operações com denominadores diferentes.
Fonte: Júnior e Castrucci (2018, p. 152).

A forma mista das frações é apresentada após as operações. Nesse capítulo, uma definição teórica de fração mista e imprópria é apresentada e, de forma figural, apresenta a passagem de uma à outra. Os exercícios desse capítulo envolvem as operações de frações nos três tipos de representação, mista, própria e imprópria.

Em geral, todos os capítulos iniciam com uma breve introdução teórica do conteúdo, seguida de um modelo de exercício resolvido, acompanhado de imagens particionadas e de exercícios propostos. A obra apresenta aspectos conceituais, procedimentais, simbólicos e não simbólicos das frações, dando ênfase à interpretação de frações como parte-todo, por meio de figuras discretizadas.

A análise por nós empreendida vai ao encontro da análise de Souza e Powell (2021). Esses autores, ao analisarem toda a coleção do Ensino Fundamental “A Conquista da Matemática”, juntamente com mais duas coleções, uma dos Estados Unidos e uma do Japão, ressaltam que os livros didáticos brasileiros e estadunidenses focam em procedimentos em detrimento de aspectos conceituais; por conseguinte, afirmam que o foco no conhecimento de fração processual sem atenção à compreensão dos conceitos pode influenciar, de forma negativa, a aprendizagem matemática. Por esse motivo, muitas vezes, os alunos insistem em considerar que a adição de $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ tem como resultado $\frac{3}{5}$.

Essa breve análise do livro didático assumido no estado do Paraná revela a adesão a um paradigma focado nos procedimentos e com pouca ênfase na compreensão conceitual. Ela é importante porque se situa no ano em que se deu a produção dos nossos dados de pesquisa. Uma vez que assumimos outra perspectiva paradigmática, é importante esclarecê-la, uma vez que pode favorecer o desenvolvimento do senso fracionário e foi balizadora para a condução das aulas sobre as frações em nossa investigação.

2.4 A perspectiva de medição para o desenvolvimento do senso fracionário

Powell e Ali (2018) descrevem o senso fracionário em três categorias: “flexibilidade”, “razoabilidade” e “magnitude”. A “flexibilidade” se refere à maneira de representação de uma fração, formulação de conceitos e os procedimentos utilizados no cálculo. Isso implica na habilidade de lidar com as frações nas suas diversas interpretações, incluindo as frações simbólicas e não simbólicas. A “razoabilidade” envolve a capacidade de avaliar os resultados depois das operações. Já a “magnitude” ocupa a posição central e corresponde a interseção entre a flexibilidade e a razoabilidade, conforme mostra a Figura 5.

Figura 5: Senso fracionário.
Fonte: Powell e Ali (2018, p. 237 *apud* OLIVEIRA; BASNIAK, 2021, p. 6).

Ao nos referirmos à magnitude de uma fração, estamos primeiramente reconhecendo-a como um número. Powell (2019a; 2019b), fundamentado nos estudos de Carraher (1996), ao reportar-se à noção de magnitude, classifica-a em duas: magnitude (ou magnitude absoluta) e magnitude relativa. A primeira se refere ao tamanho ou extensão de um objeto e a segunda se refere ao tamanho de um objeto em comparação com outro ou um determinado tamanho a ser medido com uma unidade de medida. Portanto, sempre que julgarmos o “tamanho” de um número, estimando, ordenando ou analisando o resultado de um determinado cálculo, estamos analisando a magnitude de um número.

Powell (2019a), ao propor a perspectiva de medição como a primeira abordagem para frações, afirma que ela coincide com sua história baseada no entendimento da prática social humana de comparar ou medir quantidades contínuas e é entendida como uma associação entre a comparação multiplicativa entre o comprimento de duas quantidades, sendo uma delas considerada como a unidade de medida e usada para medir a outra, e esta comparação é como uma fração e recebe seu nome.

Esse pesquisador possui um amplo estudo com o material manipulável barras de Cuisenaire (figura 6), recomendando-o para desenvolver este tipo de abordagem.

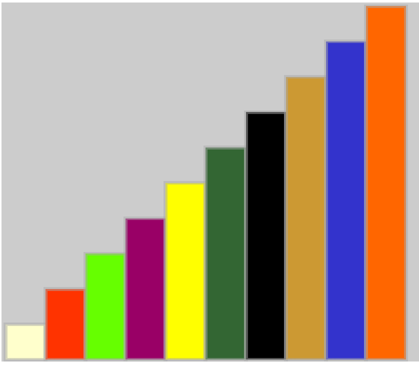


Figura 6: As dez diferentes barras de Cuisenaire em forma de uma escada.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

As barras de Cuisenaire foram criadas pelo professor belga Emille-Georges Cuisenaire (1891-1975) e consistem em um conjunto de dez barras de madeira. Elas possuem comprimentos e cores diferentes, sem divisões. As barras de mesma cor possuem os mesmos comprimentos e correspondem a um número exato de barras brancas, considerada unidade de medida neste caso. Como exemplo, temos que os comprimentos de: duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez barras brancas, que enfileiradas correspondem às cores: vermelha, verde clara, roxa, amarela, verde escura, preta, marrom, azul e laranja, respectivamente. Powell (2018a) defende que esse material pedagógico favorece a construção de significados matemáticos e imagens mentais sobre frações e operações de frações. Na perspectiva de medição, as barras possuem o comprimento como o atributo de interesse e guardam uma relação comparativa entre elas.

Ao referir-se à unidade de medida no ensino pela perspectiva de medição, podemos dizer que se trata do ponto central do entendimento das frações. O numerador *a* de uma fração $\frac{a}{b}$ representa a medida de uma das grandezas pela unidade e, o denominador *b*, a medida da outra. Nessa perspectiva, a fração $\frac{1}{4}$ deve ser entendida como uma relação multiplicativa entre grandezas, à qual a magnitude "1" do numerador é a de um quarto do denominador. Já o denominador é entendido como uma unidade para medir o numerador e $\frac{1}{4}$ é a relação de 1 medido por 4 (CARAÇA, 1951; POWELL, 2018b)

Como exemplo da comparação multiplicativa utilizando as barras, temos: tomamos uma barra vermelha e uma laranja. Quando a barra vermelha é a unidade de medida, temos que uma barra laranja equivale a cinco vermelhas (Figura 7a). De outro modo, se o comprimento de uma barra laranja é a unidade de medida, temos que o comprimento de cinco barras vermelhas é igual ao comprimento de uma barra laranja; lendo da esquerda para a direita, o comprimento de uma barra vermelha é um quinto do comprimento de uma barra laranja (Figura 7b). O comprimento de duas barras vermelhas é, então, dois quintos do comprimento de uma barra laranja (Figura 7c). O comprimento de seis barras vermelhas é, então, seis quintos do comprimento de uma barra laranja (Figura 7d) e assim por diante.

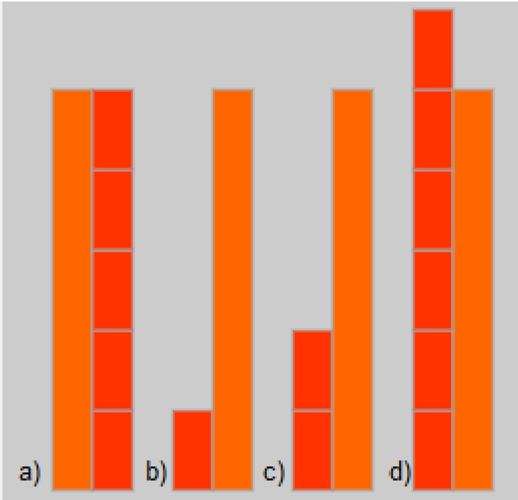


Figura 7: a) A barra laranja é igual a cinco barras vermelhas. b) A barra vermelha é um quinto da barra laranja. c) Duas barras vermelhas são dois quintos da barra laranja. d) Seis barras vermelhas são seis quintos da barra laranja.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Powell (2018a) explicita algumas vantagens de ações de ensino pela perspectiva de medição, entre elas: I) associa frações à sua origem histórica; II) uma fração é compreendida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades da mesma espécie que são comensuráveis; III) facilita a introdução de frações impróprias, diferente da perspectiva da parte-todo; IV) promove o desenvolvimento do senso numérico sobre a magnitude, ordem, equivalência, desigualdade de frações e; V) melhora a fluência oral com os nomes fracionários.

Powell elaborou um modelo pedagógico-instrucional denominado 4A-Instructional Model, para apoiar a construção do conceito de fração por essa perspectiva de medição, usando como apoio o material pedagógico as barras de Cuisenaire. Essa abordagem é apresentada na próxima seção.

2.4.1 4A-Instructional Model: uma abordagem instrucional para o ensino e aprendizagem de frações

A abordagem denominada 4A-Instructional Model foi desenvolvida com intuito de construir o conceito de frações por meio de experiências respaldadas em interpretações ontológicas e epistemológicas das frações. O autor, baseado nos estudos de Gattegno (1973) e Vygotsky (1978/1930), afirma que o modelo assume que os indivíduos constroem o conhecimento ativamente, estabelecendo relações de novas informações com a sua experiência pessoal e suas estruturas atuais para dar sentido a essa experiência. Também presume que, embora os indivíduos construam seu próprio conhecimento, ele é realizado por meio de atividades desenvolvidas socialmente (POWELL, 2018b).

A abordagem 4A consiste em treze potenciais atividades que estão dispostas em quatro fases que compreendem o processo de ensino e aprendizagem que vão da experimentação e diálogo a ações virtuais e simbólicas, denominadas: *Actual Actions* (Ações Atuais - AA), *Virtual Actions* (Ações Virtuais - VA), *Actions Written* (Ações Escritas - WA) e *Actions Formalized* (Ações Formais - AF).

Para avançar de uma fase para outra, segundo Powell (2018b), deve-se observar a facilidade dos alunos com as ações manipulativas e mentais, além da linguagem verbal e simbólica e, se o professor achar necessário, pode-se retornar à fase anterior sempre que necessário para verificar certos conceitos, visto que a sequência das tarefas é flexível, visando a atender às necessidades dos alunos. Desse modo, o professor pode recorrer às fases anteriores “com o intuito de fazer com que alunos investiguem certas ideias que não foram antes pensadas ou precariamente desenvolvidas, e isso não pode ser interpretado como um retrocesso, mas como uma oportunidade em dar sentido para novas situações” (AMARAL, 2021, p. 34).

Na fase *Actual Actio*ns ou Ações Atuais, os alunos manipulam as barras de Cuisenaire livremente. A fase conta com atividades em que o aluno faz a comparação de tamanho entre as barras de Cuisenaire e percebe a relação das cores com o comprimento das barras, estabelecendo relações de forma oral e prática, como ordenar as barras em ordem crescente e decrescente, relacionando a posição da barra com a cor. É necessário, também, estabelecer nomenclaturas comuns que o professor irá utilizar no decorrer das aulas, como: “trem”, que são barras dispostas lado a lado, na vertical ou horizontal; conceitos de “maior”, “menor”, “diferente” e “igual” e suas simbologias; e, para facilitar o trabalho de escrita nas outras fases, combinar uma letra para representar cada cor, como “r” para barra roxa e “l” para laranja. Powell (2018b) ainda destaca que, para iniciar de fato o trabalho com as barras para o ensino de frações, primeiramente, os alunos devem estar bem familiarizados com o material Cuisenaire.

Na segunda fase, *Virtual Actions* ou Ações Virtuais, objetiva-se que os alunos respondam oralmente e com aptidão às questões trabalhadas na fase anterior, como uma forma de transição entre a fase concreta a uma mais abstrata.

Na terceira fase, *Actions Written* ou Ações Escritas, os alunos escreverão sentenças matemáticas, utilizando os símbolos de “maior que”; “menor que”; “igual” e “diferente”. Neste momento, o estudante é incentivado a criar expressões ou equações manipulando as barras, proporcionando a oportunidade para falar e escrever suas descobertas.

Já a fase *Actions Formalized* ou Ações Formais, a última, avança-se para a formalização das ideias matemáticas de modo que os alunos colocarão em prática todas as fases anteriores, e as ideias matemáticas são escritas na linguagem formal e simbólica, utilizando algoritmos (POWELL, 2018).

Essa abordagem recomenda que, para a aprendizagem da matemática, a fala e a escrita precisam ocorrer em momentos distintos; logo, as duas primeiras fases dão primazia a atividades práticas e orais, não necessitando da escrita neste primeiro momento, uma vez que “Na trajetória do ser humano história e desenvolvimento, ouvir e falar precedem a leitura e a escrita” (POWELL, 2018b, p. 411).

O 4A-Instructional Model objetiva desenvolver nos alunos a fluência oral de nomes fracionários e contribuir para o desenvolvimento do senso numérico de magnitude, ordem, equivalência e desigualdade de frações, iniciando com frações como o resultado de uma medição, conforme defende seu autor. Explicitados os aspectos teóricos da perspectiva assumida e desenvolvida nas aulas, bem como, aspectos da região de inquérito, esclarecemos, no próximo capítulo, os desdobramentos metodológicos da pesquisa e os procedimentos para a organização e análise dos dados produzidos na investigação.

CAPÍTULO 3

SOBRE OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Conforme mencionado anteriormente, esta pesquisa busca uma compreensão fenomenológica do que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade de medida, ou seja, busca uma interpretação do fenômeno interrogado. Fenomenologicamente, as falas dos sujeitos desvelam significados, abrem possibilidades interpretativas para além da manifestação mais imediata e, na análise ideográfica[11], o pesquisador busca a compreensão desses. “Essa interpretação dá ao pesquisador o sentido do todo e ele passa a buscar convergências do que é dito e a proceder à Análise Nomotética” (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010, p. 74). Dessa forma, neste capítulo, apresentamos o cenário da pesquisa para a manifestação do fenômeno, os procedimentos metodológicos utilizados na produção e na análise dos dados.

3.1 Sobre o cenário da pesquisa e as atividades práticas

Com o propósito de delinear o cenário da pesquisa para a manifestação da aprendizagem, optamos por trabalhar com estudantes de 6º ano de uma escola do campo, situada no interior do município de Missal - PR, no período matutino, com 16 alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (10 - 11 anos). A turma era composta por 7 meninas e 9 meninos. Optamos em selecionar esse ano escolar, pois a partir da experiência vivida da professora (autora desse trabalho), em lecionar nessas turmas ao longo de 11 anos de carreira profissional, notou-se a dificuldade dos alunos em lidar com frações.

A pesquisa se desenvolveu no decorrer das aulas de matemática, na qual a pesquisadora era, também, a professora da turma. A duração de cada aula era de 45 ou 50 minutos com cinco aulas semanais, perfazendo um total de 25 aulas dedicadas ao ensino de frações.

[11] A Análise Ideográfica se refere, segundo Bicudo (2011, p. 58), “ao emprego de ideogramas, ou seja, de expressões de ideias por meio de símbolos”, ela busca tornar visível às ideias expressas nas descrições das cenas, e destas descrições se desvelam as Unidades Significativas.

Para que esta pesquisa se realizasse, algumas solicitações foram necessárias, como: (I) Aprovação do Comitê de Ética[12]; (II) Autorização por parte da Secretaria de Educação de Foz do Iguaçu, à qual pertence a escola; (III) Um termo de consentimento[13] livre e esclarecido assinado pelos responsáveis dos alunos, por se tratarem de menores de idade, para recolha de informações em contextos acadêmico-científicos sem fins lucrativos; (IV) Um termo de assentimento[14] a ser assinado pelos próprios sujeitos da pesquisa.

Perseguindo a interrogação desta pesquisa, planejamos e organizamos atividades sobre o conteúdo de frações que fossem desafiantes e sequenciadas, a fim de que os alunos se aproximassem do conteúdo de frações pela perspectiva de medição. As atividades foram elaboradas ou adaptadas com base no livro "Fração à moda antiga" (AMARAL; SOUZA; POWELL, 2021), no qual os autores propõem a utilização do material manipulável barras de Cuisenaire como material de auxílio para o desenvolvimento do senso fracionário. Todas as atividades desse livro foram elaboradas com base no 4A-Instructional Model e estão descritas nos apêndices deste trabalho.

Para a realização das atividades, os alunos foram divididos em duplas. Cada uma dispunha de um conjunto de barras para utilizarem no decorrer das aulas. Após a utilização do material e respectivas construções pelas duplas, a professora recorreu ao aplicativo *Elasticmind* (https://www.elasticmind.com/rodsY/), conforme mostra a Figura 8, e projetou-as, com intuito de auxiliar os alunos na correção das atividades e aprofundar o conhecimento a partir de discussões pertinentes ao assunto. Esse recurso foi tomado como intermediário do diálogo entre as produções das duplas e a explicitação da professora, pois facilita a visualização.

[12] Projeto aprovado pelo Comitê de Ética sob número 51787621.8.0000.0107.
[13] Apêndice B: Modelo do termo de consentimento.
[14] Apêndice A: Modelo do termo de assentimento.

Figura 8: Professora utilizando o retroprojetor como auxílio na correção das atividades.
Fonte: Acervo do autor (2022).

Utilizando o material, os alunos poderiam, partindo da visualização e da prática com as barras, elaborar asserções sobre frações como medida, questões de magnitude, ordem, desigualdade e equivalência. Desse modo, abria-se a possibilidade de: compreender frações equivalentes; (re)conhecer formas de representações de frações; bem como compreender magnitude e capacidade de operar com frações; ou seja, proporcionar o desenvolvimento do senso fracionário (POWELL; ALI, 2018).

As atividades foram divididas em sete práticas, dentro das quais os alunos poderiam entender o material e desenvolver as ideias concernentes às frações. No Quadro 1, apresentamos as práticas, a duração aproximada de cada uma e a(s) fase(s) do *4A-Instructional Model* abrangidas em cada prática. A partir das análises das gravações, esse tempo foi dimensionado, ou seja, o tempo de duração de cada atividade não foi previamente estabelecido.

NÚMERO DA PRÁTICA	**PRÁTICA**	**DURAÇÃO APROXIMADA**	**FASES DO *4A***
1	Conhecendo as barras, simbologias e comparações	100 min	AA
2	Múltiplos, comparações e sentenças matemáticas	95 min	AA-VA-WA
3	Comparações, representações de frações com o material e equivalência	145 min	AA-VA-WA
4	Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores diferentes	240 min	AA-WA-AF

5	Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores iguais	150 min	AA-WA-AF-VA
6	Frações equivalentes e comparações de frações com o mesmo numerador	120 min	VA-AF-AA-WA
7	Adição e Subtração com denominadores diferentes e iguais	240 min	AF-WA

Quadro 1: Práticas utilizadas no ensino das frações pela perspectiva de medição.
Fonte: elaborado pelos autores (2022).

Powell (2018a; 2018b; 2019a; 2019b) recomenda que o desenvolvimento do conceito e das operações de frações deva ser iniciado pela equivalência de frações, seguidas da compreensão de conteúdos usuais, como o mínimo múltiplo comum. Dessa forma, há a comparação de magnitudes de frações e a compreensão sobre o que sejam frações próprias e impróprias.

Na perspectiva de medição, recomenda-se que a ideia da equivalência de frações seja desenvolvida por meio da relação entre os comprimentos das barras de um número fracionário específico. Por exemplo, o número fracionário “meio” pode ser representado com os pares de barras: branca e vermelha; vermelha e roxa; roxa e marrom; verde clara e verde escura; amarela e laranja (Figura 9). Uma fração é definida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis da mesma espécie (POWELL, 2018a).

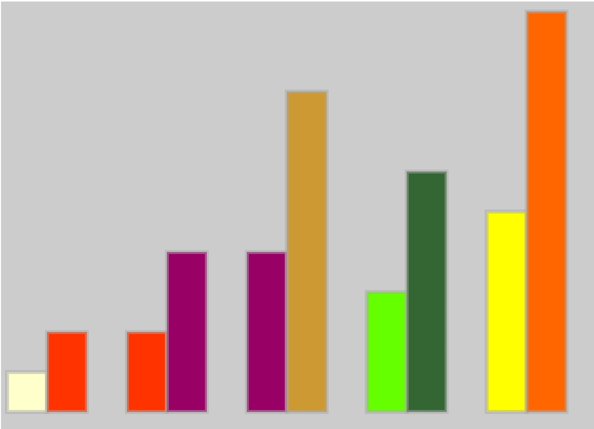


Figura 9: Maneiras de representar à fração $\frac{1}{2}$ com as barras.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Amaral, Souza e Powell (2021) indicam, ainda, a compreensão de três propriedades de comparação para reforçar essa definição. A primeira diz respeito a duas frações com o mesmo denominador: dadas duas frações com o mesmo denominador, terá o maior comprimento aquela que tiver o maior numerador. A segunda propriedade envolve comparação entre duas frações de denominadores diferentes: dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, após encontrar uma fração equivalente para cada uma com denominadores comuns, aquela que tiver o maior numerador, terá o maior comprimento. A terceira e última propriedade: dadas duas frações com o mesmo numerador, terá o maior comprimento aquela que tiver menor denominador. Todas essas propriedades são trabalhadas em algum momento no desenvolvimento das atividades e seguem uma organização conforme mostra a Figura 10.

Ações para as aulas	Etapa do 4A	Tempo médio estimado para cada atividade (min).	Observações
Legenda do texto: Cor preta – Ações ou observações para o professor que ministrará a aula. Cor azul – Questionamentos que o professor poderá usar ao ministrar a aula. Cor cinza – Reações/respostas dos alunos. Cor terra – Etapa do *4A-Instructional Model*[1].			

Figura 10: Forma de organização das atividades.
Fonte: Acervo dos autores (2021).

Cada prática contém várias atividades pensadas e conduzidas pela professora, focando: a ação da aula; a etapa do 4A a que pertence a atividade; o tempo médio para a realização de cada atividade (todos esses itens são baseados no livro “Fração à moda antiga” de Amaral, Souza e Powell (2021)); e o campo observações da aula, se dedica aos registros individuais da professora no decorrer da aula. Ao término de uma prática, após os estudantes terem compreendido cada tópico abordado, outra era iniciada. Ao discorrer sobre as práticas, nas próximas seções, apresentamos algumas produções dos alunos.

3.1.1 Prática 1: Conhecendo as barras, terminologias e comparações

Na primeira prática, trabalhou-se a familiaridade com o material concreto barras de Cuisenaire; assim, algumas comparações e equivalências entre as barras foram trabalhadas (atividades descritas na “Prática 1” dos apêndices). A imagem abaixo (Figura 11) mostra o caderno de um aluno que representou as barras de Cuisenaire na forma de uma escada e realizou as correspondências de cada barra em barras brancas.

Figura 11: As barras de Cuisenaire na forma de uma escada e equivalências entre as barras em barras brancas.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Algumas simbologias, como de: maior que, menor que, igual a e diferente de foram introduzidas. Utilizando esses símbolos, realizou-se comparações entre as medidas das barras. Nessa prática, também introduzimos o termo “trem”, que são compostos de barras dispostas lado a lado na horizontal ou vertical, conforme mostra a figura 12.

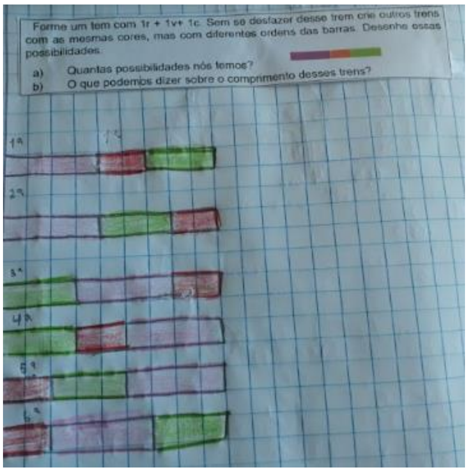


Figura 12: Possibilidades de trens com três diferentes barras.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Essa imagem mostra o desenho realizado por um aluno exemplificando as seis possibilidades de construções de trens, utilizando apenas as barras roxa, vermelha e verde clara.

3.1.2 Prática 2: Múltiplos, comparações e sentenças matemáticas

Na segunda prática, retomamos e reforçamos as comparações entre as medidas das barras com a escrita de sentenças matemáticas. Também, de modo a facilitar a escrita das relações entre as barras, introduzimos, nesta aula, algumas simbologias para representar cada cor das barras. Como exemplo, temos: a barra branca é representada pela letra “b”; a barra vermelha pela letra “v”; a verde clara como “c”; a roxa como “r”; a amarela como “o”; a verde escura como “e”; a marrom como “m”; a preta como “p”; a azul como “a”; e a laranja como “l” (atividades descritas na “Prática 2” dos apêndices). A Figura 13 mostra a ação escrita dos estudantes a partir das comparações realizadas com as barras.

Figura 13: Relações entre as barras.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

A Figura 13 mostra as sentenças matemáticas construídas por um aluno, comparando as medidas das barras e utilizando a linguagem matemática com as simbologias de: maior que; menor que; igual a; e diferente de.

3.1.3 Prática 3: Comparações e representações de frações com o material e equivalência

Na terceira prática, introduzimos a nomenclatura das frações através da representação simbólica dada uma representação não simbólica (atividades descritas na “Prática 3” dos apêndices). A equivalência de frações também é iniciada nesta prática (Figura 14).

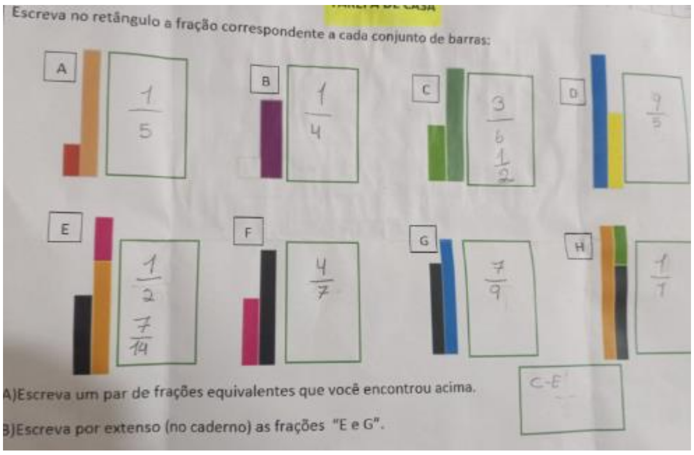


Figura 14: Relações entre as barras.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Na atividade elaborada pela professora, apresentada acima (Figura 14), os alunos deveriam escrever a fração que correspondia a cada conjunto de barras e identificar o par de frações equivalentes.

3.1.4 Prática 4: Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores diferentes

Na quarta prática, as atividades trabalhavam a equivalência das frações e a comparação entre frações com denominadores diferentes (atividades descritas na "Prática 4" dos apêndices). Para realizar essa comparação, trabalhamos o jogo "corrida das cores", utilizando as barras de Cuisenaire.

Esse jogo consiste em posicionar duas barras de cores diferentes, representadas pelas unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos. Por exemplo, ao comparar $\frac{2}{3}$ com $\frac{1}{5}$ (Figura 15), posiciona-se a barra verde clara e amarela, lado a lado, com uma de suas extremidades alinhadas (Figura 16).

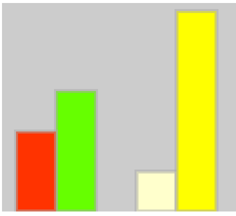


Figura 15: Frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ representadas com as barras de Cuisenaire.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

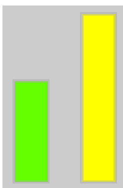


Figura 16: Barra verde clara e amarela com suas extremidades alinhadas.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

O objetivo do jogo é o de igualar os comprimentos das fileiras (trens) das duas cores de barras, acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados alternadamente, até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais (Figura 17). Iniciamos acrescentando barras a barra menor, neste caso, iniciamos com a barra verde clara. Assim, para que as duas fileiras (trens) ficassem alinhadas, foi necessário acrescentar quatro barras verdes claras e duas barras amarelas.

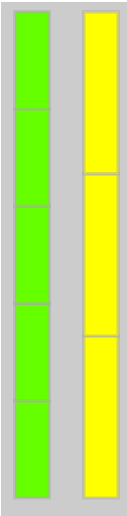


Figura 17: Os dois "trens" ficaram com comprimentos iguais totalizando cinco barras verdes claras e três barras amarelas.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Em seguida, verifica-se a quantidade de barras inseridas de cada cor em cada fileira e, sabendo a relação de cada cor de barra com a quantidade de barras brancas, pode-se determinar a unidade de medida das duas frações que, nesse caso, é 15.

Encontrada a unidade de medida comum às duas frações, realiza-se o mesmo processo com as barras da esquerda (numeradores). Ao lado esquerdo do trem contendo cinco barras verdes claras, posiciona-se a mesma quantia de barras vermelhas, ou seja, é necessário adicionar quatro barras vermelhas. Ao lado esquerdo do trem amarelo posiciona-se a mesma quantia de barras brancas, ou seja, é necessário adicionar duas barras brancas, conforme mostra a Figura 18.

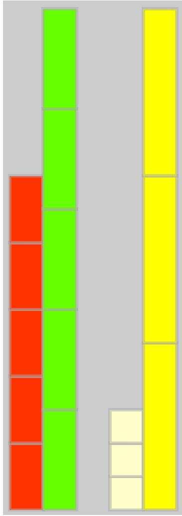


Figura 18: Cinco barras vermelhas ao lado de cinco barras verdes claras e três barras brancas ao lado esquerdo de três barras amarelas.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Portanto, a fração $\frac{2}{3}$ se transformou na fração $\frac{10}{15}$ e a fração $\frac{1}{5}$ se transformou na fração $\frac{3}{15}$, encontramos assim, uma fração equivalente a cada fração dada. Visualmente, percebe-se que a fração $\frac{10}{5}$ é maior que a fração $\frac{3}{15}$, logo $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{5}$.

Outras atividades de comparações de frações, utilizando o jogo corrida das cores, foram abordadas conforme mostra a Figura 19.

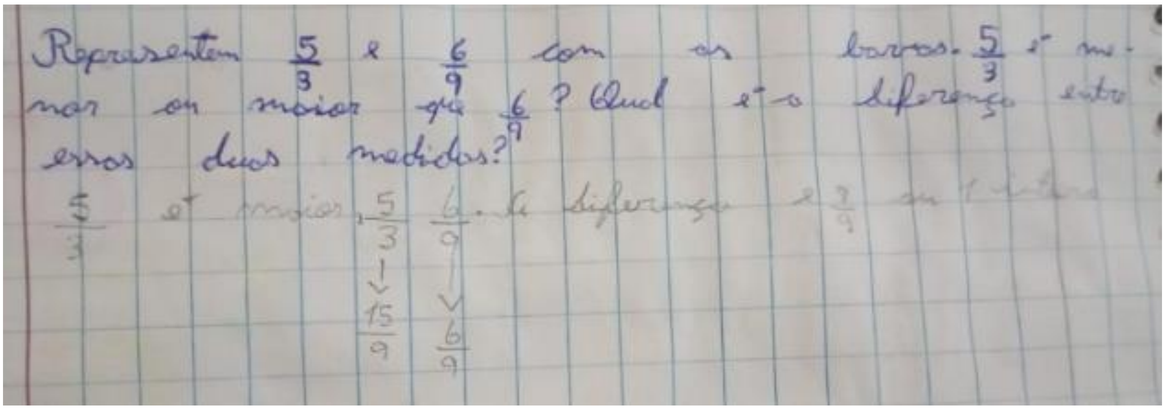


Figura 19: Atividade de comparações de frações com denominadores diferentes.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Na atividade acima (Figura 19), os alunos deveriam representar as frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{9}$ com as barras e, em seguida, realizar a comparação. Na sequência, deveriam calcular a diferença entre essas duas frações; dessa forma, trabalhamos indiretamente a operação de subtração. Observa-se que o aluno escreve as respectivas frações equivalentes abaixo das frações inicialmente propostas.

3.1.5 Prática 5: Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores iguais

Na quinta prática, as atividades trabalhavam a equivalência das frações e a comparação entre frações com denominadores iguais, aquela que tiver o maior numerador, terá a maior medida. Essa ideia foi desenvolvida por meio de atividades de comparações entre frações com o mesmo denominador, utilizando as barras (atividades descritas na “Prática 5” dos apêndices). Como exemplo de uma atividade utilizada envolvendo denominadores iguais, os alunos deveriam comparar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ (Figura 20).

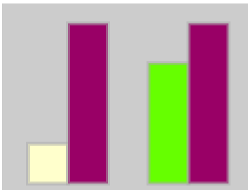


Figura 20: Atividade de comparações de frações com denominadores iguais.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Em seguida, os alunos escreveram como deveriam proceder na comparação de frações com denominadores iguais ou diferentes, a partir do observado e percebido nas atividades propostas.

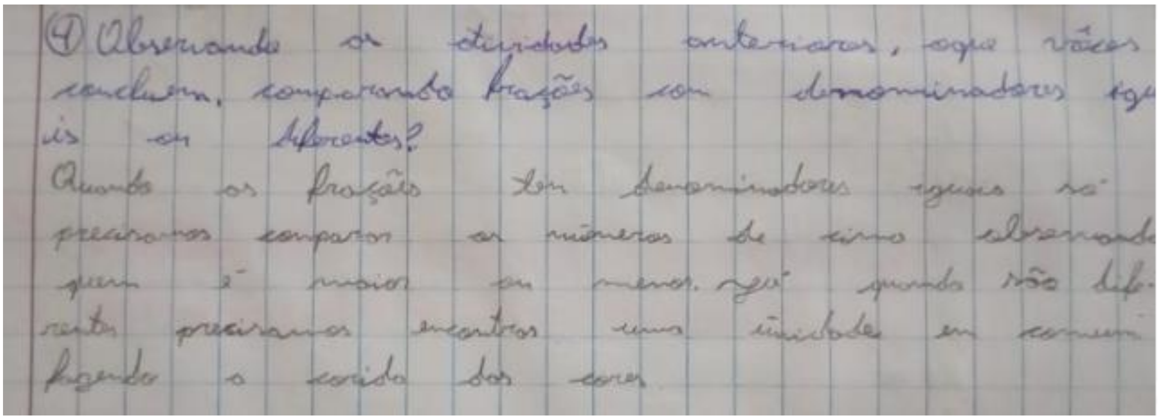


Figura 21: Conclusão de um estudante ao realizar comparações de frações com denominadores iguais ou diferentes.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Conforme a Figura 21, os alunos mostraram compreender que, ao compararem as frações com os mesmos denominadores, bastava somente observar os numeradores. Aquela que tiver o maior numerador é a maior fração. Já ao comparar frações com denominadores diferentes, deveriam buscar por uma unidade comum por meio do jogo da corrida das cores.

3.1.6 Prática 6: Frações equivalentes e comparações de frações com o mesmo numerador

Na sexta prática, continuamos trabalhando a comparação entre frações como descritas na terceira propriedade: dadas duas frações com o mesmo numerador, aquela que tiver menor denominador terá a maior medida. Essa ideia foi desenvolvida por meio de atividades de comparações entre frações com o mesmo numerador, utilizando as barras (atividades descritas na “Prática 6” dos apêndices). Como exemplo de uma atividade utilizada envolvendo numeradores iguais, os alunos deveriam comparar as frações $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{2}$ (Figura 22).

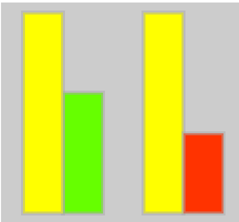


Figura 22: Atividade de comparações de frações com denominadores iguais.
Fonte: Elaborada pelos autores em https://www.elasticmind.com/rodsY/ (2022).

Em seguida, os estudantes realizaram mais algumas comparações e escreveram como deveriam proceder na comparação de frações com numeradores iguais, a partir do observado e/ou percebido nas atividades propostas.

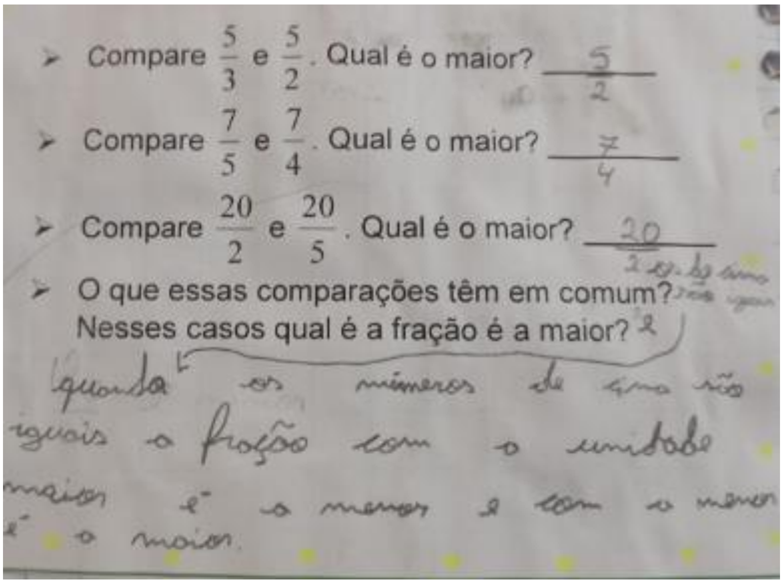
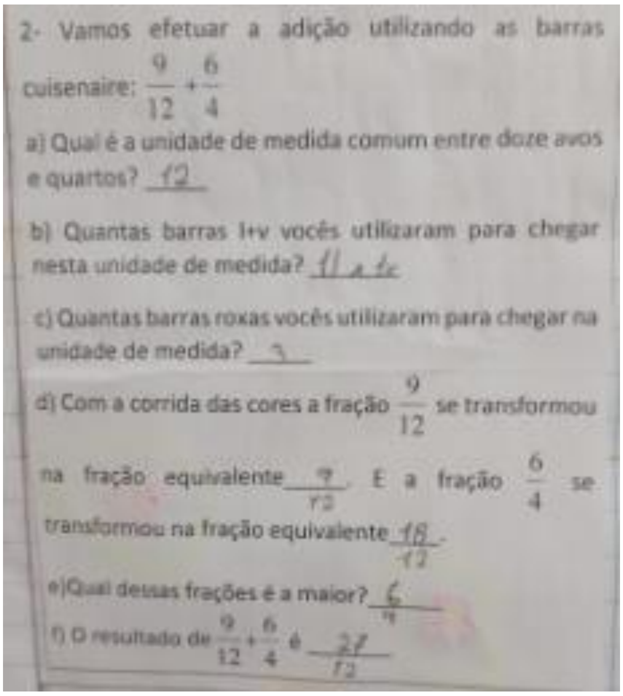


Figura 23: Atividade de comparações de frações com numeradores iguais.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Conforme a Figura 23, os alunos mostraram compreender que, ao compararem as frações com os mesmos numeradores, bastava somente observar os denominadores. Aquela que tiver o maior denominador é a menor fração.

3.1.7 Prática 7: Adição e Subtração com denominadores diferentes e iguais

Na sétima e última prática, trabalhamos as operações de adição e subtração de frações (Figura 24). Para as operações, será necessário que os alunos tenham compreendido bem o jogo corrida das cores, para, assim, encontrarem uma unidade de medida comum caso os denominadores fossem diferentes, para tornar possível a operação.



2- Vamos efetuar a adição utilizando as barras cuisenaire: $\frac{9}{12} + \frac{6}{4}$

a) Qual é a unidade de medida comum entre doze avos e quartos? 12

b) Quantas barras l+v vocês utilizaram para chegar nesta unidade de medida? [illegible]

c) Quantas barras roxas vocês utilizaram para chegar na unidade de medida? 3

d) Com a corrida das cores a fração $\frac{9}{12}$ se transformou na fração equivalente $\frac{9}{12}$. E a fração $\frac{6}{4}$ se transformou na fração equivalente $\frac{18}{12}$.

e) Qual dessas frações é a maior? $\frac{6}{4}$

f) O resultado de $\frac{9}{12} + \frac{6}{4}$ é $\frac{27}{12}$

Figura 24: Atividade de adição de frações com denominadores diferentes.
Fonte: Acervo dos autores (2022).

Nessa atividade, conforme mostra a Figura 24, os alunos deveriam realizar a operação de adição de frações com denominadores diferentes ($\frac{9}{12}$ e $\frac{6}{4}$). Incialmente, deveriam: apresentar a unidade comum a essas frações; apresentar quantas barras de cada cor foi utilizado no cálculo dessa unidade comum; apresentar as frações equivalentes a cada fração inicialmente proposta; realizar a comparação, e por último, apresentar o resultado dessa adição.

Na próxima seção, apresentaremos os procedimentos para a produção, organização e análise dos dados registrados na investigação.

3.2 Sobre a produção, organização e análise dos dados

Os dados qualitativos emergiram dos seguintes materiais significativos: (1) transcrições dos diálogos entre professora e alunos registrados nas filmagens no decorrer da aula; (2) gravações de áudios de uma dupla de alunos em específico; (3) observações e reflexões pós-aulas da professora registrada em diário de bordo; (4) registros simbólicos ou não simbólicos dos estudantes. **Quando as transcrições das falas das filmagens não foram suficientes ou se tornaram incompreensíveis para certas peculiaridades que exigissem a interrogação, recorremos à gravação de áudio de uma dupla, ao diário de bordo da professora ou às anotações feitas**

pelos alunos.

Os dados foram produzidos a partir das tarefas registradas nas filmagens, perfazendo um total de aproximadamente 19 horas de vídeo que foram transcritos, analisados e organizados em Cenas Significativas. Essas "Cenas Significativas são, na abordagem fenomenológica, recortes mais amplos das transcrições da filmagem que amarram vários significados em seu movimento" (BRITO, 2018, p. 99). Esse modo de organização dos dados viabiliza a efetivação da chamada Análise Ideográfica para o caso desta pesquisa. Vamos mostrar, nessa seção, o significado e como efetuamos a Análise Ideográfica das Cenas Significativas.

Em afinidade com Bicudo (2011), iniciamos a análise, lendo as transcrições das falas das filmagens das aulas repetidas vezes, de maneira atenta e intencional, ação essa na qual buscamos identificar os elementos concernentes à nossa interrogação de pesquisa: *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? Seguidamente, estes elementos foram organizados com o intuito de chegar às Unidades de Significado[15], que são estabelecidas pelo pesquisador. Nesse processo, foi utilizado o *software* de apoio de análise qualitativa, *Atlas.ti*, que auxilia na organização e registros do movimento realizado pelo pesquisador (KLÜBER, 2014). Esse *software* não efetua as análises por si só, este é um esforço demandado pelo pesquisador.

Dessa forma, nesse primeiro momento de análise, destacamos excertos da transcrição que faziam sentido ao que concerne à interrogação dessa pesquisa. Esse movimento conduziu as articulações sobre os excertos, ou seja, conduziu o estabelecimento das Unidades de Significado dentro de cada Cena, chamadas de Unidades Significativas da Cena (USC), 58 no total. A Figura 25 apresenta um exemplo de excerto destacado da transcrição e a Unidade de Significado articulada a ele. Essa Unidade de Significado é apresentada no próximo capítulo com o código *USC.3.1.01*.

[15] As Unidades de Significado ou também chamadas de Unidades Significativas "resultam da leitura atenta das descrições em sua totalidade na qual o pesquisador procura pelo sentido das experiências vividas pelo sujeito" (BRITO, 2018, p. 99).

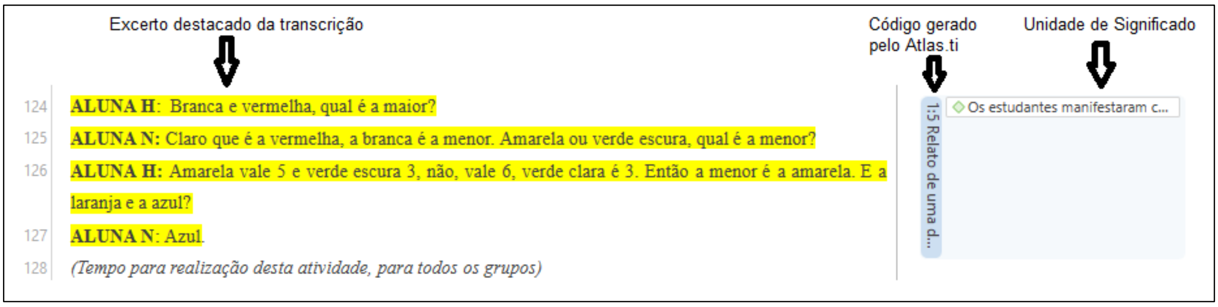


Figura 25: Exemplo do excerto destacado da transcrição, o código gerado pelo *Atlas.ti* e a Unidade de Significado.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

As Unidades de Significado não se encontravam “prontas” nos textos, ainda que o texto esteja registrado, o sentido se doa a quem interroga um texto, portanto, é resultado de leituras atentas, “com a intenção de destacar o que de importante, em relação à interrogação, está sendo dito” (BICUDO, 2011, p. 26).

Esse movimento é apresentado no próximo capítulo, organizado em quadros com duas colunas, contendo as Expressões dos Sujeitos na Cena e o código da Unidade Significativa de Cena (diferente do que foi gerado pelo *Atlas.ti* como mostraremos a seguir). Após cada Unidade de Cena, acrescentamos uma linha para a explicitação da Unidade Significativa da Cena (USC), conforme ilustra o Quadro 2, e são descritas da forma de *USC.x.y.z,* de modo que as letras *x.y.z* representam dígitos, os quais a primeira letra indica a prática, a segunda indica a Cena e a terceira indica a Unidade Significativa.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
Diálogos (entre professora e alunos ou entre alunos) e registros simbólicos ou não-simbólicos.	Código da Unidade da Cena
Explicitando a Unidade Significativa da Cena.	USC.x.y.z

Quadro 2: Análise Ideográfica das Unidades Significativas da Cena.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

As Unidades Significativas de Cena (USC) compõem a Análise Ideográfica e favorecem o movimento de análise que busca explicitar a estrutura do fenômeno, a chamada Análise Nomotética, que será apresentada no Capítulo 5.

Como Brito (2018, p. 101) diz, “[...] a Análise Nomotética diz do movimento de reduções sucessivas que busca a transcendência dos aspectos individuais da análise ideográfica, ou seja, busca as grandes convergências ou núcleo de ideias que revelam a estrutura do fenômeno".

Essas convergências de ideias culminaram em categorias abertas. Segundo Paulo, Amaral e Santiago (2010, p. 74), na Análise Nomotética, o investigador:

> [...] procura passar do nível de análise individual para o geral, procurando os aspectos que lhe são significativos nos discursos dos sujeitos e lhe permitem realizar convergências que agregam pontos de vista, modos de dizer, perspectivas, que o levam à compreensão do investigado. Essas convergências dos aspectos individuais, percebidas nos discursos dos sujeitos, levam o pesquisador às Categorias Abertas, grandes regiões de generalidades que passam a ser interpretadas pelo pesquisador.

Em busca do que se manifestava, foi realizada, inicialmente, a articulação das unidades que convergiam e, dessas ideias, emergiram as categorias que, vale ressaltar, não foram estabelecidas *a priori*. Utilizamos novamente o *software Atlas.ti*, de forma que todas as Unidades Significativas das Cenas foram exibidas em uma "rede" (função disponibilizada pelo *software Atlas.ti*), que foram analisadas repetidas vezes, buscando compreendê-las em seus significados individuais e convergentes, e após agrupadas, utilizando cores diferentes, com vista à distinção dos significados nucleares de cada categoria aberta. Essas categorias abertas se constituem em núcleos de ideias que dizem sobre as Unidades de Significado que as compõem. Desse movimento de redução, surgiram sete categorias abertas. A seguir, no Quadro 3, apresentamos as Unidades de Significado que compõem as sete categorias.

UNIDADES DE SIGNIFICADO	CATEGORIA
USC.1.1.01; USC.3.2.01.	C1) Compreensões iniciais sobre frações
USC.5.2.01; USC.5.2.02; USC.7.3.02; USC.7.1.03; USC.7.3.03; USC.7.3.04; USC.7.4.03; USC.3.2.10; USC.4.3.03; USC.1.2.01; USC.3.2.05.	C2) Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa
USC.3.2.07; USC.7.2.01; USC.7.4.04; USC.4.2.01; USC.7.3.05; USC.3.2.02.	C3) A unidade e a sua relativização
USC.3.2.08; USC.3.2.11; USC.3.3.01; USC.4.3.02; USC.4.3.01; USC.5.1.03; USC.5.3.03; USC.5.3.05; USC.5.3.01; USC.7.1.02; USC.7.3.01.	C4) A necessidade e o reconhecimento da unidade
USC.2.1.01; USC.2.1.02; USC.2.1.04; USC.3.1.01; USC.3.1.02; USC.3.2.04; USC.3.2.06; USC.4.3.04; USC.5.1.01; USC.5.1.02.	C5) Manifestação do sentido da igualdade

USC.7.4.01; USC.7.3.06; USC.7.2.02; USC.7.1.01; USC.5.4.02; USC.5.4.01; USC.6.1.01; USC.5.3.04; USC.5.3.02; USC.3.2.03; USC.3.2.09; USC.3.2.12; USC.4.1.01; USC.1.1.02; USC.2.1.03.	C6) Simbolização e/ou representação das frações
USC.5.1.05; USC.7.4.02; USC.5.1.04.	C7) Compreensão das frações sem barras

Quadro 3: As Unidades de Significado que compõem as sete categorias.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A ordem da apresentação das categorias se deu de maneira aleatória e não por indicação de nível ou grau de importância. A Figura 26 exemplifica o resultado do movimento de redução realizado em busca das categorias. As sete cores representam as sete categorias que emergiram desse movimento.

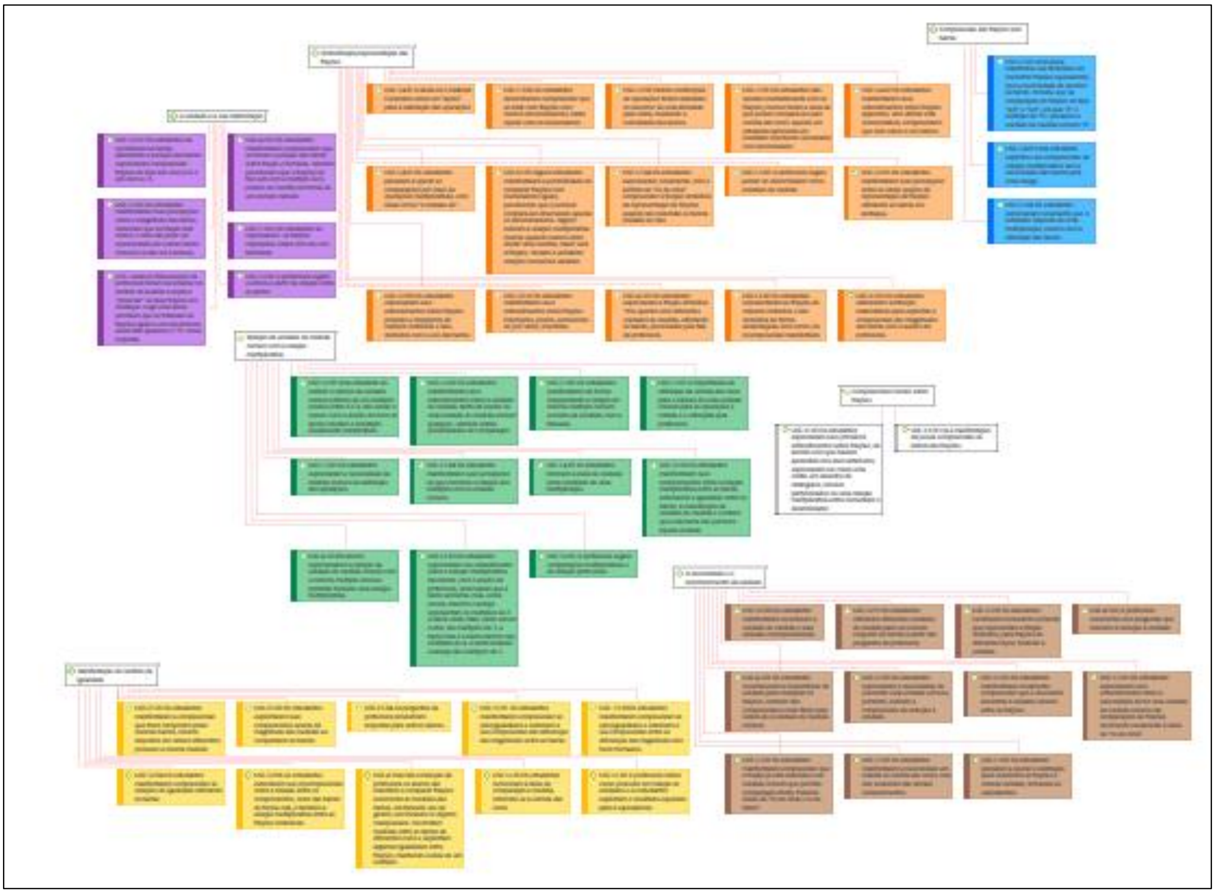


Figura 26: Exemplo do movimento de convergência das Unidades Significativas, realizado no *Atlas.ti*, que constituíram as categorias.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Destacamos que essas categorias não foram definidas a *priori*, pois, na investigação fenomenológica, deixamos que as coisas se manifestem como são, sem projetar nelas nossas expectativas (PALMER, 1996). Estes procedimentos fenomenológicos indicam o ato de redução ou uma *epoché*, na qual o pesquisador deve ter o cuidado para que o que ele conhece sobre o investigado não conduza o caminho da investigação (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010).

Com as categorias organizadas, elas foram descritas. De acordo com Bicudo (2011, p. 45-46), essa descrição foca no "movimento dos atos da consciência. Ela se limita a relatar o visto, o sentido, ou seja, a experiência como vivida pelo sujeito. Não admite avaliações e interpretações, apenas exposição do vivido como sentido ou percebido". A descrições das categorias constituídas são expostas no Capítulo 5 desta dissertação, juntamente com suas interpretações. Essas interpretações foram efetuadas hermeneuticamente, buscando "[...] explicitar o que compreende do dito pelo sujeito, construindo as asserções articuladas ou, colocando na linguagem do pesquisador, o sentido percebido nos discursos do sujeito" (PAULO; AMARAL; SANTIAGO, 2010, p. 74).

Para melhor visualização das categorias, elas estão registradas no Quadro 4, acompanhadas de uma síntese do sentido que as articula.

CATEGORIA	SÍNTESE DAS CATEGORIAS
C1) Compreensões iniciais sobre frações	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem das compreensões iniciais dos alunos sobre as frações. Os alunos **percebem** as frações como uma conta, retângulos ou círculos particionados ou como uma relação multiplicativa entre numerador e denominador.
C2) Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa. A partir das construções com as barras os estudantes fizeram a correspondência da unidade de medida comum com uma **multiplicação** ou com o **mínimo múltiplo comum**. A categoria também revela momentos em que se evidencia a correspondência das cores das barras com um **múltiplo**.
C3) A unidade e a sua relativização	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre a unidade e a relativização da unidade. A partir das construções com as barras os estudantes mostraram compreender que ao trocar a posição de uma dupla de barras outra **medida** e outra fração é formada, consequentemente outra **unidade de medida** passa a ser utilizada. As frações **impróprias** se mostraram ser de fácil compreensão para os estudantes e as diferentes **possibilidades** de representação de frações com as barras é evidenciada.
C4) A necessidade e o reconhecimento da unidade	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da necessidade e o reconhecimento da unidade. Os estudantes apresentam várias **possibilidades** de construções com as barras sempre levando em consideração a unidade de medida. No que se refere à comparação

CATEGORIA	SÍNTESE DAS CATEGORIAS
	e às operações de adição e subtração, realizam a **redução** a uma unidade comum para tornar possível tal ação. Algumas **dúvidas** também se fizeram presentes na realização das atividades, necessitando algumas vezes a intervenção da professora.
C5) Manifestação do sentido da igualdade	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre o sentido da igualdade manifestado. As unidades ressaltam que os estudantes passaram a focar ou expressar o **sentido de igualdade** entre as barras. Essa categoria retrata em vários momentos a **igualdade como equivalência** das barras, pois mesmo com diferentes disposições das barras seu comprimento não se altera. A **comparação** também se mostrou com força, pois os estudantes comparam barras de diferentes cores, comprimentos, em diferentes ordenações, focando a comparação entre as barras. Através das tentativas os estudantes testam as medidas e ao compararem concluem as igualdades entre algumas frações estabelecendo **relações multiplicativas**.
C6) Simbolização e/ou representação das frações	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da simbolização ou representação das frações. Na realização das atividades, os estudantes em alguns momentos viram as barras como um material de **apoio ao seu pensar.** A **curiosidade** também é revelada nas outras construções realizadas pelos alunos.
C7) Compreensão das frações sem barras	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre as construções realizadas pelos alunos sem a necessidade da utilização das barras. No desenrolar das atividades os alunos começaram a manifestar **facilidade** em comparar e operar com as frações, não necessitando mais as barras.

Quadro 4: Síntese das categorias.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Esse quadro decorre da análise das cenas significativas e da convergência das Unidades Significativas expostas nos próximos capítulos e, aqui, cumpre apenas o papel de antecipar os resultados para o leitor.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE IDEOGRÁFICA: EXPLICITANDO AS UNIDADES DE SIGNIFICADO

Este capítulo tem o intuito de apresentar as Unidades Significativas obtidas na análise ideográfica das Cenas Significativas. As Cenas Significativas são compostas de recortes das transcrições dos áudios das gravações de vídeo em que observamos expressões coletivas ou individuais, que fazem sentido ao que o pesquisador busca compreender, isto é, fazem sentido para a aprendizagem das frações. De uma mesma Cena pode emergir mais que uma Unidade Significativa. A Análise Ideográfica das Cenas foi inspirada no trabalho de Brito (2018), em que as cenas são apresentadas em quadros, conforme mostra o Quadro 2, e exibem as expressões dos sujeitos no contexto da Cena e que permitem desvelar ao pesquisador os sentidos manifestados ao indagar a partir da interrogação norteadora da pesquisa. Os sentidos a que se referem essas expressões são articulados pelo pesquisador em uma asserção que chamamos de Unidade Significativa da Cena (USC). Após cada Unidade de Cena, acrescentamos uma linha para a explicitação da Unidade Significativa da Cena (USC) que são descritas da forma de "USC.x.y.z"*,* de modo que as letras "x.y.z*"* representam dígitos, os quais a primeira letra indica a prática, a segunda indica a Cena e a terceira indica a Unidade Significativa.

No sentido de preservar a identidade dos alunos, organizamos as falas individuais da seguinte forma: dispostos em ordem alfabética os nomes dos alunos, o primeiro nome foi substituído pela letra A, tornando assim o "Aluno A", o segundo nome torna-se o "Aluno B" e assim sucessivamente. Ao nos referirmos às respostas de mais de um aluno, usamos a expressão "Vários alunos". A seguir, no restante deste capítulo, apresentamos nossas análises das sete práticas da sala de aula que compõem nosso estudo.

4.1 Análise Ideográfica da Prática 1

Para efetivar a Análise Ideográfica da Prática 1, apresentamos e analisamos duas Cenas Significativas, das quais se desvelam duas Unidades Significativas, em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações, na perspectiva de medição.

4.1.1 Unidades Significativas das Cenas da Prática 1

Cena 1: Compreensões acerca do significado de frações

A Cena mostra os registros das respostas dos alunos ao serem questionados: O que são frações para vocês?

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
RESPOSTA DO GRUPO 1: *Frações é um conjunto de continhas!* (representaram graficamente algumas frações de forma simbólica) RESPOSTA DO GRUPO 2: *A fração de 100 é 10, porque 10x10 é 100.* RESPOSTA DO GRUPO 3: *Entendo que tem uma linha, é um número que "faz" vezes 100, e a fração de 100 é 10, isso que entendo de fração!* RESPOSTA DO GRUPO 4: *35/6 é a representação de um cálculo é feita pela tabuada, quantas vezes 6 cabe no número da chave* (colocam dois exemplos de frações através de desenhos de retângulos particionados) RESPOSTA DO GRUPO 5: *Não lembro mais de nada, não faço ideia do que seja!* RESPOSTA DO GRUPO 6: (colocaram vários desenhos de retângulos particionados representando as frações, mas não mostram sua representação simbólica.) RESPOSTA DO GRUPO 7: *Frações são divisões de partes iguais por exemplo 2/4.* (desenharam um círculo dividido em quatro partes e coloriram duas delas) RESPOSTA DO GRUPO 8: (colocaram várias representações simbólicas de frações de forma aleatória, como 5/6, 2/5, 2/10... mas não souberam explicar).	01
Os estudantes expressaram seus primeiros entendimentos sobre frações, de acordo com que haviam aprendido nos anos anteriores, expressaram ser como uma conta, um desenho de retângulos, círculos particionados ou uma relação multiplicativa entre numerador e denominador.	USC.1.1.01
Os estudantes representaram as frações de maneira simbólica e não-simbólica de forma desarranjada, bem como, há incompreensão manifestada.	USC.1.1.02

Quadro 5: Descrição da Cena 1 da Prática 1.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A Cena mostra as primeiras lembranças dos estudantes acerca do conteúdo de frações com base no que haviam estudado nos anos anteriores de escolarização. Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração de aproximadamente 15 minutos.

Cena 2: Familiarização com as barras e suas relações

A Cena mostra o diálogo entre a professora e os estudantes na procura de identificar, coletivamente, as barras que têm um número par associado ao seu comprimento e outras que tem um número ímpar associado ao seu comprimento.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
ALUNO “A” LÊ A PERGUNTA: *Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras vermelhas?* VÁRIOS ALUNOS: *Roxo, verde escuro, marrom, laranja e a própria cor vermelha! São as barras que correspondem aos números que estão na tabuada do dois!* PROFESSORA: *Isso, são múltiplos de dois! Vamos para segunda questão.* ALUNO “G” LÊ A PERGUNTA: *Quais vagões não podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com vagões vermelhos?* VÁRIOS ALUNOS: *Branco, verde claro, amarelo, preto e azul.* PROFESSORA: *O que podemos dizer destas barras?* ALUNOS: *São barras que não correspondem a números pares.* PROFESSORA: “*Aluno I”, leia a número 3.* ALUNO “I” LÊ A PERGUNTA: *O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de vagões?* RESPOSTA DO ALUNO “I”: *Eu coloquei que o primeiro é formado por números pares e o segundo por ímpares.* PROFESSORA: *Acabamos discutindo esta atividade antes, alguém fez algo diferente?* VÁRIOS ALUNOS: *Não!* PROFESSORA LÊ A PERGUNTA: *Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras verdes claras?* VÁRIOS ALUNOS: *Verde escuro e azul!* PROFESSORA: *Esqueceram de uma...* ALUNA H: *Verde claro conta também! Porque 3 está na tabuada do 3!* PROFESSORA: *Isso mesmo! Vamos continuar: Quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras verdes claras?* VÁRIOS ALUNOS: *São as barras que sobraram: branca, vermelha, roxa, amarela, preta, marrom e laranja.* ALUNO G LÊ A PERGUNTA: *O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de barras?* ALUNO G: *Eu coloquei que a primeira são as barras que correspondem aos números que estão na tabuada do 3, e o segundo é os que não estão*! PROFESSORA: *Vamos melhorar a resposta, o primeiro grupo são números múltiplos de três e o segundo os que não são múltiplos de três! Mas sua resposta está certa, mas vamos utilizar a palavra múltiplo.* ALUNA H LÊ A PERGUNTA: *Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras amarelas?* VÁRIOS ALUNOS: *Amarela e laranja.* PROFESSORA: *Ok, e quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras amarelas?*	01

VÁRIOS ALUNOS: *Todas as outras barras que sobraram.* PROFESSORA: *Mas vamos escrever elas.* PROFESSORA: *Vamos para última...* ALUNO "F" LÊ A PERGUNTA: O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de barras? VÁRIOS ALUNOS: *O primeiro é que são números múltiplos de 5 e o segundo não são!*	
Os estudantes expressaram seus entendimentos sobre a relação multiplicativa das barras, com o auxílio da professora, observando que a barra vermelha, roxa, verde escura, marrom e laranja representam os múltiplos de 2. A barra verde clara, verde escura e azul, são múltiplos de 3, a barra roxa e a barra marrom são múltiplas de 4. A barra amarela e laranja são múltiplos de 5.	USC.1.2.01

Quadro 6: Descrição da Cena 2 da Prática 1.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração aproximada de 20 minutos. Ela mostra que os estudantes perceberam que cada cor de barra tem um comprimento associado a ela e que este poderia ser determinado com uma certa quantidade de barras brancas. Os "trens" são compostos de barras dispostas lado a lado na horizontal ou vertical. Dessa forma, construíram sequências por ordem de comprimento e a memorizaram.

Na atividade: Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras vermelhas? Um grupo de alunos logo percebeu a relação multiplicativa das barras, relacionando-as com a "tabuada do 2", ou seja, algumas barras correspondem a uma sequência de números pares, como exemplo: a barra roxa corresponde ao comprimento de duas barras vermelhas (ou quatro barras brancas); a barra verde escura corresponde a três barras vermelhas (ou três barras brancas); a barra marrom corresponde a quatro barras vermelhas (ou oito barras brancas) e assim sucessivamente.

4.2 Análise Ideográfica da Prática 2

Para efetivar a Análise Ideográfica da Prática 2, apresentamos e analisamos uma Cena Significativa, a qual dela se desvelam quatro Unidades Significativas em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações, na perspectiva de medição.

4.2.1 Unidade Significativa da Cena da Prática 2

Cena 1: Elaboração de sentenças matemáticas que abordem comparações entre os comprimentos das barras de Cuisenaire

A Cena mostra o trabalho dos grupos utilizando o material Cuisenaire para a percepção de suas características quanto aos comprimentos e quais deles podem ser compostos por uma ou mais barras posicionadas sobre a mesa, uma atrás da outra, como em um “trem”. Simbologias como “maior que”, “menor que”, “igual” e “diferente”, foram introduzidas e utilizadas nas comparações de tamanhos.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Forme um trem com 1r+1v+1c sem se desfazer deste trem crie outros trens com as mesmas cores, mas com diferentes ordens das barras. Desenhe estas possibilidades.* ALUNO E*: Como assim, professora?* PROFESSORA: *Vocês precisam montar um trem com estas barras, mas com a ordem trocada. Talvez utilizem primeiro a barra roxa, conforme a imagem! (Tempo). Começando com a barra verde clara tenho a possibilidade: c+r+v, depois c+v+r, com a barra vermelha e a roxa a mesma coisa…. Quantas possibilidades nós temos?* VÁRIOS ALUNOS: *6!* PROFESSORA: *O que podemos dizer do comprimento dos trens?* VÁRIOS ALUNOS: *São iguais!* PROFESSORA: *Todos conseguiram desenhar as seis possibilidades?* VÁRIOS ALUNOS: *Sim! Só a ordem está diferente, mas são estas seis!*	01
Os estudantes manifestaram a compreensão que trens compostos pelas mesmas barras, mesmo dispostos em ordens diferentes, possuem a mesma medida.	USC.2.1.01
PROFESSORA: *O comprimento da barra vermelha é igual ou diferente ao comprimento da barra preta? Como podemos escrever isso?* VÁRIOS ALUNOS: *É menor! A barra vermelha é menor pois ela vale dois e a preta vale 7! Escrevemos v< p, p>v, p≠v!* PROFESSORA: *O comprimento do trem preto mais roxo é igual ou diferente em relação ao comprimento da barra azul? Como podemos escrever isso?* VÁRIOS ALUNOS: *É maior, pois vale 12 e a azul vale 9! É maior, pois o comprimento é maior! Escrevemos p+r< a, a>p+r, a≠p+r!* PROFESSORA: *O comprimento do trem c+r é maior/menor/igual ou diferente em relação ao comprimento do trem a+l? Como podemos escrever isso?* VÁRIOS ALUNOS: *É bem menor! É menor, pois só a laranja já vale 10! É maior, pois o comprimento 19 é maior! Escrevemos c+r< a+l, a+l>c+r, a+l≠c+r.* PROFESSORA: *O comprimento do trem e+v é maior, menor ou igual em relação*	02.03.04

ao comprimento das barras c+o? Como podemos escrever isso? VÁRIOS ALUNOS: *São iguais! São iguais, pois valem 8 as duas! Escrevemos e+v= c+o!*	
Os estudantes explicitaram suas compreensões acerca da magnitude das medidas ao compararem as barras.	USC.2.1.02
Os estudantes elaboraram sentenças matemáticas para explicitar a compreensão das magnitudes das barras com o auxílio da professora.	USC.2.1.03
As perguntas da professora produziram respostas para outros valores.	USC.2.1.04

Quadro 7: Descrição da Cena 1 da Prática 2.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração de aproximadamente 15 minutos. Ela mostra que as sentenças matemáticas foram construídas com o intuito de comparar as medidas das barras. Cada barra tem uma cor e um comprimento associado a ela, e esse comprimento pode ser determinado com uma quantidade exata de barras brancas.

4.3 Análise Ideográfica da Prática 3

Para efetivar a Análise Ideográfica da Prática 3, apresentamos e analisamos três Cenas Significativas, nas quais se desvelam quinze Unidades Significativas em que percebemos a manifestação da aprendizagem sobre frações, na perspectiva de medição.

4.3.1 Unidades Significativas da Cena da Prática 3

Cena 1: Correspondências entre os comprimentos das barras

A Cena mostra o trabalho dos alunos na construção de correspondências entre os comprimentos das barras.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
Diálogo entre uma dupla: ALUNA H: *Barra branca ou vermelha, qual é a maior?* ALUNA N: *Claro que é a vermelha, a branca é a menor! Amarela ou verde escura,*	

qual é a menor? ALUNA H: *Amarela vale cinco e verde escura três, não, vale seis, verde clara é três. Então a menor é a amarela. A aluna continua... E a laranja e a azul?* ALUNA N: *Azul.*	01
Os estudantes manifestaram compreender as (des)igualdades e externam a sua compreensão das diferenças das magnitudes entre as barras.	USC.3.1.01
PROFESSORA: *Três barras vermelhas mais seis barras brancas são maiores, menores ou iguais, a uma barra azul mais uma vermelha?* VÁRIOS ALUNOS: *Maior!* (Professora faz a construção no aplicativo) PROFESSORA: *Uma barra azul mais duas amarelas são iguais, maiores ou menores que uma barra laranja mais quatro brancas?* VÁRIOS ALUNOS: *Maior!* (Professora faz a construção no aplicativo)	01
Os estudantes manifestaram compreender as (des)igualdades e externam a sua compreensão entre as diferenças das magnitudes dos trens formados.	USC.3.1.02

Quadro 8: Descrição da Cena 1 da Prática 3.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 10 minutos aproximadamente. Mostra que trens de variadas medidas foram construídos com o intuito de comparar medidas e auxiliar na familiarização com as barras.

Cena 2: Representação de frações utilizando as barras, equivalência de frações pelo comprimento entre as barras, frações próprias e impróprias

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Quando eu colocar uma peça branca do lado esquerdo de uma barra preta, qual é a parte da barra preta que corresponde uma barra branca?* VÁRIOS ALUNOS: *Como assim? Não estou entendendo!* PROFESSORA: *Uma barra ou parte de quanto?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma parte de sete? Uma de sete!* PROFESSORA: *Ótimo, mas como se lê esta fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Um de sete? Um sétimo?* PROFESSORA: *Um sétimo! E* representamos assim (Professora faz a construção no aplicativo) *Vamos agora representar outra, vamos pegar a barra azul, coloque duas peças brancas ao lado esquerdo da barra azul. Qual é a fração que está representada?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois de nove?* PROFESSORA: *Mas como se chama esta fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois nonos! Não lembro!*	01.02
Há a manifestação da pouca compreensão na leitura das frações.	USC.3.2.01

A professora sugere a leitura a partir da relação entre as partes.	USC.3.2.02
PROFESSORA: *Vamos mudar um pouco, não vamos somente utilizar as barras brancas, vamos utilizar outras, por exemplo vamos pegar a barra vermelha e a barra laranja. Agora pensem um pouco...* VÁRIOS ALUNOS: *Dois décimos!!* PROFESSORA: *Quantas vezes a peça vermelha cabe na peça laranja?* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco!* PROFESSORA: Mas quantas peças vermelhas eu peguei? VÁRIOS ALUNOS: *Uma! Mas então é um quinto?* PROFESSORA: *Mas vocês me falaram que a fração era Dois décimos?* VÁRIOS ALUNOS*: Então é um décimo?* (Silêncio na turma) PROFESSORA: *Calma, vamos de novo... Acho que podemos representar de dois jeitos. Vocês me falaram dois décimos porque a peça vermelha corresponde a duas brancas e a laranja cabem quantas?* VÁRIOS ALUNOS: *Dez!* PROFESSORA: *Então formou a fração Dois décimos? Sim certo! Mas se eu quero agora, representar com barras vermelhas...Quantas barras vermelhas cabem aqui?* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco!* PROFESSORA: *Quantas barras vermelhas, coloquei ao lado da laranja?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma!* PROFESSORA: *Então posso dizer que essas duas frações são?* VÁRIOS ALUNOS: *Iguais?* PROFESSORA: *São iguais!!!*	03.04.05
Os estudantes manifestaram suas percepções sobre as várias opções de representação de frações utilizando as barras em destaque. Os estudantes manifestaram compreender as relações de igualdade utilizando as barras. A professora sugere comparações multiplicativas e de relação parte-todo.	USC.3.2.03 USC.3.2.04 USC.3.2.05
PROFESSORA: *Peguem uma barra verde clara, e coloque ao lado esquerdo da barra azul, qual a fração representada?* VÁRIOS ALUNOS: *Três nonos! Não é! É três terços! Três nonos ou três terços!* PROFESSORA: *Três terços?* VÁRIOS ALUNOS: *Acho que não, acho que é um terço! Três terços é um inteiro!* PROFESSORA: *Ok, cabem três barras verdes aqui (mostra no aplicativo), mas aí quantas barras verdes nós colocamos?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma! Então é um terço! E três nonos também!* PROFESSORA: *Vocês observaram alguma relação entre um terço e três nonos?* VÁRIOS ALUNOS: “*Huum”, não! Professora os terços cabem na tabuada do nove!*	06

PROFESSORA: *Mas e o número* de cima? VÁRIOS ALUNOS: *Professora eu consegui, "uma vezes" três é três e três vezes três é nove!*	
As estudantes externaram sua (in)compreensão sobre a relação entre os comprimentos, cores das barras de forma oral, e também a relação multiplicativa entre as frações simbólicas.	USC.3.2.06
PROFESSORA: *Agora vou chamar o "Aluno l": Escolha duas barras.* ALUNO L: *Huum, marrom e roxa!* PROFESSORA: *Ok, vou complicar um pouco* (professora coloca a barra marrom ao lado esquerdo da roxa). *"Aluno l" escolhe uma pessoa de outra dupla para responder.* ALUNO L: "*Aluno g"* PROFESSORA: *Escreva a fração correspondente a essas barras, mas cuide com a sequência, a barra marrom está ao lado esquerdo da roxa.* VÁRIOS ALUNOS: *Ahhh já entendi o que a "profe" fez!* PROFESSORA: *Pense primeiro quantas barras roxas cabem na marrom.* ALUNO G: *Duas. Mas não sei como fazer!* PROFESSORA: *E se eu colocar a barra roxa na esquerda?* ALUNO G: "*Ah" assim fica mais fácil, fica um sobre dois!* PROFESSORA: *Como lê essa fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Um segundo! Não, um meio!* PROFESSORA: *Um meio, certo! Pois representa a metade da outra barra! Mas vamos voltar a primeira fração, colocar primeiro a marrom e depois a roxa, mudou a posição e muda a fração, está ao contrário.* VÁRIOS ALUNOS: *Então fica dois sobre um!* PROFESSORA: *Estranho né? Mas pensem, uma marrom não corresponde a duas barras roxas inteiras?* ALUNOS: *Sim!* PROFESSORA: *Então temos a fração dois inteiros, lembrando que este traço da fração corresponde a divisão, e dois dividido por um, é dois, por isso não vemos frações com o algarismo de baixo um. Então qualquer número natural posso escrever na forma de uma fração.*	07
Os estudantes ao escolherem as barras, alternando a posição das barras expressam entender frações do tipo a/b com a>b e a/b com a< b.	USC.3.2.07
PROFESSORA: *Vamos para última. Façam um trem pode ser na vertical, com uma barra vermelha e uma laranja. Podemos dar um nome para este trem, vermelho com laranja forma...* VÁRIOS ALUNOS: "*Lavermelho"* (risos) PROFESSORA: *Muito bom! Mas o que acham de "Varanja"?!* VÁRIOS ALUNOS: *Melhor, pode ser!* PROFESSORA: *Quantas barras verdes claras cabem no trem "varanja"? Vamos lá se concentrem!* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* PROFESSORA: *Mas se eu perguntar quanto uma barra verde clara corresponde*	

do trem "varanja"? VÁRIOS ALUNOS: *Um quarto! Cabem três, fica um cubo fora! Mas cabem quatro sim! Cabem quatro sim, pois o trem "varanja" é doze!* PROFESSORA: *Mas e se eu colocar duas verdes claras, qual a fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois quartos!* PROFESSORA: *Mas olhem a figura e olhem a fração, este tamanho não é igual a esse* (mostra no aplicativo) *se eu pintar este tanto corresponde o que da figura inteira?* VÁRIOS ALUNOS: *Metade!* PROFESSORA: *Mas qual fração representa a metade?* VÁRIOS ALUNOS: *Um meio*!	08
Os estudantes manifestaram reconhecer a unidade de medida e suas variadas correspondências.	USC.3.2.08
PROFESSORA: *Agora peguem o trem "varanja". Não desmontem. Quantas barras vermelhas cabem nele?* VÁRIOS ALUNOS: *Seis!* PROFESSORA: *Se eu pegar duas vermelhas e colocar ao lado esquerdo, qual é a fração correspondente?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois sextos!* PROFESSORA: *E se eu trocar a posição?* VÁRIOS ALUNOS: *Seis meios! Três inteiros?* PROFESSORA: *Quantos inteiros temos? Vamos contar um…dois…três! E seis divide por dois é quanto?* Alunos: *Três!*	09
Os estudantes expressaram seus entendimentos sobre frações próprias e impróprias de maneira simbólica e não-simbólica com o uso das barras	USC.3.2.09
Uma aluna foi convidada a ler uma das atividades propostas. ALUNA M: *Quantas barras brancas preciso para ter a barra marrom?* VÁRIOS ALUNOS: *Oito! Oito porque cabem oito brancas na marrom!* ALUNA M: *O comprimento da barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?* VÁRIOS ALUNOS: *Um oitavo! Um oitavo, pois representa uma parte das oito!* PROFESSORA: *A barra preta representa a unidade de medida, a barra branca diz quantas vezes ela cabe aqui. Se for uma no caso, é uma parte de oito. Tem outra maneira de representar esta fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Não!* PROFESSORA: *É só um oitavo!* ALUNA M: *E duas brancas?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois oitavos!* PROFESSORA: *E agora tem outra maneira de representar esta fração? Qual é a outra barra que tem este tamanho?* VÁRIOS ALUNOS: *Vermelha!!* PROFESSORA: *Vou sobrepor… E aí quantas vermelhas cabem aqui?* (Se	10

referindo à quantas barras vermelhas cabem na preta) VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* PROFESSORA: *E se escrevesse um quarto também estaria certo?* VÁRIOS ALUNOS: *Sim! Acho que sim!* PROFESSORA: *Só substituir duas barras brancas por uma peça vermelha…* ALUNA M: *E cinco barras brancas?* VÁRIOS ALUNOS: *Fica cinco oitavos!* PROFESSORA: *Tem outra barra que poderíamos representar esta fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Roxa! Roxa não, amarela!* PROFESSORA: *Mas a amarela cabe exatamente aqui*? (Se referindo a barra preta) VÁRIOS ALUNOS: *Não!!* PROFESSORA: *A amarela é equivalente as cinco brancas, mas não cabe um número exato na barra marrom. Preciso aqui das barras brancas.*	
Os estudantes manifestaram seus conhecimentos sobre a relação multiplicativa entre as barras, externando a igualdade entre as barras, a manutenção da unidade de medida e a notaram que uma barra não pertence àquela unidade.	USC.3.2.10
Novamente aluno foi convidado a ler uma das atividades propostas. ALUNO A: *Quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* ALUNO A: *Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?* VÁRIOS ALUNOS: *Um quarto! Um quarto ou dois oitavos!* ALUNO A: *E agora, quantas vermelhas cabem na marrom?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* ALUNO A: *Quantas vermelhas eu tenho?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma!* PROFESSORA: *Eu tenho então um quarto, mas dois oitavos, está certo também! Pois uma barra vermelha equivale a duas brancas e a marrom à oito brancas.. Observei que vários grupos colocaram dois oitavos. Vamos continuar...* ALUNO A: E duas barras vermelhas? VÁRIOS ALUNOS: *Dois quartos! Quatro quartos! Dois quartos ou Quatro oitavos!* PROFESSORA: *Cuidado não é quatro quartos… "Aluno a" continue!* ALUNO A: *E quatro barras vermelhas?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro quartos! Quatro quartos ou oito oitavos!* PROFESSORA: *E isso corresponde a que?* VÁRIOS ALUNOS: *Um inteiro! Um inteiro?* PROFESSORA: *Um inteiro, tamanhos iguais!* ALUNO A: *E cinco barras vermelhas?* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco quartos! Cinco quartos ou dez oitavos!*	11

Os estudantes utilizaram diferentes unidades de medida para um mesmo conjunto de barras a partir das perguntas da professora.	USC.3.2.11
Novamente um aluno foi convidado a ler uma das atividades propostas. ALUNO E: *Uma barra verde clara e posiciona lado esquerdo de uma barra azul, a barra verde clara é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?* VÁRIOS ALUNOS: *Um terço! Três nonos! Um terço ou três nonos!* PROFESSORA: *Ótimo! Continue "Aluno e".* ALUNO E: *E duas barras verdes claras?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois terços ou seis nonos!* PROFESSORA: *Seis nonos é só medir com barras branca. Outra pergunta...* ALUNO E: *E quatro barras verdes* claras? ALUNO E: Três quartos! PROFESSORA: "*Opps", acho que não…* VÁRIOS ALUNOS: *Não! É quatro terços! Quatro terços ou doze nonos!*	12
Os estudantes manifestaram seus entendimentos sobre frações impróprias, porém, escrevendo-as, por vezes, invertidas.	USC.3.2.12

Quadro 9: Descrição da Cena 2 da Prática 3.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 50 minutos aproximadamente. Mostra que os alunos puderam estabelecer relações entre os comprimentos de duas barras diferentes, como, por exemplo: uma barra verde clara ao lado de uma azul, pode ser expressa pela fração $\frac{3}{9}$. Estas relações permitiram que os estudantes compreendessem frações próprias e impróprias por meio de construções com as barras. Ressaltamos que o nosso principal objetivo era a construção de conceitos; assim, em nenhum momento durante as primeiras atividades, houve a explicitação da nomenclatura formal para frações "próprias", "impróprias" ou ainda "aparente".

Cena 3: Representação simbólica de frações para não simbólica

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Como vocês podem representar um terço com as barras? Desenhe ou escreva as três opções.* VÁRIOS ALUNOS: *Uma branca e uma verde clara! Uma vermelha e uma verde escura! Uma verde clara e uma azul!* PROFESSORA: *Como podemos representar um meio com as barras? Desenhe quatro opções.*	

VÁRIOS ALUNOS: *Uma branca e uma vermelha! Uma vermelha e uma roxa! Uma roxa e uma marrom!* PROFESSORA: *Como podemos representar treze sétimos em relação a barra preta?* VÁRIOS ALUNOS: *Treze brancas e uma preta! Dez brancas mais uma verde clara e uma preta! Logo eu achei esta atividade mais difícil!* PROFESSORA: *E como podemos representar dois quartos com as barras? Escreva uma opção…* VÁRIOS ALUNOS: *Duas brancas e uma roxa! Uma amarela e uma laranja! Uma barra vermelha e uma roxa!*	01
Os estudantes escolheram livremente as barras que representam a fração simbólica, para frações de diferentes tipos focando a unidade.	USC.3.3.01

Quadro 10: Descrição da Cena 3 da Prática 3.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 12 minutos aproximadamente e mostra que, a partir dessas construções, possibilitamos aos alunos compreenderem que uma mesma medida pode ser representada de diversas maneiras, ou seja, pode ser representada por cores de barras diferentes, dependendo da unidade de medida utilizada.

4.4 Análise Ideográfica da Prática 4

Para efetivar a Análise Ideográfica da Prática 4, apresentamos e analisamos três Cenas Significativas, nas quais se desvelam seis Unidades Significativas em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações, na perspectiva de medição.

4.4.1 Unidades Significativas da Cena da Prática 4

Cena 1: Uma mesma fração sendo representada por diferentes maneiras não simbólicas

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Representem três quartos usando outras barras, não usando a roxa como unidade. Ou seja devemos usar outra unidade. Qual é outra opção?* ALUNO A: *Posso falar?* PROFESSORA: *Sim!*	

ALUNO A*: Uma barra marrom e três vermelhas.* PROFESSORA*: Vamos analisar, quantas barras vermelhas cabem na marrom?* VÁRIOS ALUNOS*: Quatro!* PROFESSORA*: Isso, pegando três vermelhas teremos três quartos. Assim formamos um quarto…Dois quartos…Três quartos! (*professora mostra no aplicativo*). Ótimo! Vamos registrar esta opção. Alguém tem outra opção?* ALUNO A*: Eu professora, uma verde escura e uma marrom!* *PROFESSORA: Será que "dá" três quartos?* *VÁRIOS ALUNOS: Acho que não!* PROFESSORA*: Mas gente, se eu substituir as barras vermelhas pela verde, "não dá" a mesma coisa?* *ALUNOS: Sim!* *PROFESSORA: Então também "dá certo", vamos escrever uma verde escura e uma marrom como mais uma opção! Só a verde não cabe exatamente em cima da marrom, substituímos apenas nas vermelhas "tá", alguém tem mais uma opção?* *ALUNO J: Eu "prof", peguei uma laranja e daí eu peguei três verdes claras também.* *PROFESSORA: Vamos tentar! "Huum" mas não vai formar três quartos!* (professora mostra no aplicativo) *VÁRIOS ALUNOS: Não "dá" certo!* *ALUNO A: Uma amarela mais uma branca e uma marrom, dá certo "prof"?* *PROFESSORA: Uma amarela mais uma branca e uma marrom? Vamos montar... deu certo sim! Ou ainda três brancas e duas vermelhas!*	01
Os estudantes expressaram a fração simbólica "três quartos com diferentes unidades de medida, utilizando as barras, provocadas pela fala da professora.	USC.4.1.01

Quadro 11: Descrição da Cena 1 da Prática 4.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração aproximada de 15 minutos. Novamente, reforçamos a importância da unidade de medida utilizada e que, dependendo da sua escolha, outras representações de frações são construídas.

Cena 2: Identificação das frações impróprias do tipo $\frac{a}{b}$, com "a" sendo múltiplo de "b"

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *A barra verde escura é qual medida em relação ao comprimento da barra laranja?* ALUNA N: *Seis décimos!* PROFESSORA*: Ok! A barra laranja é qual medida em relação ao comprimento da barra verde escura?* ALUNO A: *Dez sextos?*	

PROFESSORA: *Muito bem! E quatro barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?* ALUNO A: *Oito oitavos ou quatro quartos!* PROFESSORA: *O que perceberam aqui?* (professora mostra no aplicativo) VÁRIOS ALUNOS*: São iguais! São iguais a um inteiro!* PROFESSORA: *Pode ser quatro quartos ou oito oitavos, continuam iguais a um inteiro. E três barras verdes claras é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?* VÁRIOS ALUNOS: *Nove nonos! Três terços!* PROFESSORA*: Isso, todas as duas opções estão corretas. E a barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra vermelha?* VÁRIOS ALUNOS: *Um inteiro!* PROFESSORA: *Um inteiro ou dois meios entre outras opções.* ALUNO G*: Eu coloquei dois meios!* PROFESSORA: *Todos esses casos são de equivalências de frações. Agora com suas palavras o que são frações equivalentes?* ALUNO A: *Se multiplicar o número da fração vai da sempre o mesmo resultado?!* PROFESSORA: *Interessante.* ALUNA H: *Na fração três meios, três vezes dois da seis e duas vezes dois da quatro, por exemplo, formando uma fração equivalente.*	01
Os estudantes manifestaram compreender que ao trocar a posição das barras outra fração é formada. Também perceberam que a frações do tipo *a/b* com *a* múltiplo de *b*, podem ser escritas na forma de um número natural.	USC.4.2.01

Quadro 12: Descrição da Cena 2 da Prática 4.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração de 15 minutos aproximadamente. A partir dessas construções, possibilitamos aos alunos compreenderem que algumas relações entre mesmos comprimentos podem ser expressas por medidas equivalentes.

Cena 3: Comparação entre frações com denominadores diferentes

A Cena mostra o diálogo entre a professora e os estudantes na procura de identificar entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ qual delas é a maior e o porquê. As repostas foram registradas em uma folha e em seguida compartilhadas com a turma.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
(A professora lê as respostas para a turma toda:)	

RESPOSTA DO GRUPO 1: $\frac{2}{3}$ *é maior, mas depende da unidade.*	01
Os estudantes reconheceram a importância da unidade para comparar as frações, contudo manifestaram não compreendem como fazer para reduzi-las à unidade de medida comum.	USC.4.3.01
RESPOSTA DO GRUPO 2: $\frac{2}{3}$ *porque se representar com barras brancas* $\frac{2}{3}$ *é maior.* PROFESSORA: *Mas aqui tenho* $\frac{2}{3}$ (Professora monta com as barras) *certo, se eu representar com as barras brancas, ele continua sendo dois terços, e aqui muda alguma coisa?* VÁRIOS ALUNOS: *Continua sendo a mesma coisa!* PROFESSORA: (Professora continua a leitura das respostas) RESPOSTA DO GRUPO 3: $\frac{1}{5}$ *é maior porque 5 é maior que o 3.* *PROFESSORA: Mas e o um?* RESPOSTA DO GRUPO 4: $\frac{2}{3}$ *porque duas verde-claras é maior que a amarela.* RESPOSTA DO GRUPO 5: $\frac{1}{5}$ *porque 5 é maior que o 3.* RESPOSTA DO GRUPO 6: $\frac{2}{3}$ *porque ele não muda, e* $\frac{1}{5}$ *pode se transformar em* $\frac{2}{10}$. *PROFESSORA: Mas continua sendo* $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ *é equivalente.* RESPOSTA DO GRUPO 7: *Acho que é* $\frac{1}{5}$, *não sei explicar.* PROFESSORA: *Beleza pessoal…. Vamos escrever* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{1}{5}$ *no quadro, primeiro pensem comigo, isso aqui é um número, eu não posso sair comparando número de cima com o outro de cima da fração e comparar os números de baixo, ok? Isso é um número…E isso é outro número…Frações é um número só, agora peço para vocês, posso comparar vermelho com o branco aqui?* VÁRIOS *ALUNOS: Posso! Vermelho é maior!* *PROFESSORA: Mas se eu comparar verde com o amarelo, qual é o maior?* VÁRIOS ALUNOS: *Amarelo!* PROFESSORA: *Mas qual é a fração maior então?* ALUNO C: *Temos que juntar eles!* PROFESSORA: *Somar?* ALUNO *C: Sim professora.* VÁRIOS ALUNOS: *Não, "dá" certo isso! Não posso juntar terços com quintos!* PROFESSORA: *Vamos ver o que podemos fazer. Se eu tivesse as unidades de mesmo tamanho, seria que não iria facilitar nosso trabalho? Comparar terços e terços, quintos e quintos*. (Silêncio na turma) *Vamos fazer isso?! Vamos transformar essas frações em uma unidade comum, vamos lá, pensem comigo, terços e quintos, qual seria a unidade comum?* VÁRIOS ALUNOS: *6! 10! 20! 8! Não sei! Nem ideia!*	02
A professora encaminha com perguntas que induzem a redução à unidade.	USC.4.3.02

UM ALUNO LÊ O TEXTO DISPONIBILIZADO PELA PROFESSORA*: Para comparar as frações precisamos ter uma unidade comum. Para isto vamos realizar um jogo, chamado corrida das cores. Esse jogo consiste em posicionar duas barras de cores diferentes representadas pelas unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos por exemplo, pelo posicionamento das Barras verdes claro e amarelo, lado a lado, com uma de suas extremidades pareados alinhadas. O objetivo do jogo é o de igualar os comprimentos das fileiras das duas cores de barras acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais.* PROFESSORA*: Alunos peguem uma barra verde clara e uma amarela. Coloquem as duas barras lado a lado, pode ser na vertical ou horizontal. Vou fazer na horizontal. O objetivo é os dois trens, amarelo e verde, tenham o mesmo tamanho. Cada grupo pode fazer uma mesma montagem. Depois que estão lado a lado, acrescentamos uma verde, tem o mesmo tamanho? (professora mostra no aplicativo).* ALUNOS*: Não!* PROFESSORA*: Vamos colocar mais uma amarela.* ALUNOS*: Ainda não!* UM ALUNO*: Deu certo "prof", cinco verdes e três amarelas deram o mesmo tamanho!* PROFESSORA*: Vamos montar. Quantas barras brancas cabem no trem amarelo?* VÁRIOS ALUNOS*: Quinze!* PROFESSORA*: Quantas barras brancas cabem no trem verde?* VÁRIOS ALUNOS*: Quinze!* PROFESSORA*: Quinze também, óbvio! Os dois trens têm o mesmo tamanho. Essa é a unidade comum. Lembram que antes eu pedi para vocês "qual é a unidade comum entre três e cinco", está ali. Perceberam alguma relação?* UM ALUNO*: Nós já aprendemos isso em um conteúdo anterior né?!! Achávamos o menor número comum!* UM ALUNO*: É um número que tem nas duas tabuadas!*	03
Os alunos expressaram a relação da unidade de medida comum com o mínimo múltiplo comum, portanto focando uma relação multiplicativa.	USC.4.3.03
PROFESSORA: E $\frac{1}{2}$, *é maior que* $\frac{4}{7}$*? Para comparar preciso ter uma unidade comum, e aí qual é?* UM ALUNO: *Deu catorze.* PROFESSORA: *Grupo 3, qual é a maior?* GRUPO 3: *Um meio!* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro sétimos!!* PROFESSORA: *Mas como a gente sabe? Se as unidades estão diferentes, não tem como saber olhando assim. Como fazemos para ter uma unidade comum? Essa é a pergunta!* ALUNA H: *Empilhamos as unidades até chegarem em uma unidade comum depois só observamos o número de cima.* PROFESSORA: *E esse é o jogo da corrida das cores…Toda vez que esses "caras" de baixo são diferentes, precisamos do jogo corrida das cores…e olhem para tela… Vou "empilhando" as barras até igualarem as medidas, usamos os*	

meios e os sétimos. Barras vermelhas e pretas. Deu o mesmo tamanho? (professora mostra no aplicativo) VÁRIOS ALUNOS: *Ainda não!* PROFESSORA: *Adicionamos mais algumas...* (professora mostra no aplicativo). VÁRIOS ALUNOS: *Agora deu!* PROFESSORA: *Quantas barras pretas tem?* VÁRIOS ALUNOS: *Duas!* PROFESSORA: *Como eu adicionei uma, preciso adicionar uma roxa também. Quantas barras vermelhas tem?* VÁRIOS ALUNOS: *Sete!* PROFESSORA: *Então preciso sete brancas aqui também (se referindo ao numerador), uma já tem, então coloco mais seis. E agora, esse trem é maior ou menor que esse?* VÁRIOS ALUNOS: *Maior!* PROFESSORA: *Mas qual era esta fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro sétimos!* PROFESSORA: *E se transformou em qual fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Oito catorze avos!* PROFESSORA: *E um meio se transformou em qual fração?* VÁRIOS ALUNOS: *Sete catorze.* PROFESSORA: *E agora, qual é maior?* VÁRIOS ALUNOS: *Oito catorze avos!* PROFESSORA: *Posso analisar a fração ou a medida dos próprios trens com as barras.* ALUNA H: *Mas se usar outras barras um meio é maior?* PROFESSORA: *Não! Olha pessoal esse grupo usou outras barras para representar* $\frac{1}{2}$*, barras vermelhas e roxas. Mas na corrida das cores a unidade continua sendo a mesma, vamos fazer a corrida com estas barras?* (tempo) ALUNO L: "*Ahh", assim ficou mais fácil.* Ocupamos duas roxas e duas vermelhas (Professora mostra no aplicativo). PROFESSORA: *E* $\frac{4}{7}$ *continua sendo maior! Então vamos registrar no caderno:* $\frac{4}{7}$ *é maior pois se transformou em* $\frac{8}{14}$ *e* $\frac{1}{2}$ *se transformou em* $\frac{7}{14}$*, e para comparar precisamos realizar a corrida das cores. Para fazermos isso adicionamos sétimos e meios até termos uma unidade comum. A resposta não precisa ser exatamente esta, podem colocar com as palavras de vocês. Observando ainda que, quatro vezes quanto que "dá" oito?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois!* PROFESSORA: *E sete vezes quanto "dá" catorze?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois.* ALUNA H: *São frações equivalentes, por isso!!* PROFESSORA: Encontramos as frações equivalentes com a mesma unidade de medida. ALUNA H: *Mas nem todas as frações são equivalentes, né professora?*	04

PROFESSORA: *Nem todas.* ALUNA H: *Mas sem as barras como vamos saber quais frações são equivalentes?* PROFESSORA: *Vamos realizar esse tipo de cálculo também… Vamos fazer o que fizemos anteriormente, começamos encontrando a unidade comum.*	
Pela condução da professora os alunos são induzidos a comparar frações recorrendo às medidas das barras, ora fazendo uso de gestos, ora focando os objetos manipulados. Eles testam medidas entre as barras de diferentes cores e explicitam algumas igualdades entre frações, mantendo a ideia de um múltiplo.	USC.4.3.04

Quadro 13: Descrição da Cena 3 da Prática 4.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração aproximada de 40 minutos. No decorrer das atividades, os estudantes compreenderam que a unidade de medida comum poderia ser vista como o mínimo múltiplo comum que já haviam estudado. Após a familiarização com o material, muito antes de realizar a "Corrida das cores", eles já calculavam a unidade de medida comum, facilitando o trabalho com as barras.

4.5 Análise Ideográfica da Prática 5

4.5.1 Unidades Significativas da Cena da Prática 5

Para efetivar a Análise Ideográfica da Prática 5, apresentamos e analisamos quatro Cenas Significativas, nas quais se desvelam catorze Unidades Significativas, em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações, na perspectiva de medição.

Cena 1: Uma tentativa de cálculo de equivalência de frações sem as barras

A Cena mostra o trabalho dos estudantes na tentativa de realizar algumas comparações sem as barras.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *E entre* $\frac{1}{3}$ *ou* $\frac{1}{4}$ *qual é maior?* ALUNOS: *Acho que é um terço! Precisamos usar a corrida das cores!* (Todos concordaram que seria necessário utilizar a corrida das cores)	01

Os estudantes recorreram à ideia de comparação e medida, referindo-se à corrida das cores.	USC.5.1.01
PROFESSORA: *Representando com barras brancas este trem, temos doze, nossa unidade de medida, mas agora lembrem de adicionar barras ao trem que está à esquerda a mesma quantidade de barras que adicionar para chegar a unidade de medida. Quantas barras temos aqui?* (se referindo ao trem roxo) ALUNOS: *Três.* *Professora: Então preciso adicionar duas barras brancas, onde estava representado um quarto e mais três barras brancas onde estavam representados um terço. Agora a fração um terço se transformou em quatro doze avos e um quarto se transformou em três doze avos. E agora quem é maior?* VÁRIOS ALUNOS*: Um terço ou quatro doze avos!* PROFESSORA: *Isso! Um terço e quatro doze avos representam a mesma medida, são equivalentes. Mas levando em consideração a fração inicial, temos então que um terço é maior. Este processo de encontrar frações equivalentes, vocês precisam fazer/montar, para que vocês comecem a entender o processo. Agora vou lançar mais uma pergunta. Qual é a diferença entre estas duas frações?* VÁRIOS ALUNOS: *Um!* PROFESSORA: *Um o que? Ou um inteiro?* VÁRIOS ALUNOS: *Um doze avos!*	02
A professora indica como proceder em relação às unidades e os estudantes explicitaram o resultado esperado para a equivalência.	USC.5.1.02
PROFESSORA: *Isso mesmo!! Olha aqui nossa montagem, de* $\frac{3}{12}$ *ou* $\frac{1}{3}$ *para chegar em* $\frac{4}{12}$ *ou* $\frac{1}{4}$*, temos uma barra branca, vamos completar aqui, esta é a diferença* (professora mostra no aplicativo*).* PROFESSORA: *E sem as barras, como vocês fariam?* VÁRIOS ALUNOS: *Achar a unidade comum primeiro.*	03
Os estudantes expressaram e enfatizaram que é necessário encontrar uma unidade comum, portanto, indicam a compreensão da redução à unidade.	USC.5.1.03
PROFESSORA*: Do três para chegar no doze, multiplico por quanto?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* PROFESSORA*: Mas aqui também multiplicamos por quatro *uma veze o quatro, temos quatro), chegando no quatro doze avos. Aqui também do quatro para chegar no doze multiplico por quanto?* VÁRIOS ALUNOS: *Três!* PROFESSORA*: Uma vez o três é três, chegando no três doze avos, assim qual é maior?* VÁRIOS ALUNOS: *O quatro doze avos!* PROFESSORA: *Então primeiro verificamos, qual é o menor número que tem na tabuada do três e quatro ao mesmo tempo?* VÁRIOS ALUNOS: *Zero! Doze!* PROFESSORA: *Zero é comum a todos, ignoramos ele. Encontramos a unidade de medida comum, ou chamado mínimo múltiplo comum, neste caso doze.*	04

Os estudantes expressaram novamente que o resultado depende de uma multiplicação, mesmo sem a utilização das barras	USC.5.1.04
Relato de uma dupla no decorrer da atividade proposta: comparação de $\frac{1}{3}$ com $\frac{4}{6}$. ALUNA N*: "Aluna h" pega as barras verdes escuras e eu pego as barras verdes claras.* ALUNA H*: A unidade comum é o 6, nem precisa das barras, então quatro sextos é maior, pois é duas vezes.* ALUNA N*: Mas vamos montar igual, pois eu não sei quais serão os "números de cima".*	05
Uma aluna manifestou sua facilidade em encontrar frações equivalentes, sem a necessidade de recorrer às barras. Percebeu que na comparação de frações do tipo "a/b" e "c/d", em que "d" é múltiplo de "b", prevalece a unidade de medida comum "d".	USC.5.1.05

Quadro 14: Descrição da Cena 1 da Prática 5.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração aproximada de 40 minutos. As atividades trabalhavam a equivalência das frações e a comparação entre frações com denominadores diferentes, abordando comparações em que um dos denominadores fosse múltiplo do outro.

Cena 2: Comparação de frações utilizando diferentes unidades de medida

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA*: Qual é o maior* $\frac{3}{9}$ *ou* $\frac{4}{6}$*? Sem usar as barras. Cada grupo dá seu palpite.* VÁRIOS GRUPOS*: Três nonos!* PROFESSORA*: E agora com as barras?* (tempo para construção) PROFESSORA*: "Aluna m", quais barras vocês utilizaram para realizar a corrida das cores?* ALUNA M*: Azul e verde escuro!* *PROFESSORA: Vamos montar o trem.* (Professora mostra no aplicativo) *colocando mais duas barras verde escura e mais uma azul, completou! Mas agora vamos realizar o mesmo com a barra roxa, como temos três verdes escuras, precisamos três roxas. Quantas azuis tem?* *VÁRIOS ALUNOS: Duas!* PROFESSORA*: Então precisamos mais uma verde clara, para completar duas. E agora qual medida é maior, três nonos ou quatro sextos? (professora mostra no aplicativo).* VÁRIOS ALUNOS: *Esse!* (Apontam para quatro sextos)	

PROFESSORA: *Este que representava quatro sextos, se transformou em que?* ALUNA H: *Doze trinta e seis avos!* PROFESSORA: *Não, aqui não...4...8...12... doze dezoito avos. E aqui ficou seis dezoito avos. E agora qual é a diferença entre as duas?* VÁRIOS ALUNOS: *Seis dezoito avos!* ALUNA H: *Mas professora o meu também deu certo!* ALUNA N*: "Meu Deus!" (sinalizando espanto) ela chegou até no 36!* PROFESSORA*: Pessoal o que a "aluna h" fez também está certo?* VÁRIOS ALUNOS*:* (silêncio) PROFESSORA*: Ela usou outra unidade comum, por exemplo do 9 para chegar no 18, multiplicamos por 2 e aqui foi multiplicado por 3, para chegar 18. Já ela (se referindo a aluna h) multiplicou por 6 e aqui por 4, pensando assim ela utilizou um caminho mais longo para chegar à uma unidade de medida, não sendo a menor.*	01
Uma estudante ao realizar o cálculo da unidade comum, utilizou de um múltiplo comum entre 6 e 9, não sendo o menor. Com o auxílio do trem os alunos mudam o resultado inicialmente manifestado.	USC.5.2.01
PROFESSORA: "Aluno f" entre as frações $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{2}$, qual é a unidade comum? Resolve "pra gente". ALUNO F: Dezesseis! VÁRIOS ALUNOS: Não, é oito! ALUNO F: Mas se fosse dezesseis também daria certo. PROFESSORA: "Aluno f" do dois para chegar no oito multiplica por quanto? ALUNO F: Quatro, então fica quatro oitavos! PROFESSORA: E agora, qual é maior quatro oitavos ou dois oitavos? VÁRIOS ALUNOS: Quatro oitavos ou um meio! PROFESSORA: Mas poderia ser oito dezesseis avos também, correto!	02
Os estudantes manifestaram seus entendimentos sobre a unidade de medida, apontando para as barras, tanto da menor ou uma unidade de medida comum qualquer, abrindo outras possibilidades de comparação.	USC.5.2.02

Quadro 15: Descrição da Cena 2 da Prática 5.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração aproximada de 10 minutos. Ela possibilitou aos alunos reconhecer as várias representações de frações com as barras.

Cena 3: Comparação de frações com unidades de medida iguais

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC

PROFESSORA: *E no caso de* $\frac{2}{20}$ *ou* $\frac{5}{20}$*?* ALUNO C: *Só comparamos "os de cima."* PROFESSORA: Só comparamos "os de cima" que fica fácil! Dois vinte avos ou cinco vinte avos? VÁRIOS ALUNOS: *Cinco vinte avos!*	01
Os estudantes manifestaram compreender que a fração já está reduzida a uma unidade comum que permite comparação direta, focando ideias de "os de cima e os de baixo".	USC.5.3.01
PROFESSORA: *Observando as atividades anteriores, o que vocês concluem, comparando frações com 'denominadores' iguais ou diferentes? Lembrando que os denominadores são as unidades de medida que usamos. Escrevam com suas palavras.*	02
A professora sugere pensar no denominador como unidade de medida.	USC.5.3.02
UMA ALUNA: *Como assim professora?* PROFESSORA: *Quando vocês comparam frações com unidades de medida diferentes, como vocês fazem para comparar? E quando os denominadores são iguais?* VÁRIOS ALUNOS: *Encontramos uma unidade comum.*	03
Os estudantes manifestaram novamente compreender que é necessário encontrar a unidade comum entre as frações.	USC.5.3.03
PROFESSORA: *"Ahhh" vocês encontraram uma unidade comum. Mas como vocês fizeram isso?* UM ALUNO: *Através do jogo da corrida das cores, encontramos frações equivalentes!* PROFESSORA: *Mas quando os denominadores já são iguais?* UM ALUNO: *Olhamos a barra da esquerda somente!* UM ALUNO: *Ou os "números de cima".* PROFESSORA: *Registram isso no caderno!* (professora disponibiliza um tempo para o registro e após pede que alguns grupos apresentassem sua resposta) PROFESSORA: *Grupo 2 o que vocês registraram?* UM ALUNO DO GRUPO: *Quando as unidades são diferentes, usamos a corrida das cores encontrando a unidade comum. E para comparar as iguais, olhamos para os "números de cima" ou as barras à esquerda.*	04
Os estudantes expressaram, novamente, com o sentido de "os de cima" compreender a função simbólica da representação de frações quando são reduzidas à mesma unidade ou não.	USC.5.3.04
UM ALUNO DO GRUPO 3: *A nossa está parecida, para comparar frações com denominadores diferentes fazemos a corrida das cores. Já os iguais, basta olharmos as barras/algarismos da esquerda.* UM ALUNO DO GRUPO 1: *Fazemos a corrida das cores.*	

PROFESSORA: *Mesmo os denominadores sendo iguais?* UM ALUNO DO GRUPO 1: *"Ahh" daí não precisa.* PROFESSORA: *Mas então escreva isso.* UM ALUNO DO GRUPO 8: *Olhamos a unidade para comparar o menor e o maior, daí escolhi alguns exemplos, como também usamos a corrida das cores, no caso quando são diferentes.* UM ALUNO DO GRUPO 5: *Quando os denominadores são iguais, basta olhar os "números de cima" ... Falta colocar dos denominadores diferentes, que usamos a corrida das cores para encontrar a unidade.* UM ALUNO DO GRUPO 4: *Quando for diferente, temos que usar a corrida das cores e quando são iguais, comparamos os "números de cima".* UM ALUNO DO GRUPO 7: *Quando as frações têm denominadores iguais, só precisamos comparar os "números" de cima, só quando são diferentes precisamos encontrar uma unidade em comum fazendo a corrida das cores.*	05
Os estudantes expressaram seus entendimentos sobre a necessidade de ter uma unidade de medida comum nas comparações de frações, recorrendo novamente à ideia de "os de cima".	USC.5.3.05

Quadro 16: Descrição da Cena 3 da Prática 5.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração de 18 minutos aproximadamente. As atividades envolveram a equivalência das frações e a comparação. Na comparação, abordam-se atividades com frações de mesmo denominador e com denominadores diferentes, possibilitando ao aluno realizar asserções sobre o observado nas construções com as barras.

Cena 4: Frações e comparações de suas magnitudes

Essa Cena mostra o diálogo dos alunos com a professora e um relato de uma dupla, no decorrer das atividades envolvendo a comparação de frações.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Posicione a barra verde escura ao lado direito de uma barra verde clara, qual fração a barra verde clara corresponde da barra verde escura?* VÁRIOS ALUNOS*: Três sextos ou meio! Meio, pois, três é metade de seis!* PROFESSORA*: Meio também, a verde clara tem três unidades e a barra verde escura tem seis. Três é metade de seis. Meio representa a metade. Continuando, agora posicione, uma barra vermelha do lado esquerdo de uma barra azul, qual é a fração correspondente?* VÁRIOS ALUNOS: *Dois nonos!*	

PROFESSORA*: Tem outra opção?* VÁRIOS ALUNOS: *Não!* ALUNO X: *Não tem outra opção porque dois é par e nove é ímpar!* PROFESSORA: *Não por isso, no caso três sextos, três é ímpar e seis é par! E temos outra representação.* ALUNO X: *"Ahh é". É porque o seis está na tabuada do três, mas o nove não está na tabuada do dois!* PROFESSORA*: Isso, pois nove não é múltiplo de dois! E qual é a maior? Três sextos ou dois nonos?* VÁRIOS ALUNOS*: Dois nonos!* PROFESSORA*: Vamos analisar, de maneira diferente. Qual é o denominador comum?* VÁRIOS ALUNOS: *Dezoito!* PROFESSORA*: Então do nove para chegar no dezoito multiplicamos por dois, então a fração equivalente é quatro dezoito avos. E essa aqui, seis vezes três é dezoito e três vezes três é nove, formando nove dezoito avos! E agora qual é maior quatro dezoito avos ou nove dezoito avos?* VÁRIOS ALUNOS: *Nove dezoito avos!* PROFESSORA: *Neste caso não utilizamos as barras. Usei a unidade comum ou mínimo múltiplo comum, então usei a tabuada. E agora qual é a diferença desses dois?* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco! Cinco dezoito avos! Cinco dezoito avos, porque nove menos quatro é cinco!*	01
Os estudantes passaram a operar as comparações por meio de operações multiplicativas, com ideias como "a metade de".	USC.5.4.01
Diálogo entre a dupla: ALUNA H: *Dois meios e um quinto, ou seja, um inteiro pode ser duas vermelhas. E um quinto, uma branca e uma amarela.* ALUNA N: *Tá aqui* (mostra a construção com as barras). *Qual dessas é maior? Deixa eu fazer.* ALUNA H: *De dois e cinco qual é a unidade? É dez! Ó dois, quatro, seis, oito e dez! E cinco... cinco depois dez! Coloca ali: dez!* ALUNA N: *Aqui também adiciona. Aqui dá dez décimos? Será que está certo?* ALUNA H: *Você tem o raciocínio lento.* ALUNA N: "*Ahhh" agora entendi, é um inteiro também!* (risos) ALUNA H*: Então aqui "dá" dois décimos, o maior é este* (se refere a dez décimos*). E falta oito décimos para chegar até dez décimos. É claro que um inteiro é maior!*	02
Os estudantes manifestaram seus entendimentos sobre frações aparentes, sem utilizar esta nomenclatura, porém, abstraindo a relação numérica com as cores das barras e compreendem que dois meios é um inteiro.	USC.5.4.02

Quadro 17: Descrição da Cena 4 da Prática 5.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve a duração de 12 minutos aproximadamente. Possibilitou aos alunos realizarem a comparação de frações do tipo $\frac{a}{b}$ com *a* múltiplo e *b* (chamadas de frações aparentes) com frações que correspondem a um número inteiro.

4.6 Análise Ideográfica da Prática 6

4.6.1 Unidades Significativas da Cena da Prática 6

Para efetivar a Análise Ideográfica da prática 6, apresentamos e analisamos uma Cena Significativa na qual se desvela uma Unidade Significativa em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações na perspectiva de medição.

Cena 1: Comparações de frações com numeradores iguais

A Cena mostra o diálogo dos alunos com a professora ao comparar frações com numeradores iguais.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA ATRIBUI ALGUMAS ATIVIDADES*:* *a) Compare* $\frac{5}{3}$ *e* $\frac{5}{2}$*. Qual deles é maior?* *b) Compare* $\frac{7}{5}$ *e* $\frac{7}{4}$*. Qual é o maior?* *c) Compare* $\frac{20}{2}$ *e* $\frac{20}{5}$*. Qual é o maior?* *d) O que essas comparações têm em comum?* (silêncio) PROFESSORA: *O que vocês notaram nestas frações?* ALUNO C*: Que os números acima da barra são iguais!* PROFESSORA*: Alguém não havia percebido isso?* (Silêncio) PROFESSORA: *Todas elas possuem numeradores iguais… ótimo! Vamos começar pela letra b, ao qual já havia montado a fração inicial aqui no aplicativo. Como comparar quintos com quartos? Tem como?* VÁRIOS ALUNOS*: Sim, com a corrida das cores!* PROFESSORA: *Vamos adicionar então uma roxa, e uma amarela. Está do mesmo comprimento?* (professora mostra no aplicativo) VÁRIOS ALUNOS*: Não!* PROFESSORA*: Mais uma roxa e mais uma amarela... mais uma roxa e mais uma amarela...*	

VÁRIOS ALUNOS: *Agora sim "prof"!* PROFESSORA: *Uma observação, olha o que alguns grupos estão esquecendo. Quantas barras roxas nós temos?* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco!* PROFESSORA: *Preciso ter cinco pretas também, ou seja, adicionamos quatro! E quantas amarelas?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro amarelas.* PROFESSORA: *Então precisamos quatro pretas aqui, ou seja, adicionamos três! Agora a fração sete quartos se transformou na fração trinta e cinco vinte avos e a fração sete quintos?* VÁRIOS ALUNOS: *Na fração vinte oito vinte avos!* PROFESSORA: *E agora, qual é a maior?* VÁRIOS ALUNOS: *Sete quartos!* PROFESSORA: *Ok. Agora vamos voltar para letra a: Que era a fração* $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{2}$. *Vamos comparar! Corrida das cores, entre meios e terços… Quantas barras verdes preciso adicionar?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma!* PROFESSORA: *Então preciso mais uma amarela aqui!* VÁRIOS ALUNOS: *E na outra precisa mais duas amarelas!* PROFESSORA: *Então a fração cinco terços se transformou em…* VÁRIOS ALUNOS: *Dez sextos! E a fração cinco meios em quinze sextos!* PROFESSORA: *Assim descobrimos que a maior fração é a…* VÁRIOS ALUNOS: *Cinco meios!* ALUNO C: *"Prof" vem aqui, mas sempre a maior fração é a que tem o menor algarismo embaixo?* PROFESSORA: *Pessoal, prestem atenção na ideia do colega aqui, achei bem bacana de compartilhar, repete por favor!* ALUNO C: *Sempre que a fração que tem os números de cima iguais, a maior sempre é, o que tem embaixo o algarismo menor!* VÁRIOS ALUNOS: *Essa ideia deu certo para letra a e para a letra b, mas será que para c também dá certo?* *VÁRIOS ALUNOS: Da sim!* PROFESSORA: *Vamos fazer ela então…Observem,* $\frac{20}{5}$ *e* $\frac{20}{2}$. *Então o* $\frac{20}{2}$ *deverá ser o maior, certo?* VÁRIOS ALUNOS: *Sim!* PROFESSORA: *Vamos testar! No programa não vou conseguir montar esta fração, mas sei que vocês fizeram a montagem na mesa. Eu vou fazer assim, de maneira mais oral: Entre o cinco e o dois qual é a unidade comum?* VÁRIOS ALUNOS: *Dez!* PROFESSORA: *Então para chegar no dez, multiplico dois por cinco e o cinco por dois.* (professora mostra no quadro) *Então do cinco para chegar no dez, multiplico por dois, vinte vezes dois tenho quarenta, encontrando a fração quarenta décimos e a outra, de dois para chegar no dez multiplico por cinco e vinte vezes cinco "dá" cem, fração cem décimos. E agora qual é a maior quarenta décimos ou cem décimos?*	01

VÁRIOS ALUNOS*: Cem décimos, é o mesmo que vinte meios!* PROFESSORA*: O mesmo que dez inteiros também!*	
Alguns estudantes manifestaram a possibilidade de comparar frações com numeradores iguais, percebendo que é possível compará-las observando apenas os denominadores. Alguns indicam a relação multiplicativa inversa (quando menos vezes dividir uma medida, maior será a fração). Passam a verbalizar relações numéricas variadas.	USC.6.1.01

Quadro 18: Descrição da Cena 1 da Prática 6.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 12 minutos aproximadamente. Ela possibilitou aos alunos realizarem asserções sobre frações com o mesmo numerador, observando que terá o maior comprimento aquela que tiver o menor denominador.

4.7 Análise Ideográfica da Prática 7

4.7.1 Unidades Significativas da Cena da Prática 7

Para efetivar a Análise Ideográfica da prática 7, apresentamos e analisamos quatro Cenas Significativas, nas quais se desvelam quinze Unidades Significativas em que percebemos a manifestação da aprendizagem das frações, na perspectiva de medição.

Cena 1: Propondo, testando e reformulando hipóteses

A Cena mostra as primeiras ideias dos alunos ao se depararem com uma adição de frações. A professora propôs, inicialmente, a adição de três quartos com dois terços ($\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$) e pediu que cada grupo tentasse resolver.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA: *Vocês conseguem realizar esta operação? Como podemos realizá-la?* VÁRIOS ALUNOS*: Eu fiz a Corrida das cores! Não sei como começar! Soma três com dois e quatro com três?* PROFESSORA*: Como podemos realizar essa operação?*	01

VÁRIOS ALUNOS*: Eu também fiz a Corrida das cores, mas não sei o que fazer agora!* ALUNO E*: A minha resposta deu 12/17, não sei o que eu fiz, mas deu isso!*	
Os estudantes não operam imediatamente com as frações, mesmo tendo a ideia de que podem compará-las pela corrida das cores. Apenas um estudante apresenta um resultado invertendo numerador com denominador.	USC.7.1.01
PROFESSORA*: Será que é possível juntar frações com unidades de medida diferentes?* VÁRIOS ALUNOS*: Acho que não! Não podemos!* (Neste momento alguns alunos tiveram insights, pois ao trabalhar a comparação das frações com as barras anteriormente, lembraram que não era possível comparar se as unidades de medida fossem diferentes, necessitando encontrar frações equivalentes, então deduziram que para operar deveriam seguir a mesma regra) PROFESSORA*: Como podemos transformar essas frações para que tenham unidades de medida iguais?* VÁRIOS ALUNOS*: Vamos utilizar o jogo da Corrida das cores para achar a unidade de medida comum!*	02
Os estudantes manifestaram a necessidade em realizar as corridas das cores, mas não souberam dar demais esclarecimentos.	USC.7.1.02
PROFESSORA: *Será que é possível adicionar frações com unidades de medida diferentes? Como podemos transformar essas frações para ter unidades de medida comuns?* VÁRIOS ALUNOS: *Acho que não! Não podemos! Usa a corrida das cores! Acho que não, pois comparar também não "dá"!* PROFESSORA: *A unidade de medida não podemos somar nem subtrair, como vocês faziam para comparar, certo?!! Como não podemos comparar frações com unidades de medida diferentes, também não podemos adicionar. Para transformar essas frações para que tenham unidades de medida iguais, vamos começar a fazer como o Fabrício disse, pela corrida das cores... De novo pela corrida das cores! Vejam como ela é importante!!* PROFESSORA: *Qual é a unidade de medida comum a terços e quartos, utilizando as barras brancas como medida?* VÁRIOS ALUNOS: *Doze!* PROFESSORA: *Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro!* PROFESSORA: *Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número?* VÁRIOS ALUNOS: *Três!* ALUNA H: "*Ahhhh" agora já sei, é doze! Utiliza da mesma unidade para somar!* PROFESSORA: *Ao lado esquerdo do trem contendo as três barras roxas posicionem essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o trem verde claro representa do trem roxo?* VÁRIOS ALUNOS: *Nove doze avos!* PROFESSORA: *Ao lado esquerdo do trem contendo as quatro barras verdes claras posicionamos essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o trem vermelho representa do trem verde claro?*	03

VÁRIOS ALUNOS: *Oito doze avos!* PROFESSORA: *E agora, quanto é nove doze avos mais oito doze avos?* VÁRIOS ALUNOS: *Dezessete doze avos!* PROFESSORA: *Assim o resultado é dezessete doze avos.*	
A importância da utilização da corrida das cores para o cálculo de uma unidade comum para as operações é notada e é reforçada pela professora.	USC.7.1.03

Quadro 19: Descrição da Cena 1 da Prática 7.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 15 minutos aproximadamente. Ela permitiu que os alunos realizassem as operações de acordo com o que observaram das barras. Eles se mostraram ativos e curiosos para lidar com as operações. Compreenderam a necessidade da utilização da corrida das cores para lidarem com uma unidade comum.

Cena 2: Operações de adição e subtração com frações com denominadores diferentes

A Cena mostra, inicialmente, o diálogo entre alunos e com a professora ao serem instruídos a resolver a seguinte subtração: $\frac{4}{3}$ - $\frac{1}{6}$.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA*: Cada um utilizando as barras represente as frações lado a lado. Como podemos resolver?* VÁRIOS ALUNOS*: Usamos a corrida das cores! Assim não dá de resolver, precisamos de uma unidade comum!* PROFESSORA*: Qual é a unidade de medida comum a terços e sextos, utilizando as barras brancas?* VÁRIOS ALUNOS*: Seis!* PROFESSORA*: Vamos montar aqui no aplicativo: Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?* VÁRIOS ALUNOS*: Duas!* PROFESSORA*: E quantas barras verdes escuras foram necessárias?* VÁRIOS ALUNOS*: Uma!* PROFESSORA*: Ao lado esquerdo do trem, contendo as duas barras verdes claras, posicionem essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem roxo representa do trem verde claro?* VÁRIOS ALUNOS*: Oito sextos!* PROFESSORA*: Em relação a fração um sexto foi necessário adicionar barras?* VÁRIOS ALUNOS*: Não, continua um sexto!* PROFESSORA*: E agora, quanta falta da fração um sexto, para chegar nos oito*	01

sextos? Ou seja, qual é essa diferença? VÁRIOS ALUNOS*: Sete sextos!* PROFESSORA*: Há outra opção de resposta?* VÁRIOS ALUNOS*: Não, sete sextos não têm como representar com outras barras.*	
Os estudantes manifestaram seus entendimentos sobre a magnitude das barras, observam que na fração sete sextos, o sete não pode ser comparada diretamente com outras barras menores (a não ser a branca).	USC.7.2.01
ALUNA H: *Professora eu e a "aluna n" fizemos uma aqui antes, sete oitavos mais oito sétimos, como já tínhamos terminado a atividade. A unidade comum seria cinquenta e seis!* ALUNA N: *Sim, a resposta deu cento e treze cinquenta e seis avos, que enorme né!*	02
Outras construções de operações foram realizadas no decorrer de uma atividade para outra, revelando a curiosidade dos alunos.	USC.7.2.02

Quadro 20: Descrição da Cena 2 da Prática 7.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula, que teve a duração de 15 minutos aproximadamente. Ela possibilitou aos alunos realizarem as operações de adição e subtração com denominadores diferentes, de acordo com o que observaram das barras. Ao terminarem as atividades propostas, muitos grupos criaram outros problemas para resolverem, demostrando a curiosidade e o interesse pelo assunto.

Cena 3: Cálculo da unidade de medida através do jogo da corrida das cores

Esta Cena mostra, inicialmente, o diálogo entre alunos e com a professora ao serem instruídos a resolver a seguinte subtração: $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{6}$.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
PROFESSORA*: Com a corrida das cores a fração Três quartos se transformou na fração equivalente …* VÁRIOS ALUNOS*: Nove doze avos!* PROFESSORA*: E a fração um sexto, se transformou na fração equivalente…* VÁRIOS ALUNOS*: Dois doze avos.* PROFESSORA: *Quanto é nove doze avos menos dois doze avos, ou seja, qual é a diferença entre estas duas frações?* VÁRIOS ALUNOS*: Sete doze avos!*	01
Os estudantes passaram a operar a subtração após reduzirem as frações à mesma unidade, tornando-as equivalentes.	USC.7.3.01

PROFESSORA: *Vamos agora a subtração utilizando as barras Cuisenaire* $\frac{4}{3}$ - $\frac{4}{6}$. *Primeiramente vamos analisar, qual dessas frações é a maior?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro terços! Fiz a corrida das cores primeiro, e é quatro terços!* PROFESSORA: *Qual é a unidade comum entre terços e sextos?* VÁRIOS ALUNOS: *Seis! Essa é fácil, seis está na tabuada do três, então a unidade é seis!* PROFESSORA: *Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir este número?* VÁRIOS ALUNOS: *Duas!* PROFESSORA: *Quantas barras verdes escuras foram necessárias para atingir esse número?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma!* PROFESSORA: *Com a corrida das cores a fração quatro terços se transformou na fração equivalente...* VÁRIOS ALUNOS: *Oito sextos!* PROFESSORA: *E a fração quatro sextos se transformou na fração...* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro sextos! Ela não muda, continua quatro sextos!* PROFESSORA: *Qual é o resultado de oito sextos menos quatro sextos?* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro sextos, porque é oito menos quatro!*	02
Os estudantes manifestaram de forma independente a relação do mínimo múltiplo comum (escolha da unidade) com a tabuada.	USC.7.3.02
PROFESSORA: *Construa agora as frações* $\frac{15}{10}$ e $\frac{2}{5}$ *e ao lado as frações* $\frac{9}{12}$ e $\frac{6}{4}$. *Olhando a primeira atividade que pede para realizar a subtração de* $\frac{15}{10}$ e $\frac{2}{5}$, *podemos realizar desta forma?* VÁRIOS ALUNOS: *Não, precisamos da corrida das cores! Não, as unidades de medida estão diferentes!* PROFESSORA: *Precisamos a corrida das cores, entre décimos e quintos. As unidades de medida estão do mesmo tamanho já*? (professora mostra no aplicativo) VÁRIOS ALUNOS: *Sim!* PROFESSORA: *O que eu faço com a barra vermelha?* VÁRIOS ALUNOS: *Adicionamos uma*! PROFESSORA: *Mas, como eu tenho duas amarelas, preciso também duas vermelhas. Precisa ser a mesma quantidade.* PROFESSORA: *Esta fração aqui, se transformou em qual fração? (Se referindo à quinze décimos)* VÁRIOS ALUNOS: *Quinze décimos! Não muda!* PROFESSORA: *Continua sendo quinze décimos, e o dois quintos?*	03

VÁRIOS ALUNOS: *Fica quatro décimos!* PROFESSORA: *Quatro décimos?* VÁRIOS ALUNOS: *Sim porque é resultado de duas vezes dois e cinco vezes dois!* PROFESSORA: *Ok.... Vamos registrar no caderno então. Qual é a unidade de medida comum entre décimos e quintos?* VÁRIOS ALUNOS: *Dez!* PROFESSORA: *Isso, é dez. Muito bem. Letra b: Quantas barras laranjas vocês utilizaram para chegar nesta unidade de medida?* VÁRIOS ALUNOS: *Uma!* PROFESSORA: *Uma só. Letra c: Quantas barras amarelas vocês utilizaram para chegar na unidade de medida?* VÁRIOS ALUNOS: *Duas!* PROFESSORA: *Duas, podemos verificar aqui no aplicativo! Letra d: Com a corrida das cores a fração quinze décimos se transformou na fração equivalente…* VÁRIOS ALUNOS: *Quinze décimos! Quinze dez avos!* PROFESSORA: *Quinze décimos é a leitura, cuidado! E a fração dois quintos se transformou na fração equivalente...* VÁRIOS ALUNOS: *Quatro décimos!* PROFESSORA: *Letra e: O resultado de quinze décimos menos dois quintos é…* VÁRIOS ALUNOS: *Onze décimos!* PROFESSORA: *Agora prestem atenção aqui, é importante este registro. A fração quinze décimos continua quinze décimos e a fração dos quintos se transformou em quatro décimos, então registramos assim* $\frac{15}{10} - \frac{4}{10} = \frac{11}{10}$.	
Os estudantes manifestaram a necessidade da unidade de medida comum na realização das operações.	USC.7.3.03
PROFESSORA: *"Aluna h", faz a construção das frações do número dois para mim:* $\frac{9}{12} + \frac{6}{4}$. *Pode fazer a corrida das cores já. Qual é a unidade comum, "aluna h"?* ALUNA H: *É o doze, porque o doze está na tabuada do quatro!*	04
Os estudantes manifestaram suas percepções no que concerne a relação dos múltiplos com a unidade comum.	USC.7.3.04
ALUNO A: *Com a corrida das cores a fração nove doze avos se transformou na fração equivalente nove doze avos (ou seja, não muda). E a fração seis quartos se transformou na fração equivalente dezoito doze avos.*	05
Os estudantes manifestaram reconhecer as frações impróprias e lidam com ela sem dificuldade.	USC.7.3.05
PROFESSORA: *Quanto é a adição de nove doze avos com dezoito doze avos?* VÁRIOS ALUNOS: *Vinte e sete doze avos! É o resultado de dezoito mais nove!* PROFESSORA: *Vamos registrar então:* $\frac{9}{12} + \frac{18}{12} = \frac{27}{12}$, *quando a unidade de medida é igual, somamos os numeradores. Vamos escrever um lembrete da atividade:*	06

Lembre-se que o doze é a nossa unidade de medida e não pode ser subtraída nem adicionada. Depois que encontramos a unidade de medida comum, basta subtrairmos ou adicionarmos os numeradores.	
Os estudantes demonstraram compreender que, ao lidar com frações com mesmo denominador, basta operar com os numeradores.	USC.7.3.06

Quadro 21: Descrição da Cena 3 da Prática 7.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 30 minutos aproximadamente. Ela possibilitou aos alunos realizarem as operações de adição e subtração, utilizando frações com denominadores diferentes e iguais, de acordo com o que observam das barras. Eles se mostraram ativos e curiosos para lidar com as operações e evidenciaram compreender que, ao lidarem com denominadores iguais, não há a necessidade da corrida das cores para tornar possível a operação.

Cena 4: Uma tentativa de operar frações sem as barras

A Cena seguinte mostra o trabalho de uma dupla na tentativa de realizarem algumas operações sem a utilização das barras.

EXPRESSÕES DOS SUJEITOS	CÓDIGO DA USC
ALUNA N*: Professora fica muito difícil sem as barras de apoio!*	01
A aluna vê o material Cuisenaire como um “apoio” para a realização das operações.	USC.7.4.01
ALUNA H*: É nada! É só porque você não sabe a tabuada! Olha a primeira: um terço mais dois quintos, começamos pela unidade comum, pensa na tabuada do três e do cinco, qual é o menor número comum a elas.* ALUNA N*:* (Pensa um pouco) *Quinze!* ALUNA H*: Então, coloca ali, três vezes quantas é quinze?* ALUNA N*: Cinco!* ALUNA H*: Então, aqui coloca uma vez o cinco é cinco! Ficou a fração cinco quinze avos. Nesta aqui, cinco vezes quanto é quinze?* ALUNA N*: Três!* ALUNA H*: Aqui também faz vezes três* (se refere ao dois)*, fica seis, ficando a fração seis quinze avos. Agora é só fazer cinco quinze avos mais seis quinze avos.* ALUNA N*: Fica onze quinze avos! É só isso?* ALUNA H*: Claro!! O onze ainda é primo, só está na tabuada dele.*	02
Uma estudante explicitou a sua compreensão da relação multiplicativa sem a	USC.7.4.02

necessidade das barras para uma colega.	
ALUNA N: *E quatro menos um sétimo? Agora complicou. Acho que embaixo do quatro colocamos o um, lembro que a professora falou.* ALUNA H: *Sim, unidade comum entre um e sete é o próprio sete, porque na tabuada do um tem todos os números.*	03
As estudantes retomam a ideia de unidade como resultado de uma multiplicação.	USC.7.4.03
ALUNA N: *A última, três nonos menos um terço, está cada uma faz sozinha.* (Silêncio) ALUNA H: *Minha deu zero sobre nove, isso "tá" errado eu acho.* ALUNA N: *Fica três menos três, olha aqui.* ALUNA H: *Não existe fração assim, vou chamar a professora.* PROFESSORA: *O que vocês perceberam nestas duas frações? Imaginem as barras...* (silêncio) ALUNA H: *São iguais!! Olha "aluna n" essa se transformou em três nonos, então são equivalentes. Mas fica* $\frac{0}{9}$ *ou 0?* PROFESSORA: *É zero, este traço da fração representa uma divisão, zero dividido por nove é zero!* ALUNA H: *Era fácil, eu que achei que tinha errado!*	04
As intervenções da professora foram necessárias no sentido de auxiliar a dupla a "observar" as duas frações em destaque. Logo uma aluna notou que se tratavam de frações iguais e em decorrência desse fato apareceu o "0" como resposta.	USC.7.4.04

Quadro 22: Descrição da Cena 4 da Prática 7.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Essa Cena decorre de uma aula e teve duração de 20 minutos aproximadamente. Ela possibilitou aos alunos realizarem as operações de adição e subtração sem a utilização das barras de Cuisenaire.

Esse movimento de atenção às expressões coletivas ou individuais, que fazem sentido ao que o pesquisador busca compreender, conduziu ao estabelecimento das Unidades Significativas, descritas nos quadros apresentados anteriormente. Em busca do que se manifestava, foi realizada, inicialmente, a articulação das Unidades que convergiram e, dessas ideias, a elaboração das categorias, as quais serão descritas e interpretadas no próximo capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE NOMOTÉTICA: CONVERGÊNCIAS DE SENTIDO SOBRE A APRENDIZAGEM

Neste capítulo, iniciaremos com as descrições das categorias abertas. As sete categorias que emergiram do movimento de redução estão apresentadas no Quadro 23, a seguir, em forma de uma síntese.

CATEGORIA	SÍNTESE DAS CATEGORIAS
C1) Compreensões iniciais sobre frações	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem das compreensões iniciais dos alunos sobre as frações. Os alunos **percebem** as frações como uma conta, retângulos ou círculos particionados ou como uma relação multiplicativa entre numerador e denominador.
C2) Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa. A partir das construções com as barras os estudantes fizeram a correspondência da unidade de medida comum com uma **multiplicação** ou com o **mínimo múltiplo comum**. A categoria também revela momentos em que se evidencia a correspondência das cores das barras com um **múltiplo**.
C3) A unidade e a sua relativização	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre a unidade e a relativização da unidade. A partir das construções com as barras os estudantes mostraram compreender que ao trocar a posição de uma dupla de barras outra **medida** e outra fração é formada, consequentemente outra **unidade de medida** passa a ser utilizada. As frações **impróprias** se mostraram ser de fácil compreensão para os estudantes e as diferentes **possibilidades** de representação de frações com as barras é evidenciada.
C4) A necessidade e o reconhecimento da unidade	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da necessidade e o reconhecimento da unidade. Os estudantes apresentam várias **possibilidades** de construções com as barras sempre levando em consideração a unidade de medida. No que se refere à comparação e às operações de adição e subtração, realizam a **redução** a uma unidade comum para tornar possível tal ação. Algumas **dúvidas** também se fizeram presentes na realização das atividades, necessitando algumas vezes a intervenção da professora.
C5) Manifestação do sentido da igualdade	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre o sentido da igualdade manifestado. As unidades ressaltam que os estudantes passaram a focar ou expressar o **sentido de igualdade** entre as barras. Essa categoria retrata

CATEGORIA	SÍNTESE DAS CATEGORIAS
	em vários momentos a **igualdade como equivalência** das barras, pois mesmo com diferentes disposições das barras seu comprimento não se altera. A **comparação** também se mostrou com força, pois os estudantes comparam barras de diferentes cores, comprimentos, em diferentes ordenações, focando a comparação entre as barras. Através das tentativas os estudantes testam as medidas e ao compararem concluem as igualdades entre algumas frações estabelecendo **relações multiplicativas**.
C6) Simbolização e/ou representação das frações	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem da simbolização ou representação das frações. Na realização das atividades, os estudantes em alguns momentos viram as barras como um material de **apoio ao seu pensar.** A **curiosidade** também é revelada nas outras construções realizadas pelos alunos.
C7) Compreensão das frações sem barras	As Unidades de Significado que convergiram para esta categoria dizem sobre as construções realizadas pelos alunos sem a necessidade da utilização das barras. No desenrolar das atividades os alunos começaram a manifestar **facilidade** em comparar e operar com as frações, não necessitando mais as barras.

Quadro 23: Síntese das categorias.
Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Expostas as descrições, na sequência, apresentamos as interpretações das categorias abertas, buscando focar o fenômeno interrogado, a fim de argumentar sobre: *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? Segundo Bicudo (2010, p. 38), “a descrição, como significado da própria palavra, descreve, diz do ocorrido, como percebido. Não traz julgamentos interpretativos. Pode ser uma descrição efetuada pelo próprio sujeito que vivencia a experiência, relatando-a em suas nuanças”. Para a autora, as descrições são o marco da pesquisa fenomenológica.

A interpretação é hermenêutica. Bicudo (2011) destaca que a análise hermenêutica de textos foca em palavras e sentenças, e “Uma prática importante dessa análise é destacar as palavras que chamam a atenção em unidades de significados, ou seja, sentenças que respondem significativamente à interrogação formulada [...]” (BICUDO, 2011, p. 49). A hermenêutica foi assumida porque permite compreender o fenômeno em suas possibilidades, desde os aspectos teóricos que participaram das práticas desenvolvidas até às manifestações espontâneas dos sujeitos e a estrutura do fenômeno que se manifestou das categorias.

5.1 Descrições das categorias

5.1.1 C1: Compreensões iniciais sobre frações

A primeira categoria C1: "Compreensões iniciais sobre frações", é composta por duas Unidades de Significado que se referem às compreensões iniciais dos estudantes sobre o tema frações que se manifestaram no contexto das tarefas desenvolvidas.

A figura 27 apresenta as Unidades de Significado pertencentes a essa categoria:

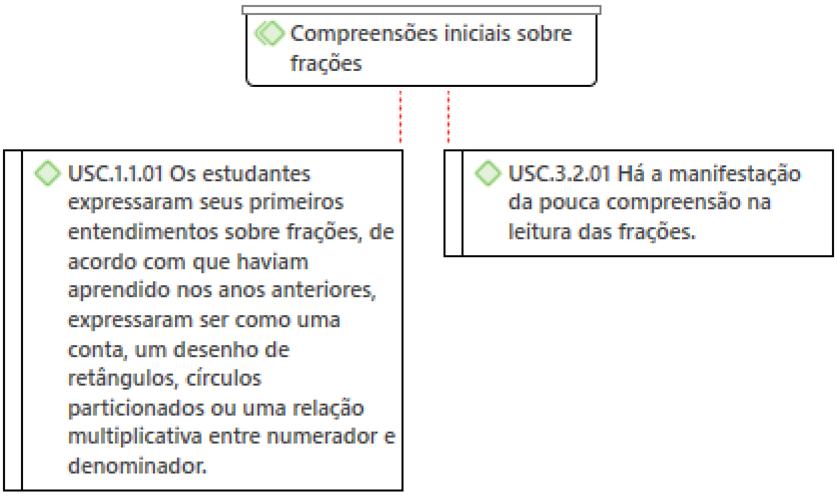


Figura 27: Unidades pertencentes à categoria C1 "Compreensões iniciais sobre frações".
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Os modos como os estudantes, inicialmente, compreendem as frações é revelado. As frações são vistas como: I) uma conta (os alunos em uma folha de papel registraram algumas adições com frações, mas sem apresentar algum resultado); II) como retângulos ou círculos particionados (os alunos em uma folha de papel apresentaram alguns desenhos de círculos ou retângulos particionados, mas sem se referir a qual fração àquele desenho correspondia); III) como uma relação multiplicativa entre numerador e denominador (os alunos, em uma folha de papel, registraram algumas frações, relacionando o numerador como múltiplo do denominador); IV) como uma divisão de partes iguais (os alunos em uma folha de papel definiram a fração como sendo uma divisão de partes iguais e apresentaram um desenho de um círculo dividido em quatro partes e duas delas hachuradas). Estavam pouco habituados a proceder a leitura das frações.

5.1.2 C2: Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa

A segunda categoria C2: “Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa”, é composta por onze Unidades de Significado que dizem respeito àquilo que os estudantes manifestaram no contexto das tarefas desenvolvidas em relação à unidade de medida comum com a relação multiplicativa. A seguir, apresentamos as Unidades de Significado que constituem essa categoria (Figura 28).

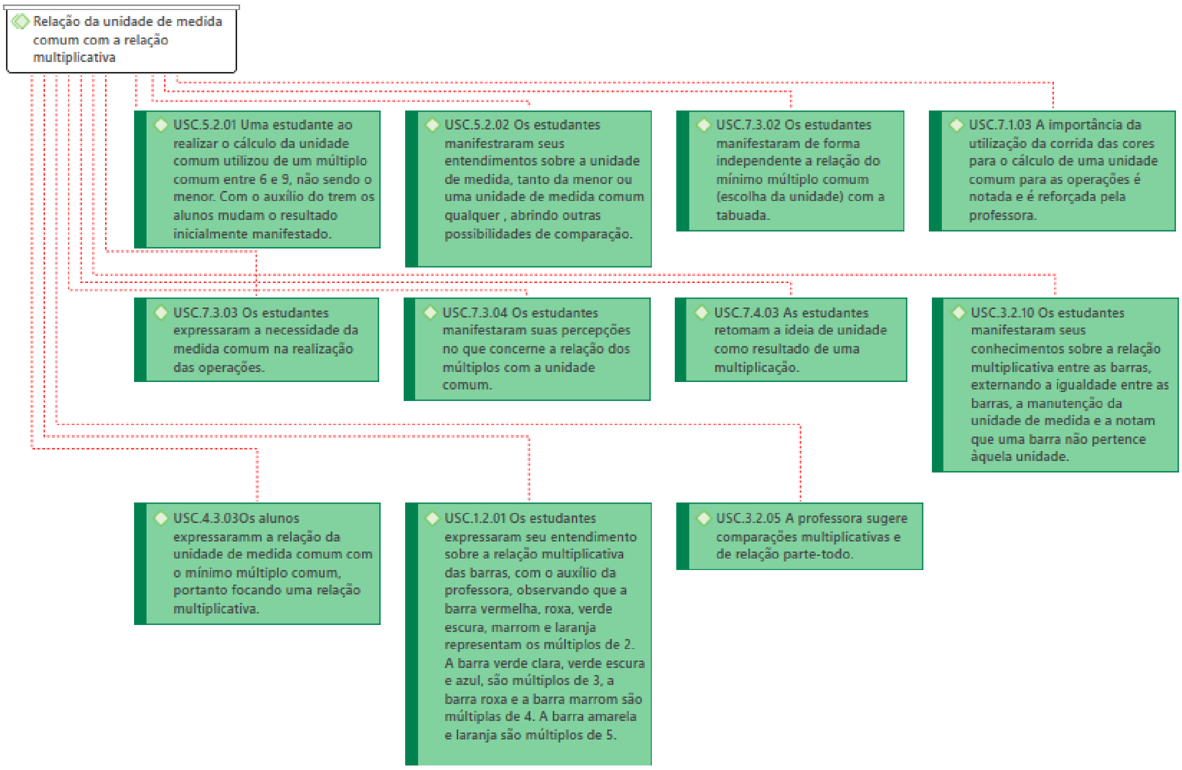


Figura 28: Unidades pertencentes à categoria C2 “Relação da unidade de medida com a relação multiplicativa”.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Conforme apontam as unidades que compõem essa categoria, durante a introdução da unidade de medida comum, por meio do jogo corrida das cores, em vários momentos, os estudantes fizeram a correspondência dessa unidade de medida comum com uma **multiplicação**, a partir das construções **com as barras**. A categoria retrata, também, momentos em que se evidencia a correspondência das cores das barras com um **múltiplo**, conforme é revelado na unidade “[...] a barra vermelha, roxa, verde escura, marrom e laranja representam os múltiplos de 2. A barra verde clara, verde escura e azul, são múltiplos de 3, a barra roxa e a barra marrom são múltiplas de 4. A barra amarela e laranja são múltiplos de 5" (USC 1.2.01).

Através de uma multiplicação, percebem se uma determinada barra pertence àquela unidade comum, em outras palavras, por exemplo, ao calcular a unidade de medida comum entre 2 e 3, o resultado 7 não é possível, pois na "tabuada" (termo utilizado pelos alunos) desses números não se encontra o referido resultado. Além disso, ao se referir ao jogo corrida das cores, os estudantes fizeram a correspondência da unidade de medida comum encontrada com o **mínimo múltiplo comum**.

5.1.3 C3: A unidade e a sua relativização

A terceira categoria C3: **"**A unidade e a sua relativização", é composta por seis Unidades de Significado que se referem à unidade de medida e à relativização da unidade. A seguir, apresentamos a Figura 29 com as Unidades de Significado que compõem essa categoria.

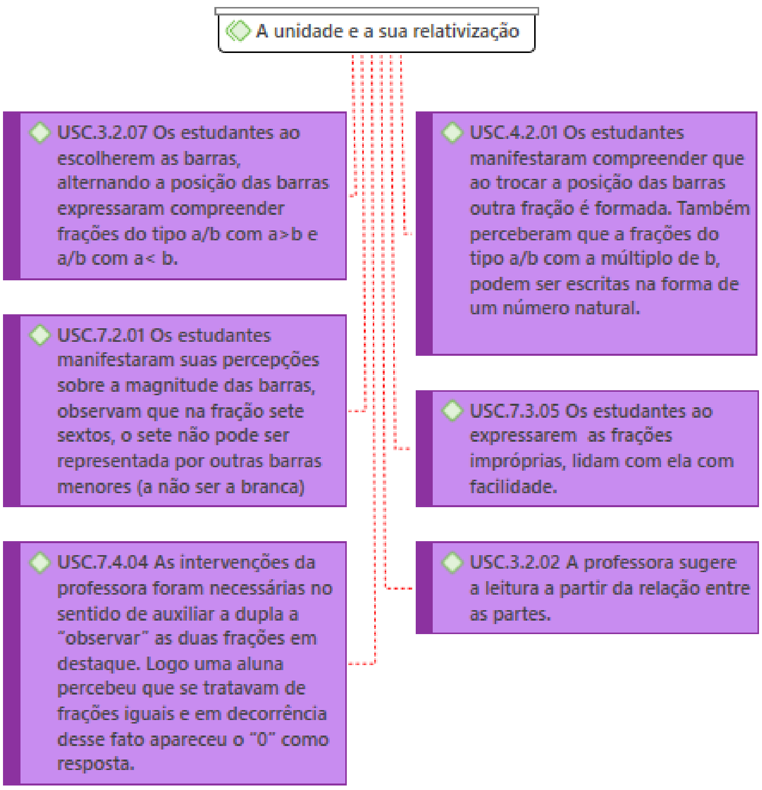


Figura 29: Unidades pertencentes à categoria C3 "A unidade e a sua relativização".
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Essa categoria retrata a influência do posicionamento das barras na representação simbólica e não simbólica das frações. Em outras palavras, ao lidar com uma dupla de barras, ao trocar suas posições, outra **medida** e outra fração é formada, consequentemente outra **unidade de medida** é utilizada.

As diferentes **possibilidades** de representação de frações com as barras são evidenciadas, pois, nesse sentido, em uma das categorias afirma-se que “[...] o sete não pode ser representado por outras barras menores (a não ser a branca)” (USC 7.4.04).

5.1.4 C4: A necessidade e o reconhecimento da unidade

A quarta categoria C4, **“**A necessidade e o reconhecimento da unidade”, é composta por onze Unidades de Significado que destacam a necessidade da unidade de medida e o seu reconhecimento. A seguir, apresentamos a Figura 30 com as Unidades de Significado que compõem essa categoria.

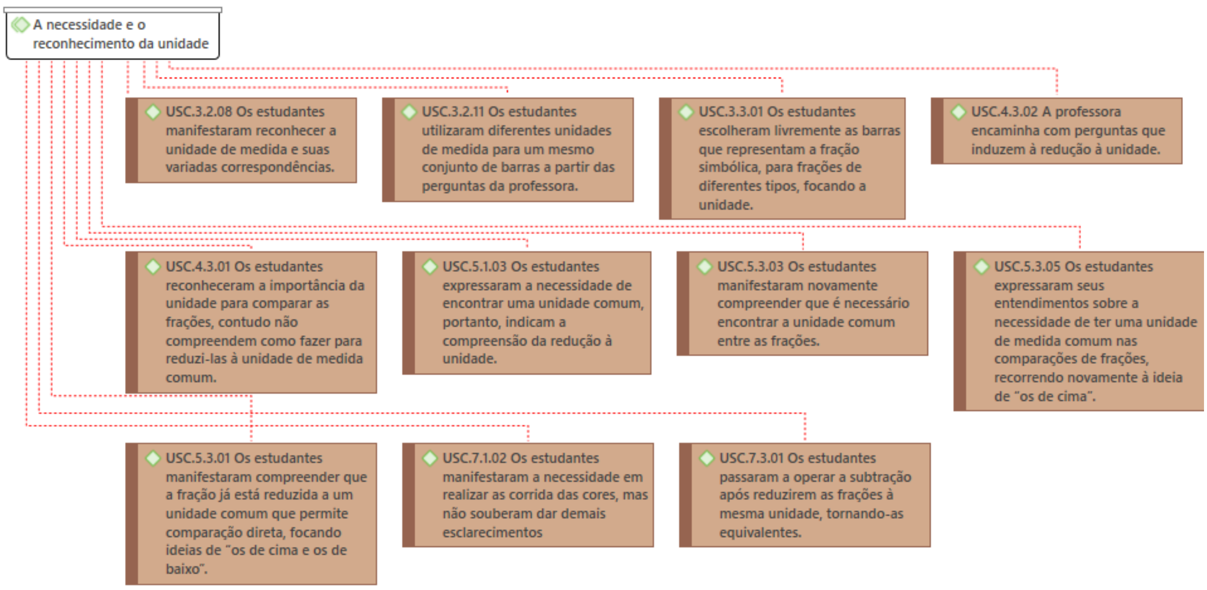


Figura 30: Unidades pertencentes à categoria C4 “A necessidade e o reconhecimento da unidade”.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Os estudantes, a partir de uma fração predeterminada pela professora, apresentam várias **possibilidades** de construções com as barras, levando em consideração a unidade de medida. Como exemplo, ao representar a fração $\frac{3}{4}$, os alunos apresentaram três opções de resposta: I) utilizaram de uma barra verde clara e uma roxa; II) três vermelhas e uma barra marrom; III) uma amarela mais uma branca e uma marrom.

Nas atividades que envolvem a comparação, adição ou subtração de frações, os estudantes realizam a **redução** a uma unidade de medida comum para se fazer possível a operação ou a comparação. Nas frações em que as unidades de medida já eram iguais, não manifestaram a necessidade dessa redução.

Algumas **dúvidas** também se fizeram presentes nas realizações das atividades. Elas se revelam no modo de proceder a corrida das cores em busca da unidade de medida comum, necessitando algumas vezes a intervenção da professora. Como exemplo, ao buscar pela unidade de medida comum a terços e quartos, alguns alunos ficaram na dúvida sobre quais barras deveriam escolher para realizar a corrida das cores.

5.1.5 C5: Manifestação do sentido da igualdade

A quinta categoria C5, “Manifestação do sentido da igualdade”, é composta por dez Unidades de Significado que dizem respeito àquilo que os estudantes manifestaram sobre o sentido da igualdade no contexto das tarefas desenvolvidas.

A seguir, apresentamos a Figura 31 com as Unidades de Significado que compõem essa categoria.

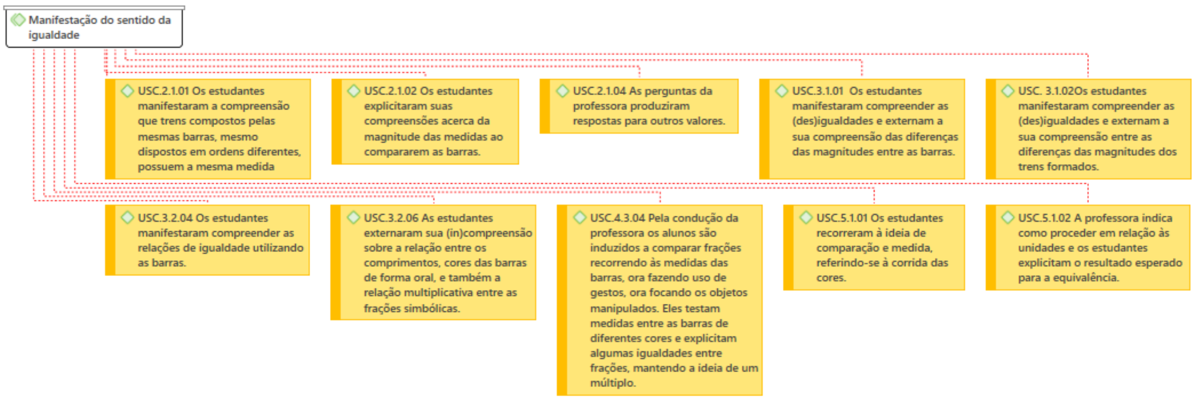


Figura 31: Unidades pertencentes à categoria C5 “Manifestação do sentido da igualdade”.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Ao focar repetidas vezes as Unidades de Significado, notou-se que os estudantes sozinhos e entre eles, por intermédio das atividades ou sugestão da professora, passaram a focar ou expressar o **sentido da igualdade** entre as barras. Vale ressaltar que esses sentidos não significam apenas um modo de fazer no sentido técnico ou metodológico, mas também diz dos modos de agir, conduzir e se comportar no desenvolvimento das atividades. Como exemplo desse sentido da igualdade, os estudantes, ao lidarem com as barras, identificaram correspondências entre elas, como: uma barra marrom tem um mesmo comprimento de duas barras roxas, de quatro barras vermelhas ou de oito barras brancas.

Essa categoria retrata, em vários momentos, a **igualdade como equivalência** das barras, pois, por meio de diferentes disposições de dois conjuntos de barras, seu comprimento não se altera. Também, através da **comparação,** utilizando as barras, os estudantes comparam barras de diferentes cores, com diferentes comprimentos, com o mesmo comprimento, em diferentes ordenações, focando a comparação entre as barras. Essa comparação é centrada na medida das barras e entre elas, e a relação de **ordem** (>,<, ≤, ≥) é empregada na aprendizagem dessa comparação. Por intermédio da manipulação das barras, os alunos testam as medidas e, ao compararem, concluem as igualdades entre algumas frações, estabelecendo algumas **relações multiplicativas**. Através dessas relações multiplicativas, eles realizam comparações de forma oral, sem a necessidade da utilização das barras para algumas comparações.

5.1.6 C6: Simbolização e/ou representação das frações

A sexta categoria C6, "Simbolização e/ou representação das frações", é composta por quinze Unidades de Significado que dizem a respeito àquilo que os alunos manifestaram sobre a simbolização e a representação das frações no contexto das tarefas desenvolvidas.

A Figura 32 apresenta as Unidades de Significado pertencentes a essa categoria:

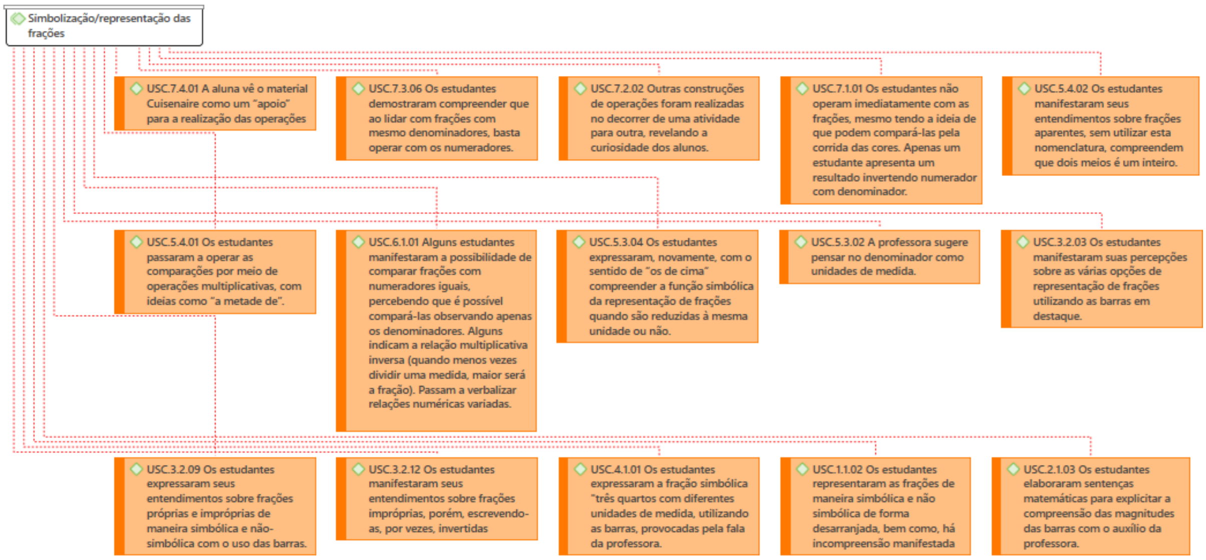


Figura 32: Unidades pertencentes à categoria C6 “Simbolização e/ou representação das frações”.
Fonte: Elaborada pelos autores no *Atlas.ti* (2022).

Durante a realização das atividades, conforme apontam as unidades que compõem essa categoria, em alguns momentos, os alunos viram o material Cuisenaire como um **apoio** na realização das atividades. Na realização das operações ou comparações, ao observarem o modo como a fração simbólica se apresenta, perceberam que, para as frações que possuem a mesma unidade de medida (denominador), basta **operar** com os numeradores. Além disso, focam, muitas vezes, nas cores das barras e a ação de associá-las a valores numéricos.

A **curiosidade** dos alunos também é revelada nos intervalos de término de uma atividade e início da outra, quando outras construções foram realizadas por eles.

A possibilidade de distintas representações das frações também é revelada ao compararem “dois meios com um inteiro”.

5.1.7 C7: Compreensão das frações sem barras

A sétima categoria C7, “Compreensão das frações sem barras”, é composta por três Unidades de Significado que diz respeito ao desenvolvimento das atividades sem a necessidade do auxílio das barras.

A Figura 33 apresenta as Unidades de Significado pertencentes a essa categoria.

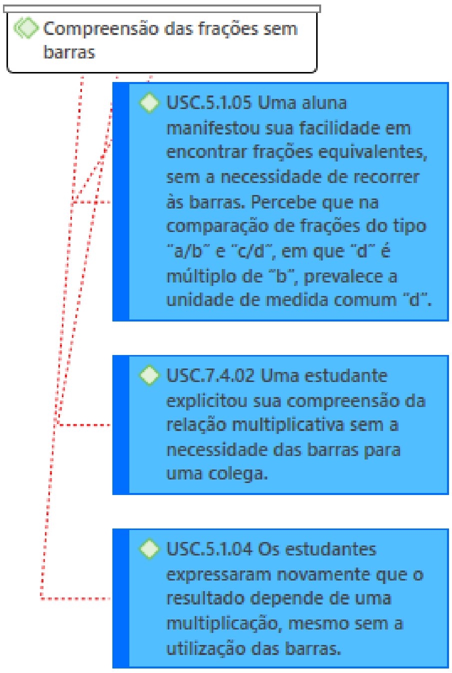


Figura 33: Unidades pertencentes à categoria C7 "Compreensão das frações sem barras".
Fonte: Elaborada no *Atlas.ti* (2022).

Ao desenrolar das atividades, alguns alunos começaram a manifestar sua **facilidade** em comparar e operar frações sem a necessidade das barras, por meio de relações multiplicativas. Perceberam que em frações do tipo $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, em que "d" é múltiplo de "b", prevalece a unidade de medida "d", pois "d" está na tabuada (termo utilizado pelos alunos) do "b".

Expostas as descrições, na sequência, apresentamos as interpretações das categorias.

5.2 Interpretações das categorias

As Unidades de Significado, que compõem as **compreensões iniciais sobre frações,** revelam as percepções iniciais dos alunos naquilo que concerne às frações e revela a forte e única presença da perspectiva parte-todo no ensino das frações. Em nenhum momento, os estudantes fizeram alguma representação simbólica ou não simbólica das frações impróprias e não manifestaram nenhuma associação das frações à outra interpretação.

A Base Nacional Comum Curricular, conforme visto no início deste trabalho, recomenda que o conteúdo de frações se inicie no terceiro ano do Ensino Fundamental e preza pela introdução desse conteúdo pela perspectiva da parte-todo.

De um lado, essa perspectiva, para Kieren (1980), está de alguma forma ligada às interpretações razão, quociente e medida. De outro, Behr *et al.* (1983) consideram que ela é reconceituada a partir da interpretação medida do número racional. Portanto, esses autores compreendem que a fração como parte-todo tem sua importância para a compreensão das demais interpretações, mas não deve ser a única. Escolano e Gairín (2005), fundamentados na didática da matemática de Brousseau (1983), alertam que a introdução ao ensino de frações como parte-todo é limitadora e prejudicial para o ensino de frações, porque causa diversos obstáculos didáticos, como: não existem frações impróprias; o ensino de frações inicia a partir de um exercício baseado na dupla contagem, utilizando os números naturais; não se explicita ao aluno o sentido e a importância da unidade.

Alguns desses obstáculos já havíamos citado na introdução desta pesquisa, apontados por outros pesquisadores, como Powell (2018a), e que se revelaram nas unidades de significado que compõem essa categoria. Também citamos pesquisas que apontam as dificuldades dos alunos em lidar com as frações nos mais variados anos de escolaridade. Percebemos, assim, que há uma desarmonia entre o que as pesquisas dizem ou orientam para o ensino das frações e o que orientam os documentos oficiais.

Portanto, nessa categoria, revela-se a pouca compreensão dos alunos ao lidar com frações e, consequentemente, mostram-se indícios de que o estudo exclusivo baseado na parte-todo não é eficaz em termos de desenvolvimento do conceito das frações. Além do que é afirmado pelos autores, compreendemos da categoria que os significados são ancorados nas criações didáticas do paradigma da parte-todo, porém, eles permanecem isolados do ponto de vista da compreensão e, portanto, da aprendizagem que requer dar sentido tanto às representações figurais quanto simbólicas.

As Unidades de Significado que compõem a categoria **relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa,** por diversas vezes, evidenciam que os alunos relacionaram a unidade de medida comum como resultado de uma multiplicação (tabuada), como o mínimo múltiplo comum ou um múltiplo comum qualquer. Isso indica que o mínimo múltiplo comum pode ser trabalhado como resultado sintetizador de medição, possuindo um significado de medição. Além disso, as unidades dessa categoria destacam a necessidade da unidade de medida comum para realizar as comparações das frações ou operações de adição e subtração.

Podemos dizer, ainda, que o trabalho com as operações de adição e subtração se sucederam de forma mais rápida comparado ao ensino parte-todo. Conforme o observado, os alunos, ao serem submetidos às operações, retomam a ideia da necessidade de uma unidade de medida comum para a comparação e estendem a mesma ideia para as operações. Essa comparação que é favorecida pela manipulação, aqui compreendida como “tomar à mão”, “operar com a mão”, indica que a compreensão decorre de atos que envolvem a abstração sustentada na corporeidade que se estende ao objeto pela mão. Em suma, não é o objeto que comunica, mas o sujeito se comunica com a percepção daquilo que manipula.

A relação multiplicativa supera o sentido de isolamento da relação que pode ser tomada nas representações comuns, da ideia de parte-todo. A operação inversa da divisão é evocada para compreender a própria relação fracionária. Isso pode, de algum modo, favorecer a compreensão das frações, posteriormente, em termos operatórios. Esse aspecto precisa ser investigado detidamente, mas, ainda assim, parece contribuir para compreender operações que não fiquem restritas ao conjunto dos racionais. Isso influenciaria, por exemplo, na algebrização das operações.

Portanto, as ações dos estudantes reforçam a necessidade de compreender a relação multiplicativa para o entendimento mais pleno das frações, inclusive as equivalentes ou as suas classes de equivalência. A perspectiva da parte-todo foca as frações pela visualização de figuras e abstratamente que, sem dúvida, pertencem ao movimento do aprender matemática, mas são secundários ao movimento cinestésico favorecido pela manipulação das barras. Por meio de perguntas adequadas, os estudantes tiveram a oportunidade de pensar-com-as-barras, não fisicamente, mas com as ideias sobre elas.

Algumas Unidades de Significado da categoria **a unidade e sua relativização** revelam a medida representada pelas barras. Segundo o dicionário Abbagnano (2007, p. 656) medida é uma:

> Relação entre uma grandeza e a unidade. A este propósito Aristóteles observava que a unidade pode ser entendida de dois modos: como unidade convencional ou aparente e como unidade absolutamente indivisível (Mel., X, 1-,' 1053 a 22), e, nesse sentido, reconhecia as condições da M. na homogeneidade entre aquilo que se mede e aquilo com que se mede (ABBAGNANO, 2007, X, 1, 1053 a 22).

Portanto, toda medida é uma relação entre grandeza e unidade, ambas de mesma natureza. Essa relação exprime a quantidade de iterações entre a unidade e a grandeza (a grandeza contém a unidade) e é representada por um número.

Caraça (1951), ao falar sobre a origem dos números racionais, inicia com um elemento essencial para sua existência: a medição. Segundo o autor, medir é comparar duas grandezas de mesma espécie, mas, para medir, é necessário estabelecer uma unidade de medida. Para comparar essas grandezas, é necessário analisar quantas vezes uma medida pode ser quantificada em relação à unidade estabelecida e, dessa maneira, um número exprime o resultado da comparação com a unidade. Ele chama esse número de medida de grandeza em relação a essa unidade.

Dessa forma, Powell (2018a) recomenda o ensino de frações pela perspectiva de medição, apoiado sob essas características epistemológicas, pois agrega ao aluno as percepções de magnitudes simbólicas e não simbólicas e, ao utilizar a relação multiplicativa entre duas quantidades, os alunos demonstram a facilidade em lidar com frações impróprias.

Em termos Piagetianos, as barras serviriam como aporte à abstração empírica dos estudantes. Para Powell (2019), as barras servem como apoio à construção do conceito de fração pela perspectiva de medição e “nos permitem representar uma relação multiplicativa entre os comprimentos de duas quantidades comensuráveis e assim representar um número fracionário qualquer” (POWELL, 2019, p. 59). No entanto, compreendemos que, para além dos quadros aqui trazidos à discussão, as barras tendem a ser a própria medida. A medida não está na barra, nem em sua representação, mas é ela mesma uma extensão do corpo de quem mede, com aquilo que mede.

A relativização é relevante para o pensamento acerca do que se está fazendo. As diferentes possibilidades solicitam uma generalização a partir de uma relativização e permitem compreender que a unidade não é fixa, mas que é escolhida, elegida no próprio ato de medição. Um mesmo conjunto de barras pode ser exprimido por meio de diferentes representações simbólicas, dependendo da unidade de medida que for escolhida, estimulando o sentido de “flexibilidade” e “razoabilidade”, termos mencionados por Powell e Ali (2018). Percebemos, dessa forma, que os conhecimentos simbólicos e não simbólicos são fundamentais para lidar com frações, para os alunos se apropriarem da magnitude e sejam capazes de flexibilizar as representações e avaliar a razoabilidade dos resultados.

O aparato físico contém um momento hilético[16] decorrente das barras, pois os estudantes, ao focarem o fenômeno da medida, comprimento e da comparação entre as barras, comunicam àquele que se pensa na igualdade ou na diferença entre as barras, a possibilidade de compará-las de tantos e quaisquer modos que se queira, sem fixar a unidade como aquilo que é menor. A unidade pode ser “maior”, portanto, a unidade é uma ideia e a ela os demais objetos a serem medidos se referem. Isso não se dá de maneira imediata, é no conjunto de vivências intelectivas dos sujeitos visando à medida com o material Cuisenaire, ou quaisquer outros, que se abre a possibilidade de chegar à unidade como um objeto abstrato e não o menor ou maior objeto.

A categoria **a necessidade e o reconhecimento da unidade,** por sua vez, trata de algo que é solicitado pela ideia de unidade de medida. De acordo com o que consta na categoria anterior, toda medida é uma relação entre grandeza e unidade, ambas de mesma natureza. Mas, para iniciar a construção dessa abstração, as crianças começam pelo senso de medida, formado por meio da vivência de experiências na ideia de comparação, mas ainda não aparece a unidade de medida (LORENZATO, 2009).

Nessa fase, segundo Lorenzato (2009), as crianças acreditam que a medida de um objeto não se conserva. Após essa fase, avançam para a comparação indireta, na qual as crianças descobrem a diferença entre dois objetos A e B, comparando-os com um terceiro objeto C. Essa medição indireta indica que o caminho para o estabelecimento de uma unidade de medida está aberto, mas ainda há a utilização da unidade de medida não padronizada. Depois disso, ao adquirirem a conservação de medida ou quantidade, percebem a necessidade de estabelecer uma unidade de medida padronizada.

De acordo com Piaget e Szeminska (1975), para a construção da noção de número, é necessária, primeiramente, a sua conservação como quantidade. Segundo Kamii (2012), a conservação do número pela criança se dá nos três níveis de desenvolvimento: nível I – a criança não consegue fazer um conjunto com o mesmo número; nível II – a criança consegue fazer um conjunto com o mesmo número, mas não consegue conservar essa igualdade; nível III - as crianças são conservadoras e

---

[16] Na terminologia de Husserl, seriam “dados constituídos pelos conteúdos sensíveis, que compreendem, além das sensações denominadas externas, também os sentimentos, impulsos, etc.” (ABBAGNANO, 2007, p. 499).

respondem corretamente.

De acordo com Piaget (1978), para a construção do conceito de número, a conservação de número é de grande importância, pois se constitui em uma ferramenta que contribui nas estruturas do pensamento, tanto internamente quanto externamente. Segundo o autor, no primeiro estágio (sensório-motor 2 anos), a criança não conserva a igualdade dos números porque ainda não construiu o início da estrutura mental do número. Ela usa o que lhe parece ser o melhor critério, ou seja, os limites espaciais dos conjuntos. No segundo estágio (pré-operatório 2-7 anos), a criança consegue fazer um conjunto com o mesmo número, mas não conserva essa igualdade. Já as crianças do terceiro estágio (estágio operacional concreto 7-11 anos, idade que corresponde aos sujeitos dessa pesquisa) são conservadoras conseguem explicar a igualdade das quantidades (PIAGET, 1978).

Dessa forma, podemos dizer que é necessário que as crianças compreendam a igualdade de quantidades para conseguir compreender a conservação de quantidade e, consequentemente, a unidade de medida. Da perspectiva, fenomenológica, antes dessa construção, para além do aparato biológico do desenvolvimento, há a constituição do conhecimento, mesmo para as crianças que assentam numa estrutura triádica, formada pelas vivências que tornam o conhecimento possível, sendo elas as intelectivas, psíquicas e corpóreas, unidas em um corpo vivente (ALES BELLO, 2006). Nesse sentido, por meio das vivências com os colegas e professora, elaborando pela manipulação ativa e reflexiva, são provocadas a pensar em algo que une o separado, culminando na constituição daquilo que é uno.

Além disso, mostrou-se nas Unidades de Significado dessa categoria que os estudantes apresentaram compreender algumas situações, como: a possibilidade de diferentes maneiras de representação simbólica de uma mesma medida; uma mesma medida pode ser representada por cores de barras diferentes, a depender da unidade estabelecida, dessa forma a equivalência de frações é concebida a partir do comprimento entre as barras e há a necessidade de uma unidade de medida comum para comparar e operar com frações. Essa necessidade decorre de atos intelectivos que se assentam nos atos de julgar, como vivências particulares sobre aquilo que é visado/tocado com a manipulação.

Em termos de aprendizagem, a comparação se mostrou como a ação mais recorrente, uma vez que o entendimento da unidade comum foi se mantendo nas várias possibilidades de arranjo entre as barras. Comparar é um ato que faz emergir a unidade e a sua relação com outros objetos a serem medidos. Operações de subtração, após a redução a mesma unidade também indicam a compreensão da impossibilidade de operar quando não são de mesma "natureza". Assim, a comparação solicita diferentes movimentos da cognição acerca deste objeto que está posto em comparação. A abstração sobre um objeto e a associação entre as suas medidas, parece se fortalecer toda vez que se busca a redução à unidade.

No que se refere à categoria **manifestação do sentido da igualdade** que aqui emergiu, ela pode ser explicitada indo a significados de igualdade em termos históricos e epistemológicos. Em uma acepção dicionarizada, igualdade significa:

> Relação entre dois termos, em que um pode substituir o outro. Geralmente, dois termos são considerados iguais quando podem ser substituídos um pelo outro no mesmo contexto, sem que mude o valor do contexto. Esse significado foi estabelecido por Leibniz (Op., ed. Gerhardt, VII, p. 228), mas Aristóteles limitava o significado dessa palavra ao âmbito da categoria de quantidade, e que dizia eram iguais as coisas "que têm em comum a quantidade" (Met., IV, 15, 1021 a 11) (ABBAGNANO, 2007, p. 534).

De acordo com Caraça (1951), dois números racionais são iguais quando expressam a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial, e apresenta a relação formal $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, se e somente se, m × q = p × n.

Ponte, Branco e Matos (2009) citam que Kieran (1981) alega que a passagem que se dá entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico é marcada pela compreensão da igualdade. O pensamento aritmético é marcado por cálculos, que levam a um resultado, o pensamento algébrico está relacionado a estruturas e a sustentação de relações. O autor distingue o pensamento aritmético do algébrico a partir de dois modos de lidar com o sinal de igualdade: processual e estrutural. Esse sinal, numa perspectiva processual, remete à realização de uma operação, e, numa perspectiva estrutural, indica uma relação de equivalência.

Caraça (1951, p. 40) define a equivalência dentro do critério de igualdade. De acordo com o autor, "não se altera um número racional quando se multiplica (ou divide) o seu numerador e o seu denominador pelo mesmo número natural".

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), na Matemática, a noção de igualdade realiza um papel fundamental, tendo um significado muito mais próximo de "equivalência" do que de "identidade", pois

> Na identidade matemática existe uma coincidência total entre dois objectos – um objecto só é idêntico a si mesmo. Em contrapartida, a igualdade ou equivalência matemática é sempre relativa apenas a uma certa propriedade. Em termos matemáticos, a relação de igualdade é uma relação de equivalência. Isso quer dizer que é simétrica (se a = b então b = a, para quaisquer elementos a e b), é reflexiva (a = a, para todo o elemento a) e é transitiva (se a = b e b = c , então a = c para quaisquer elementos a, b e c). Aos poucos os alunos devem conseguir reconhecer e usar estas propriedades. Na expressão numérica 5 + 2 = 7, os termos à direita (‘7’) e à 20 esquerda (‘5+ 2 ’) do sinal de igual são diferentes (não existe identidade entre eles), mas representam o mesmo número (são equivalentes) (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.19).

Sobre a equivalência, Gattegno (1974, p. 83, tradução nossa) afirma que:

> Podemos ver que a identidade é um tipo muito restritivo de relacionamento preocupado com igualdade, que a igualdade aponta para um atributo que não muda, e que a equivalência está preocupada com um relacionamento mais amplo, onde se concorda que, para certos propósitos, é possível substituir um item por outro. Equivalência sendo o mais abrangente relacionamento também será o mais flexível e, portanto, o mais útil.

A exploração e a verificação da equivalência, possibilidades essas fornecidas por meio das comparações entre as barras, portanto, dentro de um movimento complexo do pensar sobre e com as barras, reforça a compreensão dos símbolos e promove a compreensão da “manipulação” algébrica. Nesse sentido, reiteramos que a comparação, como ato recorrente, se mostrou um item de grande relevância em nossa pesquisa.

Ademais, além da relação de igualdade (representada por =), os alunos se aproximaram também das relações de ordem (>, <, ≤, ≥, ≠) que, segundo Caraça (1951), a propriedade da igualdade, junto à propriedade da desigualdade, compõe a propriedade da ordenação. Em relação à desigualdade, o mesmo autor afirma que na comparação entre dois números fracionários, o maior é aquele que tem maior medida em relação à uma unidade comum de comparação, sendo definida pela relação $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, se e somente se, m × q > n × p.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 24) relatam que as relações de igualdade e de ordem (menor e maior) “desempenham um papel importante na aprendizagem da comparação e ordenação no tópico Números racionais não negativos”. No que diz respeito à igualdade, segundo os autores supracitados, os alunos devem reconhecer que um mesmo número racional pode ser representado de várias maneiras, nomeadamente na forma fracionária ou na forma decimal.

A perspectiva do ensino de frações com enfoque na medição permite aos estudantes manipulações livres, indicando que o primeiro momento, antes de relações matemáticas multiplicativas e da concepção da unidade, sugere e solicita o sentido da igualdade/desigualdade. Esses primeiros movimentos se mostram importantes para além da afinidade com as barras de Cuisenaire, para “evocar” aspectos do pensamento requeridos pela comparação, mas que são articulados à manipulação refletida das barras.

Esse sentido de igualdade advém das diferentes medidas atribuídas às barras, da sua equivalência e compreendemos que ele remete a um princípio que pouco é destacado, o princípio de identificação que, segundo Bruyne, Herman e Shoutheete (1982, p. 47), “[...] busca o diverso no semelhante o idêntico sob o diferente. É um princípio dialético”. A aprendizagem de frações, então, vai se entrelaçando e solicitando o movimento dialético do pensando, comparando para chegar à igualdade. Esta não é dada, vai se constituindo no percurso do pensar e do agir dos estudantes ao serem postos em situação que requer comparação associada à medição. Note-se que a quantificação é sustentada em aspectos qualitativos, como maior e menor. Mesmo que parece dizer de uma quantidade, o sentido de ser maior ou menor é uma qualidade, um atributo que emergiu antes da medida propriamente dita.

Como comparação, vai se se mostrando como um dos aspectos mais relevantes do trabalho, nota-se que ela foi solicitando sentidos que são imprescindíveis para o trabalho da compreensão do número em questão, de suas representações ou modos de expressão representativas, simbólicas ou não e das operações matemáticas que podem ser efetuadas sobre esses números, agora entendidos como fração**.**

Na categoria **simbolização e/ou representação das frações,** novamente a comparação é posta em destaque, porém, focando partes da representação fracionária. Ao trabalharem com operações, os estudantes passam a atribuir significados particulares ao denominador e numerador. Porém, esses significados referidos à medida das barras conferem um preenchimento sensível (na visão das barras) daquilo que estão trabalhando. O sentido da igualdade é retomado, agora, para denominadores iguais, portanto, permitindo operações diretas, também para numeradores e denominadores iguais. Quando os numeradores e denominadores forem diferentes, solicita dos estudantes uma transformação que permitirá a operação, tanto com o material se manipulado como extensão do corpo ou de maneira simbólica, relembrando do realizado com os objetos. Por isso, o sentido de igualdade interfere não apenas na operação, mas no valor absoluto do número que se está a trabalhar. Os significados das representações simbólicas são preenchidos por uma intuição sensível e referentes às medidas das barras.

A aprendizagem ou a compreensão das representações e simbologia vai emergindo dos próprios significados das frações comparadas entre si e na independência de cada parte da escrita da fração. Essa simbolização não concerne às barras em si, mas ao significado de medida a elas atribuído e podendo tomá-las como instrumentos de medida. Nem todos os estudantes chegaram a este “nível” de entendimento, mas, mesmo assim, buscaram na medida das barras, em sua manipulação, compreender as operações e escrever sentenças.

A teoria Piagetina vai nominar isso de abstração empírica, ou seja, muitos destes estudantes não conseguiram reter o sentido da medida, da igualdade e das funções de cada parte das representações simbólicas sem o material. Em perspectiva fenomenológica, compreendemos que isso se dá porque a *barra-é-com-o-corpo* de quem experiencia a comparação, ainda sem a consolidação de uma lembrança e de um significado que independe desta corporeidade com o objeto sensível.

A curiosidade dos estudantes é um indício de uma necessidade interna de confirmação daquilo que acabaram de experienciar. Ao testarem e elaborarem outras operações, evidenciam a retomada daquilo que entenderam sobre a fração e sua simbologia. Não é impróprio afirmar que essa busca espontânea, no sentido de uma decisão livre, é mobilizada pela compreensão, mesmo que momentânea, daquele objeto estudado.

As Unidades de Significado que compõem a categoria **compreensão das frações sem barras** revelam, muitas vezes, nas realizações de tarefas, a preocupação dos estudantes de como iriam resolver as operações ou comparações se não tivessem as barras. Esse é um ponto importante a destacar.

Ao voltar-se ao sentimento de preocupação que é revelado, de acordo com Inwood (2002), Heidegger, ao tratar desse termo, utiliza três palavras cognatas: “Sorge” cuidado, “Besorgen” ocupação e “Fürsogen” preocupação, sendo que ocupação e preocupação são constitutivas do cuidado. Entendendo a preocupação como constitutiva do cuidado, ao voltar-se a esse termo cura (cuidado), é "propriamente a ansiedade, a preocupação que nasce de apreensões que concernem ao futuro e referem-se tanto à causa externa quanto ao estado interno" (p.26). Essa preocupação que se manifestou é algo com o qual os alunos almejam como estudante, se preocupando com a sua aprendizagem, com seu futuro, em que há a necessidade de saber como proceder à frente de situações sem ter o material como apoio.

A aproximação com as barras, durante o período da implementação das atividades, possibilitou chegar nessa independência. O aluno, ao lidar com as barras, realiza a comparação de cores e tamanhos, estabelece relações de metades, terços... e faz a correspondência das mais variadas barras em barras brancas. Depois de todo esse exercício que se inicia pela comparação com a utilização do material, o aluno vai consolidando as relações e transferindo a outros casos, como nas operações. Piaget chama esse processo de “abstração reflexionante”, o qual envolve a construção de relações entre objetos (KAMII, 2012). Essa abstração é feita pela mente do ser humano, ela não está propriamente no objeto.

Essa facilidade que parece algo imediato, não o é. Todas as ações e atos, anteriormente envolvidos, aliados ao próprio momento em que se encontram esses sujeitos, fazem emergir o domínio ou não de operações, pensando no sentido de unidade, recorrendo às relações multiplicativas. A aprendizagem das operações e das representações parece ter encontrado, mesmo que temporariamente, bom termo para esses estudantes, evocando as experiências vividas com o trabalho realizado em sala de aula. Esse movimento já não é mais centrado no manipular, mas se conforma com os atos intelectivos concernentes à lembrança, que permitem serem visados por outros atos, como a reflexão, o juízo e a avaliação daquilo que fizeram. Em muitos momentos, mesmo sem as barras, fica evidente que recorrem a elas por suas cores e o significado qualitativo e quantitativo a elas atribuído, culminando em simbolização do visado.

Em síntese, as categorias aqui descritas e interpretadas corroboraram com aspectos já registrados na literatura e desvelaram outros concernentes aos atos constitutivos dos sujeitos ao aprenderem frações em sentido amplo. Com isso, passamos às considerações finais e novas aberturas da retomada sobre todo o trabalho.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assumindo a perspectiva fenomenológica de investigação, esse movimento de pesquisa conduzido pela interrogação *O que se mostra sobre a aprendizagem de frações ensinadas na perspectiva de medição, com enfoque na ideia de magnitude e da construção da unidade*? fez emergir sete categorias abertas: C1) Compreensões iniciais sobre frações; C2) Relação da unidade de medida comum com a relação multiplicativa; C3) A unidade e a sua relativização; C4) A necessidade e o reconhecimento da unidade; C5) Manifestação do sentido da igualdade; C6) Simbolização e(ou) representação das frações; e C7) Compreensão das frações sem barras.

O ensino de frações, pela perspectiva de medição, comparado com o ensino pela perspectiva de partição, demanda um tempo didático diferente e mais extenso, conforme o observado na implementação das atividades com os estudantes. Ainda assim, defendemos que é necessário que seja investido um tempo considerável para o desenvolvimento do senso fracionário pela perspectiva de medição para produzir compreensões necessárias para objetos que serão estudados em anos seguintes de escolarização, ou seja, focar nos conceitos no lugar da “mecanização” da operação.

Cabe ressaltar que, ao trabalhar frações pela perspectiva de medição, não utilizamos, de início, a nomenclatura usual: “numerador”, “denominador”, “frações próprias”, “frações impróprias” ou “frações aparentes”. Ao nos referirmos ao denominador, usamos a terminologia unidade de medida. A apresentação desses termos se deu ao longo das atividades no sentido de não fazer com que o aluno comece a “rotular” frações como sendo composta por dois números independentes, nomeados por numerador e denominador.

Além disso, notamos maior atenção e engajamento dos estudantes nas atividades propostas, talvez pelo fato de o material utilizado passar a pertencer à rotina escolar deles, o que não era de costume e pelo manuseio das barras serem de simples entendimento, favorecendo a construção do conhecimento, de modo que possam elaborar, refinar, revisar e retomar as próprias ideias sobre os objetos fracionários em questão, antes da pura e mera operação de algoritmos.

De modo geral, as atividades implementadas seguiram balizadas pela perspectiva de medição e foram orientadas pelas fases do 4A-Instructional Model, que favoreceram a compreensão inicial do conceito de equivalência, comparações de frações e auxiliaram na compreensão das operações. Observamos, nos estudantes, a facilidade posterior que emergiu para a construção de frações, principalmente as impróprias, cujo numerador, sob a ideia de parte-todo, é maior que o denominador.

Nas atividades de comparação de frações com denominadores diferentes, percebemos que alguns estudantes não necessariamente utilizaram o mínimo múltiplo comum, mas um múltiplo comum qualquer, percebendo que há várias maneiras para comparar frações. Isso também se refletiu nas operações, pois diversas vezes os estudantes sugeriam outros múltiplos comuns, trazendo novas discussões para as aulas. Outro ponto a destacar é que as operações de adição e subtração ocorreram de forma mais rápida comparada à perspectiva parte-todo (podemos afirmar isso a partir da experiência da pesquisadora, autora desse trabalho, como docente há alguns anos, na qual, o modo de ensinar era embasado por essa perspectiva), pois os estudantes perceberam que quando se tratava de uma operação com denominadores diferentes, recorreram à corrida das cores para encontrar esse múltiplo comum. Mais tarde, esse cálculo passou a ser feito oralmente.

Algumas dificuldades foram encontradas durante a implementação das atividades. Percebemos uma maior inquietação da turma ao longo da implementação das atividades, o que solicitou a intervenção da professora em alguns momentos que necessitavam de uma maior atenção.

As categorias mostram a unidade como fundamental para a compreensão dos números fracionários. Ao ser escolhida em determinada situação, a categoria está diretamente ligada a uma relação multiplicativa, além da sua necessidade para realizar as comparações das frações ou operações de adição e subtração.

A relativização da unidade é significativa para o pensamento acerca do que se está fazendo. As diferentes possibilidades solicitam uma generalização, permitem compreender que a unidade não é fixa, mas que é escolhida, elegida no contexto da própria medição. Os estudantes demonstraram compreender algumas situações, como: a possibilidade de diferentes maneiras de representação simbólica de uma mesma medida; uma mesma medida pode ser representada por cores de barras diferentes a depender da unidade estabelecida, dessa forma a equivalência de frações foi concebida a partir do comprimento entre as barras.

A manifestação do sentido da igualdade que se revelou adveio das diferentes medidas atribuídas às barras, da sua equivalência, das comparações e, mais particularmente, pelas características qualitativas refletidas pelos sujeitos.

A comparação se mostrou como a ação mais recorrente e merece destaque, uma vez que, o entendimento da unidade comum foi se mantendo nas várias possibilidades de arranjo entre as barras. Ao tratar das operações de adição e de subtração, após a redução a mesma unidade, também indicaram a compreensão da impossibilidade de operar quando não eram de mesma “natureza”. Assim, a comparação solicita diferentes movimentos da cognição acerca deste objeto que está posto em comparação.

Nessa implementação, outros dois pontos se mostraram relevantes. O primeiro é a necessidade de evitar a antecipação da ideia aos estudantes, o que é de nosso costume. Essa espera é de grande valia para a formalização de ideias, principalmente por aqueles que se demoram mais. O segundo seria no sentido de “fazer diferente”. Ao gravar os gestos dos estudantes, no decorrer da aula na sua manifestação de ideias, por questão de logística, a câmera infelizmente foi colocada em um local onde não se via de maneira nítida essas manifestações gestuais, por isso não abordamos essas manifestações, mas fica como sugestão para uma próxima pesquisa.

Ao finalizar este texto de dissertação, julgo pertinente esclarecer algumas considerações do “eu” professora e pesquisadora. Ao longo dos anos de docência, o trabalho com frações sempre foi embasado pela perspectiva de parte-todo. Ao propor, neste trabalho, uma mudança de perspectiva, houve a necessidade de uma mudança de postura e embasamento teórico. Trabalhar dessa forma exige conhecimento das barras e suas relações para que se possa conduzir, de forma segura, o conhecimento a ser produzido pelos alunos. Foram meses de adaptação, estudo e planejamento antes das implementações das atividades.

Esta pesquisa ainda aponta para a necessidade de mudanças nos documentos orientadores em relação ao ensino das frações e investir em formações continuadas dos professores, principalmente aqueles dos anos iniciais do Ensino Fundamental, onde se inicia o estudo do conteúdo de frações. Desse modo, acreditamos que haverá um avanço na aprendizagem dos alunos, minimizando as dificuldades nos anos seguintes.

Em suma, as interpretações das categorias abertas revelaram o potencial da proposta, de modo a ressaltar a importância de se realizar um planejamento ao iniciar o conteúdo de frações que parta do desenvolvimento do senso fracionário, utilizando práticas que, inicialmente, priorizem situações que envolvam a medição, de forma que conceitos, como de equivalência, comparações e frações impróprias, sejam construídos com apoio visual, manipulativo, por meio de explicitação, argumentação e discussão de seus entendimentos. Isso é favorecido por meio de uma distinta compreensão da natureza do objeto fracionário em sua ontologia e epistemologia.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 2. ed. SP: Martins Fontes, 2007.

ALES BELLO, A. **Introdução à fenomenologia**. 1° ed. Bauru, São Paulo: EDUSC, 2006.

AMARAL, C. A. do N. A.; SOUZA, M. A. V. F de.; POWELL, A. B. **Fração à moda antiga.** 1° ed. Vitória: Edifes, 2021. 114p.

AMARAL, C. A. do N. **Conceito de fração pela perspectiva de medição:** uma abordagem baseada no 4A-instructional model utilizando as barras de Cuisenaire e conduzida por um lesson study. 2021. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2021.

BARBARIZ, T. A. M. **A constituição do conhecimento matemático em um curso de matemática à distância**. 2017, 451f. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista, UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2017.

BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento.** 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BECKER, F. Aprendizagem – concepções contraditórias. **Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, [s. l.], v. I, n. 1, Jan/Jun, 2008. Disponível em: http://www.marilia.unesp.br/scheme Acesso em: 11 ago. 2022.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational Number Concepts. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. *In:* BORBA, M.C.; ARAUJO, J.L. **Pesquisa qualitativa em educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.101-114.

BICUDO, M. A. V. **Filosofia da Educação Matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2010. 248 p.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa:** Segundo a visão fenomenológica. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2011. 152 p.

BORGES, H. P.; COSTA, T. M. L. Frações através de jogos. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., São Paulo, 1987. **Anais** [...]. São Paulo: LTDA, 1988. p. 70.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed., Edgar Blucher, São Paulo, 1996. 579 p.

BRASIL. Constituição (1988). Constituição Federal. Brasília, DF: Presidência da República, 2016. Disponível em: https://normas.leg.br/?urn=urn:lex:br:federal:constituicao:1988-10-05;1988#/con1988_15.12.2016/ind.as%20p. Acesso em: 13 set. 2022.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC; SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRITO, D. dos S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática:** Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. 205 f. 2018. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2018.

BRUYNE, P. de; HERMAN, J.; SCHOUTHEETE, M. de. **Dinâmica da pesquisa em ciências sociais:** os polos da prática pedagógica. 2 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1982.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989. 318p.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas: Papirus, 2008. 120 p.

DAUD, M. Frações. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., São Paulo,1987. **Anais** [...]. São Paulo: LTDA,1988. p. 77.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. The object sources of the concept of fractions. *In:* DAVYDOV, V. V.; STEFFE, L. P. (Org.). **Soviet studies in mathematics education.** Volume 6. Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991. p. 86-147.

ESCOLANO, R.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. **UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Reston VA, v.1, n. 1, p.17-35. Apr. 2005.

FAZIO, L. K.; BAILEY, D. H.; THOMPSON, C. A.; SIEGLER, R. S. Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. **Journal of Experimental Child Psychology**. [s. l.], v. 123, p. 53-72, 2014.

FERRACIOLI, L. Aspectos da construção do conhecimento e da aprendizagem na obra de Piaget. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, departamento de Física da UFSC, v. 16, n. 2, p. 180-194, 1999.

FILIPE, F. A.; SILVA, D. dos S.; COSTA, Á. de C. Uma base comum na escola: análise do projeto educativo da Base Nacional Comum Curricular. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Fundação CESGRANRIO, v. 29, p. 783-803, 2021.

GATTEGNO, C. **The commonsense of teaching mathematics**. New York: Educational Solutions, 1974.

GRAÇA, Sofia I.; DA PONTE, João P.; GUERREIRO, António. Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo…! **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [s. l.], v. 23, n. 1, p. 683-712, 2021.

HOLANDA. A. Questões sobre pesquisa qualitativa e pesquisa fenomenológica. **Análise psicológica**, [s. l.], v. 24, n. 3. p. 363-372, 2006.

INWOOD, M. **Dicionário Heidegger**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

JOSÉ, W. A.; VIZOLLI, I. Obstáculos Epistemológicos Inerentes ao Conceito de Fração: um estado do conhecimento. **REMATEC**, [s. l.], v. 17, p. 48-66, 2022.

KAMII, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 39. ed. Campinas: Papirus, 2012. 112p.

KLÜBER, T. E. Atlas. ti como instrumento de análise em pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica. **ETD – Educação Temática Digital**, Campinas, v. 16, n. 1, p. 5-23, 2014.

KIEREN, T. E. The Rational Number Construct: Its Elements and Mechanisms. *In:* KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p. 125-150, 1980.

KIEREN, T. E. **Rational and Fractional Numbers:** From quotient Fields to Recursive Understanding, in Rational Numbers: An Integration of Research, Londres, p. 49-84, 1993.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, p. 883-905, 2012.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LORENZATO, S. Que matemática ensinar no primeiro dos nove anos do ensino fundamental? *In:* CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL, 17., 2009, Campinas. **Anais** [...]. Campinas: ALB, 2009. p. 1-10. Disponível em: https://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais17/txtcompletos/sem07/COLE_2698.pdf. Acesso em: 14 jan. 2022

MACK, N. K. Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. *In:* CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. *et al*. (Orgs.). Studies in mathematical thinking and learning. **Rational numbers:** an integration of research. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 85-105, 1993.

OLIVEIRA, D. V. S.; BASNIAK, M. I. Frações e suas múltiplas interpretações: reflexões sobre o ensino e a aprendizagem. **Revista de História da Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, p. 1-20, 7 jul. 2021.

PALMER, Richard. E. **Hermenêutica**. trad. Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70,1996. (Coleção o Saber da Filosofia).

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Ensino de Primeiro Grau. **Diretrizes curriculares da educação básica: matemática**. Curitiba: SEED, 2013.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Referencial Curricular do Paraná:** Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba, PR: SEED/PR, 2019. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=166 9. Acesso em: 10 fev. 2022.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo Priorizado da Rede Estadual de Ensino 2021**. Curitiba, PR: SEED/PR. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1w149ZmTBN7jXCAbEiKWGPqoQ95HDv2wg/view. Acesso em: 13 set. 2022.

PAULO, R. M.; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de matemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, São Paulo, v. 10, n. 3, p. 71-86, 2010.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Traduzido por Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987. 376p.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A Gênese do Número na Criança**. 2ª Edição. Rio de Janeiro Zahar editores/Mec. 1975. 336p.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978. 340p.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009. 180p.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura (REMATEC)**, Belém, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018a.

POWELL, A. B. Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. **Revista Perspectiva**, Florianópolis, SC, v. 36, n. 2, p. 399-420. 2018b.

POWELL, A. B. Como uma Fração Recebe seu Nome. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática: **ReBECEM**, Cascavel, Pr, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019a.

POWELL, A. B. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. **Ripem**, Brasília, v. 13, p. 50-68, 2019b.

POWELL, A. B. Measuring perspective of fraction knowledge: Integrating historical and neurocognitive findings. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (REVISEM)**, Sergipe, v. 4, n. 1, p. 1-19, 2019c.

POWELL, A. B.; ALI, K. V. Design Research in Mathematics Education: Investigating a Measuring Approach to Fraction Sense. *In:* CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT):** Contribuições para Pesquisa e Ensino. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** ***um estudo diagnóstico junto a professores que atual no ensino fundamental***. 2005. 196 f. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 9, n. 20, p. 8-37, 2020.

SIEGLER, R. S. FAZIO, L. K. BAILEY, D. H. ZHOU, X. Fractions: The new frontier for theories of numerical development. **Trends in cognitive sciences**, Kidlington, v. 17, n.1, p. 13-19, jan. 2013. Disponívem em:

https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1364661312002653. Acesso em: 12 jun. 2022.

SILVA, P. S. Fenomenologia e aprendizagem. **Cad. psicopedag.**, São Paulo, v. 3, n. 6, p. 40-47, jun. 2004. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1676-10492004000100005&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 09 nov. 2022.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 302 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, P.; SODRÉ, U. **Matemática Essencial**: Ensino Fundamental, Médio e Superior no Brasil. UEL-projetos, 2020. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/fracoes.html#menu-closed. Acesso em: 09 jan. 2023.

SNAPPER, E. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. **Humanidades**, Brasília, v. 2, n. 8. p. 85-93, 1984.

SOUZA, M. A. V. F. de; POWELL, A. B. How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? **Acta Scientiae.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, RS, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021.

SOUZA, M. A. V. F. de. Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. **Boletim GEPEM**, Seropédica / RJ, n. 79, p. 86-100, 2021.

THIELE, L.; POWELL, A. B.; KLUBER, T. E. Ouso das barras cuisenaire para o desenvolvimento do senso de medida para alunos da Educação Infantil. In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais** [...]. Brasília (DF) On-line, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/xivenem2022/483822-O-USO-DAS-BARRAS-CUISENAIRE-PARA-O-DESENVOLVIMENTO-DO-SENSO-DE-MEDIDA-PARA-ALUNOS-DA-EDUCACAO-INFANTIL. Acesso em: 17 jan. 2023.

THIELE, L.; POWELL, A. B.; KLUBER, T. E. Frações: uma meta-análise dos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Sergipe, p. 1-17, (no prelo).

THOMPSON, P. W.; LAMBDIN, D. Research into practice: Concrete materials and teaching for mathematical understanding. **The Arithmetic Teacher**, [s. l.], v. 41, n. 9, p. 556-558, 1994.

VENENCIANO, L.; DOUGHERTY, B. Addressing priorities for elementary school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Canadá, v. 34, n. 1, p. 18-24, 2014.

APÊNDICES

Apêndice A: Modelo do termo de Consentimento

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na

CONEP em 04/08/2000

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: PERSPECTIVA DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM ENFOQUE À MAGNITUDE

Certificado de Apresentação para Apreciação Ética – "CAAE" N°

Fesquisador para contato: Luciane Thiele

Telefone: (45) 98832-9887

Endereço de contato (Institucional): R. Antônio Follmann, 200 - Dom Armando, Missal - PR, CEP: 85890-000

Convidamos *seu filho* a participar de uma pesquisa que tem objetivo de compreender aspectos ligados a aprendizagem dos alunos em frações com enfoque na perspectiva de medição. Para isso você deverá relatar através de depoimentos, em uma entrevista aberta, com gravação que pode ser de áudio ou vídeo e relatos escritos, a experiência vivida no decorrer das aulas de matemática ao trabalhar frações de uma maneira diferente e divertida.

Se ocorrer algum transtorno, decorrente da participação *de seu filho* em qualquer etapa desta pesquisa, nós pesquisadores, providenciaremos acompanhamento e a assistência imediata, integral e gratuita. Havendo a ocorrência de danos, previstos ou não, mas decorrentes de sua participação nesta pesquisa, caberá a você, na forma da Lei, o direito de solicitar a respectiva indenização.

Também *seu filho* poderá a qualquer momento desistir de participar da pesquisa sem qualquer prejuízo. Para que isso ocorra, basta informar, por qualquer modo que lhe seja possível, que deseja deixar de participar da pesquisa e qualquer informação que tenha prestado será retirada do conjunto dos dados que serão utilizados na avaliação dos resultados.

Você não receberá e não pagará nenhum valor para participar deste estudo, no entanto, terá direito ao ressarcimento de despesas decorrentes de sua participação.

Nós pesquisadores garantimos a privacidade e o sigilo de sua participação em todas as etapas da pesquisa e de futura publicação dos resultados. O nome *do seu filho*, endereço, voz e imagem nunca serão associados aos resultados desta pesquisa, exceto quando você desejar. Nesse caso, você deverá assinar um segundo termo, específico para essa autorização e que deverá ser apresentado separadamente deste.

As informações que *seu filho* fornecer será utilizada exclusivamente nesta pesquisa. Caso as informações fornecidas e obtidas com este consentimento sejam consideradas úteis para outros estudos, você será procurado para autorizar novamente o uso.

Este documento que você vai assinar contém duas páginas. Você deve vistar (rubricar) todas as páginas, exceto a última, onde você assinará com a mesma assinatura registrada no cartório (caso tenha). Este documento está sendo apresentado a você em duas vias, sendo que uma via é sua. Sugerimos que guarde a sua via de modo seguro.

Caso você precise informar algum fato ou decorrente da sua participação na pesquisa e se sentir desconfortável em procurar o pesquisador, você poderá procurar pessoalmente o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNIOESTE (CEP), de segunda a sexta-feira, no horário de 08h00 as 15h30min, na Reitoria da UNIOESTE, sala do Comitê de Ética, PRPPG, situado na rua Universitária, 1619 – Bairro Universitário, Cascavel – PR. Caso prefira, você pode entrar em contato via Internet pelo e-mail: cep.prppg@unioeste.br ou pelo telefone do CEP que é (45) 3220-3092.

Declaro estar ciente e suficientemente esclarecido sobre os fatos informados neste documento.

Nome do responsável:____

Assinatura:____

Nós abaixo assinados e identificados, declaramos para os devidos fins que fornecemos todas as informações sobre este projeto de pesquisa ao participante (e/ou responsável).

Luciane Thiele

____

Luciane Thiele - Pesquisador Responsável

____

Tiago Emanuel Klüber - Pesquisador Colaborador

Cascavel, __ de ____________ de 2021.

Apêndice B: Modelo do termo de Assentimento

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na CONEP em 04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: PERSPECTIVA DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM ENFOQUE À MAGNITUDE

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: Luciane Thiele (45) 98832-9887

Convidamos você aluno(a) a participar de nossa pesquisa, que tem como objetivo compreender aspectos ligados a aprendizagem do conteúdo de frações com enfoque na perspectiva de medição. Para isso você terá que participar das aulas de matemática, trabalhar em duplas e demonstrar comprometimento no desenvolvimento das atividades.

Para participar deste estudo, seus pais ou algum outro responsável, deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante as atividades a serem realizadas em sala de aula, a professora irá recolher depoimentos da dupla, estes que podem ser através de gravações de áudio ou vídeo e também relatos escritos, desta forma a professora irá recolher informações sobre a experiência vivida no decorrer das aulas de matemática ao trabalhar frações utilizando materiais manipuláveis, uma forma diferente e divertida de abordar o conteúdo em destaque.

Se alguém se sentir constrangido com algum questionamento feito pela professora, de alguma forma, deverá comunicar a professora/ pesquisadora imediatamente.

Se surgir dúvidas ou se você aluno(a) quiser relatar algum acontecimento no decorrer da realização do projeto, poderá estar entrando em contato com a professora/ pesquisadora a qualquer momento pelo telefone (45)98832-9887.

Declaro estar ciente do exposto e **desejo participar do projeto:** Perspectiva do Ensino e Aprendizagem de Frações: Um enfoque à magnitude.

Nome do participante:_______________________________________

Assinatura:____

Eu, **Luciane Thiele**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

Cascavel, ______ de _____________ de 2021

<table>
<tr><td colspan="4">Atividades práticas realizadas.</td></tr>
<tr><td>Ações para as aulas</td><td>Etapa do 4A</td><td>Tempo médio estimado para cada atividade (min).</td><td>Observações</td></tr>
<tr><td colspan="4">Legenda do texto:

Cor preta – Ações ou observações para o professor que ministrará a aula.

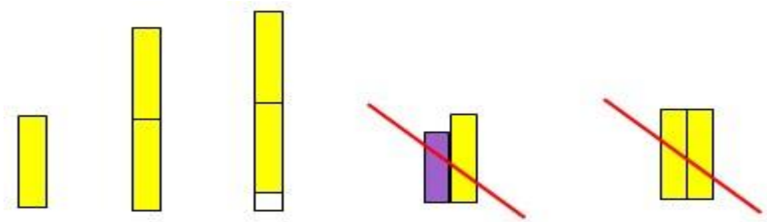
Cor azul – Questionamentos que o professor poderá usar ao ministrar a aula.

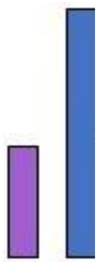
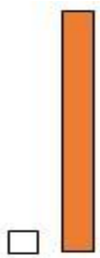
Cor cinza – Reações/respostas dos alunos.

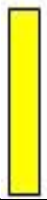
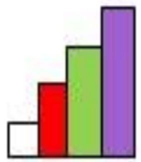
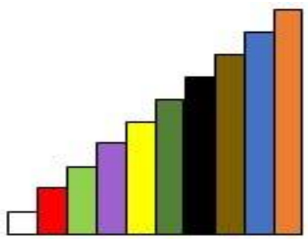
Cor terra – Etapa do 4A-Instructional Model[17].

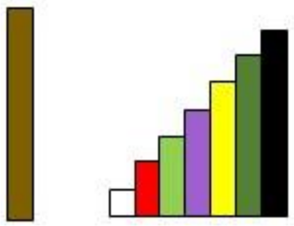
Cor roxa – Tempo estimado (em minutos) para cada atividade.</td></tr>
</table>

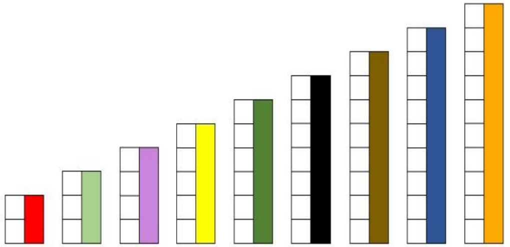
[17] Primeira fase: Ações Atuais (Actual Actions “**AA**”) os alunos devem realizar associações manipulando livremente as barras, memorizar suas percepções sobre o que estão fazendo. Segunda Fase: Ações Virtuais (Virtual Actions “**VA**”), tem como objetivo que os alunos respondam oralmente e fluentemente às questões trabalhadas na fase anterior, como uma forma de transição entre a fase concreta e uma mais abstrata. Terceira fase: Ações Escritas (Actions Written “**WA**”) eles continuarão trabalhando simbolicamente as duas Ações anteriores - a Atual e a Virtual - que já possuem familiaridade. Quarta fase: Ações Formalizadas (Actions Formalized “**AF**”) dá relevo às ideias matemáticas que os alunos construíram nas três fases anteriores a serem discutidas e escritas usando uma linguagem formal e simbólica.

Prática 1: Conhecendo as barras, terminologias e comparações			
Ação do professor: Análise dos conhecimentos prévios dos alunos: O que são frações? Pedir que o grupo escreva em um papel o que eles entendem sobre frações. Depois, o professor apresenta os resultados para turma.		15	
Ação do professor: Distribuir um kit de barras para cada dupla de alunos. Nos primeiros minutos da aula deixar que eles manipulem as barras livremente. Solicitar que eles formem desenhos com as barras sobre a carteira.	AA	20	
Ações do professor: Introduzir a nomenclatura de **trem**. Colocar exemplos no *quadro* para possível consulta dos alunos. **Professor:** —Um **trem** pode ser uma única barra ou uma barra ligada a outra pela ponta. Pode ser na horizontal e na vertical. **Ação do professor:** Mostrar possibilidades de barras que formam um trem; Mostrar o que **NÃO** é um trem.  **Ação do professor:** Pedir que os alunos levantem as barras mostrando exemplos de trem.	AA	5	
Professor: —Peguem uma barra roxa e outra azul. O que vocês observam? Elas são iguais ou diferentes? **Possível resposta dos alunos:** —Diferentes. **Professor:** —Por que são diferentes?	AA	2	

Possíveis respostas dos alunos: —Pois uma é maior que a outra; pois possuem diferentes comprimentos; pois possuem cores diferentes. 			
Professor: —Peguem agora uma barra branca e uma laranja. O que vocês observam? Elas são iguais ou diferentes? **Possível resposta dos alunos:** —Diferentes. **Professor:** —Por que são diferentes? **Possíveis respostas dos alunos:** —Pois uma é maior que a outra; possuem diferentes comprimentos; possuem cores diferentes. 	AA	2	
Professor: —Peguem agora uma barra amarela. Mostre alguma barra com o mesmo comprimento que a barra amarela. O que vocês observaram? **Possível resposta dos alunos:** —Que barras de mesma cor tem o mesmo comprimento.	AA	5	

Professor: Que cores de barras são menores do que a amarela? **Possível resposta dos alunos:** —r, c, v, b. **Professor:** —E quantas são? **Possível resposta dos alunos:** —4.  			
Professor: —Peguem agora uma barra de cada cor. Como vocês podem organizá-las por ordem de comprimento? **Ação do professor:** Pedir que os alunos mostrem a escadinha. **Professor:** —Conseguem descrever o que vocês fizeram? **Ação do professor:** Pedir que algum aluno descreva. 	AA	5	

Professor: —Peguem agora uma barra marrom. Quais são as barras menores do que barra marrom? **Possível resposta dos alunos:** —p, e, d, r, c, v, b. **Professor:** —E quantas são? **Possível resposta dos alunos:** —7. 	AA	5	
Professor: —Quantas barras brancas vocês precisam para ter o mesmo comprimento de uma barra vermelha? **Possível resposta dos alunos:** 2. **Professor:** —Quantas barras brancas vocês precisam para ter o mesmo comprimento de uma barra verde clara? **Possível resposta dos alunos:** —3. **Professor:** —E para a barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —4. **Observação para o professor:** Fazer as mesmas correspondências para as barras de outras cores.	AA	5	

			
Professor: —Agora um aluno da dupla/trio pegará uma barra qualquer esconderá e perguntará para seu colega da dupla/trio quantas barras brancas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra que o colega pegou. **Observações para o professor:** Trocar as posições de quem pergunta e quem responde.	AA	8	
Professor: —Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras vermelhas? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. Possível resposta dos alunos: —v, r, e, m, l. **Professor:** —Quais vagões NÃO podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com vagões vermelhos? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. Possível resposta dos alunos: —b, c, o, p, a. **Ação do professor:** Pedir para os alunos observarem e discutirem semelhanças entre os dois grupos formados. **Professor:** —O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de vagões? **Possível resposta dos alunos:** —Que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 2 (ou pares) e o outro por números não múltiplos de 2 (ou ímpares). **Observação para o professor:** Se os alunos não incluírem o vagão vermelho em suas respostas, o professor deverá questioná-los:	AA	5	

Professor: —Tem alguma cor sem grupo?

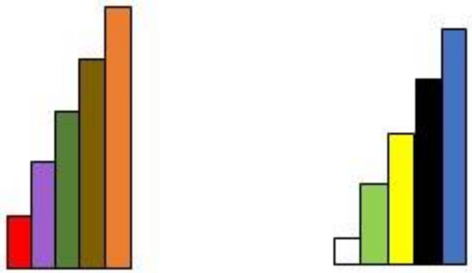
Possível resposta dos alunos: —Sim, o vermelho.

Professor: —Em qual grupo o vermelho entra?

Possível resposta dos alunos: —No primeiro grupo.

Professor: —Por quê?

Possível resposta dos alunos: —Porque 2 é múltiplo de 2.

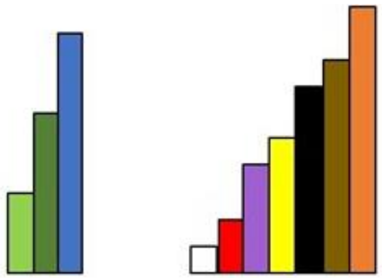


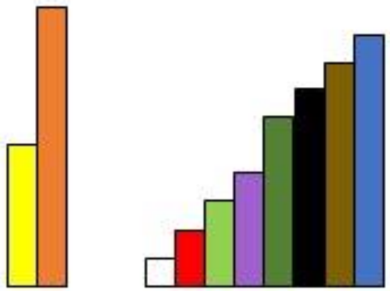
Professor: —Por que esse grupo de barras é par? O que caracteriza o número ser par?

Possível resposta dos alunos: —Ser divisível por 2.

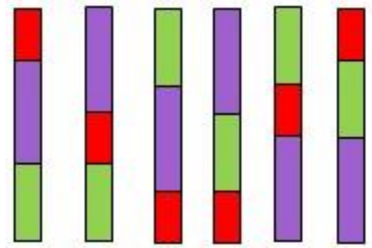
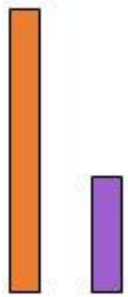
Observação para o professor: Se os alunos não reconhecerem que algumas barras têm comprimento par e outros têm comprimento ímpar, o professor deve voltar com a atividade de quantas barras brancas as barras de outras cores possuem para ter o mesmo comprimento, até que eles reconheçam cada grupo como sendo de barras com comprimento par e o outro com comprimento ímpar e questionar:

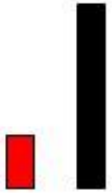
Professor: —Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras verdes claras? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. **Possível resposta dos alunos:** —c, e, a. **Professor:** —Quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras verdes claras? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. **Possível resposta dos alunos:** —b, v, r, o, p, m, l. **Ação do professor:** Pedir para os alunos observarem e discutirem semelhanças entre os dois grupos formados. **Professor:** —O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de barras? **Possível resposta dos alunos:** —Que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 3 e o outro por números não múltiplos de 3. **Observação para o professor:** Se os alunos não incluírem a barra verde clara em suas respostas, o professor deverá questioná-los: **Professor:** —Tem alguma cor sem grupo? **Possível resposta dos alunos:** —Sim, a verde clara. **Professor:** —Qual grupo o verde claro entra? **Possível resposta dos alunos:** —No primeiro grupo. **Professor:** —Por que? **Possível resposta dos alunos:** —Porque 3 é múltiplo de 3.	AA	7	

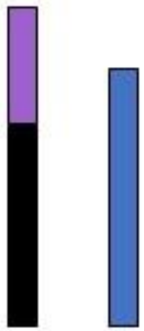
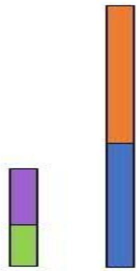
			
Professor: —Quais barras podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras amarelas? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. **Possível resposta dos alunos:** —o, l. **Professor:** —Quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um trem formado somente com barras amarelas? Discuta com seu colega e mostre quais são essas barras. **Possível resposta dos alunos:** —b, v, c, r, e, p, m, a. **Professor:** —O que você e seu colega perceberam nesses dois grupos de barras? **Possível resposta dos alunos:** —Que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 5 e o outro por números não múltiplos de 5. **Observação para o professor:** Se os alunos não incluírem a barra amarela em suas respostas, o professor deverá questioná-los: **Professor:** —Tem alguma cor sem grupo? **Possível resposta dos alunos:** —Sim, a amarela. **Professor:** —Qual grupo a amarela entra?	AA	7	

Possível resposta dos alunos: —No primeiro grupo. **Professor:** —Por quê? **Possível resposta dos alunos: “**Porque 5 é múltiplo de 5. 			

Prática 2: Múltiplos, comparações e sentenças matemáticas.			
Professor: —Para facilitar, daqui para frente, vamos escrever uma letra para representar cada uma das cores: branco = b; vermelho = v; verde claro = c; roxo = r; amarelo = o (ouro); verde escuro = e; preto = p; marrom = m; azul = a; laranja = l. **Ação do professor:** Professor representa a simbologia de cada cor no *quadro* e disponibiliza a folha para todos verem na sala.	AA	3	
Ação do professor: Professor questiona diferentes alunos sobre que letra representa cada barra, mostrando-lhes a barra. Depois, cada aluno questiona o colega de sua dupla sobre a letra que representa cada barra, sem mostrar-lhe a barra.	AA	5	
Professor: —Forme um trem com 1 barra roxa, 1 barra vermelha e 1 barra verde clara. Sem desfazer esse trem, crie outro trem com as mesmas cores do primeiro, mas com a ordem das barras alterada. O que você pode dizer sobre os comprimentos desses dois trens? **Possível resposta dos alunos:** —Que eles têm o mesmo comprimento. **Professor:** —Existem outros arranjos de trens com essas mesmas 3 barras? **Possível resposta dos alunos:** —Sim. c,r,v / c,v,r / v,r,c / v,r,c / r,v,c / r,c,v. **Observação para o professor:** Sempre que possível, o professor deve convidar os alunos à frente da turma para mostrar as opções encontradas. **Professor:** —Vamos ler esse trem como c + r + v. Agora, venha aqui na frente "o fulano", leia e escreva no quadro para os colegas os outros trens. **Ação do professor:** Professor chama diferentes alunos para escrever no *quadro*.	AA	10	

			
Professor: —O comprimento da barra laranja é igual ou diferente ao comprimento da barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —Diferente. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Ação do professor:** Professor introduz a simbologia de “diferente de” escrevendo no *quadro*: —l ≠ r. **Professor:** —O comprimento da barra laranja então é maior ou menor em relação ao comprimento da barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —Maior. **Ação do professor:** Professor introduz a simbologia de “maior que” escrevendo no *quadro*: —l > r. 	AA WA	5	

Professor: —O comprimento da barra vermelha é igual ou diferente ao comprimento da barra preta? **Possível resposta dos alunos:** —Diferente. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Ação do professor:** Professor escreve a sentença: $v \neq p$ no *quadro*. **Professor:** —O comprimento da barra vermelha então é maior ou menor em relação ao comprimento da barra preta? **Possível resposta dos alunos:** —Menor. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Ação do professor:** Professor introduz a simbologia de “menor que” escrevendo no *quadro*: —$v < p$. 	AA WA	5	
Professor: —O comprimento do trem preto mais roxo é igual ou diferente em relação ao comprimento da barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —Diferente. **Professor:** —Como podemos escrever isso no *quadro*? **Possível resposta dos alunos:** —Diferente. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva no *quadro* essa sentença. **Professor:** —O comprimento do trem preto mais roxo então é maior ou menor que o comprimento da barra azul?	AA WA	5	

Possível resposta dos alunos: —Maior. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Possível resposta dos alunos:** —p+r > a. 			
Professor: —O comprimento do trem verde claro mais roxo é maior, menor, igual ou diferente em relação ao comprimento do trem azul mais laranja? **Possíveis respostas dos alunos:** —c+r < a+l / c+r ≠ a+l. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva no *quadro* essas sentenças. 	AA WA	5	

<table>
<tr><td>Professor: —O comprimento do trem e+v é maior, menor ou igual em relação ao comprimento das barras c+o?

Possível resposta dos alunos: —e+v = c+o.

Ação do professor: Professor pede que algum aluno escreva no quadro essa sentença.

Professor: —E o comprimento dos trens c+o é maior, menor ou igual em relação ao comprimento das barras e+v?

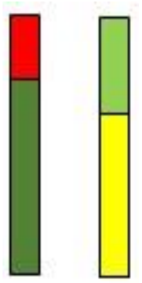
Possível resposta dos alunos: —c+o = e+v.

Ação do professor: Professor pede que algum aluno escreva no quadro essa sentença.

Professor: —Então, o que podemos concluir com isso?

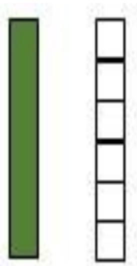
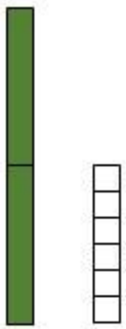
Possível resposta dos alunos: —que escrever e+v = c+o é o mesmo que escrever c+o = e+v.

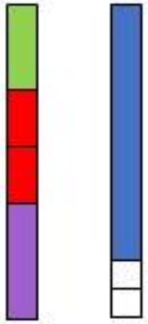
Observação para o professor: Se os alunos não compreenderem a igualdade, o professor deve mostrá-la nos trens, trocando os trens de lugar da esquerda para a direita com outros exemplos.

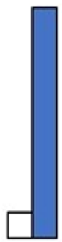
</td><td>AA

WA</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>Ações do professor: Pedir que os alunos em duplas criem sentenças livremente, usando >, <, =, ≠ tais como as que foram elaboradas no anteriormente. Registrar em uma folha e depois a professora irá recolher. Caso alguns alunos escrevam sentenças erradas, no decorrer da atividade a professora deve pedir que eles verificassem a veracidade da sentença.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

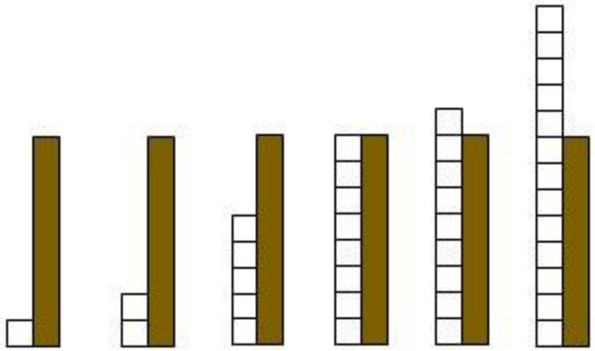
Prática 3: Comparações, representações de frações com o material e equivalência.			
Ação do professor: *Retomando a aula anterior.* Os alunos formarão a escadinha com 10 barras, verificando a ordem crescente ou decrescente das cores. Depois, um aluno da dupla deve responder dizendo “a barra laranja é maior do que a azul”, a “azul é maior do que a marrom” etc, ou a “barra branca é menor do que a barra vermelha”, a “vermelha é menor do que a verde clara” etc. Caso o aluno não consiga acertar a ordem ou se esquecer de alguma cor, o outro colega deve permitir que ele consulte as barras. Esse ciclo deve ser repetido até que o colega responda corretamente. Depois, as posições de quem pergunta e responde se invertem.	AA VA	10	
Professor: —O que podemos dizer do comprimento de uma barra verde escura e o comprimento de um trem formado por 6 barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Que são iguais. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Possível resposta dos alunos:** —e=6b ou e=b+b+b+b+b+b. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva essas sentenças no *quadro*. **Observação para o professor:** Se algum aluno não escrever e = 6b, a professora deverá perguntar se há outra forma de escrever a mesma expressão e/ou perguntar quantos —b‘s têm aqui para que vejam haver 6 —b‘s. **Professor:** —E o que vocês escreveram é igual a escrever 6b = e? **Possível resposta dos alunos:** —Sim.	WA	5	

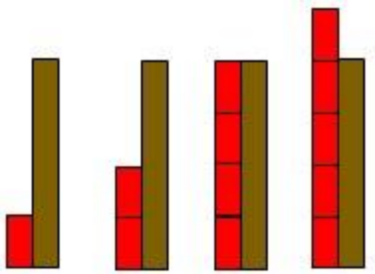
			
Professor: —O que podemos dizer do comprimento de um trem formado por 2 barras verde escuras e o comprimento de um trem formado por 6 barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —É maior / é diferente. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Possível resposta dos alunos:** —2e > 6b / 2e ≠ 6b. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva essas sentenças no *quadro*. 	AA WA	5	

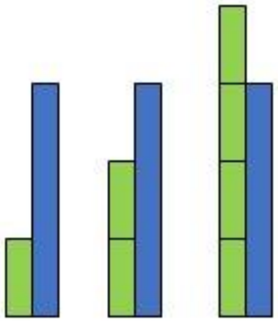
Professor: —O que podemos dizer do comprimento de um trem formado por uma barra roxa, duas barras vermelhas e uma barra verde clara e o comprimento de um trem formado por uma barra azul e duas barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Que são iguais. **Professor:** —Como podemos escrever isso? **Possível resposta dos alunos:** —1r+2v+1c =1a+2b. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva essa sentença no *quadro*. 	AA WA	3	
Ações do professor: Distribuir folhas em branco novamente e pedir que os alunos em duplas criem sentenças livremente, usando >, <, =, ≠ tais como as que foram elaboradas anteriormente. Caso alguns alunos escrevam sentenças erradas, o professor deve pedir que eles verificassem a veracidade da sentença com os vagões. Recolher as folhas dos alunos. A professora registra algumas das sentenças elaboradas por eles no quadro.	AA WA	15	
Professor: —Peguem uma barra preta. Quantas barras brancas vocês precisam para ter o mesmo comprimento da barra preta? **Possível resposta dos alunos:** —7.	AA	2	

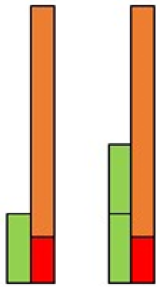
Professor: —O comprimento de uma barra branca é **um sétimo** em relação ao comprimento de uma barra preta. 			
Professor: —Quantas barras brancas você precisa para ter o mesmo comprimento de uma barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —9. **Professor:** —O comprimento de uma barra branca é **um nono** em relação ao comprimento de uma barra azul. 	AA	5	
Ação do professor: Fazer o mesmo questionamento para cada um dos vagões restantes: 1 décimo, 1 quarto, 1 sétimo, 1 quinto, 1 sexto, 1 terço, 1 meio.	AA	5	

Professor: —Quantas barras brancas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom? **Possível resposta dos alunos:** —8. **Professor:** —O comprimento de uma barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom? **Possível resposta dos alunos:** —Um oitavo. **Professor:** —E duas barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Dois oitavos. **Professor:** —E cinco barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Cinco oitavos. **Professor:** —E oito barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Oito oitavos ou um inteiro. **Professor:** —E nove barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Nove oitavos. **Professor:** —E treze barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** —Treze oitavos.	AA	5	

			
Professor: —Quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom? **Possível resposta dos alunos:** —Quatro. **Professor:** —Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom? **Possível resposta dos alunos:** —Um quarto. **Professor:** —E duas barras vermelhas? **Possível resposta dos alunos:** —Dois quartos. **Professor:** —E quatro barras vermelhas? **Possível resposta dos alunos:** —Quatro quartos ou um inteiro. **Professor:** —E cinco barras vermelhas? **Possível resposta dos alunos:** —Cinco quartos.	AA	5	

			
Professor: —Quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra laranja? **Possível resposta dos alunos:** —Cinco. **Professor:** —Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra laranja? **Possível resposta dos alunos:** —Um décimo. **Professor:** —E duas barras vermelhas? **Possível resposta dos alunos:** —Dois décimos. **Professor:** — Quantas vezes a peça vermelha cabe na peça laranja? **Possível resposta dos alunos:** —Cinco. **Professor:** —E uma barra vermelha? **Possível resposta dos alunos:** —Um quinto.			
Professor: —Peguem uma barra verde clara e posicione ao lado esquerdo de uma barra azul. A barra verde clara é qual medida em relação ao comprimento da barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —Um terço.	AA	5	

Professor: —E duas barras verdes claras? **Possível resposta dos alunos:** —Dois terços. **Professor:** —E quatro barras verdes claras? **Possível resposta dos alunos:** —Quatro terços. 			
Professor: —Faça um trem com uma barra vermelha e com uma barra laranja. Vamos chamar esse trem de VARANJA (vermelho com laranja). Quantas barras verdes claras são necessárias para ter o mesmo comprimento do trem varanja? **Possível resposta dos alunos:** —4. **Professor:** —Uma barra verde clara é qual medida em relação ao comprimento do trem varanja? **Possível resposta dos alunos:** —Um quarto. **Professor:** —E duas barras verdes claras? **Possível resposta dos alunos:** —Dois quartos.	AA	5	



Professor: —Faça o trem varanja. Quantas barras vermelhas vocês precisam para ter o mesmo comprimento de uma barra varanja?

Possível resposta dos alunos: —6.

Professor: —Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento de um trem varanja?

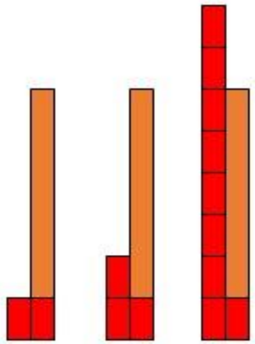
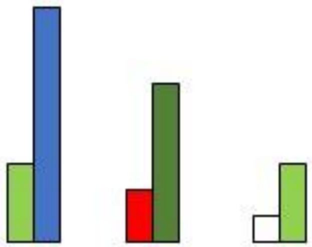
Possível resposta dos alunos: —Um sexto.

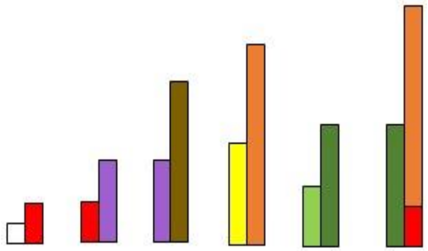
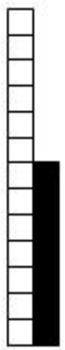
Professor: —E duas barras vermelhas?

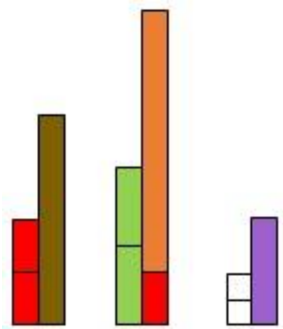
Possível resposta dos alunos: —Dois sextos.

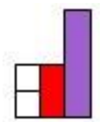
Professor: —E oito barras vermelhas?

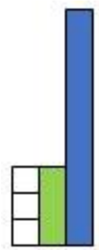
Possível resposta dos alunos: —Oito sextos.

			
Professor: —Como vocês podem representar $\frac{1}{3}$ com as barras? **Possíveis respostas dos alunos:** —1c-1a, 1v-1e, 1b-1c. **Ação do professor:** Professor pede que os alunos mostrem todos os diferentes modos de representação para o restante da turma. 	AA	10	
Professor: —Como vocês podem representar $\frac{1}{2}$ com as barras? **Possíveis respostas dos alunos:** —1b-1v, 1v-1r, 1r-1m, 1o-1l, 1c-1e, 1e1varanja.	AA	5	

Ação do professor: Professor pede que os alunos mostrem todos os diferentes modos de representação para o restante da turma. 			
—Como vocês podem representar $\frac{13}{7}$ em relação ao comprimento da barra preta? **Possíveis respostas dos alunos:** —13b-1p, 1l+1c – 1p. **Observação para o professor:** Professor lembrará a leitura de frações quando o denominar é maior do que 10, mas não é potência de 10. 	AA	3	

Professor: —Como vocês podem representar $\frac{2}{4}$ com as barras? **Possíveis respostas dos alunos:** —2v-1m, 2c-1varanja, 2b-1r. **Ação do professor:** Professor pede que os alunos mostrem todos os diferentes modos de representação para o restante da turma. 	AA	10	

Prática 4: Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores diferentes.			
Professor: —Quais barras representam $\frac{2}{4}$ do comprimento da barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —2b. **Ação do professor:** Professor escreve $\frac{2}{4}$ no *quadro*. **Professor:** —E qual barra representa $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —1v. **Ação do professor:** Professor escreve $\frac{1}{2}$ ao lado de $\frac{2}{4}$ no *quadro*. **Professor:** —Coloquem 1 barra vermelha ao lado esquerdo de 2 barras brancas ao lado esquerdo de 1 barra roxa. Olhando para essas barras, o que podemos dizer sobre o comprimento de duas barras brancas e o comprimento de uma barra vermelha em relação ao comprimento de uma barra roxa? **Possível resposta dos alunos:** —Que são iguais. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de igual entre as 2 frações no *quadro*. 	AA WA	5	
Professor: —Quais barras representam $\frac{3}{9}$ do comprimento da barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —3b. **Ação do professor:** Professor escreve $\frac{3}{9}$ no *quadro*.	AA WA	5	

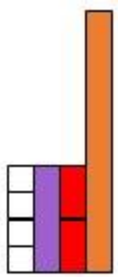
Professor: —E qual barra representa $\frac{1}{3}$ do comprimento da barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —1c. **Ação do professor:** Professor escreve $\frac{1}{3}$ ao lado de $\frac{3}{9}$ no *quadro*. **Professor:** —Coloquem 1 barra verde clara ao lado esquerdo de 3 barras brancas ao lado esquerdo de 1 barra azul. Olhando para essas barras, o que podemos dizer sobre o comprimento de 3 barras brancas e o comprimento de uma barra verde clara em relação ao comprimento de uma barra azul? **Possível resposta dos alunos:** —Que são iguais. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de igual entre as 2 frações no *quadro*. 			
Professor: —Quais barras representam $\frac{4}{10}$ do comprimento da barra laranja? **Possível resposta dos alunos:** —4b ou 1r. **Ação do professor:** Professor escreve $\frac{4}{10}$ no *quadro*. **Professor:** —E qual barra representa $\frac{2}{5}$ do comprimento da barra laranja? **Possível resposta dos alunos:** —2v.	AA WA	5	

<table>
<tr>
<td>Ação do professor: Professor escreve $\frac{2}{5}$ ao lado de $\frac{4}{10}$ no quadro.

Professor: —Coloquem 4 barras brancas ao lado esquerdo de 2 barras vermelhas ao lado esquerdo de 1 barra laranja. Olhando para essas barras, o que podemos dizer sobre o comprimento de 4 barras brancas e o comprimento de 2 barras vermelhas em relação ao comprimento de uma barra laranja?

Possível resposta dos alunos: —Que são iguais.

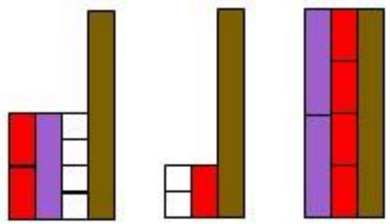
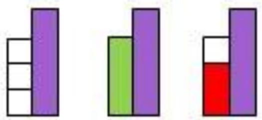
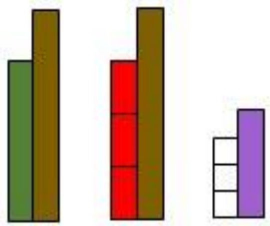
Ação do professor: Professor escreve o sinal de igual entre as 2 frações no quadro.

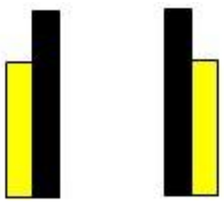
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Professor: —Agora, cada dupla deve mostrar nas barras outras igualdades entre duas representações diferentes em relação ao comprimento da barra marrom e escrever no papel essa igualdade.

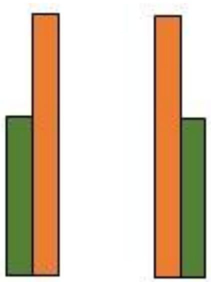
Possíveis respostas dos alunos: —2v ($\frac{2}{4}$ da marrom) e 1r ($\frac{1}{2}$ da marrom) e 4b ($\frac{4}{8}$ da marrom) / 2b ($\frac{2}{8}$da marrom) e 1v ($\frac{1}{4}$ da marrom) / 2r ($\frac{2}{2}$ da marrom) e 4v ($\frac{4}{4}$ da marrom) e 1m ($\frac{1}{1}$ da marrom).

Ação do professor: Professor pede que os alunos mostrem todos os diferentes modos de representação para o restante da turma. Professor comenta que estas frações são chamadas de equivalentes e são iguais. Representam a mesma porção da unidade.</td>
<td>AA

WA</td>
<td>10</td>
<td></td>
</tr>
</table>

			
Professor: —Como vocês podem representar $\frac{3}{4}$ em relação ao comprimento da barra roxa com as barras? **Possíveis respostas dos alunos**: —3b ou 1c ou 1v+1b. 	AA	5	
Professor: —Representem $\frac{3}{4}$ usando outras barras. **Possíveis respostas dos alunos**: —1e-1m / 3v-1m / 3b-1r / etc. **Ação do professor:** Professor pede que os alunos mostrem todos os diferentes modos de representação para o restante da turma. 	AA AF	10	

Professor: —A barra amarela é qual medida em relação ao comprimento da barra preta? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{5}{7}$. **Professor:** —A barra preta é qual medida em relação ao comprimento da barra amarela? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{7}{5}$. **Observação para os professores:** Se os alunos disserem que o segundo caso também representa $\frac{5}{7}$, o professor deverá perguntar se a medida da barra amarela em relação ao comprimento da barra preta é igual ou diferente da medida da barra preta em relação ao comprimento da barra amarela. 	AA	2	
Professor: —A barra verde escura é qual medida em relação ao comprimento da barra laranja? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{6}{10}$. **Professor:** —A barra laranja é qual medida em relação ao comprimento da barra verde escura? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{10}{6}$.	AA AF	2	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Professor: —A barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra branca?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{1}{1}$ ou 1 inteiro.

Professor: —A barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra vermelha?

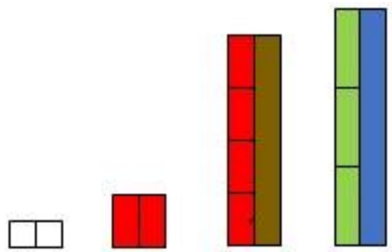
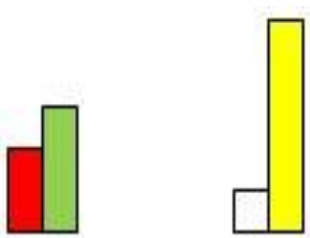
Possível resposta dos alunos: — $\frac{2}{2}$ ou 1 inteiro.

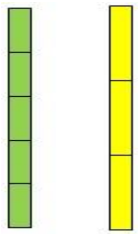
Professor: —Quatro barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{4}{4}$ ou 1 inteiro.

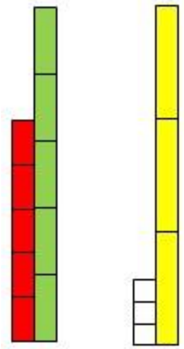
Professor: —Três barras verde claras é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?

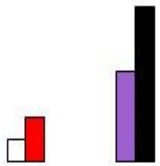
Possível resposta dos alunos: — $\frac{3}{3}$ ou 1 inteiro.</td><td>AA</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

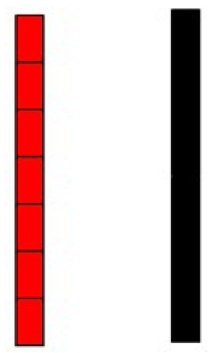
			
Professor: —Representem $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{5}$ com as barras. $\frac{2}{3}$ é menor ou maior que $\frac{1}{5}$? **Ações do professor:** Professor escreve essas duas frações no *quadro*. Se algum aluno conseguir responder corretamente, pedir para que ele apresente seu raciocínio para os demais colegas, caso contrário, seguir com os questionamentos: **Professor:** —O que dificulta dizer quem é menor ou maior? **Possível resposta dos alunos**: —Os números de baixo são diferentes **Professor:** —O que precisamos fazer então para conseguir comparar essas medidas? **Possível resposta dos alunos:** —Deixar os números de baixo iguais. 	AA	5	

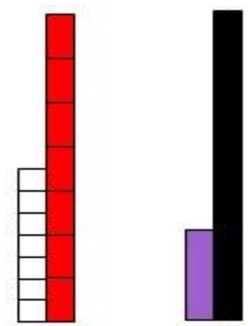
Ações do professor: Professor introduz o jogo da **corrida das cores**[18], e pede que os alunos coloquem lado a lado a barra verde clara e a amarela até que eles atinjam o mesmo comprimento e pergunta: **Professor:** —Cada um de vocês formaram um trem representando o mesmo número. Que número é esse? **Possível resposta dos alunos:** —15. **Professor:** —Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —5. **Professor:** —Quantas barras amarelas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —3. 	AA	5	
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo cinco barras verdes claras posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o trem vermelho representa do trem verde claro? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{10}{15}$.	AA WA	10	

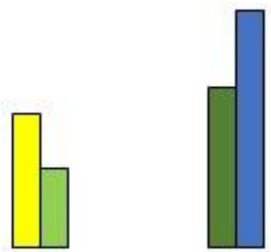
[18] Esse jogo consiste em posicionar duas barras de cores diferentes (representadas pelas unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos: por exemplo, pelo posicionamento das barras vermelha e azul, lado a lado, com uma de suas extremidades pareadas (alinhadas). O objetivo do jogo é o de igualar os comprimentos das fileiras das duas cores de barras acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais. Em seguida, verificamos a quantidade de barras inseridas de cada cor em cada fileira e, sabendo a relação de cada cor de barra com a quantidade de barras brancas, podemos determinar a unidade de medida das duas frações.

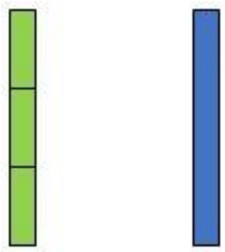
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo três barras amarelas posicionem essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o trem branco representa do trem amarelo? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{3}{15}$. **Ações do professor:** Professor escreve essas duas frações no *quadro* logo abaixo das duas anteriores. **Professor:** — $\frac{10}{15}$ é menor ou maior que $\frac{3}{15}$? **Possível resposta dos alunos:** —maior. **Ações do professor:** Professor escreve o sinal de maior entre as frações. 			
Professor: — $\frac{10}{15}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{2}{3}$. **Professor:** —E $\frac{3}{15}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{1}{5}$.	AA WA	15	

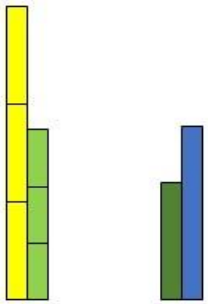
Professor: Então $\frac{2}{3}$ é menor ou maior que $\frac{1}{5}$? **Possível resposta dos alunos:** —Maior. **Ações do professor:** Professor escreve o sinal de maior entre as frações.			
Professor: —Representem $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{7}$ com as barras. $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{4}{7}$? **Possível resposta dos alunos:** —Não sabemos. **Professor:** —O que precisamos fazer para conseguir então comparar essas duas medidas? **Possível resposta dos alunos:** —Igualar os números de baixo. **Professor:** —E como fazemos isso? **Possível resposta dos alunos:** —Com a corrida das cores. 	AA	5	
Professor: —Com quais barras vocês farão a corrida das cores? **Possível resposta dos alunos:** —Vermelha e preta. **Ação do professor:** Deixar que os alunos realizem a corrida das cores com as barras vermelha e preta. **Professor:** —Qual foi o número obtido? **Possível resposta dos alunos:** —14. **Professor:** —Quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número?	AA	5	

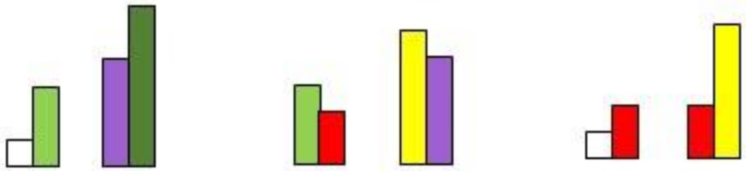
Possível resposta dos alunos: —7. **Professor:** —Quantas barras pretas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —2. 			
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo sete barras vermelhas posicionem essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o trem branco representa do trem vermelho? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{7}{14}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo duas barras pretas posicionem essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem roxo representa do trem preto? **Possível resposta dos alunos:** —$\frac{8}{14}$. **Ação do professor:** Professor escreve essas duas frações no *quadro* logo abaixo das duas anteriores.	AA WA	5	

Professor: —$\frac{7}{14}$ é menor ou maior que $\frac{8}{14}$? **Possível resposta dos alunos:** —menor. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de menor entre as frações. 			
Professor: —$\frac{7}{14}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{1}{2}$. **Professor:** —E $\frac{8}{14}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{4}{7}$. **Professor:** —Então $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{4}{7}$? **Possível resposta dos alunos:** —menor. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de menor entre as frações.	AA WA	5	

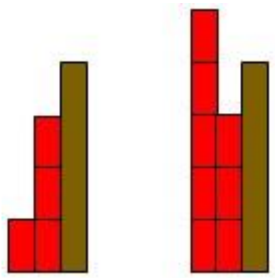
Professor: —Representem $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{9}$ com as barras. $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{6}{9}$? **Possível resposta dos alunos:** —Não sabemos. **Professor:** —O que precisamos fazer para conseguir então comparar essas duas medidas? **Possível resposta dos alunos:** —Igualar os números de baixo. **Professor:** —E como fazemos isso? **Possível resposta dos alunos:** —Com a corrida das cores. 	AA	5	
Professor: —Com quais barras vocês farão a corrida das cores? **Possível resposta dos alunos:** —Verde clara e azul. **Ação do professor:** Deixar que os alunos realizem a corrida das cores com as barras verde clara e azul. **Professor:** —Qual foi o número obtido? **Possível resposta dos alunos:** —9. **Professor:** —Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —3. **Professor:** —Quantas barras azuis foram necessárias para atingir esse número?	AA	5	

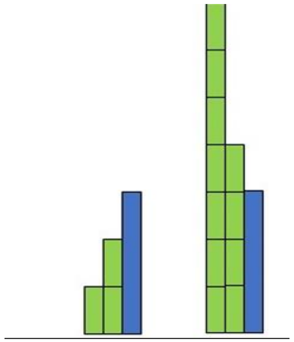
Possível resposta dos alunos: —11. 			
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo três barras verdes claras posicionem essa mesma quantidade de barras amarelas. Qual medida o trem amarelo representa do trem verde claro? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{15}{9}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo uma barra azul posicionem essa mesma quantidade de barras verdes escuras. Qual medida o trem verde escuro representa do trem azul? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{6}{9}$. **Ação do professor:** Professor escreve essas duas frações no *quadro* logo abaixo das duas anteriores. **Professor:** — $\frac{15}{9}$ é menor ou maior que $\frac{6}{9}$? **Possível resposta dos alunos:** —Maior. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de maior entre as frações.	AA	10	

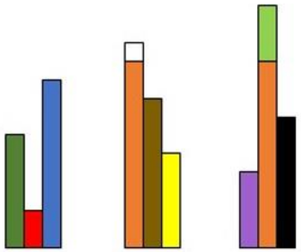
			
Professor: — $\frac{15}{9}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{5}{3}$. **Professor:** —E $\frac{6}{9}$ representa qual das medidas representadas anteriormente? **Possível resposta dos alunos:** —$\frac{6}{9}$. **Professor:** —Então $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{6}{9}$? **Possível resposta dos alunos:** —Maior. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de maior entre as frações.	AA WA	5	
Ação do professor: Distribuir papel para as duplas. **Professor:** — $\frac{1}{3}$ é >, < ou = a $\frac{4}{6}$? **Possível resposta dos alunos:** —<. **Professor:** — $\frac{3}{2}$ é <, > ou = a $\frac{5}{4}$?	AA WA	15	

Possível resposta dos alunos: —>. **Professor:** —$\frac{1}{2}$ é >, < ou = a $\frac{2}{5}$? **Possível resposta dos alunos:** —>. 			
Professor: —Escreva outras sentenças como essas comparando diferentes medidas com =, > ou <.	AA WA	15	

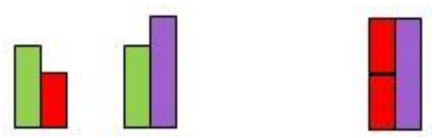
Prática 5: Frações equivalentes e comparações de frações com denominadores iguais.			
Professor: —Qual barra representa $\frac{1}{4}$ do comprimento da barra marrom? **Possível resposta dos alunos**: —vermelha. **Professor:** —Posicionem uma barra vermelha ao lado esquerdo de três barras vermelhas ao lado esquerdo de uma barra marrom. Uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento de uma barra marrom? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{1}{4}$. **Professor:** —E três barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento de uma barra marrom? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{3}{4}$. **Professor:** —Qual é menor, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{1}{4}$. **Professor:** —Como podemos escrever isso com símbolos? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva a sentença no *quadro.* **Professor:** —Agora quem é maior, $\frac{5}{4}$ ou $\frac{3}{4}$? **Possível resposta dos alunos**: —$\frac{5}{4}$. **Professor:** —Como podemos escrever isso com símbolos? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$.	AA WA	10	

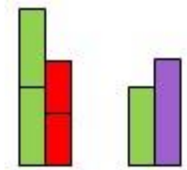
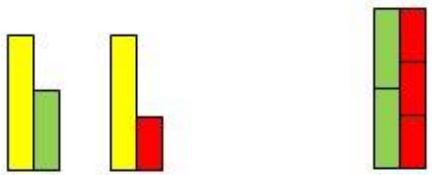
Ação do professor: Professor pede que algum aluno escreva a sentença no *quadro*. 			
Professor: —Qual barra representa $\frac{1}{3}$ do comprimento da barra azul? **Possível resposta dos alunos**: —Verde clara. **Professor:** —Posicionem uma barra verde clara ao lado esquerdo de duas barras verde claras ao lado esquerdo de uma barra azul. Uma barra verde clara é qual medida em relação ao comprimento de uma barra azul? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{1}{3}$. **Professor:** —E duas barras verde claras é qual medida em relação ao comprimento de uma barra azul? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{2}{3}$. **Professor:** —Qual é maior, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{2}{3}$. **Professor:** —Como podemos escrever isso com símbolos? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva a sentença no *quadro*.	AA WA	10	

Professor: —Agora quem é menor, $\frac{7}{3}$ ou $\frac{4}{3}$? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{4}{3}$. **Professor:** —Como podemos escrever isso com símbolos? **Possível resposta dos alunos**: — $\frac{4}{3} < \frac{7}{3}$. **Ação do professor:** Professor pede que algum aluno escreva a sentença no *quadro*. 			
Ação do professor: Distribuir papel para as duplas. **Professor:** —Escolham uma barra qualquer. Agora escolha outra barra e coloque ao seu lado esquerdo. Que medida a segunda barra representa da primeira? Agora, ao seu lado esquerdo, faça outro trem. Que medida esse trem representa do primeiro? Compare as duas medidas e escreva no papel.	AA WA	5	

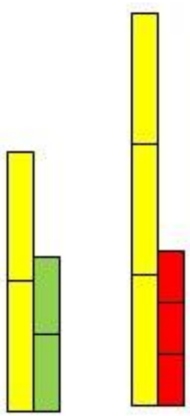
Professor: —Escrevam outras sentenças como essas comparando diferentes medidas com >, <, = ou ≠.	AA WA	5	
Professor: —O que essas comparações têm em comum entre elas? Ou seja, o que se repetiu em todas as comparações? **Possível resposta dos alunos**: —Que as partes de baixo eram iguais.	VA AF	10	
Professor: —O que vocês concluem, comparando frações com denominadores diferentes e iguais? **Possível resposta dos alunos**: —Que se as partes de baixo foram iguais, basta comparar as partes de cima para saber se são =, > ou <. Fazer esse registro no caderno.	VA AF	3	
Professor: —$\frac{6}{9}$ é >, < ou = a $\frac{2}{9}$? **Possível resposta dos alunos**: —>. **Professor:** — $\frac{11}{5}$ é <, > ou = a $\frac{8}{5}$? **Possível resposta dos alunos**: —>. **Professor:** —$\frac{4}{7}$ é >, < ou = a $\frac{13}{7}$? **Possível resposta dos alunos**: —<. 	VA AF	10	

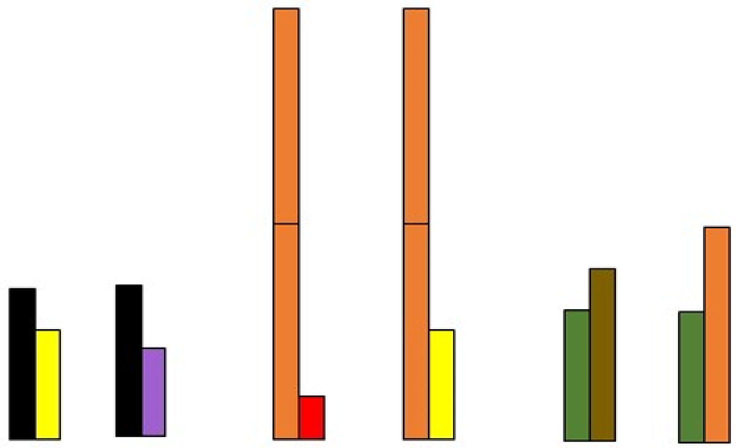
Prática 6: Frações equivalentes e comparações de frações com o mesmo numerador.			
Professor: —O que foi preciso fazer antes de iniciar as comparações? **Possível resposta dos alunos:** —Igualar as partes de baixo/unidades/ denominadores.	VA AF	5	
Professor: —Feito o passo anterior, o que essas comparações têm em comum entre elas? Ou seja, o que se repetiu em todas as comparações? **Possível resposta dos alunos:** —Que as partes de baixo eram iguais.	VA AF	5	
Professor: —O que vocês concluem, então? **Possível resposta dos alunos:** —Que quando as partes de baixo são diferentes, é preciso igualar essas partes e, assim, se as partes de baixo foram iguais, basta comparar as partes de cima para saber se são =, > ou <.	VA AF	5	
Professor: —Representem $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{4}$ com as barras. $\frac{3}{2}$ é menor ou maior que $\frac{3}{4}$? **Possível resposta dos alunos:** —Precisamos fazer a corrida das cores com as barras vermelha e roxa para deixar os números de baixo iguais. **Ação do professor:** Deixar que os alunos realizem a corrida das cores com as barras vermelha e roxa. **Professor:** —Qual foi o número obtido? **Possível resposta dos alunos:** —4. **Professor:** —Quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número?	AA	10	

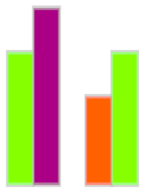
Possível resposta dos alunos: —2. **Professor:** —Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —1. 			
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo duas barras vermelhas posicionem essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o trem verde claro representa do trem vermelho? **Possível resposta dos alunos:** —$\frac{6}{4}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo uma barra roxa posicionem essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o trem verde claro representa do trem roxo? **Possível resposta dos alunos:** —$\frac{3}{4}$. **Ação do professor:** Professor escreve essas duas frações no *quadro* logo abaixo das duas anteriores. **Professor:** — $\frac{6}{4}$ é menor ou maior que $\frac{3}{4}$? **Possível resposta dos alunos:** —maior. **Ação do professor:** Professor escreverá o sinal de maior entre as frações. **Professor:** —Então $\frac{6}{4}$ é menor ou maior que $\frac{3}{4}$? **Possível resposta dos alunos:** —maior. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de maior entre as frações.	AA WA	10	

			
Professor: —Representem $\frac{5}{3}$ e $\frac{5}{2}$ com as barras. $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{5}{2}$? **Possível resposta dos alunos:** —Precisamos fazer a corrida das cores com as barras vermelha e verde clara para deixar os números de baixo iguais. **Ação do professor:** Deixar que os alunos realizem a corrida das cores com as barras verde clara e vermelha. **Professor:** —Qual foi o número obtido? **Possível resposta dos alunos:** —6. **Professor:** —Quantas barras verde claras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —2. **Professor:** —Quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** —3. 	AA	10	

Professor: Ao lado esquerdo do trem contendo duas barras verdes claras posicionem essa mesma quantidade de barras amarelas. Qual medida o trem amarelo representa do trem verde claro? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{10}{6}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo três barras vermelhas posicionem essa mesma quantidade de barras amarelas. Qual medida o trem amarelo representa do trem vermelho? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{15}{6}$. **Ação do professor:** Professora escreve essas duas frações no *quadro* logo abaixo das duas anteriores. **Professor:** —$\frac{10}{6}$ é menor ou maior que $\frac{15}{6}$? **Possível resposta dos alunos:** —Menor. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de menor entre as frações. **Professor:** —Então $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{5}{2}$? **Possível resposta dos alunos:** —Menor. **Ação do professor:** Professor escreve o sinal de menor entre as frações.	AA WA	10	

			
Ação do professor: Distribuir papel e caneta para as duplas. **Professor:** —Escrevam outras sentenças como essas comparando diferentes medidas com >, <, = ou ≠.	AA WA	15	
Professor: —O que essas comparações têm em comum entre elas que as diferencia das comparações anteriores? Ou seja, o que se repetiu em todas as comparações? **Possível resposta dos alunos:** —Que as partes de cima agora são iguais.	VA AF	5	

Professor: Nestes casos, vocês conseguem perceber alguma relação entre os números de baixo e o resultado das comparações? **Possível resposta dos alunos:** —Que a fração com o maior número em baixo se tornou a menor medida e a fração com o menor número em baixo se tornou a maior medida.	VA AF	5	
Professor: —$\frac{7}{5}$é >, < ou = a $\frac{7}{4}$? **Possível resposta dos alunos:** —<. **Professor:** —$\frac{20}{2}$é <, > ou = a $\frac{20}{5}$? **Possível resposta dos alunos:** —>. **Professor:** —$\frac{6}{8}$ é >, < ou = a $\frac{6}{10}$? **Possível resposta dos alunos:** —>. 	VA AF	20	

Prática 7: Operações com frações: Adição e Subtração com denominadores diferentes e iguais.			
Ação do professor: Neste momento iremos iniciar o trabalho com as operações aritméticas com frações: Adição e Subtração. **Professor:** Vamos efetuar a adição de $\frac{3}{4}$ com $\frac{2}{3}$ ($\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, vocês conseguem realizar essa operação? Como podemos realizar essa operação?  **Possível resposta dos alunos:** — Se algum aluno responder, pedir que explique seu raciocínio. **Professor:** Será que é possível juntar frações com unidades de medida diferentes? (No caso terços e quartos) **Possível resposta dos alunos:** — Não. **Professor:** Como podemos transformar essas frações para que tenham unidades de medidas iguais? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes. **Professor:** Como encontramos essas frações equivalentes? **Possível resposta dos alunos:** — Realizando a corrida das cores para descobrir a unidade de medida/mmc. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a terços e quartos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 12. Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?	AF WA	10	

Possível resposta dos alunos: — 4.

Professor: —Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número?

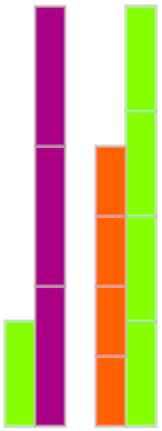
Possível resposta dos alunos: — 3.

Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo as quatro barras verdes claras posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o trem vermelho representa do trem verde claro?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{8}{12}$.

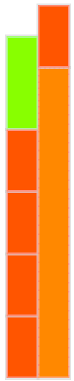
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo as três barras roxas posicionem essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o trem verde representa do trem roxo?

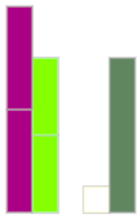
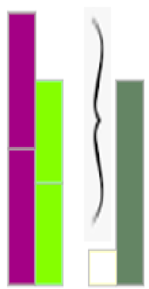
Possível resposta dos alunos: — $\frac{9}{12}$.



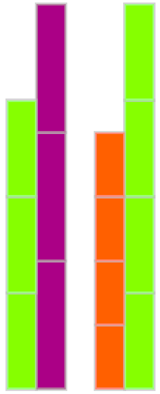
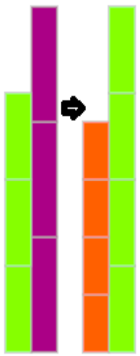
Professor: — Quanto é $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{17}{12}$

 **Ação do professor:** $\frac{3}{4}$ de 12= 9 (três quartos de 12 unidades são 9 barras brancas, e $\frac{2}{3}$ de 12= 8 (dois terços de 12 unidades são 8 barras brancas). Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 12 é a nossa unidade de medida e não pode ser adicionada. Essa unidade de medida pode ser representada por uma barra laranja mais uma barra vermelha, conforme mostra a imagem. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta somarmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a subtração de $\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$ Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das corres. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a terços e sextos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — É o próprio 6. **Professor:** Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 2.	AF WA	10	

Professor: Quantas verdes escuras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 1. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as duas barras verdes claras posicione essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem verde roxo representa do trem verde claro? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{8}{6}$ **Professor:** — Em relação a fração $\frac{1}{6}$ foi necessário adicionar barras?? **Possível resposta dos alunos:** —Não!  **Professor:** E agora quanto é $\frac{8}{6}$ - $\frac{1}{6}$? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{7}{6}$! 			

Ação do professor: $\frac{4}{3}$ de 6= 8 (quatro terços de 6 unidades são 8 barras brancas ou duas roxas, e $\frac{1}{6}$ de 6 = 1 (um sexto de 6 unidades são 6 barras brancas ou duas barras verdes claras). Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 6 é a nossa unidade de medida e não pode ser subtraída. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta subtrairmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a subtração de $\frac{3}{4}$ com $\frac{2}{3}$ ($\frac{3}{4}$ - $\frac{2}{3}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das corres. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a terços e quartos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 12. **Professor:** Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 4. **Professor:** Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 3. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as três barras roxas posicione essa mesma quantidade de barras verde claro. Qual medida o trem verde claro representa do trem roxo? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{9}{12}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as quatro barras verdes claras posicione essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o trem vermelho representa do trem verde claro?	AF WA	10	

Possível resposta dos alunos: — $\frac{8}{12}$.  **Professor:** — Quanto é $\frac{9}{12}$ - $\frac{8}{12}$? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{1}{12}$.  **Ação do professor:** Três barras verdes é maior que 4 barras vermelhas por uma unidade branca, então a diferença entre os dois trens é $\frac{1}{12}$. Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 12 é a nossa unidade			

de medida e não pode ser subtraída. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta subtrairmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a subtração de $\frac{3}{4}$ com $\frac{1}{6}$ ($\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{6}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das corres. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a terços e quartos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 12. **Professor:** Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 3. **Professor:** Quantas barras verdes escuras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 2. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as três barras roxas posicione essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o trem verde claro representa do trem roxo? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{9}{12}$. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as duas barras verdes escuras posicione essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o trem branco representa do trem verde escuro? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{2}{12}$.	AF WA	10	

 **Professor:** — Quanto é $\frac{9}{12}$ - $\frac{2}{12}$? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{7}{12}$. **Ação do professor:** Três barras verdes claras é maior que duas barras brancas por uma unidade preta, então a diferença entre os dois trens é $\frac{7}{12}$. Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 12 é a nossa unidade de medida e não pode ser subtraída. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta subtrairmos numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a subtração de $\frac{4}{3}$ com $\frac{4}{6}$ ($\frac{4}{3}$ - $\frac{4}{6}$). Retomando o que foi aprendido, vamos analisar, qual fração é a maior? Após, cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das cores. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a terços e sextos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 6.	AF WA	10	

Professor: Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?

Possível resposta dos alunos: — 2.

Professor: Quantas barras verdes escuras foram necessárias para atingir esse número?

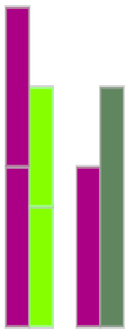
Possível resposta dos alunos: — 1! Não precisou adicionar barras.

Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo as 2 barras verdes claras posicione essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem roxo representa do trem verde claro?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{8}{6}$.

Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo uma barra verde escura posicione essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem roxo representa da barra verde escuro?

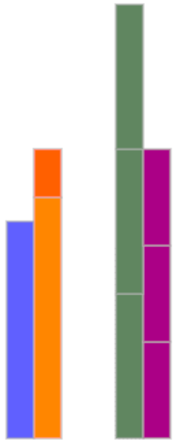
Possível resposta dos alunos: — $\frac{4}{6}$.

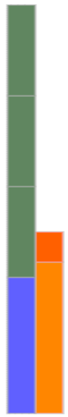


Professor: — Quanto é $\frac{8}{6} - \frac{4}{6}$?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{4}{6}$.

Ação do professor: Duas barras roxas é maior que uma barra roxa por uma unidade roxa, então a diferença entre os dois trens é $\frac{4}{6}$. Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 6 é a nossa unidade de medida e não pode ser subtraída. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta subtrairmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno. Questionar outros exemplos de subtrações, e se fosse $\frac{4}{3}$ menos $\frac{2}{6}$?			
Professor: Vamos efetuar a adição de $\frac{9}{12}$ com $\frac{6}{4}$ ($\frac{9}{12}+\frac{6}{4}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das cores. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a 12 e 4, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 12. **Professor:** Quantas barras foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — Uma laranja mais uma vermelha. **Professor:** Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número? **Possível resposta dos alunos:** — 2. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as uma barra laranja mais uma vermelha posicione essa mesma quantidade de barras azuis. Qual medida a barra representa do laranja? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{9}{12}$! Não foi necessário acrescentar barras ao lado esquerdo. **Professor:** —Ao lado esquerdo do trem contendo as três barras roxas posicionem essa mesma quantidade de barras verdes escuras. Qual medida o trem verde escuro representa do trem roxo?	AF WA	10	

Possível resposta dos alunos: — $\frac{18}{12}$.  **Professor:** — Quanto é $\frac{9}{12} + \frac{18}{12}$? **Possível resposta dos alunos:** — $\frac{27}{12}$.			

 **Ação do professor:** $\frac{9}{12}$ de 12= 9 (nove doze avos de 12 unidades são 9 barras brancas ou uma azul), e $\frac{6}{4}$ de 12= 18 (seis quartos de 12 unidades são 18 barras brancas ou três barras verdes escuras). Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 12 é a nossa unidade de medida e não pode ser adicionada. Essa unidade de medida pode ser representada por uma barra laranja mais uma barra vermelha, conforme mostra a imagem. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta somarmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a subtração de $\frac{15}{10}$ com $\frac{2}{5}$ ($\frac{15}{10}$ - $\frac{2}{5}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver? **Possível resposta dos alunos:** — Utilizando frações equivalentes/ encontrando o mmc/ fazendo a corrida das corres. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum a décimos e quintos, utilizando as barras brancas? **Possível resposta dos alunos:** — 10.	AF WA	10	

Professor: Quantas barras da cor laranja foram necessárias para atingir esse número?

Possível resposta dos alunos: — 1.

Professor: Quantas barras amarelas foram necessárias para atingir esse número?

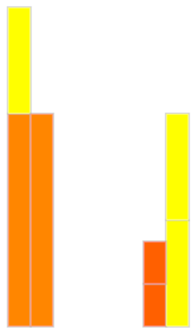
Possível resposta dos alunos: — 2.

Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo uma barra laranja posicione essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o trem branco representa do laranja?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{15}{10}$.

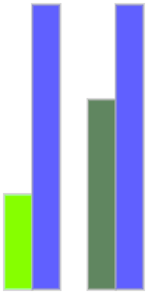
Professor: —Ao lado esquerdo do trem contendo as duas barras amarelas posicione essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o trem branco representa do trem amarelo?

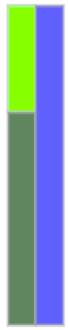
Possível resposta dos alunos: — $\frac{4}{10}$.



Professor: — Quanto é $\frac{15}{10}$ - $\frac{4}{10}$?

Possível resposta dos alunos: — $\frac{11}{10}$.

Ação do professor: Uma barra laranja mais uma barra amarela é maior que duas barras vermelhas por uma barra laranja mais uma branca, então a diferença entre os dois trens é $\frac{11}{10}$. Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 10 é a nossa unidade de medida e não pode ser subtraída. Depois que encontramos a unidade de medida, o mínimo múltiplo comum, basta subtrairmos os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Professor: Vamos efetuar a adição de $\frac{3}{9}$ com $\frac{6}{9}$ ($\frac{3}{9}+\frac{6}{9}$). Pedir que cada aluno utilizando as barras represente as frações lado a lado, como podemos resolver?  **Possível resposta dos alunos:** — Não precisamos calcular a unidade de medida comum, pois os denominadores já são iguais. **Professor:** Qual é a unidade de medida comum dessas frações? **Possível resposta dos alunos:** — É o nove, pois as unidades de medida já estão iguais. **Professor:** Como podemos proceder? **Possível resposta dos alunos:** — Basta somar os numeradores. **Professor:** — Quanto é $\frac{3}{9}+\frac{6}{9}$?	AF WA	10	

Possível resposta dos alunos: — $\frac{9}{9}$ ou um inteiro.  **Ação do professor:** Neste momento o professor deve intervir, lembrando que o 9 é a nossa unidade de medida e não pode ser adicionada. Como as frações de início já possuíam os denominadores iguais (unidade de medida iguais) a corrida das cores era desnecessária e bastava apenas operar com os numeradores. Pedir que os alunos façam esse registro no caderno.			
Observação: Outras operações podem ser realizadas envolvendo unidades de medidas iguais ou diferentes, como: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$ $4 - \frac{1}{7} =$ $\frac{3}{9} - \frac{1}{3} =$ $\frac{15}{20} - \frac{6}{20.} =$			