Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

KAREN VANESSA GOZER BANHEZA

MATEMATIZAÇÃO: UM OUTRO ESTUDO

CASCAVEL
2022

KAREN VANESSA GOZER BANHEZA

MATEMATIZAÇÃO: UM OUTRO ESTUDO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM, área de concentração Educação Matemática, linha de pesquisa: Ensino de Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Andréia Büttner Ciani

CASCAVEL
2022

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Vanessa Gozer Banheza, Karen
Matematização: um outro estudo / Karen Vanessa Gozer Banheza; orientadora Andréia Büttner Ciani. -- Cascavel, 2022.
65p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação emCiências e Educação Matemática, 2022.

1. Educação Matemática. 2. Matematização. 3. Hans Freudenthal. 4. Educação Matemática Realística. I. Ciani, Andréia Büttner, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

KAREN VANESSA GOZER BANHEZA

Matematização: um outro estudo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestra em Educação em Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:

Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Andréia Büttner Ciani

Orientadora - Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por mais essa conquista.

Quero agradecer a minha orientadora Dra. Andréia Büttner Ciani, pelo tempo a mim dedicado, e a cada conhecimento novo que me proporcionou.

Agradeço também aos meus pais que sempre me apoiaram e nunca mediram esforços para que eu alcançasse esse sonho, agradeço também ao meu irmão que sempre que necessário estava ali para me ajudar.

Agradeço aos meus avós, que também sempre me apoiaram, em especial ao meu avô que partiu nesse período, e que sei que sempre esteve, e estará ao lado de Nossa Senhora olhando por mim.

Agradeço o meu marido por todo apoio, e por cada palavra positiva em momentos que nem mesmo eu acreditava que seria capaz.

Agradeço a minhas amigas, que estão ao meu lado desde a graduação trocando conhecimentos e apoio.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro em meu último ano de mestrado.

E também agradeço a minha banca, Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco e Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira pelo tempo dedicado e também pelos pareceres e pelas contribuições, os quais possibilitaram que o trabalho ficasse melhor.

BANHEZA, K. V. G. **Matematização: um outro estudo.** 2022. 65 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2022.

RESUMO

Nas últimas décadas, a abordagem para o ensino da Matemática, surgida em meados da década de sessenta nos Países Baixos, denominada Educação Matemática Realística, vem sendo estudada e pesquisada no Brasil. No contexto de uma reforma escolar holandesa, Hans Freudenthal se configurou como o principal pesquisador responsável pelas ideias e pioneiro dessa abordagem na Educação Matemática. Dentre suas características fundamentais é a ideia de matematização e a ação de matematizar. No intuito de realizar um estudo sobre a matematização no âmbito da Educação Matemática Realística essa pesquisa foi idealizada. Assim, esta dissertação de mestrado se constitui em um relatório dessa pesquisa, tendo o caráter bibliográfico e cunho qualitativo, a qual se propõe a investigar o termo matematização do pondo de vista do autor Hans Freudenthal, por meio de seus artigos e livros. Visa-se, além do estudo da matematização, corroborar com a compreensão da origem do termo matematização no âmbito da Educação Matemática Realística. A pesquisa adota um procedimento metodológico não convencional, inspirado na metodologia de pesquisa construída em uma tese de doutorado, na qual foi realizado um estudo investigativo a respeito de uma teoria por meio de processos lógicos. A partir do estudo e da análise realizada, compreendemos que Hans Freudenthal não definiu um modo de proceder com a matematização, um passo a passo de como um aprendiz pode seguir para realizar a matematização. Percebemos que para ele a atividade de matematizar, de matematização, é uma atividade que ocorre como um processo natural, que deve partir da realidade do indivíduo, ou seja, compreendo que o que ele chama de matematização, é o aprender a matemática considerando a realidade própria do individuo, por meio de situações que levem o indivíduo a construir sua própria matemática, e não aprender uma matemática já pronta, algoritmizada.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matematização; Hans Freudenthal; Educação Matemática Realística; Metodologia de Pesquisa Qualitativa.

BANHEZA, K. V. G. 2022. **Mathematization: another study**. 65 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2022.

ABSTRACT

In the last decades, the approach to the teaching of Mathematics, which emerged in the 1960s in the Netherlands, called Realistic Mathematics Education, has been studied and studied in Brazil. In the context of a Dutch school reform, Hans Freudenthal was the main researcher responsible for the ideas and pioneer of this approach in Mathematics Education. Among its fundamental characteristics is an idea of mathematization and an action of mathematizing. In order to carry out a study on mathematization within the scope of Realistic Mathematics Education, this was idealized. Thus, this master's dissertation in a report of this research, having a bibliographic and qualitative character, which proposes to investigate the term mathematization from the point of view of the author Hans Freudenthal through his articles and books. In addition to the study of mathematization, the aim is to corroborate the understanding of the origin of the term mathematization in the context of Realistic Mathematics Education. The research adopts an unconventional methodological procedure, inspired by the research methodology built in a doctoral thesis, in which an investigative study was carried out regarding a theory through logical processes. From the study and realization, we understand that Hans Freudenthal did not define a way of proceeding with the analysis, a step of how an apprentice can follow to carry out a mathematization. We realize that for him the activity of mathematization, mathematization, is an activity that occurs as a natural process, it must start from the reality of the individual, that is, understand what he calls mathematization, it is learning mathematics considering the reality of the individual. individual, through situations that lead the individual to his own mathematics, and not learn a ready-made, algorithmized mathematics. In addition, through the methodology used, it was possible to highlight that mathematization is presented in two ways: “Mathematization is an activity of a subject in reality”; and “Mathematization is a process possible for humans.”

Keywords: Mathematics Education; Mathematization; Hans Freudenthal; Realistic Mathematics Education; Qualitative Research Methodology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GEPEMA	Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação
IOWO	Institute for Development of Mathematics Education
RME	Realistic Mathematics Education/ Educação Matemática Realística
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Desde a graduação em Licenciatura em Ciências Exatas, com Habilitação em Matemática, iniciei estudos e pesquisas em diversas áreas e metodologias de ensino de Matemática. Dentre elas, a que mais me chamou a atenção foi a Modelagem Matemática na Educação Matemática. Assim, surgiu o interesse em estudá-la de modo a aprofundar conhecimentos nesta área de pesquisa e, por conta do desejo para a pesquisa, ingressei no mestrado.

Já nas primeiras orientações do mestrado, despertou em mim, também, o interesse de conhecer a abordagem da Educação Matemática Realística para o ensino de Matemática, a qual tem constituído um campo de pesquisa da Educação Matemática, em que minha orientadora atua, e que me foi apresentado em nossos diálogos. Além disso, durante os diálogos de orientações, considerando a situação de pandemia de COVID-19, a opção de uma pesquisa de âmbito teórico foi reforçada para mim e para minha orientadora.

O termo matematização ou matematizar é comum a ambas as áreas de nosso maior interesse, a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a Educação Matemática Realística (RME). A confluência de interesses gerou nossa primeira indagação: na Modelagem Matemática e na Educação Matemática Realística: o que é matematização em cada perspectiva? Quais os significados? Quais suas aproximações e divergências?

Outro movimento para a definição do tema desta dissertação foi o de realizarmos uma primeira busca no portal de periódicos da Capes e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, com o intuito de efetuar uma incursão inicial no tema e mapear o quantitativo de trabalhos que apareceriam a partir das palavras-chave "Matematização" e "Modelagem". Dessa busca, obtivemos dezoito trabalhos, dentre dissertações, tese e artigos. No entanto, consideramos que poucos desses trabalhos estão associados à Educação Matemática Realística e à Modelagem Matemática, sendo desses apenas oito, os quais trazemos no Quadro 1.

Essa primeira incursão levou pouco menos de um mês, e o resultado dela são os trabalhos listados nos Quadros 1 e 2, sendo dissertações e teses e artigos, respectivamente. Nessas buscas foram pesquisados, simultaneamente, os termos modelagem e matematização, utilizando o operador booleano "*AND*" (modelagem

AND matematização), em ambas as plataformas de busca. O trabalho mais antigo encontrado possui data do ano de 2013.

Quadro 1: Teses e Dissertações

Título	Autores	Ano de publicação	Tipo
Matematização e modelagem matemática: possíveis aproximações	SILVA, H. C.	2013	Dissertação
A matematização crítica em projetos de modelagem	FREITAS, W. S.	2013	Tese
Modelagem matemática: percepção e concepção de licenciandos e professores	COZZA, F. E.	2013	Dissertação
Modelagem matemática como estratégia de ensino de tópicos de Estatística na formação básica técnica	SOARES, J. A. R.	2015	Dissertação
Contribuições da Modelagem Matemática e das Tecnologias para o Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias	SILVA, E. V.	2015	Dissertação
A compreensão em atividades de modelagem matemática: uma análise à luz dos registros de representação semiótica	COSTA, L. M.	2016	Dissertação
A recontextualização da modelagem matemática na prática pedagógica nos anos iniciais	TEODORO, F. P.	2018	Dissertação
A utilização da modelagem matemática no ensino de funções: uma abordagem dinâmica e variacional	RAMUNNO, R.	2019	Dissertação

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e Portal de Periódicos da Capes (2020).

Além das teses e dissertações também encontramos dez artigos em periódicos revisados pelos pares, apresentados no Quadro 2, a seguir, todos buscados e encontrados no portal de Periódicos da Capes.

Quadro 2: Artigos revisados pelos pares

Título	Autores	Ano de publicação	Tipo
A matematização em atividades de modelagem matemática	ALMEIDA, L. M. W; SILVA, H. C.	2015	Artigo
Envolvimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática: relação com o saber e possibilidades de ação	CAMPOS, I. S; ARAÚJO, J. L.	2015	Artigo
Levantando aspectos, formulando pressupostos e matematizando em modelagem matemática	VIDIGAL, C; BEAN, D.	2016	Artigo
Obstáculos e Dificuldades Apresentados por Professores de Matemática Recém-Formados ao Utilizarem Modelagem Matemática em suas Aulas na Educação Básica	CEOLIN, A. C; CALDEIRA, A. D.	2017	Artigo
O ensino de estatística por meio da pesquisa: uma experiência a luz da Modelagem	GONÇALVES, P. G. F; LIMA, R. A. S. V.	2017	Artigo

Matemática			
Modelagem Matemática como estratégia de ensino de tópicos de Estatística na formação básica técnica: uma aplicação na criação de frangos caipiras	SOARES, J. A. R; SOUZA, W. A; COSTA, E. A; SOUZA, J. P, L; SILVA, R. F.	2018	Artigo
Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem	FERREIRA, P. E. A; SILVA, K. S. P;	2019	Artigo
Professoras dos anos iniciais em uma experiência com Modelagem Matemática	GOMES, J. C. S. P; SILVA, K. A. P; DALTO, J. D.	2020	Artigo
Recursos Semióticos em Atividades de Modelagem Matemática	ALMEIDA, L. M. W; GOULART, T. C. K.	2020	Artigo
Comunicação Dialógica na Articulação dos Conhecimentos Matemático, Tecnológico e Reflexivo a Partir de uma Prática de Modelagem na Educação Básica	DALVI, S. C; REZENDE, O. L. T; LORENZONI, L. L.	2020	Artigo

Fonte: Portal de Periódicos da Capes (2020).

Uma vez compreendido que esses trabalhos não tematizam aquilo que buscávamos esclarecer, e/ou pesquisar, a saber o termo matematização ou matematizar como algo em comum a ambas as áreas de nosso maior interesse, a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a Educação Matemática Realística (RME).

Identificamos apenas um trabalho de pesquisa na confluência de interesses abarcando a Modelagem Matemática e a Educação Matemática Realística, o qual gerou nosso campo de inquérito geral: a matematização na intersecção dessas perspectivas, seus significados, suas aproximações e divergências.

Foi sugerido pela orientadora a dissertação intitulada *Matematização e modelagem matemática*: possíveis aproximações (SILVA, 2013), sendo este o único trabalho de pesquisa que contemplava a expectativa delineada pelo campo de inquérito mais geral. Essa dissertação, além de se configurar em um estudo teórico baseado, principalmente, em autores contemporâneos da Educação Matemática Realística, realizou um estudo prático utilizando os processos de matematização da Educação Matemática Realística e também o método de ensino da Modelagem Matemática. A partir da teoria estudada e da prática realizada, inferiu sobre as aproximações de ambos os campos pesquisados.

Por meio dessa primeira pesquisa realizada, julgamos que o resultado esperado da possível pesquisa que iríamos desenvolver poderia resultar em algo superficial, uma vez que seria o primeiro contato da pesquisadora com a Educação Matemática Realística. Assim, pensamos deixar para um segundo momento a primeira questão elaborada, envolvendo a Modelagem Matemática e, para este primeiro momento de pesquisa, o mestrado, resolvemos focar na matematização, somente na perspectiva da Educação Matemática Realística e restrita à perspectiva de seu primeiro autor.

Diante dessa decisão, a de nos dedicar à compreensão sobre a matematização do ponto de vista de Hans Freudenthal, passamos aos escritos deste autor, por meio de artigos e livros na língua portuguesa e inglesa.

A pergunta central do trabalho foi definida ao longo de vários processos de estudos, nos quais as primeiras ideias já foram relatadas, consideramos a importância desse processo para o trabalho. Por conta disso, dedicamos um subcapítulo para expor o delineamento de nossa questão norteadora, sendo ela: o que é matematização em textos de Hans Freudenthal? E o modo de proceder quanto à investigação teórica, em relação à seleção dos livros e artigos estudados, a sua sistematização e à análise deles, foi inspirado na metodologia apresentada por Rosália Aragão em sua tese de doutorado[1].

E por qual motivo optamos por resgatar essa metodologia de pesquisa, organizando-a e apresentando-a como procedimentos metodológicos para nossa pesquisa?

Ao elaborarmos nosso projeto de pesquisa levamos em consideração: a interrogação para definir a área de pesquisa; o objetivo da pesquisa e os procedimentos metodológicos que seriam utilizados para nos guiar na perseguição dessa interrogação e cumprir o objetivo, prezando pela validez do resultado da pesquisa.

Assim, quando definidos a questão que iríamos investigar e quais objetivos pretendíamos alcançar, após um primeiro estudo da tese de Rosália Aragão, entendemos seu modo de proceder e consideramos a possibilidade de utilizá-lo em nosso trabalho. Aragão (1976) realiza o estudo de aspectos teóricos, para alcançar uma compreensão da estrutura de uma teoria. De tal modo, consideramos a potencialidade de sua metodologia para tratar o termo matematização, bem como o verbo matematizar, do ponto de vista do seu aspecto teórico. Assim, inspiramo-nos

---

[1] Iniciada em 1974 e defendida em 1976, intitulada *Teria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel - Sistematização dos Aspectos Teóricos Fundamentais*, sob a orientação do professor Dr. Joel Martins.

em sua metodologia, mas não a utilizamos como está propriamente exposta. Anteriormente, pois foi realizado um estudo, uma re-leitura que culminou na sistematização e alinhamentos de seus elementos ao nosso objeto de pesquisa. Cabe destacar que os campos de estudos serem diferentes do investigado por Aragão (1976) e, por consequência, o objeto de estudo também; logo foram necessários alguns alinhamentos ao nosso objeto de pesquisa.

Após alguns meses de estudo da tese de Aragão (1976), foi possível compreender seu modo de proceder e alinhar ao nosso objeto de pesquisa.

Ainda no primeiro capítulo, trazemos um estudo da sobre as Perspectivas da Educação Matemática Realística, buscando situar nossa pesquisa.

O segundo capítulo dessa dissertação descreve os procedimentos metodológicos que adotamos, traz a revisitação, reorganização e sistematização da metodologia apresentada por Aragão (1976).

O terceiro capítulo é constituído por um escrutínio de artigos e livros selecionados de Hans Freudenthal, escrito com um olhar voltado totalmente sobre o modo como a matematização foi concebida, proposta por ele. Esse capítulo é composto ainda pela análise do material identificado nos documentos produzidos pelo autor do termo aqui investigado, trazendo alguns resultados e discussões a partir do estudo realizado e das informações selecionadas.

Por fim, o último capítulo compõe um fechamento do trabalho realizado, lançando algumas considerações e sugestões de pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2 - DELINEAMENTO DO ESTUDO

Neste capítulo, trazemos um estudo da Educação Matemática Realística, com o intuito de situar a matematização nessa perspectiva a partir da dissertação de Oliveira (2014), autor que investigou o conceito de matematização na Educação Matemática Realística.

2.1 A matematização na literatura brasileira

A partir do estudo de dissertações, teses e artigos, realizamos um estudo sobre o termo matematização, na perspectiva da Educação Matemática Realística, e sua utilização no Brasil. Grande parte dos trabalhos encontrados teve sua origem no interior do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, GEPEMA, situado na Universidade Estadual de Londrina. Cabe destacar que não tivemos a pretensão de esgotar o assunto e nem de se comprometer a varrer sistematicamente todos os trabalhos.

A abordagem da Educação Matemática Realística é contemporânea de uma reforma curricular holandesa, tendo como precursor o matemático Hans Freudenthal, seguido de outros autores como Adrian Treffers, Koeno Gravemeijer, Jan de Lange, Maria Van Den Heuvel-Panhuizen (MENDES; TREVISAN; BURIASCO, 2012). Hans Freudenthal foi um matemático alemão que, ao longo de sua jornada, passou a se preocupar com a Educação Matemática (FERREIRA; BURIASCO, 2016).

A partir, principalmente, das elaborações desse matemático muito interessado no ensino e na aprendizagem de Matemática, essa abordagem foi iniciada em um contexto no qual o país onde morava, a Holanda, importava materiais dos Estados Unidos, os quais se guiavam pela “Matemática Moderna”, da qual, Hans Freudenthal discordava. Dessa forma,

> [...] foi Freudenthal, por sua resistência ao movimento da Matemática Moderna e aversão aos manuais escolares que estavam sendo exportados para a Holanda, quem deu o impulso inicial para o movimento de reforma da Educação Matemática, que ficou conhecido como Educação Matemática Realística (RME, do inglês Realistic Mathematics Education). A razão pela qual a reforma foi chamada de "realística" diz respeito não apenas pela conexão com o mundo real, mas principalmente à ideia de oportunizar aos estudantes situações que eles possam imaginar (TREVISAN, 2013, p. 67).

Ele defendia que a Matemática deveria estar conectada com à realidade, deveria ser vista como uma atividade humana, relevante para a sociedade, com um valor humano, e não tendo apenas os objetos matemáticos impostos, como algo pronto a ser apenas reproduzido. Diante disso, essa abordagem foi surgindo pelo seu modo de pensar e por suas inquietações (LOPEZ; BURIASCO; FERREIRA; 2014).

Para Hans Freudenthal, focar somente no objeto matemático seria negligenciar o meio em que o processo ocorre; assim, para ele, a Matemática não deveria ser ensinada somente como o resultado de um processo, e sim como o processo em si, ou seja, matematizar um contexto para ensinar Matemática, ensinar a partir do real, e o "real", para ele, não vem de um entendimento ontológico, nem metafísico, nem físico, mas sim "real" em objetos mentais e atividades mentais. Quando indagado em como resistir às tentações de separação e isolamento da Matemática, no ensino de Matemática, para ele, a resposta é sempre que a Matemática deve começar e permanecer na realidade (FREUDENTHAL, 1991).

Atualmente, o grupo GEPEMA continua a dedicar suas pesquisas sobre a avaliação para a aprendizagem na Educação Matemática, e já há uma década dedica estudos e pesquisas à Educação Matemática. É importante ressaltar que o termo *Realistic* da expressão *Realistic Mathematics Education*, foi traduzido pelo grupo GEPEMA, para o português do Brasil como **Realístico**.

> O termo "*realistic*" tem origem no verbo neerlandês "zicha REALISE-ren" e foi traduzido, para o português, também pelo GEPEMA, para "realístico" ao invés de "realista". Porque parece estar mais relacionado ao significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tornar consciência de" (*realistic* no inglês) e, por sua vez, à possibilidade de "tornar real" na mente dos estudantes, o que sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolveram não precisam ser autenticamente "reais" mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (VAN DEN HEUVEL–PANHUIZEN, 2005 *apud* FERREIRA, 2013, p. 30).

Em algum momento pode ter surgido a questão: por que um grupo que estuda avaliação dedica pesquisa à Educação Matemática Realística? Isso, inicialmente, esteve vinculado a indícios de que "A Educação Matemática Realística, abordagem holandesa para o ensino de Matemática, tem aspectos comuns com a fundamentação teórica da Avaliação do PISA no que se refere à Matemática"

(OLIVEIRA, 2014, p. 4). O PISA é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes[2].

Sendo que, na época, o grupo estava se dedicando à análise da produção escrita em questões não rotineiras e as questões do Programa se mostravam como uma opção por contemplarem o fato de seus enunciados já estarem validados e serem considerados não-rotineiros. De fato, "Na busca de conhecer como estudantes lidam com questões não-rotineiras de Matemática, em 2006, o GEPEMA iniciou estudos a respeito da análise da produção escrita em itens do PISA, por serem validadas e caracterizadas como não-rotineiras" (FERREIRA, 2013, p. 26). Em um primeiro momento, estes foram os motivos Educação Matemática Realística passou a ser referencial teórico para o grupo, no entanto, atualmente, a escolha se deve ao alinhamento à ideia de avaliação e de ensino e aprendizagem de Matemática que o grupo adota, uma vez que a abordagem holandesa muito se alinha às ideias já defendidas e adotadas pelo grupo de estudos e pesquisa.

A abordagem da Educação Matemática Realística foi elaborada por meio de três heurísticas; a reinvenção guiada, a fenomenologia didática e os modelos emergentes (OLIVEIRA, 2014). A fenomenologia didática, para Hans Freudenthal, não é no sentido da Fenomenologia de Hegel, Heidegger e Husserl, embora, segundo ele, valha a pena o estudo desses autores como busca de uma definição (FREUDENTHAL, 1983). Freudenthal (1983, p. 28) considera que a " [...] fenomenologia de um conceito matemático, de uma estrutura matemática ou de uma ideia matemática significa, [...]"

> [...] descrever este *nooumenon* em sua relação com os *phainomena* dos quais ele é meio de organizar, indicando em quais fenômenos ele foi criado para organizar e para quais ele pode ser estendido, como age sobre esses fenômenos como meio de organização, e com que poder sobre esses fenômenos nos dota (tradução nossa)[3]. (1983, p. 28).

Em outros termos, a fenomenologia do autor está voltada a como conceitos, ferramentas ou procedimentos se organizam na Matemática, como ideias

---

[2] Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>.

[3] *Phenomenology of a mathematical concept, a mathematical structure, or a mathematical idea means, in my terminology, describing this noumenon in its relation to the phainomena of which it is the means of organising, indicating which phenomena it is created to organise, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organising, and with what power over these phenomena it endows us.*

matemáticas (GRAVEMEIJER, 2008), ela diz respeito a como os fenômenos são situados.

> O que uma fenomenologia didática pode fazer é preparar a abordagem inversa: a partir desses fenômenos que pedem para ser organizados e a partir desse ponto de partida ensinar o aprendiz a manipular esses meios de organização. A fenomenologia didática deve ser chamada para desenvolver planos para realizar tal abordagem. Na fenomenologia didática de comprimento, número e, assim por diante, os fenômenos organizados por comprimento, número e assim por diante são exibidos da forma mais ampla possível. Para ensinar grupos, em vez de partir do conceito de grupo e procurar material que concretize esse conceito, deve-se procurar primeiro fenômenos que possam obrigar o aluno a constituir o objeto mental que está sendo matematizado pelo conceito de grupo. Se em determinada idade tais fenômenos não estão disponíveis, desiste-se das tentativas – inúteis – de incutir o conceito de grupo (tradução nossa). (FREUDENTHAL, 1983, p. 32)[4].

Essa ideia de fenomenologia didática se estende ao que o autor estudado chama de abordagem antididática. Como descrito no exemplo na citação anterior, para ensinar determinados conceitos, o professor parte do produto matemático pronto, já sistematizado e isso, para ele, é antididático. Considera que a Matemática deve ser ensinada de forma que os alunos possam construí-la, organizá-la e realizar sua própria sistematização. Segundo Prestes (2021, p. 58), “[...] uma investigação fenomenológica se preocupa em encontrar situações-problemas específicas que possam ser generalizadas pelos alunos [...]”. Essas situações-problema podem ser o ponto de partida para uma reinvenção guiada, que é outro princípio heurístico que abordamos a seguir.

Para Hans Freudenthal, ao se ensinar Matemática, deve-se oportunizar aos alunos uma situação a qual eles possam reinventar a Matemática, não da mesma forma de como foi descoberta há séculos, mas de forma guiada pelo professor (CIANI, 2011). Assim,

---

[4] *What a didactical phenomenology can do is to prepare the converse approach: starting from those phenomena that beg to be organised and from that starting point teaching the learner to manipulate these means of organising. Didactical phenomenology is to be called in to develop plans to realise such an approach. In the didactical phenomenology of length, number, and so on, the phenomena organised by length, number, and so on, are displayed as broadly as possible. In order to teach groups, rather than starting from the group concept and looking around for material that concretises this concept, one shall look first for phenomena that might compel the learner to constitute the mental object that is being mathematised by the group concept. If at a given age such phenomena are not available, one gives up the – useless – attempts to in still the group concept.*

> O processo de aprendizagem deve incluir fases de invenção dirigida, ou seja, de invenção não no sentido objetivo, mas no subjetivo, visto na perspectiva do aluno. Acredita-se que o conhecimento e a habilidade adquiridos pela reinvenção são mais bem compreendidos e mais facilmente preservados do que se adquiridos de forma menos ativa (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1973, p. 118)[5].

A atividade matemática deve ser própria do estudante que, ao explorar situações problemas, deve ser mobilizada pela sua própria estratégia (TREVISAN, 2013). O professor, ao guiar o estudante, pode recorrer tanto a elementos da História da Matemática, como a interpretações formais e informais que os estudantes têm da Matemática (GRAVEMEIJER, 2008). O fazer matemática, para o autor, foco dessa pesquisa, está relacionado a uma atividade humana, ou seja, “[...] devem-se propor situações que oportunizem a emersão de ideias e conceitos matemáticos a partir da organização matemática de situações, favorecendo a oportunidade de o aluno ser construtor/ elaborador/ reinventor da matemática” (MENDES, 2014, p. 24). E essa reinvenção da Matemática, para Hans Freudenthal, deve ser realizado matematizando a Matemática, processo nomeado por ele de matematização, que é o objeto de pesquisa deste trabalho. Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (1993 *apud* CIANI, 2012, p. 38), “a matematização é a principal característica da EMR, que tem como foco o crescimento, o progresso dos estudantes no conhecimento e compreensão da Matemática”.

Quanto à terceira e última heurística da Educação Matemática Realística, trata-se dos modelos emergentes. Segundo Gravemeijer (2008), os modelos emergentes se constituem em uma atividade, chamada de modelação ou modelagem, na qual os estudantes exploram e resolvem problemas de contexto matemático. O estudante parte de conhecimentos matemáticos que já possui, que lhes são familiares, podendo estes serem pensamentos informais e, por meio da atividade de modelação, que pode envolver construções matemáticas, como o esboço de tabelas, diagramas ou gráficos, chega a algo mais elaborado e organizado. Assim, o aluno vai reinventando a Matemática, avançando em sua sistematização, podendo chegar então ao pensamento matemático mais formal e,

---

[5] *The learning process has to include phases of directed invention, that is, of invention not in the objective but in the subjective sense, seen from the perspective of the student. It is believed that knowledge and ability acquired by re-invention are better understood and more easily preserved than if acquired in a less active way.*

essa reinvenção deve ser guiada pelo professor (GRAVEMEIJER, 2008). Segundo Gravemeijer (1994 *apud* OLIVEIRA, 2014, p. 26):

> Esse princípio tem papel importante na relação existente entre o conhecimento informal e o formal e também numa possível evolução de um para o outro. É fundamental que os alunos desenvolvam seus próprios modelos enquanto resolvem problemas. No início, espera-se que desenvolvam modelos que lhes são familiares. Esses modelos passam por um processo de formalização e generalização, transição que Gravemeijer (1994) denominou **modelo de** para **modelo para.**

Segundo Ciani (2012, p. 31), Gravemeijer chamou o “modelo de” uma atividade referencial, “na qual modelos e estratégias se referem à situação descrita do contexto do problema” e o “modelo para” chamou de uma atividade mais geral “na qual o foco matemático das estratégias se sobrepõe à referência ao contexto, e de certa forma, deriva das relações matemáticas presentes e, com isso, os modelos servem para representar outras situações” (CIANI, 2012, p. 31).

A dissertação de Camarinho consistiu em investigar sobre como é apresentado e como se dá o processo de matematização para os pesquisadores da RME naquela época (OLIVEIRA, p. 16). E, por conta disso, nos dedicamos a um estudo mais demorado dessa dissertação, buscando compreender aspectos que julgamos importantes, e trazemos na sequência. A atividade de organização de um assunto matemático é uma componente muito importante que, de acordo com o estudo de Oliveira (2014), é denominado por Hans Freudenthal, **matematizar**. Uma vez que

> de acordo com Gravemeijer e Terwel (2000, p. 781), [...] Freudenthal utilizou a palavra “matematização” em um sentido amplo: era uma forma de organização que também incorporou questões matemáticas. Ao escolher a palavra “organização”, Freudenthal também indicou que, para ele, matematização não era apenas uma tradução para um sistema de símbolos pré-fabricados. Em vez disso, uma forma de simbolizar pode surgir no processo de organização do assunto. Foi a atividade de organização em si o centro da concepção de Freudenthal. (*apud* OLIVEIRA, 2014, p. 30).

Oliveira (2014) organizou um quadro composto por algumas definições de matematização, com ênfase na atividade de organização para seus respectivos autores estudados, que são expostos a seguir, no Quadro 3.

Quadro 3: Matematização com ênfase na atividade de organização

MATEMATIZAÇÃO	TREFFERS (1987 p. 77)	Matematização é uma atividade organizadora. Refere-se à essência da atividade matemática para o segmento que atravessa toda a educação matemática orientada para a aquisição de conhecimento factual, a aprendizagem de conceitos, a obtenção de competências e a utilização da linguagem e as outras habilidades de organização na resolução de problemas que são, ou não, colocados em um contexto matemático.
	DE LANGE (1987, p. 43)	Matematização é uma atividade de organização e estruturação, segundo a qual adquire-se conhecimentos e habilidades usadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas.

Fonte: Oliveira (2014, p. 31).

Além das definições de matematização apresentadas, Oliveira (2014) também construiu outro quadro contendo definições mais recentes, em relação às já apresentadas no Quadro 3. No entanto, pudemos perceber que a ênfase dessas definições não está mais na atividade de organização, mas sim nas características do processo de matematização, o que pode ser visto no Quadro 4.

Quadro 4: Matematização com ênfase nas características de processo

MATEMATIZAÇÃO	GRAVEMEIJER; DOORMAN (1999, p. 116)	[...] a principal atividade matemática é a "matematização", que significa organizar a partir de uma perspectiva matemática.
	NELISSEN (1999) TRECHO 1	Matematização é vista como uma atividade construtiva, interativa e reflexiva.
	TRECHO 2	O processo de matematização é caracterizado pela utilização de modelos. Alguns exemplos são os esquemas, tabelas, diagramas e visualizações. Procurar modelos - inicialmente os mais simples - e trabalhar com eles produz as primeiras abstrações. As crianças ainda aprendem a aplicar a redução e esquematização, levando a um maior nível de formalização.
	TRECHO 3	Outras duas características importantes do processo de matematização é que ela é provocada tanto pela própria ação construtiva da criança quanto pelas reflexões da criança sobre essa ação.
	GRAVEMEIJER; TERWEL (2000, p. 781)	Matematização, literalmente, significa “fazer mais matemática”.
	FOSNOT, *et. al.* (2006)	Esta matematização envolve a criação de relações quantificáveis e espaciais, a construção

Fonte: Oliveira (2014, p. 32-33).

Oliveira (2014) também traz elementos de matematização vertical e horizontal, apontando que, segundo Hans Freudenthal,

> [...] as duas formas de matematizar são de igual valor e importância, e a matematização deve envolver tanto assuntos relacionados à Matemática pura quanto à aplicada. Para ele, aos estudantes devia ser proporcionado um matematizar dentro dos mundos real e dos símbolos (*apud* OLIVEIRA, 2014, p. 34).

De acordo com Oliveira (2014), além do mesmo valor e importância, para Hans Freudenthal, não existe uma marcação a partir da qual um processo termina para o outro iniciar. Indica que essas distinções são mais evidenciadas para outros autores da Educação Matemática Realística, como pode marcado por Treffers (1987), Gravemeijer (2000) e Heuvel Panhuizen (1998).

Oliveira (2014) também apresenta o conceito de matematização conceitual impresso por Ian De Lange, o qual ocorre “Quando o sujeito elaborou algum conhecimento novo, e não simplesmente aprofundou seu conhecimento matemático já existente, a isso De Lange (1987, 1996) denominou matematização conceitual” (OLIVEIRA, 2014, p. 39).

O estudo realizado por Oliveira (2014) traz perspectivas de como seria uma dinâmica de sala de aula, para o ensino de Matemática, com base na Educação Matemática Realística; traz também um breve estudo do papel do professor e do papel do aluno no ensino-aprendizagem por meio da RME. Consideramos que foi uma forma de aproximar a teoria da prática.

2.2 O PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DA QUESTÃO NORTEADORA

No início dessa pesquisa, buscando por bibliografia que seria base para o trabalho, deparamo-nos com o trabalho de Oliveira (2014) que, em sua dissertação, investiga o sentido/significado da expressão matematização na perspectiva da Educação Matemática Realística. Em um contexto geral, os objetivos do trabalho de Rodrigo Camarinho de Oliveira se assemelham muito com os objetivos da proposta a qual estávamos imaginando, perdendo então o sentido de seguir com essa ideia, mesmo apresentando novos objetivos, pois estaríamos replicando um estudo já feito.

Uma possibilidade pensada foi dar continuidade à pesquisa de Oliveira (2014), buscando e analisando trabalhos na Educação Matemática Realística, que fossem posteriores ao ano de 2014, que fizessem um estudo da matematização. No entanto, essa possibilidade contradiz nosso interesse primeiro que é a origem do termo.

Visto que o autor se concentrou mais nas pesquisas contemporâneas, trazendo diversos autores que discutem sobre a matematização na Educação Matemática Realística, surgiu a ideia de nos debruçarmos em um estudo sistemático da matematização que fosse às origens do termo, pautado somente nos escritos de Hans Freudenthal, por meio de processos, que serão explicitados. E para nosso trabalho destacamos duas intenções: rastrear o termo em suas referências primárias; efetuar um movimento metodológico próprio para resgatar algo do conceito de matematização nos primeiros textos que a trazem.

Inicialmente, foi realizada uma busca nos artigos e livros de Hans Freudenthal, em língua inglesa, aos quais tivemos acesso, elencamos quais comporiam o presente estudo. Assim, a questão norteadora de pesquisa que perseguimos foi

O que é matematização para Hans Freudenthal?

Essa questão de pesquisa solicitou por esclarecimentos que, de certo modo, conduzam a uma possível desambiguação do termo matematização. Os termos que são ambíguos e utilizados como sinônimos entre si são aqueles que, na realidade, têm seu próprio significado e são utilizados de forma equívoca (GATTI, 2012). Julgamos a importância deste estudo, o qual nos propomos a realizar, para a Educação Matemática Realística, como um trabalho que volta às origens do termo matematização, em busca de explicitar os princípios dessa abordagem, pois, à medida que as pesquisas avançam, torna-se importante retomar conceitos que circulam na comunidade, buscando esclarecer os seus princípios e situá-los no interior da própria abordagem, sem extrapolações. Nesse sentido, não estamos comparando o termo fora da abordagem de Freudenthal, mas buscando esclarecê-lo para poder demarcar claramente a sua utilização, principalmente no Brasil.

Em termos lógicos, segundo Hegenberg (1925, p. 13):

> A equivocidade deve ser contornada se conduz a ambiguidade. Está é indesejável, por dois motivos principais. Em primeiro lugar, porque gera mal-entendidos na comunicação, como facilmente se compreende. Em segundo lugar, porque abre margem para "raciocínios" defeituosos [...].

Assim, ainda que saibamos que o sentido e a compreensão não se reduzam à lógica, num esforço de nos guiar pela forma metodológica de Aragão (1976), consideramos que seja uma ferramenta para pensar de modo rigoroso, sistemático e, portanto, organizado, a estruturação de algo a ser tomado como uma teoria. Teoria aqui tomada com o significado do dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, como um "conjunto de regras ou leis, mais ou menos sistematizadas, aplicadas a uma área específica" ou um "conhecimento especulativo, metódico e organizado de caráter hipotético e sintético".

Essa investida sobre afirmações registradas por Hans Freudenthal acerca da matematização é relevante, pois foi ele é considerado o precursor da Educação Matemática Realística e "matematizar" é algo a que a se objetiva com o estudante uma vez em acordo com essa perspectiva de ensino, que surgiu na Holanda, no final da década 1960 e início de 1970 (FERREIRA, 2013).

Diante da questão definida, explicitamos, na seção subsequente, os objetivos da pesquisa, estabelecidos em estreita articulação com o objeto investigado, as origens da matematização, de acordo com os textos de Hans Freudenthal e com a estratégia metodológica assumida, a qual foi estruturada, inspirada na metodologia de Aragão (1976).

2.3 OBJETIVOS

O Objetivo Geral se constitui em identificar o termo "matematização" em textos de Hans Freudenthal.

2.3.1 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos se definiram como:

- Mapear e identificar o termo Matematização nos textos de Hans

Freudenthal.

- Evidenciar e descrever as características particulares do termo.
- Identificar e traduzir os trechos encontrados a respeito da matematização.
- Expor uma descrição articulada da matematização.

Com a direção oferecida pelos objetivos, a ideia central da questão norteadora foi, por meio de um estudo bibliográfico, cotejar a matematização contida nos textos de Hans Freudenthal, por meio dos procedimentos metodológicos apresentados e utilizados por Aragão (1976).

Por meio desse estudo, acreditamos que, além de ampliar nossos conhecimentos sobre a Educação Matemática Realística, seja possível iniciarmos uma trajetória de investigação e esperamos ser possível corroborar com essa abordagem do ensino de Matemática para a Educação Matemática.

A presente pesquisa se constitui em uma pesquisa bibliográfica, de cunho qualitativo, na qual investigamos os textos de Hans Freudenthal, que se encontram em língua inglesa. O trabalho adotou um procedimento de pesquisa inspirado na metodologia de pesquisa construída e utilizada por Aragão (1976), em sua tese, o que é apresentado e adaptado para nossa pesquisa a seguir.

2.4 UM MÉTODO DE PESQUISA NÃO CONVENCIONAL

Para se obter os resultados esperados quando se realiza uma pesquisa científica, faz-se necessário compreender, epistemologicamente, as ferramentas metodológicas que podem ser utilizadas para alcançar os resultados almejados, as técnicas utilizadas para a coleta dos dados e as utilizadas para a análise. Em outras palavras, pelo conhecimento do objeto de estudo é que se delineiam os demais aspectos e são escolhidas metodologias ou técnicas e procedimentos. Além disso, para Minayo (2012), a pesquisa científica bem estruturada é baseada em um tripé:

> Fazer ciência é trabalhar simultaneamente com teoria, método e técnicas, numa perspectiva em que esse tripé se condicione mutuamente: o modo de fazer depende do que o objeto demanda, e a resposta ao objeto depende das perguntas, dos instrumentos e das estratégias utilizadas na coleta dos dados (MINAYO, 2012, p. 622).

Segundo Minayo (2012), a pesquisa científica percorre na busca de responder à pergunta inicial, tendo ela sido delimitada, os objetivos da pesquisa são estabelecidos a fim de nos encaminhar ao que pretendemos alcançar. Iniciamos o processo de explicitar os métodos e técnicas a serem utilizados. Uma pesquisa científica pode ser caracterizada como pesquisa qualitativa, ou quantitativa, ou até mesmo como qualitativa-quantitativa. De acordo com Minayo (2017), enquanto a pesquisa quantitativa está voltada para a magnitude, a qualitativa está voltada para a intensidade.

A pesquisa bibliográfica se faz a partir de materiais já elaborados como livros e artigos científicos, como discorrido por Gil (2002). Em busca de responder à questão norteadora, nesta pesquisa científica são realizadas análises de textos do autor Freudenthal, com o intuito de identificar a matematização presente nos textos, para a Educação Matemática Realística, conforme sua abordagem.

Gil (2002) faz um alerta para pesquisadores que escolhem realizar este tipo pesquisa bibliográfica, pois,

> Muitas vezes, as fontes secundárias apresentam dados coletados ou processados de forma equivocada. Assim, um trabalho fundamentado nessas fontes tenderá a reproduzir ou mesmo a ampliar esses erros. Para reduzir essa possibilidade, convém aos pesquisadores assegurarem-se das condições em que os dados foram obtidos, analisar em profundidade cada informação para descobrir possíveis incoerências ou contradições e utilizar fontes diversas, cotejando-as cuidadosamente (GIL, 2002, p. 44).

Corroborando com este apontamento, realizamos com cautela a busca e seleção dos textos essenciais para a pesquisa, com o auxílio de procedimentos para definir as literaturas utilizadas. Como se trata de uma pesquisa bibliográfica, primeiramente buscamos os textos de Hans Freudenthal aquelas que tratavam de Educação Matemática e, dentre estas, destacamos e selecionados para estudo e análise aquelas que fazem referência ao termo em questão: matematização, o qual possui variações de escrita nos textos de Hans Freudenthal em inglês, a saber: mathematisation, mathematising, mathematizing e mathematization. No Quadro 5, listamos os textos que tivemos acesso, com o seu respectivo ano de publicação.

Quadro 5: Textos acessados de Hans Freudenthal

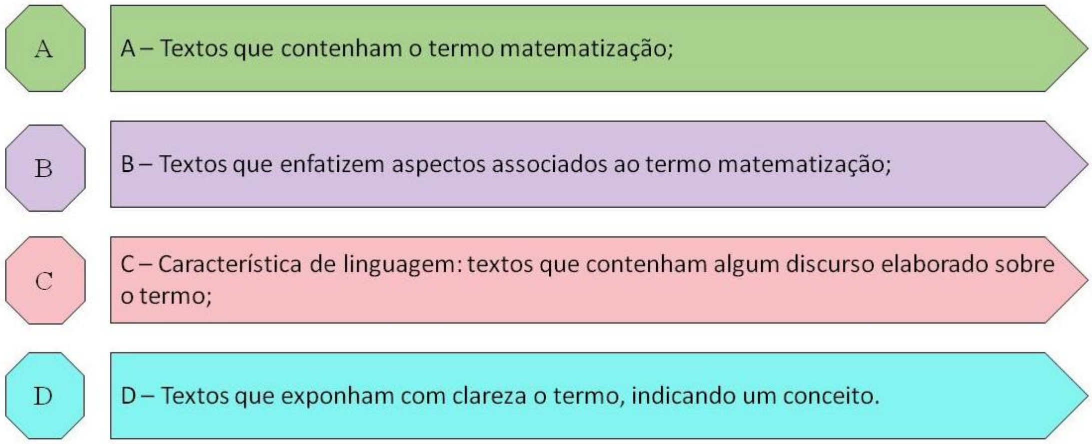
Título	Ano	Tipo
Lincos Design of a Language for Cosmic Intercourse – Parte I	1960	Livro
Why to teach mathematics so as to be useaful	1968	Artigo
A teachers Course Colloquium on sets and Logic	1969	Artigo
Braces and Venn Diagrams	1969	Artigo
Further Training Mathematics Teacher in The Netherlands	1969	Artigo
ICMI Report on Mathematical Contests in Secondary Education (Olympiads) I	1969	Artigo
Geometry between the devil and the deep Sea	1971	Artigo
The Empirical Law of Large Numbers' or The Stability of Frequencies	1972	Artigo
Mathematics as an Educational Task	1973	Livro
Soviet Research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School	1974	Artigo
The Crux of Course Design in Probability	1974	Artigo
Perspectivas da Matemática*	1975	Livro
Pupils Achievements Internationally Compared- The Iea	1975	Artigo
Five years IOWO	1976	Artigo
Rejoinder	1976	Artigo
Bastiaan's Experiments on Archimede's Principle	1977	Artigo
Creativity	1977	Artigo
Teacher Training	1977	Artigo
Didactical phenomenology of mathematical structures	1983	Livro
Revisiting mathematics education	1991	Livro

Fonte: A autora.

Os textos, listados no Quadro 5, são de Hans Freudenthal. Nem todos os textos listados foram analisados, mas todos passaram inicialmente por uma leitura flutuante de triagem e, assim, determinamos quais que fariam parte da análise final.

A fim de selecionar os textos que constituem o *corpus* estudado e analisado, os critérios utilizados foram adaptados daqueles constituídos por Aragão (1976), pois estão alinhados ao objetivo da presente pesquisa, sendo conforme descrito pela Figura 1, a seguir.

Figura 1: Critérios de seleção de textos



Fonte: A autora.

Após uma primeira leitura flutuante, com o intuito de conhecer os textos e saber do que se trata cada uma delas, os que foram identificadas com algumas discussões sobre matematização, mesmo que, em um primeiro olhar, apareça de forma implícita, foram as seguintes:

Quadro 6: Textos selecionados após leitura flutuante

Título	Ano	Tipo
Why to teach mathematics so as to be useful	1968	Artigo
A teachers Course Colloquium on sets and Logic	1969	Artigo
Mathematics as an Educational Task	1973	Livro
Perspectivas da Matemática	1967	Livro
Five years IOWO	1976	Artigo
Bastiaan's experiments on archimedes 'principle'	1977	Artigo
Didactical phenomenology of mathematical structures.	1983	Livro
Revisiting Mathematics Education	1991	Livro

Fonte: A Autora.

Os oito textos listados no Quadro 6 foram lidos e estudados de modo mais detalhado. Vale ressaltar que foram lidos na linguagem em que se encontram, sete deles em língua inglesa, e o livro *Perspectivas da Matemática* em nossa língua materna. Aqueles que contemplaram os critérios de Aragão (1976), mencionados acima, foram estudados, primeiramente, para elaboração do escrutínio e, em seguida, foram analisados. No Quadro 8, estão expostos os textos selecionados por meio dos critérios elencados, Figura 1, e os que não comtemplam tais critérios estão expostos no Quando 7 a seguir.

Quadro 7: Textos excluídos da análise

Título	Ano	Tipo
A teachers Course Colloquium on sets and Logic	1969	Artigo
Perspectivas da Matemática*	1967	Livro
Five years IOWO	1976	Artigo
Bastiaan's experiments on archimedes 'principle'	1977	Artigo

Fonte: A Autora.

O artigo *“*A teachers Course Colloquium on sets and Logic”, para o português “Um Colóquio de Curso de professores sobre Conjuntos e Lógica”, embora aborde aspectos que, em uma primeira leitura apresentem características do processo de matematização, após uma leitura mais detalhada de seu conteúdo, diante de nossa percepção, não há discussão do termo estudado ou um detalhamento, é um relato das experiências ocorridas nos cursos desse Colóquio. Dessa forma, não atende ao segundo critério para compor o escrutínio e os materiais de análise.

O artigo “Bastiaan’s experiments on Archimedes “principle’” para o português “Experimentos de Bastiaan no "princípio" de Arquimedes”, em uma primeira leitura, observamos a utilização do termo no decorrer do seu texto, mas após uma leitura detalhada do trabalho, percebemos que o autor fazia apenas uma menção ao termo, referindo-se ter utilizado o processo de matematização para o experimento realizado e descrito por ele nesse trabalho. Desta forma, o artigo não atende ao segundo critério para compor tanto o escrutínio, com os textos a serem analisados.

O artigo “Five years IOWO” para o português “Cinco anos IOWO”, foi escrito por Hans Freudenthal, mas também foi escrito por outros 21 autores. De qualquer modo, dedicamos leitura ao artigo, pois, em uma leitura inicial, o termo foi mencionado no decorrer do corpo do texto. No entanto, ao realizar uma leitura detalhada, constatamos que é somente isso, uma menção. Logo, o artigo não contempla o segundo critério de seleção dos textos para compor o escrutínio e para análise.

O livro “*Perspectivas da Matemática”* que é uma tradução do livro “*Mathematics Observed”*[6], é o único livro físico, dentre todos, sendo que os demais foram lidos em PDF. Este livro foi adquirido pela internet, e durante as primeiras

[6] Conforme tradução de Fernando C. Lima, sendo o original de 1967 (Disponível em: <file:///C:/Users/claud/Downloads/10707-Texto%20do%20artigo-56932-1-10-20150921.pdf>. Acesso em 18 de mar. 2022.

leituras dos outros textos, ele estava em transporte. Por conta disso, realizamos a leitura dele de forma mais minuciosa juntamente com os textos que haviam sido pré-selecionadas. No entanto, o livro não atende aos critérios adaptados de Aragão (1976), apresentados na Figura 1. Como o próprio título do livro menciona, são apresentadas perspectivas da Matemática em acontecimentos históricos, como a medição do Planeta Terra, o funcionamento da Máquina de Turing, dentre outros abordados por ele. Porém, não encontramos uma menção explícita do termo matematização.

Quadro 8: Textos selecionados

Título	Ano	Tipo
Why to teach mathematics so as to be useaful	1968	Artigo
Mathematics as na the Task	1973	Livro
Didactical phenomenology of mathematical structures	1983	Livro
Revisiting Mathematics Education	1991	Livro

Fonte: A Autora.

No livro “*Mathematics as an the Task”*, no português “*Matemática como uma tarefa”,* após uma leitura mais detalhada de seu conteúdo, verificamos que apresenta conceitos da matematização importantes para compor o escrutínio e o conjunto de textos a serem analisados, apesar dos conceitos serem abordadas de forma breve no decorrer do artigo, aqueles que ali estão são de grande valia e atendem aos critérios de inclusão. Apesar de esse livro contar com um capítulo no qual grande parte está destinada a abordagens sobre matematização, essas abordagens são breves, de pouquíssimas páginas, ou até mesmo parágrafos ao longo do capítulo, algumas menções e abordagens também foram feitas em outros capítulos, em parágrafos mais pontuais.

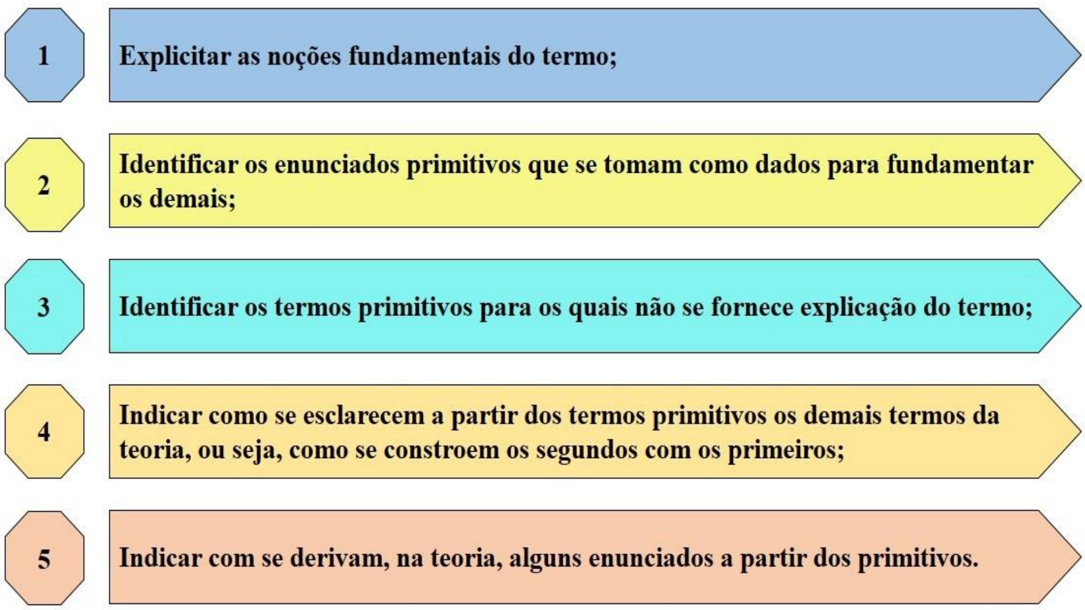
O artigo “Why to teach mathematics so as to be useaful”, no português “Porque ensinar matemática para ser útil”, embora seja curto, contempla todos os critérios necessários para compor o escrutínio, mostrando-se um rico material de análise, pois conta com parágrafos bastante assertivos, com discussões importantes sobre a matematização.

O livro “Didactical phenomenology of mathematical structures”, no português “Fenomenologia Didática das estruturas matemáticas”, é um livro no qual o autor discorre sobre sua interpretação de fenomenologia didática, entre outros conceitos importantes para a RME, sendo um deles a matematização, não foi abordado de modo tão conceitual, mas sempre em forma de exemplos, que consideramos muito importantes para a compreensão da matematização para Hans Freudenthal.

O livro "Revisiting Mathematics Education", no português "Revisitando a Educação Matemática", segundo o próprio autor do livro, não foi escrito para expor novos conceitos, mas sim para revisitar tudo o que ele já havia explanado em seus outros trabalhos, esse livro possui diversas abordagens sobre a matematização em seu decorrer, e para nós, estudiosos de sua obra[7], esse livro de revisitação trouxe contribuições válidas para o trabalho, já que não tivemos alcance a todos os seus trabalhos.

A metodologia de análise foi inspirada em Aragão (1976), e está esquematizada como ilustrado na Figura 2. Um diferencial em nosso modo de proceder, em relação ao modo como foi realizado pela autora, refere-se à utilização do *software* Atlas t.i., pois ele possui diversas funcionalidades que podem enriquecer e facilitar a pesquisa. Facilitar não no sentido de tornar fácil o procedimento, mas na forma de organizar anotações e resgatá-las posteriormente.

Figura 2: Método de Análise



Fonte: A autora

[7] Aqui considerada como a totalidade de sua produção.

De acordo com a Aragão (1976)[8] ao se utilizar esse método, é possível apresentar resultados críticos em cada etapa da investigação. Desta forma, buscaremos por meio desse método, identificar o termo matematização, com auxílio do *software* de pesquisa Atlas t.i. Em sua tese, a autora utilizou a lógica como instrumento de sua investigação, a fim de investigar os fundamentos e, posteriormente, analisar o conteúdo de uma teoria, a partir de sua enunciação, de suas declarações. Os enunciados a serem analisados se constituem nas declarações, afirmações que contém o termo matematização.

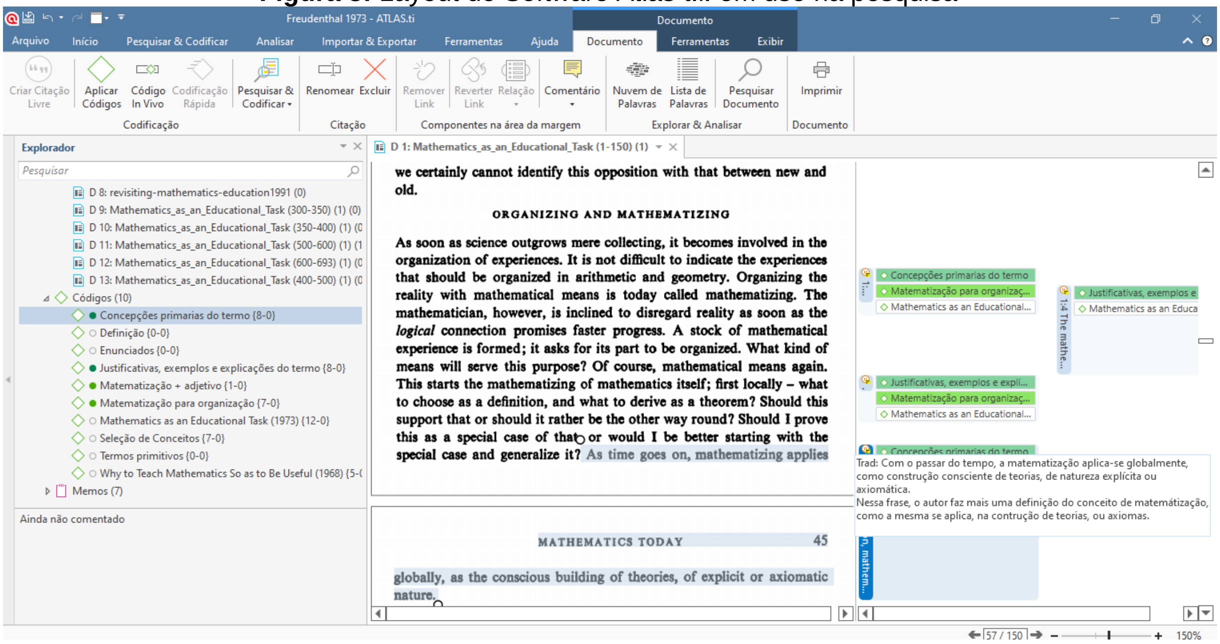
Nos próximos parágrafos, explicamos como ocorre cada processo mencionado acima, acrescentando com um modo de proceder, utilizando o *software*. Referimo-nos a cada processo mencionado como etapa. Aqui será apresentado uma reinterpretação dessa metodologia, a partir do estudo realizado dela, no entanto nem todas as etapas foram utilizadas nessa pesquisa, porém compreendemos ser importante deixá-la por completo, caso futuros pesquisadores queiram utilizar.

De tal modo, na etapa 1, o objetivo foi explicitar as noções fundamentais da teoria, após a seleção dos textos, utilizando os critérios inspirados na metodologia de Aragão (1976). Os textos foram inseridos no Atlas t.i. e lidos. Durante a leitura, o que compreendíamos ser importante era destacado em forma de citações, e a cada citação, era atribuído um código, que pode ser visto na Figura 3 (categorizando a citação destacada, e essas categorias foram feitas de modo geral, identificando apenas se o trecho era um exemplo, uma definição, ou uma justificativa), também era atribuído um comentário a cada citação, com a tradução do trecho destacado e reflexões, quando havia. Por meio desta etapa, fizemos o escrutínio dos aspectos da matematização encontradas nos textos de Freudenthal, por nós estudados. Essa etapa é muito importante, pois é a partir dela que as demais ocorreram.

---

[8] No caso específico de Aragão (1976), a autora investigou o termo Aprendizagem Significativa e buscou explicitar o que de fundamental estava associado a esse termo e chegou a duas categorias.

Figura 3: Layout do Software Atlas t.i. em uso na pesquisa



Fonte: A autora.

Na segunda etapa, diante da análise dos textos selecionados anteriormente, foi possível explicitar afirmações primarias, pelo levantamento das citações selecionadas nos textos. Isso foi feito por meio da função “Códigos” do Atlas t.i. Apesar de anteriormente já terem sido atribuídos códigos às citações, à medida que a leitura foi realizada, a explicitação se deu pelo movimento de voltar a elas e criar um novo código, categorizando quais citações são afirmações primarias, e não mais de forma geral. As citações selecionadas são frases que possuem afirmações primarias da abordagem que, de alguma forma, levaram a explicar o que é a matematização. Além das citações selecionadas, foi necessário selecionar as frases explícitas e implícitas que também contribuem para o entendimento do conceito de matematização dentro da abordagem, mas que não são apontados pelo autor.

Para o conjunto das citações, frases explícitas e implícitas, destacadas durante a leitura dos textos selecionadas, atentamo-nos às frases dos textos que podem ser consideradas frases com afirmações primárias. Segundo Hegenberg (1975, p. 104), as sentenças primitivas “não são demonstradas, mas aceitas como verdade” para, a partir delas, e de forma gradativa, obterem-se novas sentenças, tornando-se teoremas da teoria. O primeiro tratamento que as sentenças primitivas sofreram foi quanto a sua escrita, redigindo-as de maneira formal, no contexto da lógica formal, de modo que as sentenças primitivas possam ser consideradas axiomas, pois

> A propriedade que se procura, nos sistemas axiomáticos, é o rigor. Rigoroso é o sistema em que nada se afirma além dos teoremas, isto é, não há verdades a não ser as demonstradas — as que são deduzidas dos axiomas. O que se compreendeu, nos tempos atuais, foi que um sistema não é rigoroso (mesmo que tenha axiomas claramente formulados) se não está definida, de maneira bem clara, a noção de *dedução* (HEGENBERG, 1975, p. 104).

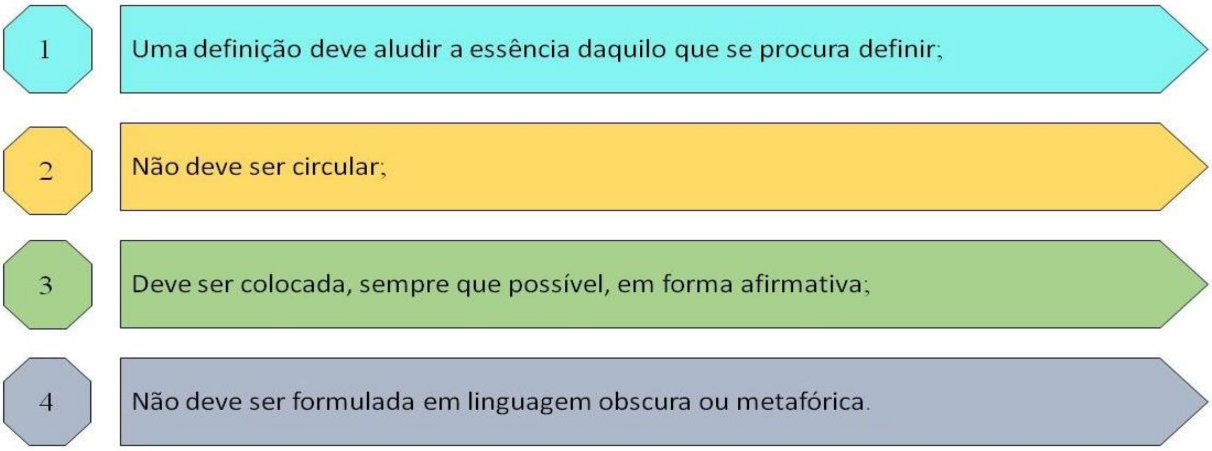
Segundo Hegenberg (1975), a partir das sentenças primitivas e dos termos primitivos que foram definidos no trabalho, podemos introduzir os termos a serem definidos, a fim de obter novas sentenças e, portanto, obter teoremas da abordagem, como mencionado anteriormente, criando, assim, um sistema dedutivo.

Se necessário, o procedimento de reformulação da frase se repete outras vezes, nas frases que forem necessárias, para cada uma identificada, podemos ter uma ou duas paráfrases. Além de parafrasear cada frase, é necessário também justificar as mudanças ali realizadas, da linguagem informal, para a linguagem mais formal e sistemática. Formando, assim, um novo conjunto, o conjunto de paráfrases, podendo, cada uma delas, sofrer mais um processo de reformulação, se possível, a partir da identificação de elementos comuns entre elas, com o intuito de formar uma nova paráfrase a partir das paráfrases que possuem os termos comuns.

Na etapa 3, além das citações, também se faz necessária uma listagem dos conceitos e termos considerados importantes utilizados pelo autor. Assumimos como conceitos as palavras que foram consideradas, por nós, mais importantes nos devida sua amplitude de significação no decorrer dos textos estudados, sendo que seus significados foram atribuídos a partir dos próprios textos do autor. Assumimos, como termos, palavras utilizadas pelo autor de forma recorrente, que são importantes para a compreensão da análise realizada, mas que julgamos não possuírem uma amplitude em seu significado, diante de nossa análise. Para o conjunto dos termos, também foi necessário que durante as leituras dos textos selecionados nos atentássemos aos termos importantes utilizados pelo autor, e à medida que esses surgiam, eram destacados pela ferramenta de “citação” e categorizados com a ferramenta “códigos”, atribuindo-lhes o código “temos primitivos”. Sendo eles termos primitivos ou não, segundo Hegenberg (1975, p. 104), os termos primitivos “não são definidos, mas apenas intuitivamente compreendidos”, os quais são listados e a eles atribuídos significados; quando são primitivos, atribuímos seu significado a partir da compreensão do termo no artigo ou livro do autor. Para termos não primitivos, atribuímos seu significado a partir de dicionários. Além dessa atribuição, à ou também verificamos possíveis relações funcionais entre eles e, sendo essas identificadas, lhes atribuímos notações lógicas formais, sendo tais atribuições suportadas pelas proposições identificadas nos textos investigados de Hans Freudenthal.

Para a análise dos termos definidos, a autora Aragão (1976) aponta alguns critérios do ponto de vista lógico, trazidos na Figura 4, a seguir.

Figura 4: Critérios lógicos para análise dos termos definidos



Fonte: Aragão (1976, p. 77).

Na quarta etapa, as paráfrases reformuladas ou não, sofreram um processo de redução. Esse processo consiste em, a partir dos primeiros termos, formar os segundos termos, de forma a reduzi-los em possíveis axiomas da teoria. Além das paráfrases, a partir das definições de termos anteriores e termos primitivos, utiliza-os para definir novos termos.

Segundo Hegenberg (1975) não é possível, e nem mesmo é viável, definir todos os termos, mas sim gradativamente à medida que seja necessário, para que se possa construir novas sentenças. Assim, à medida que sejam necessários, novos termos são definidos, e à medida que isso ocorre, também se faz necessário que seja explicado de que forma a definição do termo ocorreu. Após as paráfrases serem reduzidas, foram organizadas em categorias formadas por elas, classificadas em âmbitos da teoria estudada. Por fim, segundo a autora, por meio da explicitação das premissas, busca-se então explicitar o que é fundamental.

CAPÍTULO 3 – ANÁLISE DAS FONTES SELECIONADAS

Neste capítulo, vamos às fontes selecionadas para análise e na primeira seção 3.1 expomos compreensões que emergiram destas leituras, naquilo que concerne à Matematização. Na segunda seção, vamos às fontes conduzidos pelos critérios de análise que estabelecemos e esclarecemos no Capítulo 2. Cabe destacar que as palavras grifadas e/ou sublinhadas foram destacas e receberão um tratamento especial no subcapítulo 3.2.

3.1 ESCRUTÍNIO DOS TEXTOS PRIMÁRIOS SELECIONADOS

Essa exposição inicial sobre os aspectos da Matematização, identificadas em algumas fontes, se alinha ao realizado por Aragão (1976). Portanto, é uma aproximação que concede uma primeira interpretação sobre o tema, a partir dos textos selecionados para a análise (FREUDENTHAL, 1968, 1973, 1991).

Os textos disponíveis de Hans Freudenthal, quando olhados em um todo e não apenas especificamente aqueles concernentes à matematização, são bastante abrangentes, pelo fato de o autor ser um matemático que se preocupa com a educação Matemática, ele discute temas diversos da matemática, e expõe sua compreensão em como ensinar e aprender a matemática. Em nosso entendimento, o autor valoriza a contextualização da Matemática em sua gênese histórica e segue expondo ideias de como ele compreendia que matemática poderia ser ensinada, realizando essas idas e vindas ao longo de sua produção. No entanto, em se tratando do tema específico, é pouco volumosa.

Freudenthal (1973, p. 44) afirma que organizar a realidade com meios matemáticos [9] é um processo de matematização. No entanto, processos lógicos e algoritmos podem ser utilizados como um processo mais rápido para se chegar ao resultado, a realidade é desconsiderada e, assim, a realidade deixa de ser observada, voltando o olhar e a atenção apenas para a Matemática e sua organização (FREUDENTHAL, 1973).

---

[9] Adotamos o uso de colchetes para indicar os termos primários e secundários identificados nos textos de Hans Freudenthal, entre um [colchetes] estão os termos que compreendemos ser primários. Entre dois [[colchetes]], estão os termos que compreendemos ser secundários.

Encontramos indícios de que, pelo menos cinco anos antes do livro de 1973, o autor já escrevia sobre o ensino de Matemática. Ele critica a ideia de que ensinar a matemática pura, desprovida de qualquer contexto [realidade], sendo suficiente o conhecimento desses conceitos matemáticos, para o aluno ser capaz de aplicá-los. Essa ordem que os conteúdos deveriam ser ensinados, para ele, está equivocada, a Matemática deve ser ensinada primeiramente a partir da realidade e não o contrário. (FREUDENTHAL, 1968).

> O que os seres humanos têm que aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade, e se possível até mesmo matematizar a matemática (tradução nossa, grifos nosso) (FREUDENTHAL, 1968, p. 7)[10].

O autor indica que todo processo mental matemático, todo o processo de raciocínio (o que já era sabido, o que descobriu e o que refletiu) é desenvolvido a partir da realidade, e a partir dela se constroem conceitos matemáticos, esse movimento, para ele, é um processo de matematização.

> A mente matemática se expressa na tendência de matematizar a matemática. Claro que os alunos devem aprender a matematizar – quero dizer matematizar situações reais, para começar; matematizar situações matemáticas pode ser o fim, mas não o começo (tradução nossa, grifo nosso) (FREUDENTHAL, 1973, p. 69)[11].

O autor sinaliza que para ele, no ensino da matemática, o aprendiz não deve ser inserido diretamente no [sistema matemático], ou seja, matematizar a Matemática, ficando fechada em si mesma, deve ser objetivo final[12], pois, para ele, esse é um estágio mais avançado de matematização, que não significa que não pode ser aprendida, mas que seria conveniente somente para aqueles que no futuro se dedicassem a estudar somente Matemática, como aqueles que decidem serem profissionais matemáticos. Por outro lado, aos que estão aprendendo Matemática para a vida cotidiana, a matematização deve iniciar matematizando situações da realidade. Com o passar do tempo, a Matemática passa a ser integrada, na forma de

---

[10] *What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics.*

[11] *The mathematical mind expresses itself in the trend to mathematize mathematics. Of course students should learn to mathematize- I mean to mathematize real situations, to begin with; mathematizing mathematical situations may be the end but not the start.*

[12] *The mathematical mind expresses itself in the trend to mathematize mathematics. Of course students should learn to mathematize mean to mathematize real situations, to begin with; mathematizing mathematical situations may be the end but not the start.*

construção de teorias, seja de natureza [[explícita ou axiomática]] (FREUDENTHAL, 1973).

Além de reflexões referentes à aprendizagem, por meio da matematização, o autor também discute quanto ao ensino por meio dela. O autor expõe que nem tudo que é novo é bom, necessariamente, ou seja, defende que em determinadas ocasiões não é necessário se reformular os conteúdos, as teorias. O autor relata que, naquele momento, o matematizar a Matemática era a principal preocupação dos matemáticos e professores, os quais rechaçavam a repetição e as cópias, como se fossem proibidas. Relembrando que as ideias sobre ensino e a aprendizagem na década de 1960 passavam por reformas. No entanto, o autor faz uma ressalva de que aquilo que é bom, mesmo que não seja atual (fruto da nova reforma), deveria ser preservado e aproveitado e não, necessariamente, ser reformulado (FREUDENTHAL, 1973)[13].

> Hoje, muitos concordariam que o aluno também deveria aprender matematizando assuntos não matemáticos (ou insuficientemente matemáticos), isto é, aprender a organizá-los em uma estrutura que seja acessível a refinamentos matemáticos (tradução nossa, grifos nosso) (FREUDENTHAL, 1973, p. 133)[14].

O autor expõe o porquê de que os estudantes deveriam aprender a Matemática matematizando situações vivenciadas por eles, para que apreendam, se apropriem da, a estrutura que lhe dará subsídios para compreensão e resoluções em outras situações. Na citação, o autor já apresenta uma organização “vinculada” ao que ele chama de matematização. Inicia por meio de [[conceitos não matemáticos]] de forma que a Matemática venha surgindo, por meio de conceitos básicos que o aluno já possui, mas que fossem [[organizados na mente dele]], de modo que seja possível que sejam refinados gradativamente.

No livro de 1973, nos parágrafos anteriores à citação acima, o autor expõe como alunos deveriam, ou não, aprender Matemática, e sua percepção, defendendo um método de ensino contemplando a realidade, buscando relações matemáticas.[15].

---

[13] *Today, mathematizing mathematics is one of the main concerns of mathematicians. In no other science has the habit of recasting become second nature as it has in mathematics. Mathematicians sometimes behave as if repetition and copying was forbidden by law* (FREUDENTHAL, 1973, p. 45).

[14] *Today many would agree that the student should also learn mathematizing unmathematical (or insufficiently mathematical) matters, that is, to learn to organize it into structure that is accessible to mathematical refinements.*

[15] *Up to now our didactical analysis has been mainly local. No global structure of mathematics to be taught was visible it would have been otherwise if mathematics were supposed to be taught as pre-*

Expõe também como a Matemática não deveria ser ensinada, opondo-se ao ensino de Matemática de forma rígida (sem flexibilidades), mumificada (que não muda nem evolui ao longo dos anos) e fora do contexto da realidade.

No parágrafo que sucede a citação essa mesma citação, o autor apresenta alguns exemplos de como essa organização pode ser feita, a organização do insuficiente matemático. Para o matemático:

> Compreender gestalts[16] espaciais como figuras é matematizar o espaço. Organizar as propriedades do paralelogramo de tal forma que um determinado apareça para basear os outros nele a fim de chegar à definição do paralelogramo, isto é, matematizar o campo conceitual do paralelogramo. Organizar os teoremas geométricos para obter todos eles de poucos, isso é matematizar (ou axiomatizar) a geometria. Organizar esse sistema por meios linguísticos é novamente a matematização do sujeito, agora chamada de formalização. A história se repete, cada afirmação geral sobre paralelogramos é uma afirmação matemática, mas o conjunto dessas afirmações é em si uma bagunça confusa, torna-se matemática se for estruturada por relações lógicas, e isso é matematizar (tradução nossa, grifos nossos) (FREUDENTHAL, 1973, p. 133)[17].

---

established deductive system, as an inverse pyramid as it were, but it is now obvious that this would never fit the didactics of re-invention. Earlier analysis, however, shows how the global structure of mathematics to be taught should be understood: it is not rigid skeleton, but it rises and perishes with the mathematics that develops in the learning process. Is it not the same with the adult mathematician's mathematics? Its structure is not exhibited on bookshelf by collection of Bourbaki volumes that he has never read, nor by any other work written by other authors or by himself; it is changing every day. Why should students learn mummified mathematics?
The globally structuring force, as we called it, should be lived through reality. Only this way can we teach mathematics fraught with relations, can we be sure that the student integrates the mathematics he learned, and can we guarantee the applicability of learned mathematics. This way they taught arithmetic from olden times, and indeed, the majority of those who learned it can apply it. The import of opportunities for applying arithmetic should not be underestimated; people are inclined to judge too lightly the difficulty and the importance of what they have learned well and solidly. Beyond elementary arithmetic there is no field of mathematics which can be applied by an appreciable fraction of those who learned it, and this holds up to the university. Such mathematics is learned in an unrelated manner, far from lived-through reality and therefore soon forgotten.
If in traditional mathematical instruction the applications of mathematics are touched upon, it is always done according to the pattern of didactical inversion. Rather than departing from the concrete problem and investigating it by mathematical means, the mathematics comes first, while the concrete problem comes later as an "application". This is still the lesser evil. What people usually call applications are routines of specializing, that is, substituting special values for the parameters in general formula or system of formulae (Freudenthal, 1973, p. 132-133).

[16] Interpretamos e traduzimos aqui como sendo formas, figuras de fundo.

[17] *Grasping spatial gestalts as figures is mathematizing space. Arranging the properties of parallelogram such that particular one pops up to base the others on it in order to arrive at definition of parallelogram, that is mathematizing the conceptual field of the parallelogram. Arranging the geometrical theorems to get all of them from a few, that is mathematizing (or axiomatizing) geometry. Organizing this system by linguistic means is again mathematizing of subject, now called formalizing. The story repeats itself each general statement on parallelograms is mathematical statement but the whole of these statements is in itself jumbled-up mess, it becomes mathematics if it is structured by logical relations, and that is mathematizing.*

No que se refere à organização de campo por matematização, compreendemos que atividades matemáticas não podem ser isoladas, sejam da realidade na qual o estudante está inserido, seja negligenciando etapas. Entendemos que o autor quer dizer que devemos partir do nível mais elementar de matematização, para que, à medida que evoluímos, alcancemos níveis mais altos, complexos. E para ele, o nível mais baixo é o aluno identificar qual é o problema a ser resolvido e, onde ele vai identificar isso? Na situação real apresentada a ele (FREUDENTHAL, 1973). Para o autor,

> [...] pelo menos a partir da Antiguidade grega, a própria matemática se tornou objeto de matematização. Organizando e reorganizando o assunto, transformando definições em teoremas e teoremas em definições, procurando abordagens mais gerais das quais tudo pode ser derivado por especialização, unificando várias teorias em uma - esta foi uma [atividade] muito frutífera do matemático, e sem dúvida nossos alunos têm direito de desfrutar desses frutos (tradução nossa, grifos nosso) (FREUDENTHAL, 1968, p. 6). [18]

Por ora, avançamos compreendendo, que a matematização é a organização, a definição, a teorização e unificação de teorias, não estão claramente explicitadas nesta primeira incursão às fontes selecionadas. Algumas perguntas precisam ser respondidas para que outras partes façam sentido. A matematização possui etapas e processos? Se sim, quais são? Se não, como se constituiu? São perguntas que também vêm norteando internamente o estudo e que, na medida em que avançamos com a investigação, serão retomadas, juntamente à pergunta de pesquisa.

Segundo Freudenthal (1973), replicamos a Matemática, de acordo com a forma pela qual ela é tratada. Se ela for tratada como problemas, então teremos problemas a serem resolvidos; se for tratada como cálculos, teremos cálculos a serem resolvidos. No entanto, se a tratarmos como uma atividade completa a ser ensinada, então teremos alunos aprendendo um todo[19]. O autor afirma que o problema deve sair da situação, e a criança deve aprender a reorganizar o problema na situação, levantar um problema também é matematizar! Em outras palavras,

---

[18] *But soon, at least from the Greek antiquity onwards, mathematics itself has become the object of mathematizing. Arranging and rearranging the subject matter, turning definitions into theorems and theorems into definitions, looking for more general approaches from which all can be derived by specialization, unifying several theories into one - this has been a most fruitful activity of the mathematician, and no doubt our students are entitled to enjoy these fruits*.

[19] *If mathematics is dealt with according to subjects, we will get more of them* (FREUDENTHAL, 1973, p. 135).

entendemos que aqui ele quer dizer que "fazer matemática" não se resume aos procedimentos de cálculos, também contempla a identificação de problemas que podem ser resolvidos por meio de Matemática, ou de matematização.

Freudenthal (1991), no livro *Revisiting Mathematics*, descreve um aspecto da matematização, que por ele mesmo é classificado como importante a ela:

> Um aspecto particularmente importante da matematização é o de refletir sobre as próprias atividades, o que pode instigar uma mudança de perspectiva com um possível resultado local, virando as coisas de cabeça para baixo e o global axiomatizando que novamente, se imposta, são instâncias de inversão antididática (tradução nossa, grifo nosso) (p. 36). [20]

Outra expressão de grande importância na Educação Matemática Realística é a “reinvenção guiada”, a qual está diretamente relacionada com a matematização e com a ideia da Matemática como uma atividade humana.

> Qualquer que seja a importância do assunto e das habilidades perfeitamente adaptadas, elas o são, consideravelmente menos em matemática do que em qualquer outro ensino. Como eu enfatizei a matemática como uma atividade, minha resposta à pergunta “para onde?” será: “para uma atividade”. Em outras palavras, o aprendiz deve reinventar a matematização em vez da matemática; abstração em vez de abstrações; esquematização em vez de esquemas; formalização em vez de fórmulas; algoritmização em vez de algoritmos; verbalização em vez de linguagem - vamos parar por aqui, agora que é óbvio o que se quer dizer (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 49).[21]

Pouco à frente, o autor também menciona para qual direção o “reinventor deve ser orientado”, na atividade matemática.

> Quando perguntado “para onde” o aprendiz reinventor deve ser orientado, minha resposta foi: para a matematização e seus vários aspectos. A falta de objetivos mais substanciais pode ser compensada perguntando o que se espera que o aluno matematize. Isso pode ser respondido em uma palavra: Realidade. Que tipo de realidade? A própria realidade do aprendiz, conforme aberta a ele por seu guia. (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 50).[22]

---

[20] *A particularly important aspect of mathematising is that of reflecting on one own’s activities, which may instigate a change of perspective, with the possible local result of turning things upside down and the global one of, axiomatising which again, if imposed, are instances of antididactical inversion.*

[21] *Whatever the importance of subject matter and neatly tailored abilities, they are, they are considerably less so in mathematics than in any other teaching. Since I stressed mathematics as an activity my answer to the question “where to?” will be: “to an activity”. In other words, the learner should reinvent mathematising rather than mathematics; abstracting rather than abstractions; schematising rather than schemes; formalising rather than formulas; algorithmising rather than algorithms; verbalising rather than language -- let us stop here, now that it is obvious what is meant.*

[22] *When asked “where to” the reinventing learner should be guided, my answer was: to mathematising and its various aspects. The lack of more substantial objectives can be made up for by asking what the learner is expected to mathematise. This can be answered in one word: Reality. What kind of reality? The learner’s own reality as laid open to him by his guide. This leads us to the next question.*

E em meio a seu livro, o autor dedica um subcapítulo para tratar da [realidade primordial], assim denominado por ele, retomando algumas das suas ideias sobre o contexto, a estrutura interna e externa da Matemática, destacando que a matematização é a principal característica da Matemática como atividade, explicitando que didaticamente, matematizar é a atividade principal do aprendiz pela reinvenção guiada.

> A matemática surgiu e surge através da matematização. Esse fato fenomenológico é explicado didaticamente pelo princípio da reinvenção guiada. Matematizar é matematizar algo – algo não matemático ou algo ainda não suficientemente matemático, que precisa de mais, melhor, mais refinada, mais perspicaz matematização.
> Matematizar é matematizar a realidade, pedaços da realidade. Mas a realidade não é apenas uma coisa; são tantas coisas quantas pessoas existem, e para um povo pode ser tantas coisas quantos são os estados de compreensão interna e as circunstâncias externas. De qualquer forma, tão logo matematizar se traduz didaticamente em reinvenção, a realidade a ser matematizada é a do aprendiz, a realidade para a qual o aprendiz foi guiado, e matematizar é a própria atividade do aprendiz.
> O que é realidade para quem depende de muitas variáveis, assim como o que é matemático, o que não é matemático, o que é matemático o suficiente ou não, o que pede mais matematização. (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 67). [23]

No mesmo livro, Freudenthal (1991) deixa claro que ele não foi o primeiro a usar o termo matematização, o qual pode ter surgido em conversas informais, mas de qualquer forma, ele expõe o que seria a matematização para ele.

> Quem foi o primeiro a usar esse termo, que descreve o processo pelo qual a realidade é ajustada às necessidades e preferências do matemático? Esses termos geralmente surgem durante conversas informais e discussões antes de entrarem na literatura, e ninguém pode dizer quem os inventou. De qualquer forma, a matematização é um processo que continua enquanto a realidade está mudando, ampliando e aprofundando sob uma variedade de influências, incluindo a da matemática, que por sua vez é absorvida por essa realidade em mudança (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 30). [24]

---

[23] *Mathematics has arisen and arises through mathematising. This phenomenological fact is didactically accounted for by the principle of guided reinvention. Mathematising is mathematising something -- something non-mathematical or something not yet mathematical enough, which needs more, better, more refined, more perspicuous mathematising.*
Mathematising is mathematising reality, pieces of reality. But reality is not just one thing; it is as many things as there are people, and to one people it may be as many things as there are states of internal understanding and external circumstances. Anyway, as soon as mathematising is didactically translated into reinventing, the reality to be mathematised is that of the learner, the reality into which the learner has been guided, and mathematising is the learner's own activity.
What is reality to whom depends on many variables, as does what is mathematical, what is non-mathematical, what is mathematical enough or not enough, what asks for more mathematising.
[24] *Who was the first to use this term, which describes the process by which reality is trimmed to the*

E por que não tratamos quanto a sua terminologia anteriormente? Porque foi emergindo aqui, à medida que os estudos dos livros avançavam. Um pouco mais à frente nesse mesmo livro, o autor também explica a origem do termo matematizar, que por ele é tão utilizado e também está sendo estudado nesse trabalho de dissertação:

> [...] Axiomas surgem de paradigmas ou conjuntos de paradigmas, e axiomatizar significa generalizar paradigmas experimentados. É um velho hábito humano tornar paradigmáticas as próprias experiências e ações, generalizá-las abstraindo-as em leis e regras, criar esquemas que se ajustem à realidade. Esta última atividade é chamada de esquematização, que é a contrapartida de axiomatizar e formalizar no que diz respeito aos conteúdos e não à forma abstrata e à linguagem.
> A exposição precedente serve para explicar a origem do termo *matematizar* como análogo a axiomatizar, formalizar, esquematizar. Dou-lhe tanta atenção porque não é raro, em particular na educação, restringir o termo a um dos seus componentes. Eu mesmo insisto em incluir neste único termo toda a atividade organizadora do matemático, quer ela afeta o conteúdo e a expressão matemática, ou a experiência mais ingênua, intuitiva, digamos, vivida, expressa na linguagem cotidiana. Mas não nos esqueçamos da dependência individual e ambiental do "vivido" e da "vida cotidiana" na expansão da realidade e no progresso da sofisticação linguística! (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 31). [25]

No livro de Freudenthal (1983), o autor traz exemplos de matematização, na citação a seguir trouxemos esse exemplo, que segundo o autor é um exemplo bem sucedido de matematização

> A convexidade tal como é definida em geral para figuras planas ou espaciais é um exemplo característico de uma matematização extraordinariamente bem sucedida, próxima da realidade visual, de um objeto mental. Define-se: um conjunto S é convexo se qualquer par de

---

mathematician's needs and preferences? Such terms usually emerge during informal talk and discussion before they enter the literature, and nobody can tell who invented them. In any case, mathematising is a process that continues as long as reality is changing, broadening and deepening under a variety of influences, including that of mathematics, which in turn is absorbed by that changing reality.

[25] *Axioms arise from paradigms or sets of paradigms, and axiomatising means generalising experienced paradigms. It is an old human habit to make one's experiences and actions paradigmatical, to generalise them by abstracting them into laws and rules, to create schemes to fit reality.*
This last activity is called schematising, which is the counterpart to axiomatising and formalising insofar as contents rather than abstract form and language are concerned.
The preceding exposition serves to explain the origin of the term mathematising as an analogue to axiomatising, formalising, schematising. I pay so much attention to it since it is not unusual, in particular in education, to restrict the term to one of its components. I myself insist on including in this one term the entire organising activity of the mathematician, whether it affects mathematical content and expression, or more naive, intuitive, say lived experience, expressed in everyday language. But let us not forget about the individual and the environmental dependence of "lived" and "everyday life" on expanding reality and progressing linguistic sophistication!

> pontos contém o segmento de reta de conexão (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1983, p. 314).[26]

Ainda sobre o termo matematização, na década de 1970 a matematização também era estudada por pelo menos mais um autor, Treffers, e Freudenthal não era favorável a distinção a que Treffers fizera a ela em sua Tese em 1978, que a distinguiu em matematização vertical, e matematização horizontal. Ele se opunha pela preocupação de restringir a atividade a apenas uma delas.

> Por muito tempo hesitei em aceitar essa distinção. Preocupava-me a equivalência teórica de ambos os tipos de atividades e, consequentemente, seu status igualitário na prática, que temia ser prejudicado por essa distinção. Quantas vezes não me decepcionei com matemáticos interessados em educação que restringiram a matematização ao seu componente vertical, bem como por educadores que se voltaram para o ensino de matemática que o restringiram ao horizontal (para usar a terminologia de Treffers)! (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 41).[27]

Embora Hans Freudenthal tivesse se oposto a essas distinções, ele descreve que, ao longo do tempo ele acabou concordando com a ideia dessa distinção proposta por Treffers.

> Acabei me reconciliando com a ideia dessa distinção, até o ponto de apreciá-la positivamente; Eu adiciono certas nuances à sua formulação, mas de uma forma que ainda respeita as intenções de Treffers, acredito. Aceitei a distinção por causa de suas consequências para a educação matemática e, em particular, para caracterizar estilos educacionais (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 41). [28]

A seguir apresentaremos as formulações do autor para matematização vertical e horizontal.

> Caracterizemos a distinção da seguinte forma: A matematização horizontal leva do mundo da vida ao mundo dos símbolos. No mundo da vida vive-se, age-se (e sofre-se); no outro, os símbolos são moldados, reformulados e manipulados, este problema é uma rica mina de recursos de

---

[26] *Convexity such as is defined in general for plane or spatial figures is a characteristic example of an unusually successful mathematisation, close to visual reality, of a mental object. One defines: a set S is convex if with any pair of points it contains the connecting line-segment.*

[27] *For a long time I have hesitated to accept this distinction. I was concerned about the theoretical equivalence of both kind of activities and, as a consequence, their equal status in practice, which I was afraid would be endangered by this distinction. How often haven't I been disappointed by mathematicians interested in education who narrowed mathematising to its vertical component, as well as by educationalists turning to mathematics instruction who restricted it to the horizontal one (to use Treffers' terminology)!*

[28] *Eventually I have reconciled myself with the idea of this distinction, even to the point of appreciating it positively; I do add certain nuances to its formulation, but in a way that still respects Treffers' intentions, I believe. I have accepted the distinction because of its consequences for mathematics education, and in particular, for characterising educational styles.*

> matematização. Como não gostaria de decepcionar os leitores que gostariam de resolver o problema sozinhos, releguei a solução a um apêndice. Isso requer matematização horizontal. Aplicando a sequência de contagem a esta estrutura (criada ou descoberta), por outro lado, é matematização vertical, que, dependendo da estrutura, pode ocorrer de forma mais ou menos sofisticada: usando a multiplicação, por exemplo, para contar um conjunto apresentado ou interpretado em uma estrutura retangular. Mecanicamente, compreensivamente, refletindo; isso é matematização vertical. O mundo da vida é o que é experimentado como realidade (no sentido em que usei a palavra antes), assim como o mundo dos símbolos em relação à sua abstração. Sem dúvida, as fronteiras desses mundos são bastante vagamente marcadas. Os mundos podem se expandir e encolher – também à custa uns dos outros (Tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 41-42).[29]

E ele complementa mais à frente que “A distinção entre [[matematização horizontal e vertical depende da situação específica, da pessoa envolvida e do seu ambiente]]” (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 42). O autor menciona que, para além de afirmações genéricas, a melhor maneira de perceber distinção entre a matematização horizontal e vertical é por meio de exemplos. Assim, ele apresenta dezesseis exemplos em seu livro, dos quais trazemos um para exemplificar uma passagem do nível de matematização horizontal para a vertical.

> *Contagem*: Para ser contado um conjunto *não estruturado* de objetos ou eventos deve ser estruturado - manualmente, visualmente, acusticamente ou mentalmente - enquanto em um conjunto mais ou menos *estruturado* a estrutura disponível deve ser descoberta ou reforçada. Isso requer matematização horizontal. Aplicando a sequência de contagem a esta estrutura (criada ou descoberta), por outro lado, é matematização vertical, que, dependendo da estrutura, pode ocorrer de forma mais ou menos sofisticada: usando a multiplicação, por exemplo, para contar um conjunto apresentado ou interpretado em uma estrutura retangular. (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 42).[30]

Desse exemplo podemos compreender que o autor considera que ao organizar os objetos um a um para efetuar a contagem, nesse conjunto específico, realizou uma matematização horizontal com essa organização. Sequencialmente, ao

---

[29] *Let us characterise the distinction as follows: Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is symbol world with regard to its abstraction. To be sure, the frontiers of these worlds are rather vaguely marked. The worlds can expand and shrink -- also at one another’s expense.*

[30] *Counting: In order to be counted an unstructured set of objects or events must be structured - - manually, visually, acoustically or mentally - - while in a more or less structured set the available structure must be uncovered or reinforced. This requires horizontal mathematising. Applying the counting sequence to this (created or uncovered) structure, on the other hand, is vertical mathematisation, which, depending on the structure, can take place in a more or less sophisticated way: by using multiplication, for instance, to count a set presented or interpreted in a rectangular structure.*

aplicar a organização, de maneira generalizada em outro situação, deixa explícita a sutileza da verticalização da matematização nesse ambiente. No entanto, é importante destacar que, embora o autor explicite termos distintos como matematização horizontal e matematização vertical, ele revela que o foco não deve estar nessa distinção, mas sim na passagem de níveis, de uma matematização mais elementar a outra mais sofisticada, por assim dizer. Cabe ainda ressaltar que, o autor destaca a expressão "não estruturado", em itálico, justamente para destacar o "estruturar".

Desse mesmo livro, destacamos um outro exemplo, o qual não pertence ao conjunto daqueles dezesseis anteriormente mencionados, para trazer à percepção o aspecto horizontal e vertical da matematização.

> Pegue o número de pessoas ao redor da mesa, o número de narizes, olhos e orelhas, até mesmo pés, invisíveis sob a mesa. Aplicar a sequência de numerais a tais conjuntos é matematização horizontal. Perguntar-se por que alguns desses números são iguais é fazer uma pergunta de matematização vertical, que é respondida pela extrapolação da transferência do "tanto quanto" do próprio corpo para os corpos de um grupo. Esta é uma resposta válida, mesmo que a relação um-para-um subjacente não seja explicitada, e pedir para fornecê-la seria mesquinho (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1991, p. 50) [31]

O autor torna a discutir essa distinção, se posicionando quanto à caracterização do ensino de Matemática, e a essa identificação da matematização vertical e horizontal de Adrian Treffers, no mesmo livro que Freudenthal afirma aceita-la, posteriormente, ele não se mostra favorável a uma ênfase a tal distinção "Em (1.3) expliquei minha antiga resistência à distinção de Treffers entre matematização horizontal e vertical. Eventualmente, eu o aceitei como uma ferramenta eficaz para caracterizar vários tipos de ensino de matemática (FREUDENTHAL, 1991, p. 132). Compreendemos que tal distinção é utilizada para caracterizar o ensino da matemática como mecanicista, empirista, estruturalista ou realístico, o qual o autor defende, sendo que este contempla tanto a matematização horizontal quanto a vertical.

---

[31] *Take the number of people around the table, the number of noses, eyes and ears, even feet, invisible under the table. Applying the sequence of numerals to such sets is horizontal mathematising. Wondering why some among these numbers are equal is asking a vertically mathematising question, which is answered by the extrapolating transfer of the "as many as" from one's own body to the bodies in a group. This is a valid answer, even if the underlying one-to-one relation is not made explicit, and asking to provide it would be schoolmarmish.*

E para fechar esse capítulo, trazemos a justificativa do autor sobre o motivo de ter escrito o livro de 1991, mesmo depois de aposentado, no qual menciona que esse escrito não é nem um prefácio nem uma introdução, esclarecendo o contexto de sua escrita, conforme trazemos a seguir.

> Isso não é prefácio nem introdução, mas sim um pedido de desculpas e um aviso: o presente livro não acrescenta nada além de si mesmo ao trabalho que publiquei no passado em vários lugares. Renunciei à originalidade, abstive-me de oferecer ao leitor quaisquer novas experiências, aspectos ou ideias que ele possa ter o direito de esperar – razão para se desculpar. Retomando ideias antigas, meu objetivo agora é de abrangência, não compilando, mas selecionando e racionalizando, incluindo o essencial e eliminando contradições. Visões, mesmo quando apoiadas por evidências, são suscetíveis a mudanças. Meu ponto de vista atual é "aqui e agora", o de revisão e não de visão geral. Senti-me motivado por duas experiências. Negativo: ler citações datadas de meu próprio trabalho onde não me reconheci. Positivo: uma visita à China, onde em palestras, seminários e discussões tentei expor e ilustrar minha visão sobre educação matemática em todos os seus aspectos. O presente livro reflete de alguma forma essas conversas, embora de forma alguma textualmente. Assim, o subtítulo, em homenagem aos meus ouvintes que, por sua curiosidade crítica, me induziram a melhorar em clareza e concretude (FREUDENTHAL, 1991, p. xi) [32]

Essa primeira incursão nas fontes indica os primeiros aspectos dos termos identificados como articulados à matematização: realidade, situações-reais, atividade, meios matemáticos, sistema matemático, organização, processo, matematização para construção de teorias explícitas ou matemáticas, níveis de matematização, dentre outros. Esses aspectos serão visados na análise, a qual se inicia na próxima seção.

---

[32] *This is neither preface nor introduction but rather an apology and a warning: the present book adds nothing but itself to work that I have published in the past in various places. I have renounced originality, I have refrained from offering the reader any new experiences, aspects, or ideas he might feel entitled to expect -- reason to apologise. Resuming old ideas, my aim is now one of comprehensiveness, not by compiling but by selecting and streamlining, by including essentials and eliminating contradictions. Views, even when supported by evidence, are susceptible to change. My present viewpoint is "here and now", that of review rather than of overview. I felt prompted by two experiences. Negative: reading dated quotations from my own work where I did not recognise myself. Positive: a visit to China, where in lectures, seminars, and discussions I tried to display and illustrate my view on mathematics education in all its aspects. The present book somehow reflects these talks, albeit in no way textually. Therefore the subtitle, meant as an homage to my listeners who, by their critical curiosity, induced me to improve on clarity and concreteness.*

3.2 ESTRUTURAÇÃO E ANÁLISE

3.2.1 SELEÇÃO DE FRASES EXPLICÍTAS SOBRE MATEMATIZAÇÃO

No capítulo anterior, buscamos expor de forma sistematizada as ideias, acerca da matematização de Hans Freudenthal, que identificamos. Visa à explicitação e sistematização das ideias discutidas pelo autor.

Como delineado no Capítulo 2, apenas um artigo publicado no ano de 1968 faz abordagem ao tema específico, e somente nos livros publicados em 1973, 1983 e 1991 aparecem conceitos sobre matematização.

A partir da análise dos textos, explicitamos o conjunto de frases codificadas pelas seguintes categorias.

1 - Afirmações primárias do termo matematização e suas variações.

2 - Justificativas, exemplos e explicações do termo matematização e suas variações.

3 - Matematização, matematizar, matematizando: para organização da matemática.

Os conjuntos de frases categorizados foram organizados em quadros, os quais são apresentados na sequência.

No primeiro agrupamento, anteriormente nomeado, trazemos frases que trazem algo que se assemelhe a uma definição, a um significado ou a uma ação referente ao termo investigado. No Quadro 9, estão as frases que se enquadram nessa categoria, a qual se constitui em um conjunto de frases denominadas de “Afirmações primárias do termo matematização e suas variações”, conforme apresentamos a seguir.

Quadro 9: Afirmações primárias do termo

	FRASE ORIGINAL	FRASE TRADUZIDA PARA O PORTUGUÊS
1	*As time goes on, mathematizing applies globally, as the conscious building of theories, of explicit or axiomatic nature* (FREUDENTHAL, 1973, p. 45)	Com o passar do tempo, **a matematização aplica-se globalmente,** como <u>construção</u> consciente de teorias, de natureza explícita ou axiomática.
2	*Often mathematization is only meant as an activity on the bottom level, that is, when it is applied to entirely unmathematical matter* (FREUDENTHAL, 1973, p. 134)	Frequentemente, a matematização significa apenas uma **<u>atividade</u> no nível inferior**, isto é, quando é **<u>aplicado</u> a algo totalmente não matemático.**

3	*Organizing the reality with mathematical means is today called mathematizing. The mathematician, however, is inclined to disregard reality as soon as the logical connection promises faster progress. A stock of mathematical experience is formed; it asks for its part to be organized. What kind of means will serve this purpose? Of course, mathematical means again. This starts the mathematizing of mathematics itself* (FREUDENTHAL, 1973, p. 44)	**Organizar a realidade com meios matemáticos é hoje denominado matematizar.** O matemático, no entanto, está inclinado a **desconsiderar a realidade assim que a conexão lógica oportuniza um progresso mais rápido**. **Um estoque (acúmulo) da experiência matemática é formado; pede que sua parte seja organizada. Que tipo de meio atenderá a esse propósito? Claro, novos meios matemáticos. Isso inicia a matematização da própria matemática.**
4	*Whatever the importance of subject matter and neatly tailored abilities, they are, they are considerably less so in mathematics than in any other teaching. Since I stressed mathematics as an activity my answer to the question "where to?" will be: "to an activity". In other words, the learner should reinvent mathematising rather than mathematics; abstracting rather than abstractions; schematising rather than schemes; formalising rather than formulas; algorithmising rather than algorithms; verbalising rather than language -- let us stop here, now that it is obvious what is meant. (* FREUDENTHAL, 1991, p. 49).	Qualquer que seja a importância do assunto e das habilidades perfeitamente adaptadas, elas o são, consideravelmente menos em matemática do que em qualquer outro ensino. Como eu enfatizei a matemática como uma atividade, minha resposta à pergunta "para onde?" será: "para uma atividade". Em outras palavras, **o aprendiz deve reinventar a matematização em vez da matemática;** abstrair em vez de abstrações; esquematizar em vez de esquemas; formalizar em vez de fórmulas; algoritmizar em vez de algoritmos; verbalizar em vez de linguagem verbal - vamos parar por aqui, agora que é óbvio o que se quer dizer.
5	*When asked "where to" the reinventing learner should be guided, my answer was: to mathematising and its various aspects. The lack of more substantial objectives can be made up for by asking what the learner is expected to mathematise. (*FREUDENTHAL, 1991, p. 50).	Quando perguntado "para onde" o **aprendiz reinventor deve ser orientado, minha resposta foi: para a matematização e seus vários aspectos.** A falta de objetivos mais substanciais pode ser compensada perguntando o que se espera que o aluno matematize.

Fonte: A autora (2022).

No Quadro 10, trazemos o conjunto de frases identificadas que justificam, exemplificam ou explicam o termo matematização. Denominamos essa segunda categoria por "Justificativas, exemplos e explicações do termo matematização e suas variações", a qual segue no Quadro 10.

Quadro 10: Justificativas, exemplos e explicações

	FRASE NA LINGUAGEM ORIGINAL	FRASE TRADUZIDA PARA O PORTUGUÊS
6	*I believe a that student who experienced probability concepts early on and intensively, can better experience, and even assimilate, mathematizations far from reality on higher level* (FREUDENTHAL, 1973, p. 614)	Acredito que aquele aluno que vivenciou conceitos de probabilidade, desde cedo e de forma intensa, pode vivenciar melhor, e até mesmo assimilar, matematizações distantes da realidade em nível superior.

7	*Today, mathematizing mathematics is one of the main concerns of mathematicians. In no other science has the habit of recasting become second nature as it has in mathematics. Mathematicians sometimes behave as if repetition and copying was forbidden by Law* (FREUDENTHAL, 1973, p. 45)	Hoje, a matematização da matemática é uma das principais preocupações dos matemáticos. Em nenhuma outra ciência o hábito de reformular se tornou uma segunda natureza como na matemática. Os matemáticos às vezes se comportam como se a repetição e a cópia fossem proibidas por lei.
8	*These examples were meant to show how difficult probability is, but this does not mean that we shall make it difficult for others. Isn't mathematics the art of making things easy? To do this we develop general thinking patterns in mathematics and try to organize them axiomatically. Often we have not yet succeeded in doing so; we work unconsciously with most of these patterns without ever recognizing them (we shall return to this point in the next chapter). Such thinking patterns exist also for the mathematization of real situations, and nobody ever thought how to axiomatize and formalize them. Such patterns we called tactics and strategies. It looks a hopeless undertaking to catalogue them in pure mathematics, not to mention applications* (FREUDENTHAL, 1973, p. 589)	Esses exemplos pretendiam mostrar o quão difícil é a probabilidade, mas isso não significa que tornaremos isso difícil para os outros. A matemática não é a arte de tornar as coisas fáceis? Para fazer isso, desenvolvemos padrões de pensamento geral em matemática e tentamos organizá-los axiomaticamente. Frequentemente, ainda não conseguimos fazer isso; trabalhamos inconscientemente com a maioria desses padrões, sem nunca os reconhecer. (retornaremos a esse ponto no próximo capítulo) **Esses padrões de pensamento existem também para a matematização de situações reais, e ninguém jamais pensou em como axiomatizá-los e formalizá-los. Chamamos esses padrões de táticas e estratégias. Parece impossível a tarefa de catalogá-los em matemática pura, para não mencionar as aplicações**.
9	*Arranging the geometrical theorems to get all of them from a few, that is mathematizing (or axiomatizing) geometry. Organizing this system by linguistic means is again mathematizing of a subject, now called formalizing* (FREUDENTHAL, 1973, p. 133).	**Organizar os teoremas geométricos para obter todos eles de alguns poucos, isso é matematizar (ou axiomatizar) a geometria. Organizar esse sistema por meios linguísticos é novamente matematização do sujeito, agora chamada formalização.**
10	*Applying mathematics is not learned through teaching applications. The so-called applied mathematics lacks mathematics' greatest virtue, its flexibility. Ready-made applications are anti-didactical. Mathematising some problem situation in nature or society should not be demonstrated by the textbook author or the teacher but left to the learner to be reinvented. In this regard applications are no different from mathematics as such, and for that matter the present section could as well not have been written, were it not for the urgent need of using every opportunity to propagate starting and keeping mathematics in reality, while switching back and forth between realities -- natural, social, and mathematical. Pure and applied is a highbrow dualism rather than a learner's concern* (FREUDENTHAL, 1973, p. 85-86).	A aplicação da matemática não é aprendida por meio de aplicativos de ensino. A chamada matemática aplicada carece da maior virtude da matemática, sua flexibilidade. Aplicativos prontos são antididáticos. A matematização de alguma situação problema na natureza ou na sociedade não deve ser demonstrada pelo autor do livro didático ou pelo professor, mas deve se deixada para ser reinventada pelo aluno. A esse respeito, as aplicações não são diferentes da matemática como tal, e, nesse sentido, a presente seção não poderia ter sido escrita, se não fosse a necessidade urgente de usar todas as oportunidades para propagar o início e a manutenção da matemática na realidade, enquanto retrocede e para frente entre as realidades - natural, social e matemática. Puro e aplicado é um dualismo intelectual e não uma preocupação do aluno.
11	*Mathematics has arisen and arises through mathematising. This phenomenological fact is didactically accounted for by the principle of guided reinvention. Mathematising is*	A matemática surgiu e surge por meio da matematização. Esse fato fenomenológico é explicado didaticamente pelo princípio da reinvenção guiada. Matematizar é

	mathematising something -- something non-mathematical or something not yet mathematical enough, which needs more, better, more refined, more perspicuous mathematising. *Mathematising is mathematising reality, pieces of reality.* (FREUDENTHAL, 1991, p. 67).	matematizar algo -- algo não matemático, ou algo ainda não suficientemente matemático, que precisa de matematização mais, melhor, mais refinada e mais perspicaz . Matematizar é matematizar a <u>realidade</u>, pedaços da <u>realidade.</u>
12	*Let us characterise the distinction as follows: Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is symbol world with regard to its abstraction. To be sure, the frontiers of these worlds are rather vaguely marked. The worlds can expand and shrink -- also at one another's expense*. (FREUDENTHAL, 1991, p. 41-42).	Caracterizemos a distinção da seguinte forma: **A matematização horizontal leva do mundo da vida ao mundo dos símbolos**. No mundo da vida vive-se, age-se (e sofre-se); no outro, **os símbolos são moldados, remodelados e manipulados, mecanicamente, compreensivamente, <u>refletindo</u>; isso é matematização vertical.** O mundo da vida é o que é experimentado como <u>realidade</u> (no sentido em que usei a palavra antes), assim como o mundo dos símbolos no que diz respeito à sua abstração.
13	*Since our subject is modelling as an aspect of mathematising, I would like to stress that in the present context I should readily include tangibly concrete models such as wind-tunnels where aeroplane models are tested and laboratory simulations of hydrodynamic theories. In other words, models that are evaluated by observation rather than by mathematics, even though their mere construction may require more mathematics than the processing of many less tangible models.* (FREUDENTHAL, 1991, p. 34)	Como nosso assunto é modelagem como um aspecto da matematização, gostaria de enfatizar que no presente contexto devo incluir prontamente modelos concretos tangíveis, como túneis de vento onde são testados modelos de aviões e simulações de laboratório de teorias hidrodinâmicas. Em outras palavras, modelos que são testados experimentalmente pela <u>observação</u> e não pela matemática, mesmo que sua mera <u>construção</u> possa exigir mais matemática do que o processamento de muitos modelos menos tangíveis.
14	*A particularly important aspect of mathematising is that of* • *reflecting on one own's activities, which may instigate a* • *change of perspective with the possible local result of* • *turning things upside down and the global one of* • *axiomatising* (FREUDENTHAL, 1991, p. 36)	Um aspecto particularmente importante da matematização é o de * <u>refletir</u> sobre as próprias <u>atividades,</u> o que pode instigar uma * mudar de perspectiva com o possível resultado local * virar as coisas de cabeça para baixo e o global * <u>axiomatizar</u> que novamente, se impostas, são instâncias de uma inversão antididática.
15	*Convexity such as is defined in general for plane or spatial figures is a characteristic example of an unusually successful mathematisation, close to visual reality, of a mental object. One defines: a set S is convex if with any pair of points it contains the connecting line-segment.* (FREUDENTHAL, 1983, p. 314).	A convexidade tal como é definida em geral para figuras planas ou espaciais é um exemplo característico de uma matematização extraordinariamente bem-sucedida, próxima da realidade visual, de um objeto mental. Define-se: um conjunto S é convexo se qualquer par de pontos contém o segmento de reta de conexão.

Fonte: A autora (2022).

Por fim, no terceiro agrupamento, trazemos frases que trazem o termo investigado em outras situações mais específicas da Matemática. No Quadro 11, estão as frases que se enquadram nessa categoria, a qual se constitui em um conjunto de frases denominadas por nós de "Matematização, matematizar, matematizando: para organização da matemática", conforme apresentamos a seguir.

Quadro 11: Matematização, matematizar, matematizando

	FRASE NA LÍNGUAGEM ORIGINAL	FRASE TRADUZIDA PARA O PORTUGUÊS
16	*What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics* (FREUDENTHAL, 1968, p. 7)	O que os seres humanos têm que aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma <u>atividade</u>, o <u>processo</u> de matematização da <u>realidade</u>, e se possível até mesmo matematizar a matemática.
17	*Today many would agree that the student should also learn mathematizing unmathematical (or insufficiently mathematical) matters, that is, to learn to organize it into structure that is accessible to mathematical refinements* (FREUDENTHAL, 1973, p. 133).	Hoje, muitos concordariam que o aluno também deveria aprender matematizando assuntos não matemáticos (ou insuficientemente matemáticos), isto é, aprender a <u>organizá-los</u> em uma estrutura que seja acessível a refinamentos matemáticos.
18	*The mathematical mind expresses itself in the trend to mathematize mathematics. Of course students should learn to mathematize – I mean to mathematize real situations, to begin with; mathematizing mathematical situations may be the end but not the start* (FREUDENTHAL, 1973, p. 69)	A mente matemática se expressa na tendência de matematizar a matemática. Claro que os alunos devem aprender a matematizar - quero dizer matematizar situações <u>reais,</u> para começar; matematizar situações matemáticas pode ser o fim, mas não o começo.

Fonte: A autora (2022).

A tradução das frases acima foi realizada pela autora da dissertação, discutida e revisada em seus significados e sentidos pelos orientadores. Dessa forma, buscando preservar os termos utilizados pelo autor, julgamos importante manter suas próprias terminologias características, a fim de manter a tradução próxima ao que acreditamos que o autor buscou expressar.

3.2.2 SELEÇÃO DE CONCEITOS

Ao longo da leitura dos textos analisados foi possível detectar alguns conceitos que estão articulados ao conceito de matematização e, por conta disso, são importantes para uma análise no estudo que vem sendo realizado. Esses conceitos foram grifados nas citações no decorrer do escrutínio e nas frases categorizadas e organizadas nos Quadros 9, 10 e 11. Os conceitos grifados foram:

Axiomatizar (e suas derivações); Formalizar (e suas derivações); Organizar (e suas derivações); Real (realidade); Algoritmizar (e suas derivações); Estruturar (e suas derivações); Abstração (e suas derivações). E nesse momento iremos atribuir seu significado.

Os significados de cada um destes conceitos foram resgatados dos próprios textos do autor, as quais analisamos. O conceito da axiomatização que se efetiva pelo **ato de axiomatizar**, segundo o autor, diz respeito a uma ação sobre um tipo de proposição que não foi ainda, ou que não pode até o momento ser provada, "porque ele é o fundamento e pressuposto de qualquer prova, e de maior distinção, necessidade, evidência e generalidade do que tudo que é derivada a partir dela" (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1973, p. 33). Para o autor, os axiomas são como regras de um jogo, arbitrários, e do ponto de vista lógico, devemos analisar se um sistema axiomático é consistente, e não se apenas é verdadeiro (FREUDENTHAL, 1973). Em Freudenthal (1991) o autor menciona que "Axiomas surgem de paradigmas ou conjuntos de paradigmas, e axiomatizar significa generalizar paradigmas experimentados." (p.31)

O conceito de **formalização,** para ele, está intimamente associado à linguagem e à organização da matemática, pois "A ocupação consciente com a linguagem como ferramenta de expressão exata é chamada de formalização" (tradução nossa) (FREUDENTHAL, 1973, p. 29). O autor considera que a formalização é um dos meios utilizados para organizar a matemática moderna e consiste no processo final da matematização.

Para Freudenthal (1973) o ato de **organizar**, o qual resulta na organização, é considerado uma atividade matemática. Devido à rápida evolução das ciências, refazer conceitos com modificações significativas não deveria ser apenas uma vontade própria, particular, mas sim uma necessidade. Embora essa organização seja feita não somente na evolução da matemática, segundo a percepção do autor, os matemáticos se empenham mais em organizar seus conceitos em um nível superior e mais consistente.

Do ponto de vista do ensino, para Freudenthal (1973), a **organização** de conceitos deve ser feita como uma atividade pelos alunos, considerando esse processo muito favorável para a aprendizagem deles. Essa organização de conceitos, para o autor, possui níveis, níveis inferiores de organização, e níveis superiores, de acordo com a evolução do aluno. Além dos níveis, a organização dos assuntos matemáticos pode ser local, ou mais global.

Segundo Freudenthal (1991) **realidade** é experimentada como real, no estágio do senso comum, o real não é destinado por ele para ser entendido pela ontologia, nem mesmo pelo metamorfismo, nem psicologicamente, mas sim por meio do senso comum. Além disso para ele o real depende do sujeito, das circunstâncias do sujeito, são fenômenos iniciais desenvolvidos individualmente.

Segundo Freudenthal (1991) “**Algoritmização** significa que a argumentação é deixada para o aprendiz, mesmo que permaneça implícita ao processo de aprendizagem por algum tempo ou para sempre” (tradução nossa, destaque nosso) (p.58). Pois para ele o algoritmo é uma simplificação da matemática, então essa simplificação deve ser feita pelo próprio aprendiz, ao invés do aprendiz receber o algoritmo pronto, ele deve reinventar o algoritmo, por mais tedioso e demorado que seja, como o próprio autor adjetiva. Freudenthal (1991) também menciona que “Reinventar algoritmos envolve uma progressão de esquematizações, que é encurtada repetidamente pelo reinventor, que tem permissão para se aproximar dos algoritmos padrão tão perto quanto as necessidades e habilidades de aprendizado exigem e permitem (tradução nossa) (p. 58)”.

Em Freudenthal (1991), o autor também discorre sobre o conceito de Estruturar, claro que no contexto em que ele estava imergido em suas escritas, para ele “Na matemática, a relação entre forma e conteúdo é refletida pela relação entre algo que tem ou é uma estrutura. **Estruturar** é um meio de organizar fenômenos, físicos e matemáticos, e até mesmo a matemática como um todo.” (tradução nossa, destaque nosso) (p. 20).

Freudenthal (1991), ainda classifica os tipos de estruturas em seus contextos matemáticas, para ele a matemática possui estruturas em contextos empobrecidos, e também estruturas em contextos mais ricos, e a partir dessa classificação ele menciona o conceito de abstração.

> O que geralmente é chamado de **abstração**, na maioria das vezes nada mais é do que empobrecer uma estrutura. As estruturas matemáticas surgiram em contextos mais ricos e foram criadas para serem aplicadas onde surgiram e além. A orientação do pobre para o rico foi sugerida pela matemática pronta para ser utilizada (tradução nossa, destaques nosso) (FREUDENTHAL, 1991, p. 29).

Em Freudenthal (1983), ele também menciona que não a razão para que seja nessa ordem, do mais obre para o mais rico, e se houvesse razão para definir essa sequência (denominado “linha” por ele), ele apostaria nessa sequência ao contrário, e mais uma vez ele associa a estruturação com a abstração, “a estrutura mais rica se apresenta com maior desenvoltura; empobrecer significa abstrair, tirar” (tradução nossa) (p. 232).

A abstração também relacionada com a verbalização, que segundo Freudenthal (1991), as ideias são verbalizadas a medidas tão rápidas com as surgem, seja ela pela existência ou pelo novo vocábulo, e a verbalização impulsiona a abstração.

3.2.3 SELEÇÃO DE TERMOS

Ao longo da leitura dos textos analisados também foi possível detectar alguns termos que estão articulados ao conceito de matematização e, por conta disso, são importantes . Esses termos foram grifados nas citações no decorrer do escrutínio, e também nas frases categorizadas e organizadas nos Quadros 9, 10 e 11. Os termos grifados foram: Assimilar, Atividade, Construir (e suas variações), Definições, Generalizar (e suas variações), Observar (observação), Processo, Refletir (e suas variações), Unificar, Verbalizar (e suas variações).

Apresentaremos agora os significados de cada um destes termos mencionados de acordo com o dicionário Houaiss.

Assimilar significa “converter em substância própria, incorporar (costume, técnica, cultura etc.), fazer ou tornar (-se) similar a; passar a fazer parte de incorporar-se" (HOUAISS, 2011, p. 89).

Atividade significa “qualidade do que é ativo, ocupação profissional ou trabalho produtivo, realização de várias ações de modo acelerado e vigoroso” (HOUAISS, 2011, p. 94).

Construir significa “elaborar, criar” (HOUAISS, 2011, p. 226), e construção significa “ação de reunir diferentes elementos, formando um todo, organização, estruturação de algo” (HOUAISS, 2011, p. 226)

Generalizar significa “tornar-se geral, comum a muitas pessoas, situações ou em muitos locais, propagar-se, universalizar-se, particularizar-se (HOUAISS, 2011, p.471). E generalização significa, “ação de estender os resultado da observação de alguns casos ao conjunto dos casos possíveis” (HOUAISS, 2011, p. 471).Observar significa “olhar(-se) com atenção, com aplicação; estudar(-se); considerar buscando chegar a julgamento; examinar, analisar; chegar a uma conclusão após o exame, análise; constatar, verificar; olhar as escondidas; espiar; seguir determinações ou preceitos de; fazer atentar para; adverti (HOUAISS, 2011, p. 675). E observação significa “ação de considerar as coisas com atenção, obediência a uma regra ou lei; observância” (HOUAISS, 2011, p. 675).

Processo significa “realização continua e prolongada de alguma atividade; método, procedimento” (HOUAISS, 2011, p. 760).

Refletir significa “pensar demoradamente (em); meditar; ter efeito sobre; afetar transmitir-(se)” (HOUAISS, 2011, p. 803).

Unificar significa “reunir (-se) formando um todo; unir (-se); tornar (-se) uniforme, semelhante; padronizar (-se); fazer convergir para o mesmo fim” (HOUAISS, 2011, p. 940).

Verbalizar significa “expressar em palavras (pensamento, sentimento); expor oralmente; falar (HOUAISS, 2011, p. 953). Verbalização significa “ato ou efeito de verbalizar” (HOUAISS, 2011, p. 953).

3.2.4 RESULTÂNCIA DOS MOVIMENTOS ANALÍTICOS ANTERIORES

Em decorrência dos movimentos analíticos apresentados, compreendemos que a matematização se expressa em dois aspectos mais acentuadamente: 1) A Matematização é uma atividade de um sujeito na realidade; e 2) a matematização é um processo possível aos humanos.

Apesar de distinguirmos a matematização em dois aspectos, cabe explicitar que a atividade que o sujeito realiza na realidade é pelo processo de matematização. E o processo de matematização, ele é possível a qualquer humano, e esse processo é realizado pelo sujeito e embora as categorizemos assim, um aspecto está totalmente relacionado ao outro.

Utilizaremos o significado do termo atividade para iniciar nossa compreensão da matematização, atividade significa qualidade do que é ativo, possibilidade de agir, de fazer, possibilidade de fazer várias coisas (HOUAISS, 2011). E não por acaso compreendemos que o autor coloca a matematização como uma atividade, pois para ele a matematização é o fazer matemática, por quem? Pelo aprendiz, sujeito que faz essa atividade do fazer matemática diante da sua realidade.

E como destacamos, o outro aspecto da matematização é ela enquanto processo, e regatando o significado de processo segundo HOUAISS (2011), é uma ação continuada, realização continua de fatos ou operações que apresentam unidade ou regularidade, ou seja, o autor coloca a matematização como uma ação continuada, como operações que apresentam a qualidade de ser único, ou a qualidade de ser regular.

Traduzimos os termos “mathematisation, mathematising, mathematizing e mathematization” como matematização, e matematizar, apesar das diferentes formas de escrever, não se perde a essência daquilo que a palavra quer dizer, matematização é matemática mais ação; e matematizar é uma verbalização do fazer matemático, e o verbo indica ação. Logo, em ambas as traduções, referem-se ao fazer matemática. E como já vimos, o fazer algo, é atividade. E a ação contínua de atividades matemáticas descritas pelo autor, que naturalmente vai estabelecendo a matematização.

Um processo que desde o início dessa pesquisa fica claro a nós, é o processo de organização, e sua importância na matematização. A organização é um processo da matematização, e também é uma atividade realizada pelo sujeito. Dessa forma, quando buscamos compreender a organização para matematização, é processo de organizar a realidade como meios matemáticos, e quando buscamos compreender organização como atividade do sujeito, é a ação do sujeito organizar a realidade como meios matemáticos, e essa atividade de organização para Hans Freudenthal é muito importante para a aprendizagem da matemática.

Apesar de a organização ser um processo muito importante da matematização, e considerada por Hans Freudenthal uma atividade importante para a aprendizagem da Matemática, a matematização não se resume apenas a esse processo, ela também tem como processo a reinvenção, que se consolida na atividade do sujeito reinventar, o processo de reinvenção não é necessariamente a reinvenção da matemática, pois ele também coloca que a própria matematização pode ser reinventada, ao invés da matemática, porque para ele a matemática é resultado da matematização, e a atividade de reinventar, é reinventar o processo que pode nos levar a matemática, para ele a matematização fez e faz surgir a matemática. As situações-problema colocadas por ele podem ser de um meio matemático, mas também de um meio insuficientemente matemático.

Além do processo de organização e de reinvenção, também são processos da matematização a formalização e a axiomatização, e estes são inerentes à atividade de organizar do sujeito. E destacamos ainda mais um processo da matematização, a esquematização, que é inerente a axiomatização. De que forma compreendemos isso? Bom, primeiramente retomaremos o que chamamos de particularidade, a realidade. As situações-problema mencionadas por Hans Freudenthal, são situações da realidade, para ele matematizar é matematizar pedaços da realidade, seja ela suficiente ou insuficientemente matemática, e essa realidade é a realidade do sujeito, a qual ele vive e que ele compreende, em seu senso comum.

E como já mencionado, para Hans Freudenthal matematizar também é organizar a realidade. No processo de organização o aprendiz realiza a atividade de organizar, no processo de formalização enquanto atividade de formalizar, é necessário que o aprendiz já seja capaz de organizar, para que conseguir formalizar. O mesmo acontece no processo de axiomatização, para que aprendiz seja capaz de axiomatizar, também é necessário que já consiga organizar.

Já a esquematização está associada ao conceito de axiomatização, pois segundo o autor "É um velho hábito humano tornar paradigmáticas as próprias experiências e ações, generalizá-las abstraindo-as em leis e regras, criar esquemas que se ajustem à realidade." (FREUDENTHAL, 1991, p. 31). Esse hábito é denominado por ele, de atividade de esquematização, que no diz respeito a conteúdos, está em contrapartida de axiomatizar e formalizar

Diante disso compreendemos que o processo de organização, e de reinvenção, são processos primários da matematização, enquanto a formalização e a axiomatização, são processos secundários, já que dependem do processo de organização. E o processo de esquematização, é terciário, pois depende do processo de axiomatização que já é um processo secundário.

CAPÍTULO 4 - CONSIDERAÇÕES FINAIS (POR ORA)

Indagações que surgiram no decorrer desse estudo, foi em relação a matematização possuir etapas ou processos no sentido do seu modo de executar, pois no modo de pensar da autora dessa dissertação, e diante das metodologias do Ensino de Matemática que ela já havia estudado, todas possuíam um modo de executá-la. E quando iniciou essa pesquisa, a expectativa era encontrar algo próximo disso no tema aqui estudado. Mas sabendo que também existia a possibilidade de não ser desse modo, também foi pensando na pergunta contrária a isso, e se não é assim que a matematização ocorre, então como é?

Bom, durante a leitura do livro de1973 de Hans Freudenthal, notamos que sua intenção não era definir um passo a passo de um modo de ensinar a matemática, compreendo que sua intenção era escrever um livro de matemática, mas não um livro convencional (com definição, exemplos e exercícios), mas um livro com definições e exemplos explicados e contextualizados de acordo de como aconteceu, quando foi descoberto. Além disso, com sua opinião própria de como aquele conteúdo poderia ser abordado pelo professor, ou como ele entendia que não poderia ser abordado.

Não posso afirmar a real intencionalidade do autor ao escrever esse livro, se sua intenção era ser um livro a ser utilizado durante disciplinas de matemática, ou se o autor o fez por desejo de expressar sua opinião em relação ao ensino e a aprendizagem da Matemática, e seus estudos, ou qualquer que fosse sua intenção.

Então com o primeiro livro analisado nesse estudo (Mathematics as an Educational Task de 1973), não foi possível encontrar aquilo que era expectativa, um passo a passo de como executar a matematização. Mas passagens pelo livro (denominado por nós por frases e estão organizados nos quadros 9, 10 e 11) que ele expressava como a matemática foi construída, e também a matematização como uma atividade, de organização, de axiomatização, de formulação, de reinvenção.

Esperava-se, então, que nos livros seguintes um modo de proceder à matematização estive em seu conteúdo, mas, novamente, nem no livro de 1983, nem no livro de 1991, foi encontrado esse passo a passo. Mas, sim, alguns momentos pontuais, os quais traziam exemplos de matematização, aspectos da matematização, distinções em discussão com outro estudioso de matematização, principalmente no último livro, de 1991.

Nesse livro, o autor relata que nada de novo é acrescentado, mas sim uma retomada de tudo que ele já havia escrito em livros e artigos anteriores. No entanto, compreendemos que é um livro importante de fechamento de suas ideias, principalmente para quem estuda seus escritos, já que nem todo estudioso tem acesso a todos os seus escritos.

Retomando às duas perguntas inicialmente aqui apresentadas, podemos afirmar, a partir do estudo e da análise realizada, que Hans Freudenthal não definiu um modo de proceder com a matematização, um passo a passo de como um aprendiz pode seguir para realizar a matematização. Percebemos que para ele a atividade de matematizar, de matematização, é uma atividade que ocorre como um processo natural, que deve partir da realidade do indivíduo, ou seja, compreendo que o que ele chama de matematização, é o aprender a matemática considerando a realidade própria do individuo, por meio de situações que levem o indivíduo a construir sua própria matemática, e não aprender uma matemática já pronta, algoritmizada.

> Como eu enfatizei a matemática como uma atividade, minha resposta à pergunta “para onde?” será: “para uma atividade”. Em outras palavras, **o aprendiz deve reinventar a matematização em vez da matemática;** abstrair em vez de abstrações; esquematizar em vez de esquemas; formalizar em vez de fórmulas; algoritmizar em vez de algoritmos; verbalizar em vez de linguagem verbal - vamos parar por aqui, agora que é óbvio o que se quer dizer (FREUDENTHAL, 1991, p. 49).

Para ele, o natural não é aprender esquemas prontos, mas como fazer seus próprios esquemas, não utilizar formulas prontas, mas aprender a formalizar seus próprios pensamentos e construções matemáticas, e com já mencionado, se possível, elaborar seus próprios algoritmos, e não utilizar algoritmos prontos. Para Hans Freudenthal, o ensino da Matemática não deve partir do todo para casos específicos, mas de casos específicos para o todo, para o mais geral.

> A aplicação da matemática não é aprendida por meio de aplicativos de ensino. A chamada matemática aplicada carece da maior virtude da matemática, sua flexibilidade. Aplicativos prontos são antididáticos. A matematização de alguma situação problema na natureza ou na sociedade não deve ser demonstrada pelo autor do livro didático ou pelo professor, mas deve se deixada para ser reinventada pelo aluno. A esse respeito, as aplicações não são diferentes da matemática como tal, e, nesse sentido, a presente seção não poderia ter sido escrita, se não fosse a necessidade urgente de usar todas as oportunidades para propagar o início e a manutenção da matemática na realidade, enquanto retrocede e para frente entre as realidades - natural, social e matemática. Puro e aplicado é um

> dualismo intelectual e não uma preocupação do aluno (FREUDENTHAL, 1973, 85-86)

Ou seja, ensinar a Matemática por meio de algoritmos e também demonstrações para Hans Freudenthal é anti didático, para ele a Matemática pura e aplicada é um processo que cabe aos matemáticos, aos alunos cabe uma matemática que inicia em sua própria realidade a partir daquilo que o se sabe, tendo o professor como guia, para que alcance conceitos mais elaborados.

Como refletido pelos autores e colaboradores desse trabalho, é provável que a intencionalidade do autor não era mesmo definir um modo de proceder com a matematização. E por meio do estudo e análise desse trabalho, compreendo que a essência da matematização de Hans Freudenthal, é voltar o olhar do professor que ensina a matemática para um ensino mais contextualizado, considerando aquilo que o aprendiz já possui de conhecimentos matemáticos naturais do seu dia a dia, e os novos conhecimentos seguiriam a mesma vertente, avanços em conceitos a partir de novas vivências matemáticas, guiadas, e não impostas.

De acordo com o que aqui se estudou, foi possível apresentar que a matematização se apresenta de duas formas “A Matematização é uma atividade de um sujeito na realidade”; e a “A matematização é um processo possível aos humanos.

Então compreendemos que quando ele se refere a matematização como processo, não está no sentido de um modo de proceder, mas sim possível aos humanos, uma ação continuada de fatos e operações de um individuo.

A matematização se apresenta como construção consciente de teorias, como o processo de organização da realidade, como processo de reinvenção, como processo de formalização, como processo de axiomatização, todos possíveis aos indivíduos. A matematização também pode ser uma atividade de nível inferior aplicado a algo não matemático, a atividade de organização da realidade em meios matemáticos, a atividade de reinventar, de axiomatizar, de formalizar.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. **Teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel:** sistematização dos aspectos teóricos fundamentais. 1976. 97f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em:<http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253230>.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, p. 237-252, 2016.

FREUDENTHAL, Hans. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**, 1, 3-8, 1968.

______. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, 3, 413-435, 1971.

______. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel. 1973.

______. **Perspectivas da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

______. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel. 1983.

______. **Revisiting mathematics education**. 2. ed. Netherlands: Kluwer Academic, 1991.

GATTI, Bernardete Angelina. A construção metodológica da pesquisa em educação: desafios. **Revista Brasileira de Política e Administração da Educação** - v. 28, n. 1, p. 13-34, jan/abr. 2012. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/rbpae/article/view/36066.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRAVEMEIJER, Koeno. RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: International **Handbook of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam: Sense Publishers. 2008. v. 1. p. 283-302.

HEGENBERG, Leonidas. **Lógica**: Simbolização e dedução. São Paulo, EPU, 1975.

LOPEZ, Juliana Maira Soares.; BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. Educação Matemática Realística: considerações para a avaliação da aprendizagem. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 14, 20 dez. 2014.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MENDES, Marcele Tavares; TREVISAN, André Luis; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Possibilidades de intervenção num contexto de ensino e avaliação em matemática. Em **Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 3, n. 1, 2012. Disponível em: http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/86.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & Saúde** Coletiva. Rio de Janeiro, v. 17, n. 3, p. 621-626, mar. 2012.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Amostragem e Saturação em Pesquisa Qualitativa: Consensos e controvérsias **Revista Pesquisa Qualitativa**. São Paulo (SP), v. 5, n. 7, p. 01-12, abril. 2017.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2014.

PRESTES, Diego Barboza. **Um olhar realístico para tarefas de probabilidade e estatística de uma coleção de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental**. 2021. 128f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

SILVA, Heloísa Cristina da. **Matematização e modelagem matemática: possíveis aproximações: possíveis aproximações**. 2013. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

TREVISAN, André Luis. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.