UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGCEM

ÁREA DE CONCETRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA TIPOLOGIA DE SITUAÇÕES DE JUROS SIMPLES COM BASE NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

REGIS ALESSANDRO FUZZO

CASCAVEL – PR

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA TIPOLOGIA DE SITUAÇÕES DE JUROS SIMPLES COM BASE NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

REGIS ALESSANDRO FUZZO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu*, nível de Mestrado e Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática, *campus* de Cascavel da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Veridiana Rezende.

CASCAVEL – PR

2022

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Fuzzo, Regis Alessandro
UMA TIPOLOGIA DE SITUAÇÕES DE JUROS SIMPLES COM BASE NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS / Regis Alessandro Fuzzo; orientadora Veridiana Rezende. -- Cascavel, 2022.
129 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2022.

1. Educação Matemática. 2. Matemática financeira. 3. Estruturas aditivas. 4. Estruturas multiplicativas. I. Rezende, Veridiana, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REGIS ALESSANDRO FUZZO

UMA TIPOLOGIA DE SITUAÇÕES DE JUROS SIMPLES COM BASE NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Veridiana Rezende
Orientadora - Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

VGFerreira
Verônica Gitirana Gomes Ferreira
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Valdir B. dos Santos Júnior
Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Clélia Maria Ignatius Nogueira
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

REVertuan
Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Cascavel, 31 de outubro de 2022.

DEDICATÓRIA

Cultivar a alegria

Não deixe que a tristeza

tome conta de você;

não permita que as suas preocupações

o deixem aflito.

Um coração contente

é a vida da pessoa;

a alegria faz aumentar

os anos de vida.

Divirta-se e anime-se.

Afaste a tristeza para longe,

pois ela tem matado muita gente.

A tristeza não traz nenhum proveito para ninguém.

(Eclesiástico 30, 21-23)

AGRADECIMENTOS

Gratidão a Deus e Nossa Senhora Aparecida

pela vida, pela fé, pelo conforto espiritual e pela esperança.

Gratidão à Dhenifer, esposa e companheira de jornada

pela paciência, pelo apoio, pelo incentivo, pelo amor, pelo respeito.

Gratidão à Ísis, filha querida

por ser angelical, por me conceder o sentimento da paternidade.

Gratidão aos meus pais e irmãs,

pelo amor, pelas renúncias, pelo incentivo, pela sabedoria, pela educação.

Gratidão à professora Veridiana,

pelo tempo, pelo desafio, pela confiança, pelos ensinamentos, pelo carinho.

Gratidão às colegas de estudo Alcione e Sandra,

pela empatia, pelo apoio, pelo tempo, pelo incentivo.

Gratidão aos membros avaliadores,

pelo tempo, pelas sugestões, pelas críticas, pelas contribuições.

Gratidão.

FUZZO, R. A. **UMA TIPOLOGIA DE SITUAÇÕES DE JUROS SIMPLES COM BASE NA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS**. 2022. 129 folhas. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2022.

RESUMO

A presente investigação tem como principal objetivo estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais. Para caracterizá-las, utilizaram-se os seguintes aspectos da TCC: tipo de relações – ternárias e quaternárias; categorias de situações das estruturas aditivas e multiplicativas; situações aditivas, multiplicativas ou mistas, ou seja, aquelas que envolvem operações aditiva e multiplicativa ao mesmo tempo; e esquemas relacionais. A investigação é de caráter documental e adotou como fonte de dados as três (03) obras de livros didáticos de matemática do Ensino Médio mais selecionadas em âmbito nacional, conforme dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2018. Para a identificação das situações de juros simples, em cada obra foi considerado o capítulo específico de matemática financeira, que trata desse conceito. Identificaram-se 33 situações, as quais apresentaram a característica de problemas complexos, ou seja, problemas que envolvem várias relações e questões. As análises mostraram que essas situações apresentam etapas intermediárias necessárias para resolver a questão principal que está em jogo. Identificamos as seguintes classes de situações: composição de medidas; proporção simples; e transformação de medidas, todas com etapas intermediárias das estruturas multiplicativas e/ou aditivas. Dentre as 33 situações, 12 exigiram, para resolução, conversão da unidade de medida da taxa ou do período. Essas relações de conversão foram caracterizadas como parte da categoria das estruturas multiplicativas do tipo proporção simples. Ainda, identificou-se a possiblidade da proporção simples ser composta por relações e não somente grandezas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matemática financeira; Estruturas aditivas; Estruturas multiplicativas.

FUZZO, R. A. **A TYPOLOGY OF SIMPLE INTEREST SITUATIONS BASED ON THE CONCEPTUAL FIELDS THEORY.** 2022. 129 page. Dissertation (Master in Science Education and Mathematical Education) – Graduate Program in Science Education and Mathematical Education State University of Western Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2022.

ABSTRACT

The main aim of this investigation is to establish a typology of simple interest situations based on the Conceptual Fields Theory. To characterize them, the following aspects of TCF were used: type of relationships – ternary and quaternary; categories of situations of the additive and multiplicative structures; additive, multiplicative or mixed situations, that is, those involving additive and multiplicative operations at the same time; and relational schemes. This is a documentary investigation that adopted as data source the three (03) works of high school mathematics textbooks most selected nationwide, based on statistical data from the National Education Development Fund, approved by the National Book and Teaching Material Program of 2018. For the identification of simple interest situations, in each work a specific chapter on financial mathematics, which deals with this concept, was considered. Thirty-three situations were identified, which presented the characteristic of complex problems, that is, problems that involve several relationships and questions. The analyses showed that these situations present intermediate stages which are necessary to resolve the main question raised. We identified the following classes of situations: composition of measures; simple proportion; and measurement transformation, all with intermediate stages of multiplicative and/or additive structures. Among the 33 situations, 12 required, to be solved, conversion of the unit of measurement of the rate or period. These conversion relations were characterized as part of the category of multiplicative structures of the simple proportion type. It was also identified the possibility of the simple proportion being composed of relationships and not just measures

Keywords: Mathematics education; Financial mathematics; Additive structures; Multiplicative structures.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

ENEF - Estratégia Nacional de Educação Financeira

FECILCAM - Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão

GEPeDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática

LD – livro didático

MEC – Ministério da Educação e Cultura

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PIC - Projetos de Iniciação Científica

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PPGECEM – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática financeira faz parte da vida das pessoas ao realizarem atividades comerciais e financeiras relacionadas a situações simples, como comprar alimentos, roupas ou utensílios para casa, ou situações mais elaboradas, a exemplo de financiamento de veículos, imóveis, empréstimos, aplicações financeiras, pagamento de dívidas, entre outras. Essa relação da matemática financeira com a vida das pessoas remonta aos povos mais antigos.

Ferguson (2009) apresenta os primeiros registros de crédito, ainda que primitivos, na antiga Mesopotâmia, em que se utilizavam de tábulas de argila para registrar as transações de mercadorias que haviam sido emprestadas, principalmente agrárias e de metais, e o registro dos respectivos reembolsos. Para o autor, tratava-se de simples adiantamentos e devoluções, mas foi um começo importante, pois essa relação de tomar emprestado e emprestar algo foi fundamental para a história econômica da sociedade atual.

Somavilla e Bassoi (2019) afirmam que a compreensão de matemática financeira pouco se alterou ao longo do tempo. Ela pode ser entendida como "[...] uma área que aplica conhecimentos matemáticos à análise de questões ligadas a dinheiro ao longo do tempo" (BEZERRA FILHO, SPINDOLA, 2021, p. 4).

Alguns conhecimentos ligados à análise do dinheiro na perspectiva da matemática financeira são: o capital - um valor monetário que está disponível e que pode ser transacionado; a taxa de juros - uma taxa percentual aplicada sobre o capital; o período - o tempo decorrido desde a transação; e o juro - valor resultante da aplicação dessa taxa percentual em determinado tempo.

Para Grando e Schneider (2010), um determinado valor, denominado capital, pode ser diferente em outro tempo, porque existe a variável *taxa de juros,* que é amparada pela utilização do dinheiro.

O conceito de juro, pela perspectiva econômica, é "[...] a remuneração pelo empréstimo de um capital (dinheiro). Se está devendo, pagam-se juros; quando se aplica um valor no banco ou se empresta dinheiro, recebem-se juros" (GRANDO, SCHNEIDER, 2010, p. 53). Seria uma espécie de aluguel a ser remunerado devido à utilização do capital, seja próprio ou de terceiros.

Atividades como utilização de limite da conta corrente (cheque especial), operações de desconto de cheques ou duplicatas, cálculos de encargos de empréstimos, rendimentos financeiros e aplicações, operações de curto prazo, e pagamento de boletos em atraso se utilizam do conceito de juros simples. Contudo, é predominante a aplicação de juros compostos nos mercados financeiro e bancário.

É nesse contexto da matemática financeira que se insere a minha trajetória profissional. Graduei em Licenciatura Plena em Matemática na Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM) em 2010, que atualmente constitui o campus de Campo Mourão da Universidade Estadual do Paraná (Unespar). No período da graduação, participei de Projetos de Iniciação Científica (PIC) voltados para pesquisas em Educação Matemática. Em 2011, cursei uma Pós-Graduação *Lato Sensu* com estudos voltados a Métodos e Técnicas de Ensino. Nesse mesmo período, comecei a atuar no mercado financeiro, ao ingressar em uma instituição bancária. Entre os anos de 2011 e 2018, atuei em setores voltados à pessoa física e empresas; tornei-me gerente de contas, atuando no atendimento ao público, nas carteiras de investimentos, aplicações financeiras, empréstimos e negociações de dívidas.

A atuação no atendimento ao público me permitiu o contato com uma diversidade de pessoas de variadas faixas etárias e níveis de escolaridade. Nesse período, notei as dificuldades das pessoas para compreenderem suas finanças pessoais, por desconhecerem noções básicas do sistema de juros simples e composta, entre outras situações que indicavam ausência de noções básicas de matemática financeira. Esse convívio constante com pessoas apresentando dificuldades com conceitos de juros geravam inquietações, talvez pelo fato de a minha vida acadêmica estar relacionada à Educação Matemática.

Essa inquietação impulsionou a buscar respostas e retornar para a atividade acadêmica. Assim, participei de processos seletivos de Pós-graduação *Stricto Sensu* e, em 2020, ingressei no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), que me direcionou à participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa[1].

[1] Portal online do GEPeDiMa - https://prpgem.wixsite.com/gepedima

O GEPeDiMa busca investigar fenômenos didáticos, bem como questões teóricas e cognitivas, cujo cerne é o saber matemático. Atualmente, parte dos integrantes do GEPeDiMa tem realizado investigações em busca de apresentar classificações para as diversas situações[2] relacionadas ao conceito da função afim, à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

A partir disso, iniciamos as investigações acerca de possibilidades de articulação entre matemática financeira e as pesquisas do GEPeDiMa. A matemática financeira, em especial os juros simples, é mencionada nos documentos oficiais que direcionam a educação brasileira em diferentes esferas governamentais. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018a) estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se esperam que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica.

A BNCC menciona que a matemática financeira favorece a interdisciplinaridade em diversas dimensões, especialmente no que se refere ao contexto do consumo e dinheiro. A BNCC recomenda, para o Ensino Médio, expandir as discussões sobre taxa de juros, inflação, aplicações financeiras e impostos, e modelizar algumas situações pela função afim e exponencial.

Além da BNCC (BRASIL, 2018a), pesquisas como as de Cabello (2010), Faria (2015), Amorim (2016), Sureda *et al.* (2017) e Santos Junior (2017) também sugerem que o conceito de juros simples pode ser modelizado pela forma analítica da função afim.

Grando e Schneider (2010) inferem que a matemática financeira é formada por um sistema de conceitos, sendo composta por vários conteúdos relacionados e interdependentes. Adotamos para esta pesquisa o termo “juros simples” como um termo que abrange o regime de capitalização simples e não somente à fórmula do cálculo de juros, ou seja, o regime de juros simples conforme Lima *et al*. (2004). Para juros simples, temos a relação com outros conceitos, como razão, proporção, conversão de medidas, porcentagem, capital, taxa, prazo, entre outros.

Dessa forma, assumimos a Teoria dos Campos Conceituais como referencial teórico desta investigação, pois, segundo Vergnaud (2013b), um conceito não se desenvolve em uma única categoria de situações; da mesma forma, uma situação

[2] Usamos o termo situação como sinônimo de problema, situação-problema e tarefa, conforme proposto por Santana e Lima (2017) ao analisarem as situações que dão sentido ao conceito e que o tornam significativo.

não pode ser analisada a partir de um único conceito, mas de vários. Para compreender determinado conceito, Vergnaud (2013b) defende a necessidade de um conjunto de situações e um conjunto de conceitos, entrelaçados no que o referido pesquisador denomina por Campo Conceitual.

Para Vergnaud (1993, 1996), o conjunto das situações é a porta de entrada de um Campo Conceitual. Nesse cenário, motivados a estudar as diferentes situações sobre juros simples, surgiram os primeiros questionamentos da pesquisa: Quais situações favorecem o desenvolvimento do conceito de juros simples? Como identificar um conjunto de situações para dar sentido ao juro simples? Quais fontes de dados podem ser investigadas para identificar essas situações? Esses questionamentos iniciais foram norteadores para avançar na busca da interrogação principal para a qual essa pesquisa foi proposta.

O ambiente escolar é um dos contextos que permite ao sujeito o estudo de um conjunto de situações, de modo que a compreensão de noções matemáticas pelo sujeito pode ocorrer por meio de tarefas escolares de natureza diversa, como o enfrentamento de situações novas, lições do professor, análise e discussões coletivas, e, sobretudo, os exercícios (VERGNAUD, 2009). Para Grando e Schneider (2010), o contexto escolar é fundamental para que o sujeito enfrente situações, aproprie-se e desenvolva os conceitos relacionados a juros.

Os livros didáticos oferecem uma orientação para os conteúdos matemáticos de maneira singular e detalhada (FREITAS; ALMOULOUD, 2016). Assim, compreender o processo de aprendizagem pelos alunos no contexto escolar passa pela consulta do livro didático como uma fonte de investigação (BITTAR, 2017).

Os conteúdos da matemática financeira, dentre os quais se insere o conceito de juros simples, tornam-se fundamentais de serem abordados no contexto escolar (GRANDO; SCHNEIDER, 2010), e, sendo o livro didático (LD) um dos principais recursos utilizados pelo professor para a preparação de suas aulas, assumimos como fonte de dados os livros didáticos de matemática do Ensino Médio para analisar as situações de juros simples, fundamentados na TCC.

As diferentes classes de situações relacionadas a juros simples que se apresentam nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, conforme proposta desta investigação, remetem aos professores a importância de terem ciência dessa variedade, uma vez que diferentes classes de situações demandam diferentes esquemas pelos alunos e, portanto, proporcionam novas aprendizagens.

Diante das inquietações apresentadas, essa pesquisa busca responder a seguinte questão de investigação: Qual a tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais?

Buscando responder à questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo principal *estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais.*

Para essa pesquisa, selecionamos as três obras de livro didático de matemática do Ensino Médio mais adotadas em âmbito nacional, conforme os dados estatísticos disponibilizados pelo FNDE (BRASIL, 2021), como fonte documental de dados para identificar as situações presentes no capítulo específico que trata de juros simples.

As análises realizadas são fundamentadas na teoria dos Campos Conceituais. Para cada situação, busca-se apresentar classificações[3] e esquemas relacionais[4], com base nas classes dos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo estabelecidos por Vergnaud (1993, 2009), e na pesquisa de Miranda (2019), que apresenta esquemas relacionais e classificação para situações-problema de função afim, baseada na TCC.

Em relação à estrutura deste texto, ela é constituída pela presente introdução, seguida de quatro capítulos e pelas considerações finais. Os capítulos estão assim estruturados: no Capítulo 1, apresentamos aspectos teóricos do conceito matemático da investigação dessa pesquisa, que se trata do regime de juros simples, e aproximações com os Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. No Capítulo 2, apresentamos aspectos teóricos da TCC, dos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, e de problemas mistos, que foram os aportes teóricos para as análises e a discussão dos resultados da investigação. No Capítulo 3, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para essa pesquisa, enquanto no Capítulo 4 discutimos as análises. Nas Considerações finais, apresentamos os resultados da pesquisa.

[3] Um conjunto de situações podem ser categorizadas por uma combinação de relações de base que correspondem ao número de questões possíveis.
[4] Esquemas relacionais são representações associadas às relações de cada situação, e auxiliam na interpretação das regras de conduta do cálculo. Como exemplo, temos “linhas, flechas, regiões do espaço, localizações” (VERGNAUD, 2009, p. 86).

CAPÍTULO 1

JUROS SIMPLES - CONCEITO MATEMÁTICO DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre juros simples, buscando explicitar alguns aspectos históricos e matemáticos desse conceito. Ainda, apresentamos uma seção sobre os documentos oficiais, livros didáticos e pesquisas em Educação Matemática relacionadas a juros simples.

Esses estudos preliminares, bem como os aportes teóricos (Capítulo 2), direcionaram as escolhas metodológicas e as discussões dos dados produzidos.

1.1 Aspectos históricos dos juros simples

A ideia de juros surge antes mesmo do dinheiro. Ferguson (2009) afirma que, na Mesopotâmia, há cerca de cinco mil anos, as pessoas utilizavam placas de argila para registrar transações que envolvessem produtos agrícolas. O sistema de empréstimo era aprimorado para a época, e os débitos poderiam ser transferidos, ou seja, pertenciam ao portador, e não a um credor definido.

Com o avanço do comércio, do contato entre as comunidades, do desenvolvimento da cultura e da arte, começaram as trocas de mercadorias, inicialmente, sem a equivalência de valor. Contudo também surgem as primeiras dificuldades nessas trocas, pela falta de uma medida de comparação entre os produtos permutados. Assim, começam a se desenvolver sistemas que permitiam a equivalência de produtos, sendo utilizados como medidas de padrão o boi, sal, pérolas, algodão, cacau, peles, entre outros (GRANDO, SCHNEIDER, 2010).

É complexo precisar como o mundo ocidental adotou o metal como moeda de troca e como matéria-prima monetária; contudo, as características do metal, como ser durável, fungível, portátil e confiável, podem ter influenciado a escolha desse material (FERGUSON, 2009).

Para Grando e Schneider (2010), comerciantes, tendo conhecimento dessas moedas cunhadas em ouro e prata, começaram a se interessar pelo acúmulo delas para, então, atuarem na atividade de troca ou câmbio desse dinheiro. É por meio dessa relação que “[...] evidencia-se o lucro, o ganho, ou, então, o juro. Assim, ficaram caracterizadas, ainda que de forma bastante rudimentar, o que seriam as primeiras operações de crédito” (GRANDO, SCHNEIDER, 2010, p. 48).

Com o avanço de outras ligas metálicas e a facilidade de cunhagem, a partir do final do século XX, a moeda começa a circular pelo seu valor convencionado, ou seja, pelo valor gravado na face, não dependendo do metal utilizado (ROSSETI JUNIOR, SCHIMIGUEL, 2011).

A necessidade de guardar as reservas das moedas de ouro e prata deu surgimento à ideia de bancos. Os cambistas, comerciantes que negociavam moedas, por terem cofres e seguranças para exercer a atividade, começaram a aceitar a responsabilidade de cuidar do dinheiro de terceiros e passaram a emitir recibos escritos das quantias (CMB, 2011).

A partir do desenvolvimento significativo do comércio no período renascentista, e do interesse pela educação, foram elaboradas as primeiras obras populares de aritmética para preparação de pessoas para atividades comerciais. A aritmética é pioneira nos cálculos das relações comerciais, evoluindo, posteriormente, para o uso da álgebra, por meio de fórmulas ou modelos matemáticos (GRANDO, SCHNEIDER, 2010).

Para o ensino de juros no Brasil, Silva (2018) analisa os registros de Portugal, devido à influência desse país em nossa colonização. A partir da década de 1870, são publicados os primeiros programas de matemática para o ensino secundário português (liceu), abordando, entre outros, temas como medidas e moedas legais, juros simples e compostos, e operações de comércio.

Em 1931 houve uma reformulação nos programas de Portugal, diminuindo temas da matemática financeira, ficando esta limitada apenas a aplicações de juros simples em situações. Somente nas décadas de 1960 e 1970 novos programas foram reformulados, tendo neles sido inseridos conceitos de porcentagem, cálculo de juros simples e composto em períodos distintos, entre outros (SILVA, 2018).

No Brasil, com a instalação das escolas comerciais no início do século XX, a noção de juros apareceu nos livros didáticos desde o ensino primário (SILVA, 2018).

Segundo Grando e Schneider (2010), até o início dos anos 2000, muitas obras desse ramo da matemática apresentavam distinção entre matemática comercial e financeira, e algumas obras recentes ainda continuam apresentando essa denominação. Os pesquisadores acreditam que

> [...]a classificação de comercial ou financeira esteja mesmo ligada à forma de resolução dos problemas. Os cálculos relacionados à utilização de fórmulas matemáticas, porcentagens, juros e descontos simples, por exemplo, estão mais próximos do conceito de comércio; os cálculos de juros compostos, séries de pagamentos, amortizações de empréstimos bancários são entendidos como financeiros (GRANDO, SCHNEIDER, 2010, p. 52).

Porém, assim como os pesquisadores mencionados, assumimos, nessa pesquisa de mestrado, que "[...] razão, proporção, porcentagem, regra de três, juro simples e composto são considerados [...] conteúdos básicos da matemática financeira, constituindo um sistema de conhecimentos pela relação existente entre eles" (GRANDO; SCHNEIDER, 2010, p. 53), não distinguindo, portanto, os termos "financeira" e "comercial".

Na sequência, apresentamos aspectos matemáticos de juros simples e de montante simples, além de conceitos correlatos que auxiliam na compreensão das situações de juros simples.

1.2 Aspectos matemáticos do regime de juros simples

A matemática financeira se destina, em síntese, a estudar o valor do dinheiro ao longo do tempo. Seu objetivo é analisar e comparar as entradas e saídas de dinheiro em diferentes momentos. Adiar o recebimento de um valor por certo tempo envolve renúncia, para a qual deve haver uma compensação, definida pelos juros (ASSAF NETO, 2019).

O juro (J) é a remuneração obtida, a qualquer título, a partir do capital, ou seja, uma espécie de aluguel mediante uma taxa. Castelo Branco (2012) apresenta essa remuneração a partir de dois olhares: o do pagador, para quem o juro pode ser chamado de despesa financeira, custo, prejuízo, entre outros; e o de quem recebe, por quem pode ser entendida como um rendimento, receita financeira, ganho. Para o referido autor, há incidência de juros se houver um capital empregado, seja ele próprio ou de terceiros.

O capital (C) trata-se de disponibilidade financeira transacionada em uma data inicial de determinada operação financeira. O capital, base para o cálculo dos juros, é um recurso financeiro, e quando ocorrem empréstimos, compras de mercadoria, investimentos, ou até mesmo deixa-se de quitar uma dívida, estamos efetuando uma operação de movimentação de capital afetada pelo tempo (CASTELO BRANCO, 2012).

A taxa, representada por *i*, origina-se do inglês *interest*, que significa juros. Assim, a taxa (*i*) é expressa como um percentual do capital, ou seja, trata-se de um coeficiente da relação entre juro (J) e capital (C). Ela representa os juros em uma determinada unidade de tempo. Pode ser representada em percentual, como 1% ao dia (1%/dia), 2% ao mês (2%/mês), 12% ao ano (12%/ano), entre outros. Também pode ser expressa em taxa unitária, 0,01 ao dia, 0,02 ao mês, 0,12 ao ano.

Denomina-se período (t) o tempo que determinado capital (C), aplicado a uma taxa (i), necessita para produzir um montante (M). O período (t), em determinadas situações, pode ser inteiro ou fracionário; como exemplo de inteiro, tem-se 1 dia, 1 mês, 30 dias, 2 meses, 1 ano, 360 dias etc.; como exemplo de tempo fracionário, pode-se falar em ½ mês, 1/6 ano, entre outros. Convencionalmente, para cálculos bancários e financeiros, utiliza-se o mês comercial, de 30 dias, e o ano comercial, de 360 dias. Como mencionado, a operação financeira parte de uma data inicial, em que essa grandeza tempo é não negativa, ou seja, $t \geq 0$.

O Montante (M) é um valor monetário acumulado de um determinado capital (C), após um período (t) resultante de Juros (J), ou seja, é a soma entre o Capital (C) e o Juros (J).

Nos estudos de juros há outros conceitos e ideias interligados, tais como: a distinção entre juros remuneratórios, juros moratórios e multa de mora. Os juros remuneratórios, ou compensatórios, tratam-se da remuneração pelo capital empregado e se aplicam em operações de empréstimo ou de investimento, sendo os valores cobrados acordados entre as partes. Os juros moratórios, ou de mora, são uma cobrança de um valor que não foi quitado no prazo estabelecido e incidem por dia de atraso, e, pela jurisprudência da lei, a uma taxa de juros de 1%/mês, ou proporcionalmente, 0,0333%/dia. Diferentemente, a multa de mora é uma taxa cobrada independentemente do período de atraso da dívida, não havendo distinção entre 1 ou 30 dias de atraso, sendo a multa de mora sempre a mesma e não podendo ultrapassar 2% do valor da cobrança.

Esse processo pelos quais os capitais são remunerados define-se como regime de capitalização. Os regimes podem ser descontínuos ou contínuos. Conforme Franco (2016), o regime contínuo trata-se do juro formado ao final de um período infinitesimal, ou seja, o capital aumenta continuamente quando o intervalo do tempo deixa de ser uma variável discreta e se torna uma variável real. Já o regime de capitalização descontínua, que é o realmente adotado na prática, é aquele em que os juros são incorporados ao valor do capital ao final de período elementar de tempo de duração finita. Em matemática financeira utiliza-se o regime descontínuo, para o qual existem dois tipos: regime simples (juros simples) e regime composto (juros compostos). Nessa investigação, focamos nos juros simples.

No regime de juros simples, a taxa de juro (*i*) incide somente sobre o valor do capital (*C*) inicial, ou seja, não há, a cada período (t), incidência de juros sobre juros do período anterior. Vejamos um exemplo de fluxo de caixa para o juro simples, para um capital (C) de R$1000,00, aplicado a uma taxa (i) de 2%/mês durante 4 meses.

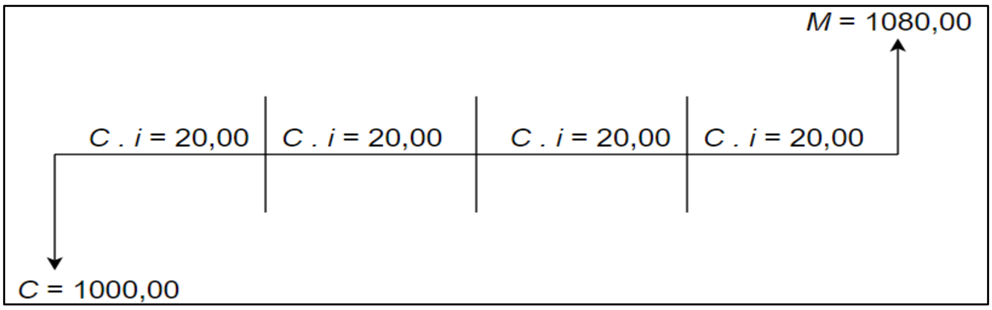


Figura 1: Fluxo de caixa de juros simples
Fonte: baseado em Assaf Neto (2019)

De acordo com esse regime de capitalização, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos, e são dados pelo produto do capital pela taxa.

Sendo J_t o juro auferido, que corresponde à variação do Capital C a uma taxa i_t dada na mesma unidade temporal do intervalo *t,* o juro simples é dado como:

$$J_t = C \cdot i_t.$$

Considerando um intervalo de tempo de *t* períodos, o juro acumulado ao longo de *t* períodos será:

$$J_1 = C \cdot i_1$$

$$J_2 = J_1 + C \cdot i_2 = C \cdot i_1 + C \cdot i_2 = C \cdot (i_1 + i_2)$$

$$J_3 = J_2 + C \cdot i_3 = C \cdot (i_1 + i_2) + C \cdot i_3 = C \cdot (i_1 + i_2 + i_3)$$

$$\vdots$$

$$J_t = J_{t-1} + C \cdot i_t = C \cdot (i_1 + \cdots + i_{t-1}) + C \cdot i_t = C \cdot (i_1 + \cdots + i_{t-1} + i_t).$$

Assim,

$$J_t = C \cdot \left(\sum_{k=1}^{t} i_K\right).$$

Para o caso particular, em que a taxa aplicada é constante, ou seja,

$$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_{t-1} = i_t = i,$$

tem-se:

$$J_t = C \cdot (\underbrace{i + i + i + \cdots + i + i}_{t \text{ vezes}})$$

$$J_t = C \cdot i \cdot t.$$

Os juros simples são resultantes do produto do capital pela taxa e pelo período da operação. Observamos que, nessa fórmula, o prazo *t* deve estar expresso na mesma unidade temporal de *i*, isto é, se a taxa *i* for definida em meses, o prazo *t* deverá estar em meses.

Seja M_t o montante acumulado em um intervalo de *t* períodos, que corresponde à soma do Capital C e dos Juros acumulados. O montante simples é dado por:

$$M_t = C + J_t$$

$$M_t = C + C \cdot i \cdot t$$

Tem-se:

$$M_1 = C + J_1 = C + C \cdot i_1 = C \cdot (1 + i_1)$$

$$M_2 = C + J_2 = C + C \cdot (i_1 + i_2) = C \cdot (1 + i_1 + i_2)$$

$$\vdots$$

$$M_t = C + J_t = C + C \cdot (i_1 + \cdots + i_{t-1} + i_t) = C \cdot (1 + i_1 + \cdots + i_{t-1} + i_t)$$

Assim,

$$M_t = C \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{t} i_K\right).$$

Da mesma forma, a taxa aplicada é constante, ou seja,

$$i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_{t-1} = i_t = i,$$

e tem-se:

$$M_t = C \cdot (1 + \underbrace{i + i + i + \cdots + i + i}_{t \text{ vezes}})$$

$$M_t = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M_t = C + C \cdot i \cdot t.$$

Barros (2013) propõe uma análise do gráfico do montante simples, que ocorre no regime de capitalização descontínua. Nesse caso, sendo as grandezas discretas, teremos:

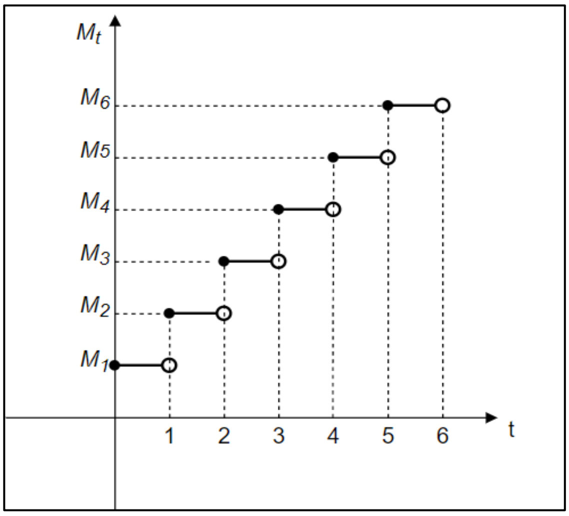


Figura 2: Gráfico do montante simples no regime descontínuo
Fonte: baseado em Barros (2013)

Por outro lado, Barros (2013) indica que se adote a convenção linear para determinar a formação dos juros simples, ao longo de um período considerado, para *t* valores fracionados. Para isso, propõe realizar uma interpolação linear entre os dois valores de M_t e M_{t+1} , em que *t* e *t+1* são valores inteiros.

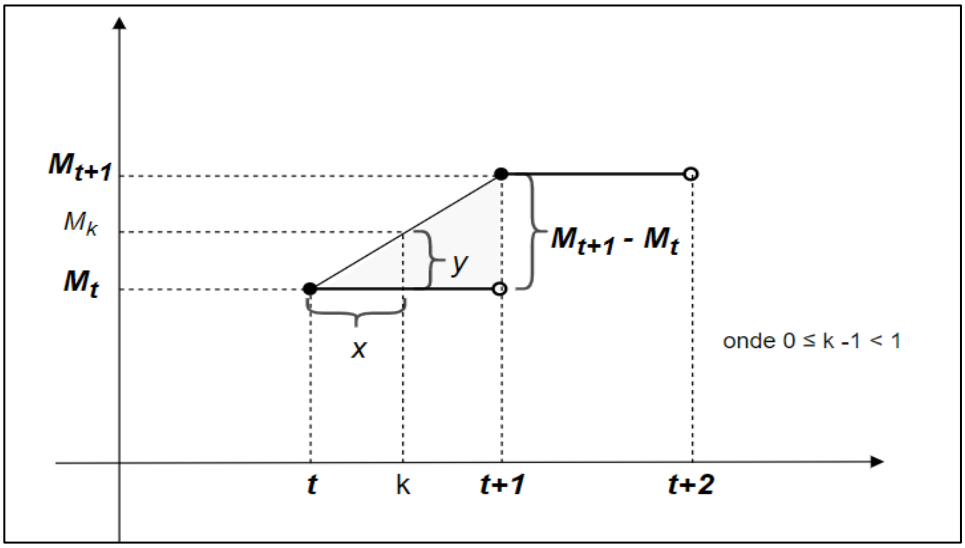


Figura 3: Interpolação linear do montante simples
Fonte: baseado em Barros (2013)

A partir dos dados do gráfico da figura 3, de $M_t = C + C \cdot i \cdot t$, e utilizando-se de semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{M_{t+1} - M_t}{y} = \frac{(t+1)\ - t}{x}.$$

Como $M_{t+1} - M_t = C \cdot i$,

$$\frac{C \cdot i}{y} = \frac{(t+1)\ - t}{x} \rightarrow \frac{C \cdot i}{y} = \frac{1}{x} \rightarrow y = C \cdot i \cdot x.$$

Note que $M_k = M_t\ +\ y$, logo

$$M_k = (C + C \cdot i\ \cdot t) + C \cdot i \cdot x\ = C \cdot (1 + i \cdot t + i \cdot x).$$

Como $x\ =\ k\ -\ t$,

$$M_k = C \cdot (1 + i \cdot t + i \cdot (k\ -\ t))$$

$$M_k = C \cdot (1 + i \cdot t + i \cdot k\ - i \cdot\ t)$$

$$M_k = C \cdot (1 + i \cdot k\ ) = C + C \cdot i \cdot k.$$

Conforme Barros (2013), concluímos que, pela convenção do resultado obtido na interpolação linear *(*$M_k = C + C \cdot i \cdot k$*)*, que a equação do montante simples

$$M_t = C + C \cdot i \cdot t$$

é válida, tanto para t inteiro como fracionado, ou seja, é valida para grandeza discreta ou para utilização de grandeza contínua, como mostra figura 4:

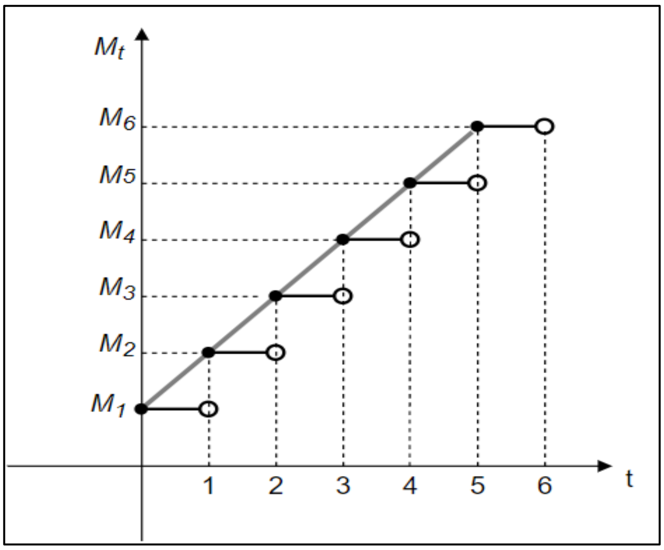


Figura 4: Gráfico do montante simples (grandeza discreta e contínua)
Fonte: baseado em Barros (2013)

Nota-se que o gráfico do montante simples é uma reta quando utilizamos grandezas contínuas, com t ≥ 0.

No mercado financeiro e nas operações bancárias e comerciais, a palavra taxa é utilizada de várias formas. Por isso, conforme seu emprego em determinada situação específica, a taxa pode ser classificada como efetiva, nominal, proporcional ou equivalente. Barros (2013) apresenta as seguintes caracterizações para taxas:

Taxa efetiva – dada uma taxa (i), determinada no período (t), ela será efetiva se a unidade referencial do tempo da taxa coincide com a unidade de tempo da capitalização, que normalmente é a unidade do período. Exemplos: 1%/dia, capitalizada diariamente; 0,5%/mês, capitalizada mensalmente.

Taxa nominal – dada uma taxa (i), determinada no período (t), ela será nominal se a unidade referencial do tempo da taxa é diferente da unidade de tempo da capitalização, que normalmente é a unidade do período. Exemplos: 1%/dia, capitalizada mensalmente; 0,5%/mês, capitalizada diariamente.

Taxa proporcional – dadas duas taxas de juros distintas, $i_1 \; e \; i_2$, determinadas no período $t_1 \; e \; t_2$, elas serão proporcionais se

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Seja $t_1 \; > \; t_2$, e *m* o número de vezes que o período t_2 se equivale à t_1, temos que $t_1 = m \cdot t_2$. Da equação anterior e dadas as taxas de juros $i \; e \; i_m$,

$$\frac{i}{i_m} = \frac{m \cdot t_2}{t_2} \rightarrow \frac{i}{i_m} = m \rightarrow i_m = \frac{i}{m}.$$

Para compreender essa ideia de taxa proporcional, tem-se o seguinte exemplo: dada uma taxa de 6%/ano, para determinar uma taxa proporcional ao mês, temos que $m = 12$, logo $i_{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5\%/mês$.

Taxa equivalente – a definição pode ser dada como duas taxas de juros distintas que geram um mesmo montante quando aplicadas a um mesmo capital inicial no mesmo período de tempo.

Barros (2013) destaca que, no regime de juros simples, as taxas de juros equivalentes são taxas de juros proporcionais. Essas características e conversões de taxas serão importantes para as análises de situações de juros simples realizadas nessa pesquisa.

Pelas análises do montante simples $M = C + J \; = C + C \cdot i \cdot t$, em que a equação é válida tanto para grandezas discretas como para grandezas contínuas, compreendemos que os conceitos de juros simples e de montante simples podem ser modelizados pela forma analítica da função afim.

Desse modo, consideramos para a presente investigação:

Montante simples:

$M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0, uma interpretação analítica da função *afim* do tipo $f(x) = a \cdot x + b$.

Nesse caso, a variável dependente é o montante $M(t)$, enquanto a variável independente é o período *t.* Assume como coefiente linear *b* o valor do capital *C* e como coeficiente *a*, o valor de $C \cdot i$.

Juros simples:

$J(t) = C \cdot i \cdot t$, para t ≥ 0, uma função *linear* do tipo $f(x) = a \cdot x$.

A variável dependente é o juro $J(t)$, enquanto a variável independente é o período *t*. Assume como coeficiente *a*, o valor de $C \cdot i$. Nesse caso, o coeficente linear $b = 0$, o que significa que os juros podem ser representados pela forma analítica de uma função *linear.*

Tendo a definição da função linear $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \cdot x$, se existe $a \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais *c* e *x,* tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(c \cdot x) = f(x)/c$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Assim, a definição tradicional pode ser interpretada como: a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade), tal que $y = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Utilizando-se das propriedades analisadas nessa seção, podemos inferir que o juro simples (*J*) a uma taxa fixa (*i*) é diretamente proporcional ao período *t*.

Tem-se que $J(t) = C \cdot i \cdot t$, e daí conclui-se que

$$\frac{J(t)}{t} = C \cdot i.$$

Como *C* e *i* são constantes, tem-se que a razão $\frac{J(t)}{t}$, com t > 0, é constante. Logo, o juro (*J*) é diretamente proporcional ao período *t*.

Em relação à função afim, definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pela perspectiva da TCC, sua forma algébrica pode ser representada por meio das operações multiplicativa (termo $a \cdot x$) e aditiva ($a \cdot x + b$). Dessa forma, ela associa-se aos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo concomitantemente, e, portanto, aos problemas mistos definidos por Vergnaud (MIRANDA, 2019).

Esses pressupostos permitem modelizar os conceitos de juros simples e do montante simples da forma analítica da função afim, e associá-los aos Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, indo ao encontro do objetivo da pesquisa - *estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais.*

Destarte, além dos aspectos matemáticos e históricos, a importância de se estudar juros simples se evidencia quando documentos curriculares oficiais que direcionam a educação brasileira, como a BNCC (BRASIL, 2018a), projetos de políticas públicas brasileira como a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF (BRASIL, 2010), organismos internacionais como a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE (2005), pesquisas como de Grando e Schneider (2010), Kistemann e Lins (2014), Pessoa, Muniz, Kistemann (2018), e Rodrigues, Silva e Rodrigues (2021), além das implicações e aplicações para a vida cotidiana, sugerem a necessidade da abordagem desse conceito.

Neste sentido, apresentam-se, na seção 1.3, documentos oficiais, livros didáticos e pesquisas em Educação Matemática associados a juros simples.

1.3 Documentos oficiais, livros didáticos e pesquisas em Educação Matemática

A crise econômica mundial de 2008, que afetou pessoas ao redor do mundo, evidenciou e trouxe para o debate da comunidade acadêmica a temática da educação financeira.

Buscando promover ações de educação financeira no Brasil, em 2010, instituiu-se, por meio do Decreto n. 7.397, de 22 de dezembro de 2010, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF). Dentre os objetivos elencados no documento estão o de promover a educação financeira, a educação previdenciária, e contribuir para o fortalecimento da cidadania e para a tomada de decisões conscientes.

A ENEF indicou orientações para a educação financeira nas escolas, se apresentando como uma estratégia fundamental para ajudar as pessoas a realizarem seus sonhos individuais e coletivos. Discentes e docentes financeiramente educados podem constituir-se em indivíduos crescentemente autônomos em relação a suas finanças e menos suscetíveis a dívidas descontroladas, fraudes e situações comprometedoras que prejudiquem não só sua própria qualidade de vida, como também a de outras pessoas (BRASIL, 2010).

Embora educação financeira esteja estritamente relacionada à matemática financeira, Bezerra Filho e Espindola (2021) fazem distinção entre essas temáticas. Para os autores, a matemática financeira "[...] é uma área que aplica conhecimentos matemáticos à análise de questões ligadas a dinheiro ao longo do tempo, enquanto a educação financeira está ligada à formação de comportamentos do indivíduo em relação às finanças" (BEZERRA FILHO; ESPINDOLA, 2021, p.4).

Bezerra Filho (2019) aponta que o aprendizado das duas temáticas é interligado, e que a recente inclusão do tema educação financeira no contexto escolar fortalece a própria matemática financeira, pois a educação financeira "[...] pode servir como elemento motivador para o aprendizado dos conteúdos de matemática financeira; o conhecimento e domínio destes conteúdos são essenciais no processo de educação financeira de cada indivíduo" (BEZERRA FILHO, 2019, p. 32).

Essas duas temáticas são encontradas na versão final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018 pelo Ministério da Educação. Ela é o documento oficial que estabelece as competências essenciais que todos os alunos devem avançar ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018a).

A BNCC ressalta que essas aprendizagens essenciais devem convergir para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, definida como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana [...]" (BRASIL, 2018a, p. 8).

Nesse contexto, a BNCC reconheceu a "[...] educação para o consumo, educação financeira e fiscal [...]" (BRASIL, 2018a, p. 20) como um dos vários temas transversais e integradores que deverão ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas dos estados e municípios.

Para o tema transversal constituído pela educação financeira, a BNCC menciona que esta "[...] favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro" (BRASIL, 2018a, p. 269).

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC estabelece competências específicas para cada área do conhecimento (linguagens, matemática, ciências da natureza, ciências humanas). Para cada competência específica é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio. É nesse contexto que se insere a matemática financeira. Os conteúdos são trazidos dentro do conjunto de habilidades proposto para desenvolver uma determinada competência.

Entre as habilidades encontra-se a de aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações para o controle de orçamento familiar, por meio de simuladores de cálculos de juros simples e compostos, para tomar decisões. Também figura entre elas a de interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos (BRASIL, 2018a).

Assim, identificamos que, na BNCC, a educação financeira é tratada como um tema integrador, enquanto a matemática financeira é tratada como um conteúdo que pode ser estudado dentro de um campo da área de conhecimento. Isso fica mais evidente quando verificamos os livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD 2018, e o Guia do Livro Didático para o Ensino Médio, documento direcionado aos professores para subsidiar a escolha dos livros didáticos.

Todas as oito coleções didáticas aprovadas no PNLD de 2018 para a disciplina de Matemática apresentam pelo menos um volume com o conteúdo de matemática financeira destacado no sumário da obra.

O próprio Guia do Livro Didático, ao tecer as avaliações das obras, propõe esse agrupamento em campos de conteúdos, como números; álgebra; geometria; estatística e probabilidade. O conteúdo da matemática financeira, em especial juros simples, foi agrupado no campo álgebra.

O Guia do Livro Didático pondera uma evolução no tratamento da abordagem do conteúdo da matemática financeira pelas editoras, mencionando as situações que são trabalhadas, em especial "[...] juros simples e compostos, entre outros. Usualmente, para modelizar tais problemas reais, recorre-se às funções afim e exponencial, o que se constitui em uma aplicação prática relevante desses dois tipos de função" (BRASIL, 2018b, p. 27).

Assim, os conceitos de matemática financeira, em especial de juro e montante simples, podem ser desenvolvidos em sala de aula por meio da temática transversal e integradora da educação financeira ou, propriamente, no campo do conteúdo da matemática financeira.

A integração entre esses dois temas é abordada por Rodrigues, Silva e Rodrigues (2021). Os autores apontam que a educação financeira a partir de conceitos de juros e taxas, por exemplo, se preocupa em como esses conceitos implicam nas tomadas de decisões de pessoas. Assim, destacam a importância do ensino da matemática financeira na educação básica, "pois busca proporcionar aos alunos uma visão geral das situações econômicas que encontrarão no dia a dia, para auxiliá-los nas escolhas de procedimentos e estratégias mais adequadas a resolver problemas cotidianos" (RODRIGUES; SILVA; RODRIGUES, 2021, p. 24).

No que diz respeito aos livros didáticos, esse material torna-se fator relevante para o ensino escolar. A importância do livro didático no contexto de ensino é apontada por Santos Junior, Dias e Guadagnini (2017), considerando-o um determinante sobre os conteúdos abordados na escola, pois "assume o papel de documento orientador para o professor, na escolha de suas ações didáticas, ou seja, pode ajudar na determinação dos conceitos a serem ensinados e como eles devem ser ensinados" (SANTOS JUNIOR; DIAS; GUADAGNINI, 2017, p.1).

Lajolo (1996) explicita o livro didático como

> [...] o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina. (LAJOLO, 1996, p. 4)

Assumimos para essa pesquisa a compreensão de livro didático de Lajolo (1996) e, portanto, a ideia de que o livro didático, por vezes, define o que e como se ensina determinado conteúdo.

Quando o livro didático é empregado em sala de aula, ele se torna um aliado no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que otimiza o tempo do professor, ao passo que este tem disponível um material que contempla textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, ao invés de planejar e propor todos esses tópicos. Por vezes, o livro didático subsidia a formação insuficiente do professor que ensina matemática, desde que seja um livro correto e adequado. Também fornece suporte para o ensino sequencial da matemática, já que, essencialmente, um assunto depende de outro. Para o aluno, é uma fonte de consulta e de apoio em contrapartida à aula que não fornece todos os elementos necessários ao processo de aprendizagem, e se torna uma referência para consulta das definições, propriedades e explicações (DANTE,1996).

Considerando todos esses benefícios de um livro didático, Dante (1996) afirma que muitos professores, por falta de outros materiais, tornam-se dependentes dele. Essa centralidade do livro didático induz à obrigatoriedade de trabalhar todo o conteúdo proposto no material, ao invés de priorizar a aprendizagem do aluno. Como consequência, o "[...] conteúdo do livro didático de matemática torna-se o currículo de matemática" (DANTE, 1996, p.88).

Além disso, essa dependência do livro didático de matemática faz com que os temas disponibilizados no livro sejam normalmente os únicos trabalhados em sala de aula, e, assim não se considera o contexto escolar e social dos alunos. Essa concentração das atividades quase que exclusiva no material didático diminui as possibilidades de interação entre os alunos e professores (DANTE, 1996).

Para Dante (1996), seria ideal que o livro didático fosse visto como

> [...] mais para inspirar do que para ser rigidamente seguido. E, à medida que o aluno e o professor avançam com o livro, eles o completam, suplementam, reorganizam, recriam, enfim, escrevem o seu próprio livro. Nesse sentido, como matéria-prima para todos esses desenvolvimentos, o livro didático torna-se essencial (DANTE, 1996, p. 90).

Valente (2008) aponta que a matemática escolar ficou caracterizada pela relação direta entre livros didáticos e o ensino no país. Essa relação é tão intrínseca que temos políticas públicas de elaboração, avaliação, aquisição e distribuição de livros didáticos na rede pública de ensino, como o PNLD.

Compreendemos que o livro didático é um material essencial no contexto escolar, contemplando as exigências dos documentos oficiais que regulam as diretrizes e tendências de ensino; são analisados, avaliados e aprovados pelo PNLD; escolhidos pelos professores e corpo diretivo das escolas.

Em relação às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino de matemática financeira, verifica-se a importância de se investigar como são apresentados esses conteúdos no contexto escolar, como apontado por Kistemann Jr, Coutinho e Figueiredo (2020).

A pesquisa de Rodrigues, Silva e Rodrigues (2021) propôs um estado da arte e analisou a produção acadêmica das dissertações e teses relacionadas à educação financeira e/ou matemática financeira defendidas nos programas de pós-graduação no Brasil no período de 2000 a 2020.

Até 2012, haviam sido produzidas 26 pesquisas com esse viés. De 2013 a 2020, houve 280 investigações defendidas em programas de pós-graduação, conforme levantamento dos pesquisadores. Esse aumento significativo de pesquisas sobre a temática pode ser justificado de várias formas, entre elas, como apontado pelos pesquisadores, o início das defesas de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat). Esse interesse em pesquisas sobre educação financeira e/ou matemática financeira "[...] pode ser justificado porque os mestrandos do Profmat consideram importante abordar essas temáticas em suas práticas pedagógicas como Professores de Matemática nas escolas da Educação Básica" (RODRIGUES; SILVA; RODRIGUES, 2021, p. 9).

Contudo, consideramos que outros fatores também podem revelar o aumento do interesse em pesquisas sobre esses temas, como a exigência, em documentos curriculares, para se tratar do assunto; a implantação de estratégias de políticas públicas, como a ENEF, e a própria preocupação com o direcionamento do ensino e aprendizagem da matemática financeira, em virtude de ser este um tema relevante na vida das pessoas.

Rodrigues, Silva e Rodrigues (2021) identificaram pesquisas que explicitam a importância da educação financeira e da matemática financeira na formação de cidadãos envolvendo o consumo consciente. Para os autores, a matemática financeira está presente na vida de todo cidadão brasileiro, e seus conceitos "são extremamente importantes para a formação de um cidadão financeiramente educado" (RODRIGUES; SILVA; RODRIGUES, 2021, p. 20).

Ainda na pesquisa desses autores, foram identificadas investigações que visam discutir teórica e metodologicamente aplicações dos conteúdos de matemática financeira e educação financeira em sala de aula. Do levantamento das 306 investigações, os autores agruparam 118 pesquisas nessa categoria, ou seja, quase 40% das pesquisas selecionadas. Essas pesquisas trabalham os conteúdos de inflações, taxas, juros simples e composto e porcentagem, bem como visam compreender os conceitos fundamentais da matemática financeira envolvidos nos problemas e desenvolver estratégias para resolvê-los (RODRIGUES; SILVA; RODRIGUES, 2021).

Esse interesse das pesquisas sobre conteúdos de matemática financeira vem ao encontro das pesquisas de Grando e Schneider (2011), Kistemann e Lins (2014), e Rodrigues, Silva e Rodrigues (2021), que revelam a importância da forma como são apresentadas as situações de matemática financeira em livros didáticos de matemática, devido à sua relevância no processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, conforme apontado por Lajolo (1996), para quem o livro didático define o que se ensina e como se ensina.

Pesquisadores como Pessoa, Muniz, Kistemann (2018), afirmam que os educadores são os mais capacitados, em ambiente escolar, para promover e aperfeiçoar as ações relacionadas à educação financeira e, consequentemente, da matemática financeira. Para OCDE (2005) trata-se de um meio de prover conhecimentos e informações ou como processo que permite o entendimento sobre produtos, conceitos, riscos e o desenvolvimento de habilidades.

O compromisso da escola na preparação dos alunos para a vida, no contexto social e econômico, é abordado por Grando e Schneider (2011) no momento em que discutem a necessidade de situações sobre conteúdos de matemática financeira para oportunizar tomadas de decisões apropriadas. Para esses pesquisadores, analisar "[...] situações dos diferentes contextos revela a importância e a necessidade dos conceitos de matemática financeira" (GRANDO, SCHNEIDER, 2011, p. 91) para as relações de consumo e trabalho.

A pesquisa de Kistemann e Lins (2014) apontou que

> [...] a taxa de juros constituiu-se como um item subaproveitado para a análise e a tomada de decisão, [...] sendo preterida em favor da análise do valor da parcela. Simulações podem revelar o que as taxas de juros, por menores que possam parecer, são capazes de provocar um estrago (sic) nas contas e nas transações financeiras de um indivíduo-consumidor que não saiba lidar, minimamente com seu significado (KISTEMANN; LINS, 2014, p. 1321).

Assim, evidencia-se a importância dos conceitos de matemática financeira, em especial, juro e taxa, para a tomada de decisão do indivíduo.

A pesquisa de Santos Junior (2017) teve como um dos objetivos analisar uma coleção de livros didáticos para o Ensino Médio sobre o ensino das noções de juros simples e compostos. Para o autor, analisar os livros didáticos “[...] traz indícios do saber a ser ensinado, ou seja, do que provavelmente é abordado em sala de aula em relação aos domínios da disciplina Matemática” (SANTOS JUNIOR, 2017, p. 449).

Para o pesquisador, na educação básica, o direcionamento dos conceitos de matemática financeira

> [...] foi no cálculo do montante no trabalho com juros compostos e, se considerarmos o setor juros simples, o foco foi dado ao cálculo de juros. Convém chamar a atenção para os dois focos. Primeiramente, sobre o cálculo de juros em capitalização simples: quando considerados no texto, são aplicados em atividades propostas que não condizem com a realidade da aplicação deste tipo de capitalização, que é mais direcionada ao cálculo de multas com tempos inferiores a trinta dias. Além disso, sabemos que a capitalização simples tem também destaque quando tratamos com operações de descontos, cuja abordagem não ocorreu na Educação Básica. (SANTOS JUNIOR, 2017, p. 452).

Para Santos Junior (2017), os conceitos de juros simples não foram explorados nas situações mais aplicadas, como cálculo de multas e descontos. Ainda, afirma que, na coleção analisada, as situações propostas trazem abordagem de manipulação direta de procedimentos matemáticos (SANTOS JUNIOR, 2017).

Essa pesquisa de mestrado não busca investigar se as situações de juros simples nos livros didáticos divergem do contexto das relações de consumo e de mercado, como aplicações financeiras pelo regime de juros simples, mas considerando que o LD é o principal guia de conteúdos em sala, buscamos investigar como essas situações se apresentam no contexto escolar, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, visto que podem constituir uma das principais fontes de enfrentamento de situações de juros para os estudantes.

1.4 Síntese e justificativa para o desenvolvimento desta investigação

Conforme exposto até o presente, justificamos o desenvolvimento desta pesquisa a partir dos seguintes aspectos:

- ✓ A matemática financeira está presente na vida pessoas, ao realizarem atividades comerciais e financeiras;
- ✓ A importância do estudo de juros simples no contexto escolar é fundamental para que o sujeito enfrente situações, se aproprie e desenvolva os conceitos relacionados a juros (GRANDO, SCHNEIDER, 2010);

- ✓ A BNCC (BRASIL, 2018a) prevê para o Ensino Médio a interpretação de situações que envolvam juros simples;
- ✓ Situações de juros simples estão presentes nos livros didáticos para o Ensino Médio;
- ✓ Os livros didáticos oferecem uma orientação de conteúdos matemáticos de maneira singular e detalhada (FREITAS; ALMOULOUD, 2016). Compreender o processo de aprendizagem pelos alunos no contexto escolar passa pela consulta do livro didático como uma fonte dessa investigação (BITTAR, 2017);
- ✓ A importância de investigações relacionadas às estruturas das situações. Para compreender determinado conceito, é necessário tomar como objeto de estudo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos (VERGNAUD, 2013b);
- ✓ A classificação das relações de base e das classes de situações que são geradas dessas relações é um trabalho científico indispensável (VERGNAUD, 1996);
- ✓ A não identificação de pesquisas, no Brasil, que analisam as estruturas de situações de juros simples à luz da Teoria dos Campos Conceituais;
- ✓ A possibilidade de aproximação da forma analítica do conceito de juros simples e do montante simples com os Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas;
- ✓ Promover aos professores a importância sobre as diferentes classes de situações relacionadas a juros simples, uma vez que diferentes classes de situações demandam diferentes esquemas pelos alunos e, portanto, proporcionam novas aprendizagens.

Dessa forma, justificamos o desenvolvimento desta pesquisa e apresentamos seu objetivo principal: *estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais.*

O próximo capítulo apresenta os aportes teóricos que subsidiaram as discussões e análises dos dados coletados para investigação.

CAPÍTULO 2

APORTES TEÓRICOS

Nesta seção, apresentamos elementos da Teoria dos Campos Conceituais, que constitui o referencial teórico desta pesquisa. Abordamos de modo específico o Campo Conceitual das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas e os problemas mistos, uma vez que são essenciais para o desenvolvimento e análises desta pesquisa.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista – que interessa e proporciona diversas contribuições à Didática – desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud, que foi orientando de doutorado de Piaget. Essa teoria visa fornecer uma estrutura coerente e princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas (VERGNAUD,1993).

Para Vergnaud (1996), a TCC possui dois objetivos: descrever e analisar a complexidade progressiva, em médio e longo prazo, das competências matemáticas que os alunos desenvolvem na escola e fora dela; e estabelecer melhores conexões entre a forma operacional do conhecimento, ou seja, o saber-fazer, e a forma predicativa de conhecimento, que consiste nas expressões linguísticas e simbólicas desse conhecimento, ou seja, saber explicitar os objetos e suas propriedades.

Segundo Vergnaud (1996), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, especialmente quando nos interessamos pela sua aprendizagem e seu ensino. Para o pesquisador, um conceito adquire sentido para o aluno por meio das situações e dos problemas a resolver.

Vergnaud (2013b) afirma que um conceito não se desenvolve por meio de uma única categoria de situações, mas por uma variedade de situações. Ainda, afirma que uma situação não pode ser analisada por meio de um único conceito, mas vários conceitos estão associados a uma única situação.

Uma das possibilidades de se compreender o desenvolvimento cognitivo durante a experiência, inclusive a escolar, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, é considerar como objeto de estudo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos, denominado por Vergnaud (2013a) de Campo Conceitual.

Vergnaud (2013a) considera o conceito como resultado das situações que o sujeito enfrenta, ainda que as definições sejam importantes na constituição da racionalidade.

No âmbito da TCC, Vergnaud (2013a) define um conceito a partir de três conjuntos, representados como conceito = def (S, I, R) em que:

- S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito
- I: conjunto de invariantes operacionais que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) passíveis de serem evocadas por essas situações,
- R: conjunto de representações linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas etc.) que permitem representar os conceitos e as suas relações e, consequentemente, as situações e esquemas que evocam.

Essa definição proposta pela TCC evidencia que os conceitos são compostos de um elemento objetivo de natureza epistêmica, como o conjunto de situações que estão relacionadas dialeticamente com os esquemas; um elemento próprio do sujeito, como os invariantes operatórios presentes nos esquemas; e de um elemento semiótico, que se refere ao conjunto de representações ou sistemas de signos, utilizados para enunciar os conceitos, as relações entre eles, e as propriedades dos objetos (OTERO, 2014).

Na Teoria dos Campos Conceituais, a definição de situação é posta no sentido de situações a serem enfrentadas pelo sujeito. Assim, “[...] toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas” (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Otero (2014) afirma que uma situação representa uma classe de situações, com especificidades epistemológicas bem definidas. Apresenta exemplos, como: pilotar um avião, cortar uma árvore, resolver uma equação, calcular uma integral, resolver um problema de juros composto etc.

Para Vergnaud (1996), a primeira entrada de um Campo Conceitual é o conjunto das situações, pois são elas que dão sentido aos conceitos. Nessa pesquisa, assumimos o pressuposto de investigar as possibilidades de situações de juros simples e caracterizá-las utilizando como fonte de dados o livro didático de matemática do Ensino Médio.

Os sujeitos se adaptam diante das situações que enfrentam, porém, o que se modifica são os esquemas utilizados pelos sujeitos durante a adaptação. Dessa forma, uma classe de situações conduz a certo tipo de esquemas que se desenvolvem conforme o tipo da situação enfrentada (VERGNAUD, 1996; OTERO, 2014).

Para Vergnaud (1993), o conceito de esquema não funciona da mesma maneira para as situações com as quais o sujeito já está familiarizado e para aquelas em que não possui todas as competências para o seu tratamento.

> No primeiro caso, observam-se, para uma mesma classe de situações, comportamentos amplamente automatizados, organizados por um só esquema; no segundo caso, observa-se a sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Enfrentar uma situação gera uma sucessão de ações, regidas por regras de ação, de decisão e de tomada de informação, para atingir um objetivo, sendo que muitas vezes o sujeito realiza antecipações. Porém, os esquemas também são essencialmente compostos por uma componente epistêmica, os invariantes operatórios; no caso das situações que exigem adaptações dos esquemas, ocorrem as inferências, e o sujeito adapta os seus esquemas. O conjunto dos invariantes operatórios, que são os conceitos em ação e os teoremas em ação, tem a função de reconhecer e identificar os objetos, suas relações, suas propriedades e suas transformações (VERGNAUD, 1996; OTERO, 2014).

O teorema em ação pode ser compreendido como uma proposição tida por verdadeira ou falsa na tarefa proposta. Um exemplo de possível teorema em ação: “a multiplicação sempre aumenta o produto”. Esta proposição pode ser verdadeira quando os fatores são números naturais positivos; entretanto, esse teorema pode ser falso quando utilizamos números decimais. Os conceitos em ação nesse mesmo exemplo podem ser: fração, razão, número racional, múltiplo divisor, entre outros, pois um conceito em ação é considerado pertinente na ação do sujeito diante de uma classe de situação.

O conjunto das representações linguísticas e simbólicas dá estabilidade às formas conceituais elaboradas durante o desenvolvimento do indivíduo e auxiliam no processo de conceitualização implícito na ação do sujeito. A linguagem possui as funções de auxiliar na designação dos objetos, propriedades, relações, e auxiliar o pensamento e a organização da ação (VERGNAUD, 2013a).

Por outro lado, as representações simbólicas são um meio mais claro de identificação mais dos objetos matemáticos, com a função de auxiliar na resolução dos problemas. Um objeto, um teorema, uma propriedade entre outros, podem ter distintas representações simbólicas (VERGNAUD, 1996).

Assim, a compreensão de conceito pela TCC é baseada nos três conjuntos, e não apenas em uma simples definição.

Um conjunto de conceitos e um conjunto de situações remetem aos Campos Conceituais. Vergnaud (1993) estabeleceu dois campos bem difundidos e reconhecidos pela comunidade científica: o das estruturas aditivas e o das multiplicativas.

O Campo Conceitual das estruturas aditivas é “[...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas” (VERGNAUD, 1993, p. 9). Para este Campo Conceitual, Vergnaud (1993) estabeleceu seis categorias de problemas, a saber:

Número	**Nome da categoria – Campo Conceitual das estruturas aditivas**
1	Composição de duas medidas em uma terceira
2	Transformação de uma medida inicial em uma medida final
3	Relação de comparação entre duas medidas
4	Composição de duas transformações
5	Transformação de uma relação
6	Composição de duas relações

Quadro 1: Nome das categorias do Campo das estruturas aditivas
Fonte: Baseado em Vergnaud (2009) e Santana (2012)

O Campo Conceitual das estruturas multiplicativas é “[...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações”

(VERGNAUD, 1993, p. 10). Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), há cinco categorias de situações:

Número	Nome da categoria – Campo Conceitual das estruturas multiplicativas
1	Isomorfismo de medidas ou proporção simples
2	Comparação multiplicativa
3	Produto de medidas ou produto cartesiano
4	Função bilinear ou proporção dupla
5	Proporção múltipla

Quadro 2: Nome das categorias do Campo das estruturas multiplicativas
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014), Vergnaud (1993), Magina *et al.* (2014)

Para as análises dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Vergnaud (2009b) propôs a utilização de códigos para representar os esquemas relacionais, a fim de facilitar a interpretação das relações envolvidas em cada situação. Estas relações podem ser estabelecidas entre dois (binária), três (ternária) ou quatro (quaternária) elementos na situação.

Vergnaud (2009, p. 37) compreende que "[...] a noção de cálculo relacional[5] contribui para esclarecer e explicitar a noção, muito vaga, de raciocínio", podendo ser representada pelos esquemas relacionais.

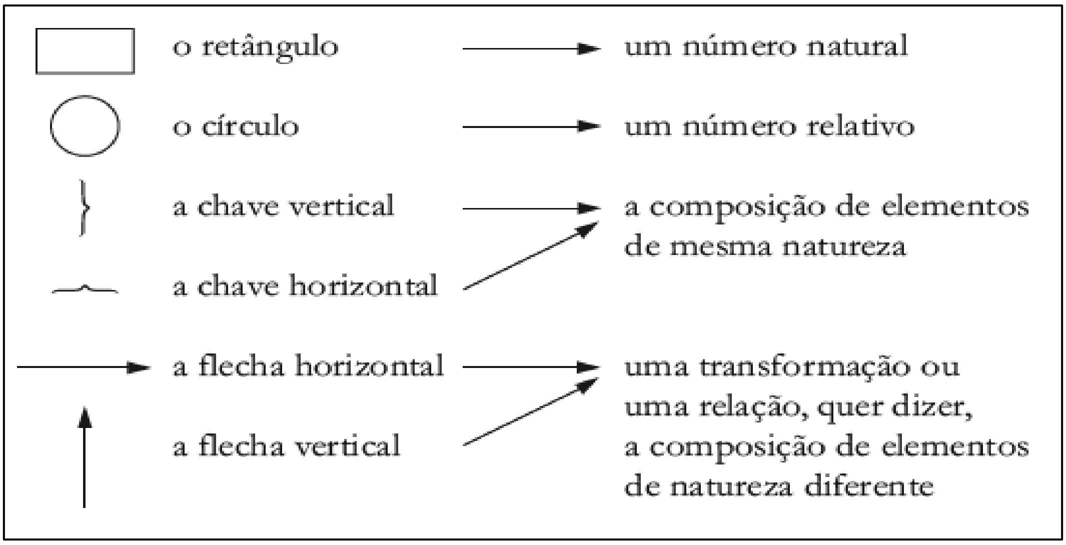


Figura 5: Códigos para representar os esquemas relacionais
Fonte: Vergnaud (2009, p. 201)

[5] Vergnaud (2009, p37) compreende cálculo relacional como uma noção que "[...] se aplica a todos os tipos de relações, binárias, ternárias, quaternárias, e que ela tem ligações estreitas com a noção de regra de conduta". Sobre conduta, Vergnaud (2013a) afirma que ela não se compõe apenas de ações, mas também de tomar as informações necessárias para a continuidade da atividade, e das verificações que permitem ao sujeito certificar-se de que fez o que pensou.

Para estes códigos, Vergnaud faz associações aos conjuntos numéricos envolvidos nas situações e na elaboração dos esquemas relacionais. Considera os números naturais $N = \{0, 1, 2, 3 \dots n \dots\}$ como “nem positivos nem negativos, [...] são números sem sinal” (VERGNAUD, 2009, p. 198) por corresponderem a uma medida. Já os números relativos, como designado por Vergnaud (2009), correspondem ao conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots n \dots\}$, sendo utilizados para representar as transformações positivas ou negativas.

Contudo, Vergnaud (2009) afirma que essas denominações de “número natural” e “número relativo” foram utilizadas por um abuso de linguagem. Em diversas situações apresentadas por Vergnaud (2009), são utilizados números decimais, além de números negativos, para representar medidas, como exemplo das situações que envolvem a grandeza temperatura.

Como a forma analítica das situações de juro simples e montante simples podem ser associadas aos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, nas próximas seções discorremos detalhadamente sobre as estruturas aditivas, estruturas multiplicativas e problemas mistos associados a juros simples.

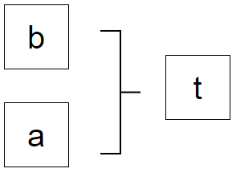
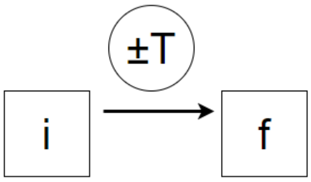
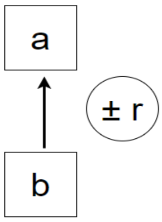
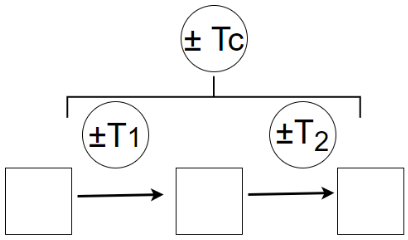
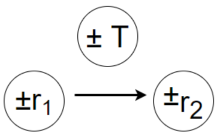
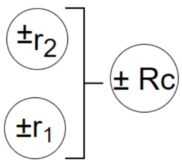
2.2 Campo Conceitual das estruturas aditivas

Consideramos pertinentes os estudos das categorias de situações das estruturas aditivas para subsidiar as análises das situações de juros simples, já que estes podem ter classe de situação aditiva em sua estrutura.

Para exemplificar as seis categorias de situações das estruturas aditivas, tivemos por base estudos de classificação (VERGNAUD, 2009; GITIRANA *et al*. 2014; ZANELLA, 2013; MIRANDA 2019; SANTANA, 2012; MAGINA *et al*., 2014) dessas relações, apresentando exemplos de enunciados, de equações, de resolução e de seus esquemas relacionais.

Conforme Vergnaud (1993), compõem as estruturas aditivas os conceitos de cardinal e de medida, de transformação temporal (perder ou gastar determinada quantia), de relação de comparação quantificada (ter mais que; ter menos que), de composição de medidas relações, de inversão, de número natural e número relativo, de deslocamento orientado e quantificado, entre outros componentes, dependendo da situação.

O Quadro 3 apresenta as seis categorias das estruturas aditivas, com uma breve descrição de cada categoria e o respectivo esquema relacional.

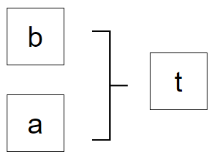
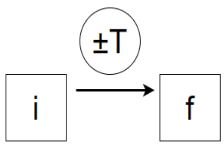
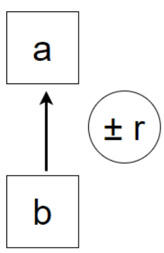
Número	**Nome da categoria**	**Descrição**	**Esquema relacional**
1	Composição de duas medidas em uma terceira	Duas partes que compõem um todo	
2	Transformação de uma medida inicial em uma medida final	Estado inicial e uma transformação que levam ao estado final	
3	Relação de comparação entre duas medidas	Relacionar duas quantidades e compará-las	
4	Composição de duas transformações	Dadas duas transformações, busca-se uma terceira transformação	
5	Transformação de uma relação	Dada uma relação estática e uma transformação, busca-se outra relação	
6	Composição de duas relações	Duas relações estáticas se compõem em outra relação estática	

Quadro 3: Categorias de problemas do campo das estruturas aditivas
Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Vergnaud (2009) e Santana (2012)

Vergnaud (2009) afirma que as relações aditivas são relações ternárias que podem ser encadeadas de diversas maneiras e resultar em uma grande variedade de estruturas aditivas. Assim, estabelece seis categorias fundamentais das estruturas aditivas.

Para Santana (2012), os três grupos básicos de categorias se referem às três primeiras categorias apresentadas por Vergnaud (1993): 1 - Composição de duas medidas em uma terceira; 2 - Transformação de uma medida inicial em uma medida final; 3 - Relação de comparação entre duas medidas.

O Quadro 4 traz as três primeiras categorias das estruturas aditivas, podendo ser consideradas como grupo básico, juntamente com o esquema relacional e as possibilidades de classes dentro de cada categoria.

Número	**Nome da categoria**	**Esquema relacional**	**Possibilidades de classes**	**situação**
1	Composição de duas medidas em uma terceira		Dadas as partes (a) e (b), busca-se o todo desconhecido (t)	A 1.1
			Dada uma das partes (a) e o todo (t), busca-se a outra parte (b)	A 1.2
2	Transformação de uma medida inicial em uma medida final		Transformação positiva (T>0) e medida inicial (i) desconhecida	A 2.1
			Transformação positiva (T>0) e transformação (T) desconhecida	A 2.2
			Transformação positiva (T>0) e medida final (f) desconhecida	A 2.3
			Transformação negativa (T<0) medida inicial (i) desconhecida	A 2.4
			Transformação negativa (T<0) e transformação (T) desconhecida	A 2.5
			Transformação negativa (T<0) medida final (f) desconhecida	A 2.6
3	Relação de comparação entre duas medidas		Relação positiva (r>0) e referente (a) desconhecido	A 3.1
			Relação positiva (r>0) e relação (r) desconhecida	A 3.2
			Relação positiva (r>0) e referido (b) desconhecido	A 3.3

			Relação negativa (r<0) e referente (a) desconhecido	A 3.4
			Relação negativa (r<0) e relação (r) desconhecida	A 3.5
			Relação negativa (r<0) e referido (b) desconhecido	A 3.6

Quadro 4: Possibilidades de classes para as primeiras três categorias do campo aditivo
Fonte: Baseado em Vergnaud (2009); Zanella (2013)

A categoria 1 – *composição de duas medidas em uma terceira possui duas classes de situações*; a categoria 2 – *transformação de uma medida inicial em uma medida final* tem 6 classes; e a categoria 3 – *relação de comparação entre duas medidas*, conta com 6 classes.

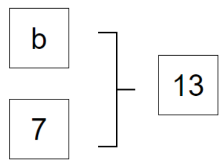
A seguir apresentamos três exemplos, um para cada categoria (Quadro 4).

A <u>categoria 1</u> – *composição de duas medidas em uma terceira* trata-se de tarefas que possuem duas medidas e uma composição entre elas.

Podem-se relacionar duas partes conhecidas e buscar o todo desconhecido. Alternativamente, pode-se dar uma das partes e o todo conhecido, e buscar a outra parte desconhecida. Essa categoria é uma relação estática entre as medidas que se encontram estabelecidas (SANTANA, 2012).

Exemplo:

Situação A1.2 (Dada uma das partes (a) e o todo (t), busca-se a outra parte (b)) – “Márcio tem 13 brinquedos, sendo carrinhos e jogos. Sete são jogos. Quantos são os carrinhos?” (SANTANA, p. 51)

equação numérica	**esquema relacional**
$a + b = t$ $7 + b = 13$ $b = 13 - 7$ $b = 6$	

Quadro 5: Situação A 1.2
Fonte: O autor

Para Vergnaud (2009), nessa categoria, a “[...] busca do complemento entre uma medida elementar e uma medida composta não tem sentido, a menos que primeiramente se atribua um sentido à composição de duas medidas elementares” (VERGNAUD, 2009, p. 216).

Nessa categoria, mesmo havendo um sentido de subordinação entre operação aditiva e subtração, Vegnaud (2009) destaca que não é pertinente considerar a subtração como uma operação subordinada à adição.

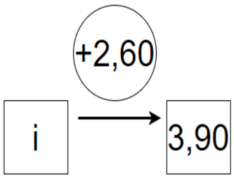
A <u>categoria 2</u> - *transformação de uma medida inicial em uma medida final* trata-se de tarefas que possuem duas medidas e uma transformação que atua na medida inicial.

Nessa categoria, pode-se relacionar uma medida inicial e final conhecidas e buscar a transformação. Alternativamente, pode-se ter a transformação conhecida e uma das medidas, inicial ou final, e buscar a outra medida. Como a transformação pode ser positiva ou negativa, há possibilidade de seis classes nessa categoria.

Uma característica dessa categoria é que a transformação é considerada dinâmica pela sua natureza de permitir uma mudança de estado, um movimento. (SANTANA, 2012).

Exemplo:

Situação A2.1 (transformação positiva (T > 0) e medida inicial (i) desconhecida) – "Henrique acaba de achar R$ 2,60 na calçada. Ele os colocou no seu moedeiro. Ele tem agora, no total, R$ 3,90. Quanto dinheiro ele tinha em seu moedeiro antes do achado?" (VERGNAUD, 2009, p. 208)

equação numérica	**esquema relacional**
$i + T = f$ $i + 2{,}60 = 3{,}90$ $i = 3{,}90 - 2{,}60$ $i = 1{,}30$	

Quadro 6: Situação A 2.1
Fonte: O autor

Apesar de Vergnaud (2009) indicar que os códigos utilizados para representar as medidas nos esquemas relacionais são conjuntos dos números naturais, por vezes encontramos situações em que se propõe variações na natureza dos números envolvidos, como nessa situação A2.1, que se utilizou de números decimais.

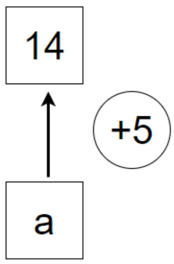
Para a nossa investigação, tornam-se pertinentes essas variações do conjunto numérico utilizado nas situações, pois as situações de juros simples estudadas no Ensino Médio, evidentemente, não ficarão restritas ao conjunto dos números inteiros.

A <u>categoria 3</u> – *relação de comparação entre duas medidas* trata-se de tarefas que possuem duas medidas e uma relação que entre elas.

Santana (2012) afirma que na categoria de comparação existe uma relação estática entre as medidas (referente e referido), ou seja, a relação já se encontra estabelecida e não indica um movimento, diferentemente da transformação que é dinâmica.

Exemplo:

Situação A 3.1 (relação positiva (r > 0) e referente (a) desconhecido) – “André possui 14 carrinhos. André têm 5 a mais do que Thiago. Quantos carrinhos tem Thiago?” (ZANELLA, 2013, p. 53)

equação numérica	**esquema relacional**
$a + 5 = 14$ $a = 14 - 5$ $a = 9$	

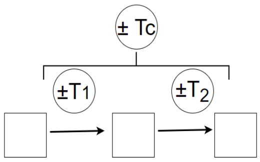
Quadro 7: Situação A 3.1
Fonte: O autor

Nesse exemplo, a transformação é positiva e foi dada no enunciado. O referente é a quantidade de carrinhos de Thiago, que é desconhecida, e o referido é quantidade de carrinhos de André.

A <u>categoria 4</u> – *composição de duas transformações* refere-se a tarefas que possuem duas transformações, que se compõem para resultar em uma transformação composta.

Nessa categoria, a transformação inicial (T1) opera sobre uma determinada medida, levando a um estado intermediário. Em seguida, outra transformação (T2) opera sobre esse estado intermediário, para uma medida final. Assim, temos duas transformações (T1 e T2), que podem ser compostas por uma transformação (Tc), que permite operar diretamente do estado inicial para o estado final.

Há duas grandes classes na quarta categoria: dadas duas transformações elementares (T1 e T2) conhecidas, busca-se a transformação composta (Tc); e dada uma das transformações elementares (T1) e a transformação composta (Tc), busca-se a outra transformação elementar (T2). As transformações (T1; T2 e Tc) podem ser negativas ou positivas, logo, as combinações entre elas resultam em 8 possibilidades de subclasse para cada grande classe dessa categoria. O Quadro 8 mostra o esquema relacional, as classes e subclasses.

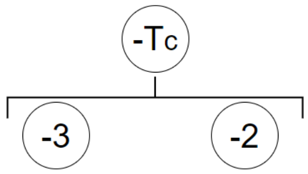
Esquema relacional	**Classes**	**Possibilidades de subclasses**				**Situação**
			T1	**T2**	**Tc = T1 + T2**	
	Dadas duas transformações elementares (T1 e T2) conhecidas, busca-se a transformação composta (Tc)	|T1| > |T2|	T1 >0	T2 >0	Tc > 0	A 4.1
			T1 <0	T2 <0	Tc < 0	A 4.2
			T1 >0	T2 <0	Tc > 0	A 4.3
			T1 <0	T2 >0	Tc < 0	A 4.4
		|T1| < |T2|	T1 >0	T2 >0	Tc > 0	A 4.5
			T1 <0	T2 <0	Tc < 0	A 4.6
			T1 >0	T2 <0	Tc < 0	A 4.7
			T1 <0	T2 >0	Tc > 0	A 4.8
			T1	**Tc**	**T2 = Tc – T1**	
	Dada uma das transformações elementares (T1) e a transformação composta (Tc), busca-se a outra transformação elementar (T2)	|T1| > |Tc|	T1 >0	Tc >0	T2 < 0	A 4.9
			T1 <0	Tc <0	T2 > 0	A 4.10
			T1 >0	Tc <0	T2 < 0	A 4.11
			T1 <0	Tc >0	T2 > 0	A 4.12
		|T1| < |Tc|	T1 >0	Tc >0	T2 > 0	A 4.13
			T1 <0	Tc <0	T2 < 0	A 4.14
			T1 >0	Tc <0	T2 < 0	A 4.15
			T1 <0	Tc >0	T2 > 0	A 4.16

Quadro 8: Possibilidades de subclasses para a quarta categoria
Fonte: Baseado em Vergnaud (2009, p. 217-2018); Zanella (2013, p. 56; 58)

Conforme Zanella (2013), para a primeira classe dessa categoria, as subclasses *situação A 4.1 e situação A 4.5* apresentam o mesmo esquema e equação numérica, pois as transformações possuem mesmo sinal. Da mesma forma, a *situação A 4.2* e *situação A 4.6* são análogas. Para a segunda classe, temos que a *situação A 4.11* e *situação A 4.15* apresentam o mesmo esquema e equação numérica, pois as transformações possuem o mesmo sinal, sendo análogas, como as *situações A 4.12* e *A 4.16*.

Exemplo:

Situação A 4.2 e *situação A 4.6*: (dadas duas transformações elementares, em que |T1| > |T2| ou |T1| < |T2|, busca-se a transformação composta negativa Tc <0, com T1<0 e T2<0) – "Joana participou de um jogo de cartas. Na primeira partida, ela perdeu 3 pontos. Na segunda partida, ela perdeu 2 pontos. Ao final do jogo, quantos pontos ela perdeu?" (ZANELLA, 2013. p. 57)

equação numérica	**esquema relacional**
$(-T1) + (-T2) \ = Tc$ $-3 + (-2) \ = Tc$ $Tc \ = -5$	

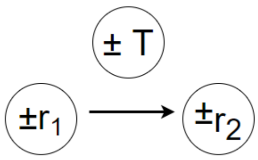
Quadro 9: Situação 4.2 e situação 4.6
Fonte: O autor

Conforme Vergnaud (2009), para compor duas transformações elementares negativas para resultar numa transformação composta, fica evidente que se tem situações mais difíceis que as outras.

A <u>categoria 5</u> – *transformação de uma relação* trata-se de tarefas em que uma transformação opera sobre uma relação estática dada, gerando outra relação estática.

Segundo Vergnaud (2009, p. 222), "serão reencontradas as classes estudadas no caso da segunda categoria (busca do estado final, da transformação, do estado inicial) com subclasses mais numerosas, levando em conta as várias possibilidades que existem para o sinal e o valor absoluto".

Assim, teremos três classes para essa categoria: dadas duas relações estáticas (r1 e r2) conhecidas, busca-se a transformação (T); dada a relação estática inicial (r1) e transformação (T), busca-se a relação estática final (r2); e dada a relação estática final (r2) e transformação (T), busca-se a relação estática inicial (r1). Como as relações (r1 e r2) e transformação (T) podem ser positivas ou negativas, para cada classe encontramos 8 possibilidades de subclasse (MIRANDA, 2019; ZANELLA, 2013), conforme Quadro 10.

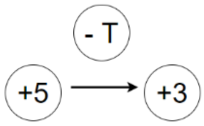
Esquema relacional	Classe	Possibilidades de subclasses				situação
			r1	r2	T = r2 – r1	
	Dadas duas relações estáticas (r1 e r2) conhecidas, busca-se a transformação (T)	|r1| > |r2|	r1 > 0	r2 > 0	T < 0	A 5.1
			r1 < 0	r2 < 0	T > 0	A 5.2
			r1 > 0	r2 < 0	T < 0	A 5.3
			r1 < 0	r2 > 0	T > 0	A 5.4
		|r1| < |r2|	r1 > 0	r2 > 0	T > 0	A 5.5
			r1 < 0	r2 < 0	T < 0	A 5.6
			r1 > 0	r2 < 0	T < 0	A 5.7
			r1 < 0	r2 > 0	T > 0	A 5.8
			r1	T	r2 = r1 + T	
	Dada a relação estática inicial (r1) e transformação (T), busca-se a relação estática final (r2)	|r1| > |T|	r1 > 0	T > 0	r2 > 0	A 5.9
			r1 < 0	T < 0	r2 < 0	A 5.10
			r1 > 0	T < 0	r2 > 0	A 5.11
			r1 < 0	T > 0	r2 < 0	A 5.12
		|r1| < |T|	r1 > 0	T > 0	r2 > 0	A 5.13
			r1 < 0	T < 0	r2 < 0	A 5.14
			r1 > 0	T < 0	r2 < 0	A 5.15
			r1 < 0	T > 0	r2 > 0	A 5.16
			r2	**T**	**r1 = r2 – T**	
	Dada a relação estática final (r2) e a transformação (T), busca-se a relação estática inicial (r1)	|r2| > |T|	r2 > 0	T > 0	r1 > 0	A 5.17
			r2 < 0	T < 0	r1 < 0	A 5.18
			r2 > 0	T < 0	r1 > 0	A 5.19
			r2 < 0	T > 0	r1 < 0	A 5.20
		|r2| < |T|	r2 > 0	T > 0	r1 < 0	A 5.21
			r2 < 0	T < 0	r1 > 0	A 5.22
			r2 > 0	T < 0	r1 > 0	A 5.23
			r2 < 0	T > 0	r1 < 0	A 5.24

Quadro 10: Possibilidades de subclasses para a quinta categoria
Fonte: Baseado em Miranda (2019, p.54-55) e Zanella (2013, p. 61; 64-65)

Cada classe apresenta variações de 8 subclasses; desse modo, essa categoria possibilita uma variedade de 24 subclasses.

Exemplo:

Situação *A 5.1* (dada duas relações estáticas r1>0 e r2>0 conhecidas, busca-se a transformação T<0, em que |r1| > |r2|) – “Até a rodada passada, o time A possuía 5 gols a mais do que o time B. Nessa rodada eles se enfrentaram, e o time A agora tem 3 gols a mais que o time B. Qual foi a diferença de gols a favor do time B nessa partida?” (ZANELLA, 2013, p.66)

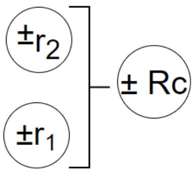
equação numérica	**esquema relacional**
$r1 + T \ = r2$ $5 + T = 3$ $T \ = -5 + 3 = \ -2$	

Quadro 11: Situação A 5.1
Fonte: O autor

Vergnaud (2009) relata a dificuldade para resolver essas situações, pois um estado relativo e a transformação são ambos representados por números relativos.

A <u>categoria 6</u> – *composição de duas relações* compreende tarefas em que duas relações estáticas se compõem em outra relação estática.

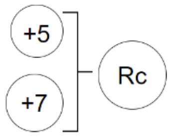
Conforme Vergnaud (2009), para essa categoria serão reencontradas as classes estudadas no caso da primeira categoria, porém, com subclasses mais numerosas, além de que essa sexta categoria também se aproxima da quarta categoria, já que teremos relações sendo compostas entre si no lugar de transformações. No Quadro 12, encontramos as possibilidades de subclasses.

Esquema relacional	**Classe**	**Possibilidades de subclasses**				**Situação**
			r1	r2	Rc = r1 + r2	
	Dadas duas relações estáticas (r1 e r2) conhecidas, busca-se a relação composta (Rc)	|r1| > |r2|	r1 > 0	r2 > 0	Rc > 0	A 6.1
			r1 < 0	r2 < 0	Rc < 0	A 6.2
			r1 > 0	r2 < 0	Rc > 0	A 6.3
			r1 < 0	r2 > 0	Rc < 0	A 6.4
		|r1| < |r2|	r1 > 0	r2 > 0	Rc > 0	A 6.5
			r1 < 0	r2 < 0	Rc < 0	A 6.6
			r1 > 0	r2 < 0	Rc < 0	A 6.7
			r1 < 0	r2 > 0	Rc > 0	A 6.8
			r1	Rc	r2 = Rc - r1	
	Dada uma das relações estáticas (r1) e a relação composta (Rc), busca-se a outra relação estática (r2)	|r1| > |Rc|	r1 > 0	Rc > 0	r2 < 0	A 6.9
			r1 < 0	Rc < 0	r2 > 0	A 6.10
			r1 > 0	Rc < 0	r2 < 0	A 6.11
			r1 < 0	Rc > 0	r2 > 0	A 6.12
		|r1| < |Rc|	r1 > 0	Rc > 0	r2 > 0	A 6.13
			r1 < 0	Rc < 0	r2 < 0	A 6.14
			r1 > 0	Rc < 0	r2 < 0	A 6.15
			r1 < 0	Rc > 0	r2 > 0	A 6.16

Quadro 12: Possibilidades de classes para a sexta categoria
Fonte: Baseado em Zanella (2013, p. 67; 69)

Exemplo:

Situação *A 6.1* (dadas duas relações estáticas r1>0 e r2>0 conhecidas, busca-se a relação composta Rc > 0) – “Denise tem R$5,00 a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a mais do que Lilian. Quanto Denise tem a mais do que Lilian?” (ZANELLA, 2013, p.68)

equação numérica	esquema relacional
$r1 + r2 = Rc$ $5 + 7 = Rc$ $12 = Rc$	

Quadro 13: Situação A 6.1
Fonte: O autor

Na sequência, apresentamos estudos acerca do Campo Conceitual das estruturas multiplicativas.

2.3 Campo Conceitual das estruturas multiplicativas

Consideramos importante o estudo das cinco categorias de problemas das estruturas multiplicativas para subsidiar as análises das situações de juros simples, já que esses possuem categorias da estrutura multiplicativa em suas relações.

O Campo Conceitual das estruturas multiplicativas trata-se do conjunto de situações que envolvem uma ou mais multiplicação ou divisão, ou seja, do conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações, como os conceitos de fração, produto e quociente de dimensões, número racional, razão escalar, combinação, taxa, entre outros (VERGNAUD, 1993; GITIRANA *et al.*, 2014).

Vergnaud (1993) apresenta duas grandes categorias de relações multiplicativas, a i*somorfismo de medidas (proporção simples)* e *produto de medidas (produto cartesiano).*

Gitirana *et al.* (2014) estendem as classificações das estruturas multiplicativas a partir “[...] dos estudos de Gérard Vergnaud, e inclui contribuições dadas em debates e reuniões de pesquisa, algumas delas realizadas com a presença do próprio professor Vergnaud” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 44).

No Quadro 14, apresentamos as denominações das categorias das estruturas multiplicativas e as classes de situações conforme Vergnaud (2009), Gitirana *et al.*

(2014) e Magina *et al.* (2014), que propõem variações (denominadas “eixos”) para as categorias função bilinear e proporção múltipla.

número	**Categorias das estruturas multiplicativas**	**Descrição**	**classes**
1	Proporção simples (isomorfismo de medidas)	Dadas quatro grandezas, duas a duas de mesma natureza, se tem uma relação de proporcionalidade.	Multiplicação - um para muitos
			Partição ou Distribuição
			Cota
			Quarta proporcional
2	Comparação multiplicativa	Dadas duas grandezas de mesma natureza, são comparadas de forma multiplicativa por um escalar (razão ou relação)	Referente desconhecido
			Referido desconhecido
			Relação desconhecida
3	Produto cartesiano (produto de medidas)	Uma nova grandeza é obtida como produto de duas (ou mais) outras grandezas	Combinação
			Área (duas grandezas de mesma natureza)
4	Função bilinear (proporção dupla)	Dadas ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), cada uma proporcional a duas outras, separadamente.	Um para muitos
			Muitos para muitos
5	Proporção múltipla	Dadas ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), uma é proporcional às outras duas, sendo estas independentes entre si.	Um para muitos
			Muitos para muitos

Quadro 14: Categorias das estruturas multiplicativas
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014), Vergnaud (1993), Magina *et al.* (2014)

Vergnaud (2009) menciona que a introdução da multiplicação como adição reiterada gera dificuldades aos alunos, pois, em consequência disso, eles terão que “[...] fazer do multiplicando uma medida, e do multiplicador um simples operador sem dimensão física” (VERGNAUD, 2009, p. 183).

Gitirana *et al.* (2014) destacam que

> [...] a partir da análise dimensional fica ainda mais clara a descontinuidade entre a multiplicação e a adição. O ensino da multiplicação, como continuidade da adição, em geral, traz dificuldades na aprendizagem da multiplicação quando ocorrem as rupturas necessárias entre as duas operações (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 31).

Para explicitar essas relações da descontinuidade entre multiplicação e adição, Gitirana *et al.* (2014) propõem analisar as situações por meio da análise dimensional.

Assim, dado o exemplo “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGNAUD, 2009, p. 239), tem-se o seguinte esquema relacional:

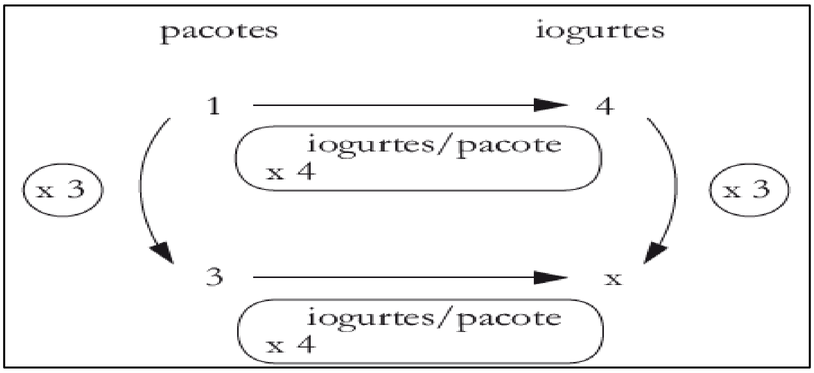


Figura 6: Esquema relacional para análise vertical e horizontal
Fonte: Vergnaud (2009, p. 243)

As medidas 1 e 3 representam a grandeza “quantidade de pacotes” e as medidas 4 e x representam a grandeza “quantidade de iogurtes”. Elas são medidas de natureza distintas. A análise vertical mostra que o operador vertical “*x 3*” trata-se de um operador escalar ou operador sem dimensão, pois permite passar de uma linha a outra na mesma categoria de medidas. A análise horizontal evidencia que o operador horizontal “*x 4 iogurtes/ pacote*” se trata de um operador função ou taxa, pois expressa a passagem de uma categoria de medidas para outra.

Vergnaud (2009) propõe duas formulações para uma análise vertical que permite elucidar completamente as relações presentes na multiplicação: *x iogurtes estão para 4 iogurtes, assim como 3 pacotes estão para 1 pacote; x iogurtes estão para 3 pacotes, assim como 4 iogurtes estão para 1 pacote*.

$$\frac{x\ iogurtes}{3\ pacotes} = \frac{4\ iogurtes}{1\ pacote}$$

$$x\ iogurtes = 3\ pacotes \times \frac{4\ iogurtes}{1\ pacote}$$

$$x\ iogurtes = \frac{3\ \cancel{pacotes} \times 4\ iogurtes}{1\ \cancel{pacote}}$$

$$x\ iogurtes = \mathbf{3} \times\ 4\ iogurtes$$

Assim, 3 é o operador escalar da situação.

Conforme Vergnaud (2009, p. 244), “somente essa análise permite compreender que, efetuando-se 4 x 3 (ou 3 x 4), não se multiplica iogurtes por pacotes ou pacotes por iogurtes”.

Apresentamos então as categorias das estruturas multiplicativas:

A <u>categoria 1</u> – *proporção simples (isomorfismo de medidas)* relaciona-se a tarefas que compõem quatro grandezas, duas a duas, de mesma natureza, tendo uma relação de proporcionalidade.

Segundo Vergnaud (2009), essas situações referem-se a relações quaternárias que podem ser interpretadas pela análise vertical e análise horizontal, descritas anteriormente.

Os esquemas relacionais das classes dessa categoria são apresentados no Quadro 15:

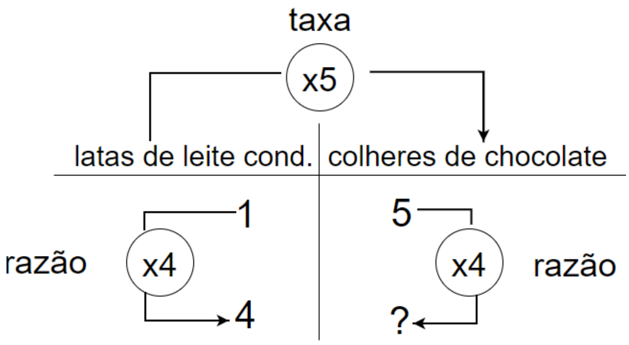
número	**Categoria**	**classe**	**Esquema relacional**	**situação**
1	Proporção simples (isomorfismo de medidas)	Um para muitos ou multiplicação	$\begin{array}{c\|c} 1 & a \\ b & X \end{array}$	M 1.1
		Partição ou Distribuição	$\begin{array}{c\|c} 1 & X \\ b & c \end{array}$	M 1.2
		Cota	$\begin{array}{c\|c} 1 & a \\ X & c \end{array}$	M 1.3
		Quarta proporcional	$\begin{array}{c\|c} a & b \\ c & X \end{array}$	M 1.4

Quadro 15: Categoria 1 – proporção simples
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014) e Vergnaud (1993)

Apresentamos o exemplo da categoria *proporção simples* classe *um para muitos.*

Exemplo:

Situação M1.1 (Proporção simples – um para muitos) – “A receita de brigadeiro de Maria leva 1 lata de leite condensado para 5 colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate ela usará para fazer a receita de brigadeiro corretamente?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p.55)



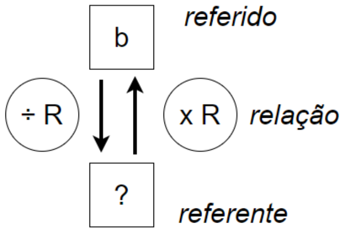
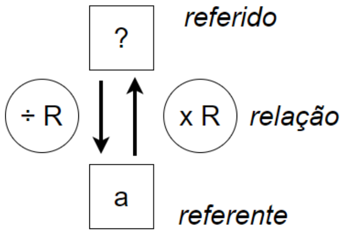
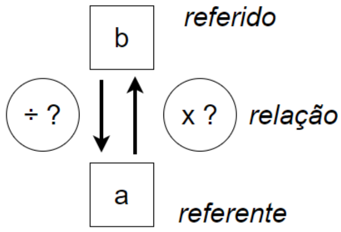
Nesse exemplo, tem-se a quantidade correspondente à unidade, sendo 5 colheres para uma unidade da lata, e busca-se o valor para muitos, ou seja, obter-se a quantidade colheres para muitas latas; neste caso, para 4 latas.

O operador função (ou taxa) é $\frac{5\ colheres}{1\ lata}$, que opera de uma grandeza para outra, enquanto o operador escalar é a razão 4.

A <u>Categoria 2</u> – *comparação multiplicativa* refere-se a tarefas de relação ternária que compõem duas grandezas de mesma natureza e são comparadas de forma multiplicativa por um escalar (razão ou relação).

Segundo Gitirana *et al.* (2014), essa categoria ainda apresenta variações conforme a relação entre as grandezas nos casos que a comparação seja “vezes maior (x R)” ou “vezes menor (÷ R)”.

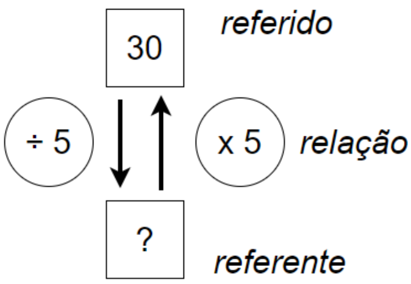
Considerando o referente (a), o referido (b) e a relação (R), apresentamos no Quadro 16 as possibilidades de classes e subclasses.

número	Categoria	Classe	subclasse	Esquema relacional	Situação
2	Comparação multiplicativa	Referente (a) desconhecido	vezes maior (x R)		M 2.1
			vezes menor (÷ R)		
		Referido (b) desconhecido	vezes maior (x R)		M 2.2
			vezes menor (÷ R)		
		Relação (R) desconhecida	vezes maior (x R)		M 2.3
			vezes menor (÷ R)		

Quadro 16: Categoria 2 – comparação multiplicativa
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014) e Vergnaud (1993)

Exemplo:

Situação M2.1 (comparação multiplicativa – referente desconhecido) – "A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade de seu filho?" (GITIRANA *et al.*, 2014, p.48)

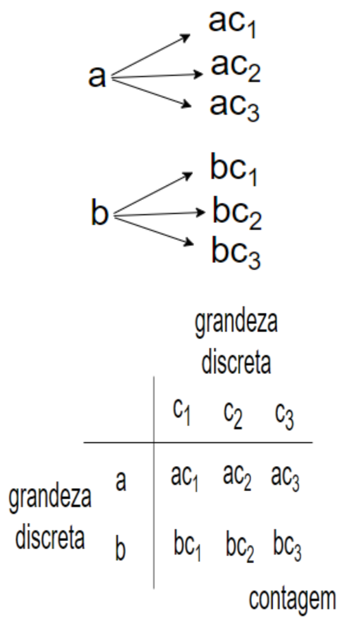
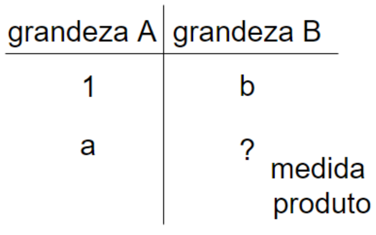


Nesse exemplo, o referente é a idade do filho, enquanto o referido é a idade de Paulo. Porém, como o referente é o valor desconhecido, se obtém uma relação de ÷5, pois o referido é maior que o referente.

A <u>categoria 3</u> – *produto cartesiano (produto de medidas)* constitui tarefas de relação ternária em que duas medidas elementares multiplicadas resultam em uma medida produto, sendo essas medidas elementares independentes entre si.

Gitirana *et al.* (2014) apresentam duas classes para essa categoria: a combinação, que trata de produto entre medidas discretas, e a área, que trata de produto entre medidas contínuas.

De acordo com Gitirana *et al.* (2014), os problemas de combinação ainda podem variar conforme o caso, a saber, se a medida elementar for desconhecida, ou se a medida total for desconhecida. O Quadro 17 mostra as classes da categoria produto cartesiano e os esquemas relacionais sugeridos por Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014).

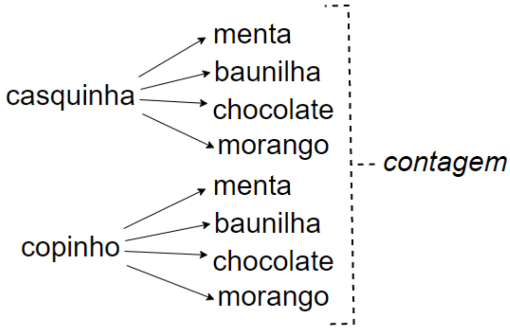
número	**Categoria**	**classe**	**subclasse**	**Esquema relacional**	**Situação**
3	Produto cartesiano (produto de medidas)	Combinação	Total desconhecido		M 3.1
			Parte desconhecida		
		Área (duas grandezas de mesma natureza)	Total desconhecido		M 3.2
			Parte desconhecida		

Quadro 17: Categoria 3 – produto cartesiano ou produto de medidas
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014) e Vergnaud (1993)

O esquema relacional proposto por Vergnaud para representar essa categoria, conforme Gitirana *et al.* (2014), é a tabela de dupla entrada.

Exemplo:

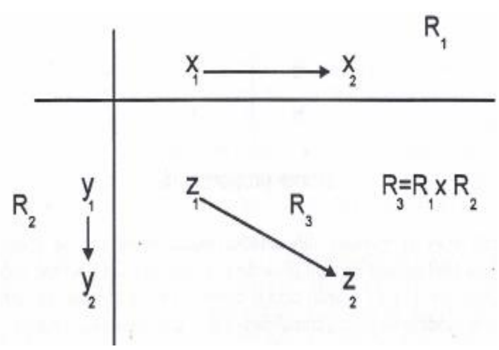
Situação M3.1 (produto cartesiano – combinação) – “Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinha ou copinho. Há 4 sabores diferentes: menta, baunilha, chocolate e morango. Maria quer um sorvete de uma bola; quantas maneiras diferentes ela tem para escolher?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p.76).



As pesquisadoras também propõem utilização do diagrama em árvore para a classe de combinação quando envolve medidas discretas.

A <u>categoria 4</u> – *função bilinear (proporção dupla)* trata de tarefas compostas que envolvem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), cada uma proporcional a duas outras, separadamente.

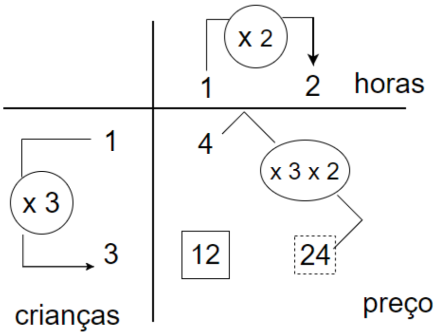
Segundo Vergnaud (1993), a proporção dupla pode ser compreendida como *z proporcional a x e a y; x e y independentes entre si.* Conforme Magina *et al.* (2014), essa categoria apresenta duas variações (as quais se denominam “eixos”) de um para muitos e muitos para muitos. O Quadro 18 a seguir apresenta o esquema relacional para representar a categoria.

número	Categoria	classe	Esquema relacional	situação
4	Função bilinear (proporção dupla)	Uma para muitos		M 4.1
		Muitos para muitos		

Quadro 18: Categoria 4 – função bilinear
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014), Magina *et al.* (2014) e Vergnaud (1993)

Exemplo:

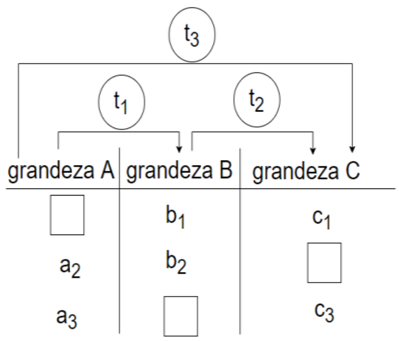
Situação M4.1 (função bilinear) – “Um parque de diversão cobra R$ 4,00 para cada criança brincar em qualquer brinquedo durante 1 hora. Dona Lulu levou seus 3 filhos para brincar no parque durante 2 horas. Quanto ela pagou?” (GITIRANA *et al*., 2014, p.81)



Segundo Gitirana *et al.* (2014), esses tipos de problema são abordados no estudo dos problemas de regra de três composta.

A categoria 5 – *proporção múltipla* caracteriza-se por tarefas que compõem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), em que uma é proporcional às outras duas, sendo estas independentes entre si.

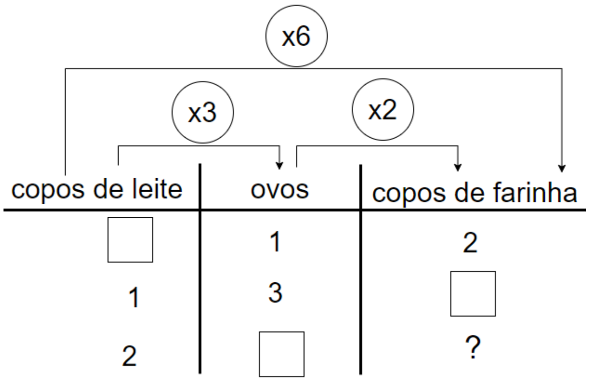
Vergnaud (1993) sustenta que essa categoria liga as grandezas duas a duas: *a proporcional a b; b proporcional a c*, podendo ser resolvidas pela utilização de taxas ou operadores escalares. Ainda, de acordo com Magina *et al.* (2014), essa categoria apresenta duas variações (as quais se denominam “eixos”) de um para muitos e muitos para muitos. O Quadro 19 mostra as classes e o esquema relacional para a categoria.

número	Categoria	classe	Esquema relacional	situação
5	Proporção múltipla	Uma para muitos		M 5.1
		Muitos para muitos		

Quadro 19: Categoria 5 – proporção multipla
Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014), Magina *et al.* (2014) e Vergnaud (1993)

Exemplo:

Situação M5.1 (proporção múltipla) – "A receita da massa de pastel do seu Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha ele vai precisar?" (GITIRANA *et al.*, 2014, p.86)



Neste caso, Vergnaud (2009) menciona que esses tipos de problemas permitem que sejam elaboradas perguntas intermediárias. Por exemplo, na situação M5.1, poderia ser questionado quantos copos de farinha seriam utilizados para um copo de leite.

Na sequência, apresentamos problemas mistos.

2.4 Problemas Mistos

Vergnaud (2009) apresenta estudos para algumas situações que denominou problemas mistos. Para o pesquisador, esses problemas são considerados complexos, apresentando várias relações e questões envolvidas. Para a sua resolução, é necessária pelo menos uma operação aritmética de adição ou subtração, e pelo menos uma operação de multiplicação ou divisão.

Na figura 7, apresenta-se um exemplo de problema misto elaborado por Vergnaud (2009).

Um comerciante de camisas compra 3 dúzias de camisas a $R\$$ 360,00 a dúzia e revende-as a $R\$$ 40,00 a peça. Colocar as informações em uma tabela de correspondência fazendo a previsão de uma coluna para os lucros. Encontrar todas as perguntas que cabem nessa tabela e todos os caminhos que permitam encontrar apenas o lucro total do comerciante de camisas.

Figura 7: Exemplo de problema misto
Fonte: Vergnaud (2009, p. 288)

Vergnaud (2009) esclarece a importância do enfretamento pelo estudante desse tipo de situação, que “coloca em jogo relações de tipo multiplicativo (correspondência entre quantidades de natureza diferente) e relações de tipo aditivo (lucro = preço de venda - preço de compra)” (VERGNAUD, 2009, p. 289).

Inicialmente, o autor propõe uma representação das informações fornecidas no enunciado e de possíveis perguntas que podem ser elaboradas, conforme a figura 8.

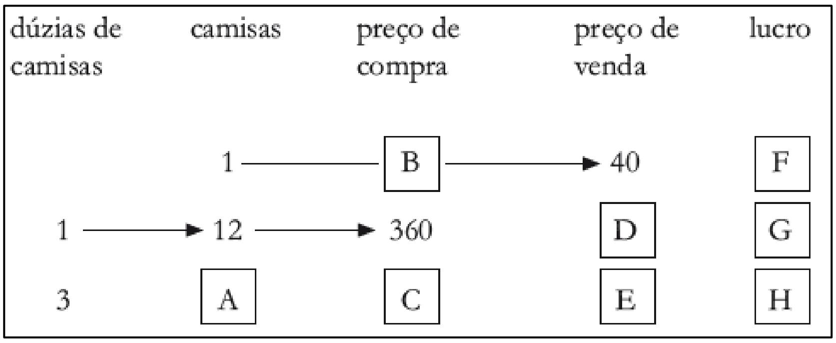


Figura 8: Exemplo de esquema de problema misto
fonte: Vergnaud (2009, p. 289)

Os possíveis questionamentos que derivam dessa representação (letras da figura 8) e que permitem identificar os possíveis caminhos para solução estão elencados abaixo:

A – Número total de camisas

B – Preço de compra de uma camisa

C – Preço de compra de três dúzias de camisas

D – Preço de venda de 12 camisas

E – Preço de venda de 3 dúzias de camisas

F – Lucro em 1 camisa

G – Lucro em 12 camisas

H – Lucro em 3 dúzias de camisas.

Vergnaud (2009) elenca possíveis caminhos de solução do problema:

Caminho	**Descrição**
BFGH	Cálculo do preço de compra (B) e do lucro (F) para uma camisa; cálculo do lucro para 12 camisas (G), e, depois, para três dúzias (H).
BFAH	Cálculo do preço de compra (B) e do lucro (F) para uma camisa; cálculo do número total de camisas (A), e, depois, do lucro para três dúzias (H).
ABFH	Cálculo do número total de camisas (A), cálculo do preço de compra (B), e do lucro (F) para uma camisa; depois, do lucro para 3 dúzias (H).

BAFH	Cálculo do preço de compra (B), cálculo do número total de camisas (A), e do lucro (F) para uma camisa; depois, do lucro para 3 dúzias (H).
DGH	Cálculo do preço de venda (D) e do lucro (G) para 12 camisas; cálculo do lucro para 3 dúzias (H).
DECH	Cálculo do preço de venda de uma dúzia (D), depois de 3 dúzias (E); cálculo do preço de compra (C), e, depois, do lucro (H) para 3 dúzias.
CDEH	Cálculo do preço de compra (C); cálculo do preço de venda de uma dúzia (D), e,depois, de 3 dúzias (E). Depois, do lucro (H) para 3 dúzias.
DCEH	Cálculo do preço de venda de uma dúzia (D); cálculo do preço de compra (C), e, depois de 3 dúzias (E). Depois, do lucro (H) para 3 dúzias
ACEH	Cálculo do número total de camisas (A), e, depois, do preço de compra (C), do preço de venda (E) e do lucro (H) correspondente.
AECH	Cálculo do número total de camisas (A), do preço de venda (E), do preço de compra (C), e do lucro (H) correspondente.
CAEH	Cálculo do preço de compra (C), do número total de camisas (A), do preço de venda (E), e, depois, do lucro (H) correspondente.

Quadro 20: Caminhos de solução para situação-problema
Fonte: Vergnaud (2009, p. 289-290)

Vergnaud (2009) destaca a importância de elucidar e estudar com os alunos os vários caminhos possíveis de solução nas situações e levá-los a refletir sobre a sua equivalência. Assim, esse caso particular é ilustrado pelo seguinte esquema:

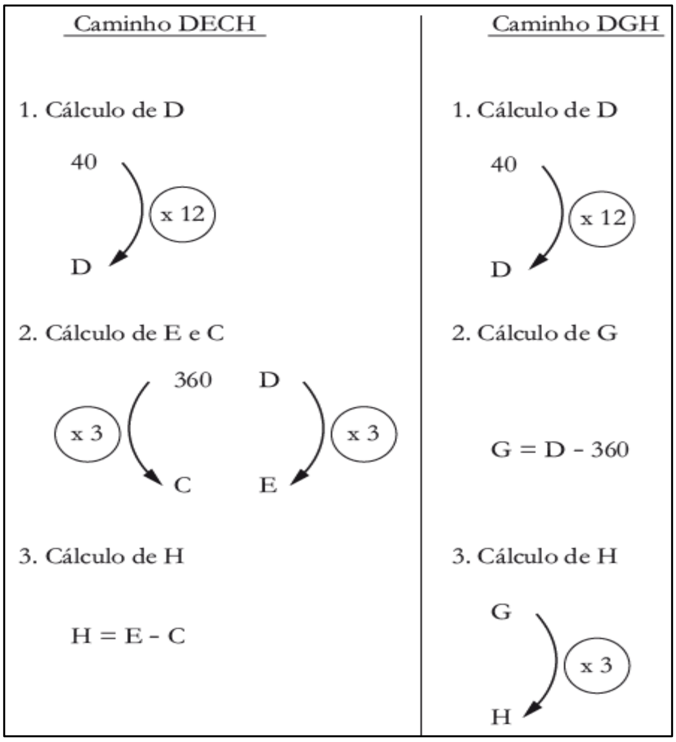


Figura 9: Exemplo de equivalência de resolução do problema misto
Fonte: Vergnaud (2009, p. 289)

Para o exemplo do problema misto, Vergnaud (2009) propõe análise dos possíveis caminhos para resolução, das relações entre as grandezas presentes no enunciado e dos tipos de situações que caracterizam essas relações.

Com a hipótese de possíveis aproximações entre situações de juros simples e os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, as análises da presente pesquisa foram baseadas na pesquisa de Miranda (2019), que estabeleceu classificações de problemas que envolvem o conceito de função afim a partir de um conjunto de situações identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.

Miranda (2019) adota como base para a sua investigação os critérios estabelecidos por Vergnaud para a classificação de situações presentes nas estruturas aditivas e multiplicativas. Os critérios elencados pela autora são: as relações - ternárias e quaternárias - estabelecidas entre os elementos presentes nos problemas; tipo de relações envolvidas (categorias e classes de problemas das estruturas aditivas e multiplicativas) e sua classificação (puramente aditiva, puramente multiplicativa ou problema misto); e as possíveis combinações dos tipos de situações.

Em relação ao último critério adotado para as análises de Miranda (2019), possíveis combinações dos tipos de situações, a pesquisadora propôs uma associação das categorias das estruturas multiplicativas combinadas com as categorias de problemas das estruturas aditivas. Essa combinação de cinco categorias multiplicativas com cada uma das seis categorias aditivas "[...] resulta em um total de 30 (trinta) categorias de situações mistas, que entendemos que possam, ou não, se apresentar em situações relacionadas ao conceito de função afim presentes em livros didáticos de matemática" (MIRANDA, 2019, p. 95).

A possiblidade da combinação se dá pelo fato de que Miranda (2019) analisa os termos da função afim da seguinte forma, para a sua representação algébrica $f(x) = a \cdot x + b$, para a e $b \in \mathbb{R}$:

O termo $a \cdot x$ é considerado uma relação das estruturas multiplicativas;

O termo $a \cdot x + b$ é considerado uma relação das estruturas aditivas entre o termo $a \cdot x$ com o termo *b*.

Considerando a representação algébrica da função linear $f(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$, caso específico da função afim, Miranda (2019) estabelece que essas relações, em determinada situação-problema, podem ser somente do campo multiplicativo.

Por outro lado, considerando a representação analítica da função afim $f(x) = a \cdot x + b \in \mathbb{R}$, Miranda (2019) estabelece que essas relações, em determinada situação, são problemas mistos.

São essas relações estabelecidas por Miranda (2019) que consideramos para os casos em que for possível associar as situações de juros simples com os Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, utilizando-se da forma analítica de função dos juros e montante simples. Para essas aproximações, temos a seguinte hipótese:

Juros simples:

$J(t) = C \cdot i \cdot t$, para t ≥ 0,

$C \cdot i \cdot t$, relação das estruturas multiplicativas. Contudo, consideramos uma relação multiplicativa entre $C \cdot i$ e uma relação multiplicativa entre o termo $(C \cdot i)$ com o termo *t*, ou seja, $(C \cdot i) \cdot t$.

Montante simples: $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0,

$C \cdot i \cdot t + C$, relação das estruturas aditivas entre o termo $C \cdot i \cdot t$ com o termo C.

No Quadro 21, apresentamos as possíveis combinações entre as categorias das estruturas multiplicativas e aditivas propostas por Miranda (2019).

Categorias da estrutura multiplicativa	**Categorias da estrutura aditiva**
Proporção simples (isomorfismo de medidas)	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Comparação Multiplicativa	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Produto cartesiano (produto de medidas)	Composição de medidas
	Transformação de medidas

	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Função bilinear	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Proporção múltipla	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações

Quadro 21: Combinações de categorias para classes de problemas mistos
Fonte: Miranda (2019, p. 94-95)

Miranda (2019) utilizou um conjunto de 89 situações de função afim, identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, para as quais estabeleceu as classificações de problemas que envolvem o conceito de função afim, com base nas possíveis combinações. Como resultado dessa investigação no conjunto de situações em livros didáticos analisados, foram identificadas e classificadas nove situações de problemas mistos, conforme o Quadro 22.

Classificação de situações-problema identificadas	**Identificador (Problema Misto - PM)**
Proporção simples	situação PM 1
Produto cartesiano	situação PM 2
Composição de medidas	situação PM 3
Proporção simples e composição	situação PM 4
Proporção simples e transformação de medidas	situação PM 5
Comparação multiplicativa e composição de medidas	situação PM 6
Comparação multiplicativa e transformação de medidas	situação PM 7
Proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas	situação PM 8
Comparação multiplicativa e proporção simples	situação PM 9

Quadro 22: Categorias de situações-problema identificadas
Fonte: Miranda (2019, p. 147)

Dessas nove classificações, sete foram pré-estabelecidas pela combinação das categorias multiplicativas e aditivas (Quadro 21) e outras duas, *Proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas,* e a categoria *Comparação multiplicativa e proporção simples* “[...] emergiram do mapeamento das situações-problema em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, no capítulo voltado ao ensino de função afim” (MIRANDA, 2019, p. 147).

Para exemplificar as relações que foram estabelecidas nesses problemas identificados por Miranda (2019), apresentamos a situação-problema PM5, pelo fato de a considerarmos pertinente para presente pesquisa:

<u>Situação PM5</u> *(proporção simples e transformação de medidas*)

10. Sandra possuía R$100,00 e, para fazer uma viagem no final do ano, ela guardou, a partir de janeiro, R$60,00 em cada mês.

a) Quantos reais Sandra possuía ao final do 6º mês? *R$460,00*

b) Escreva uma função que relacione a quantia em reais q com o tempo t, em meses. *q(t)= 100 + 60t*

c) Sabendo que a viagem será feita no final do mês de novembro do mesmo ano e que Sandra conseguiu guardar exatamente a quantia necessária para pagá-la, qual o preço da viagem? *R$760,00*

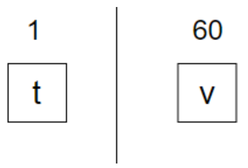
Figura 10: Situação PM5 - proporção simples e transformação de medidas
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 78, apud MIRANDA, 2019, p. 126)

O problema solicita o montante final acumulado por um período t, a partir do capital inicial de R$100,00, e que são guardados mensalmente R$60,00. Miranda (2019) propõe um esquema relacional para analisar as relações entre as medidas

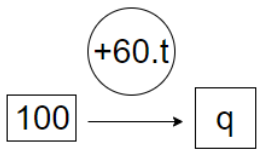
mês (es)	valor acumulado	valor inicial	valor final
1	60		
$\boxed{t}$	$\boxed{v}$	100	$\boxed{q}$

De acordo com o enunciado, a cada mês é acrescentado um valor de R$60,00, sendo que, para o período *t* meses obtém-se o valor *v* acumulado do que é guardado mensalmente. Contudo, há um valor inicial de R$100,00, que é transformado, com o passar do tempo, em um valor final q.

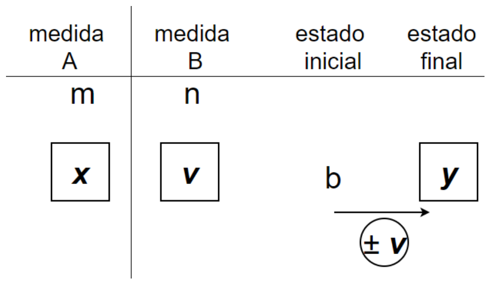
A transformação do valor inicial para o valor final trata-se do valor acumulado v, que é resultante da proporção simples estabelecida entre as grandezas “mês” e “depósito mensal”. A proporção simples pode ser representada pelo seguinte esquema relacional:



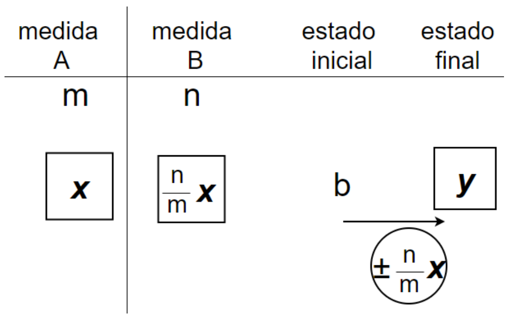
Pelo esquema relacional, trata-se de uma *proporção simples - um para muitos*. A equação numérica para encontrar o valor acumulado é dada como: $\frac{1}{t} = \frac{60}{v} \rightarrow v = 60.t$, ou seja, $v = 60.t$ é a transformação que opera do valor inicial para o valor final. A equação numérica pode ser expressa como $q = 100 + 60.t$ e pelo seguinte esquema relacional da transformação:



Da análise da situação-problema de *proporção simples e transformação de medidas*, Miranda (2019, p.130) propõe um esquema relacional considerando a combinação das categorias:



Da relação de proporção simples, tem-se $\frac{m}{x} = \frac{n}{v}$ e $v = \frac{n}{m} \cdot x$.



Portanto, tem-se $y = b \pm \frac{n}{m} \cdot x$, ou melhor, $y = \pm \frac{n}{m} \cdot x + b$, com *m, n* e *b* reais e $\frac{n}{m} > 0\ e\ b > 0$.

Essa situação é classificada como um caso de problema misto do tipo *proporção simples* e *transformação de medidas,* ou seja, possui, pelo menos, uma relação da estrutura aditiva e, pelo menos, uma relação multiplicativa. Além disso, tem a característica de possuir um estado inicial que é transformado em um estado final.

O estudo de problemas mistos torna-se importante para a presente investigação. Como sugerido por Vergnaud (2009), para interpretar as situações de juros simples, propomos analisar os possíveis caminhos para resolver o problema, as relações estabelecidas entre os elementos do enunciado, e as possíveis situações que são estabelecidas por meio das relações.

De Miranda (2019), utilizamos os aspectos teóricos que a autora adotou de Vergnaud para analisar as situações relacionadas à função afim, em especial, as possíveis combinações dos tipos de situações, a classificação das situações identificadas nos livros didáticos de matemática, e as relações estabelecidas pela autora para a função afim $f(x) = a \cdot x + b \in \mathbb{R}$, que permitem uma aproximação das situações de juros simples com os Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas.

CAPÍTULO 3

PERCURSOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresentamos as escolhas metodológicas da pesquisa relacionadas à seleção das situações de juros simples, da fonte de dados escolhida, ou seja, livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que apresentam essas situações, e dos procedimentos adotados para as análises da pesquisa.

Vergnaud (1996) defende que o conjunto de situações é fundamental para o desenvolvimento de determinado conceito. Juros simples é o conceito matemático em jogo, e, conforme a BNCC (2018), pode ser estudado pelos alunos em qualquer série do Ensino Médio. A BNCC (2018) menciona esse conceito como objeto do conhecimento mobilizado para interpretar e comparar situações, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear.

No que se refere aos livros didáticos, Freitas e Almouloud (2016) mencionam que eles oferecem uma orientação para os conteúdos matemáticos de maneira singular e detalhada, e que são "[...] um instrumento de uso do professor (e do futuro professor) no planejamento de suas aulas, e do aluno na realização das atividades, que pode vir a suprir as lacunas sobre o conteúdo matemático" (FREITAS; ALMOULOUD, 2016, p. 219)

Considerando essa premissa, de que o livro didático é relevante para o aluno ao propiciar enfrentamento de situações, e, também, importante para a prática do professor, propomos uma busca documental por situações de juros simples e definimos o livro didático (LD) do Ensino Médio como fonte de dados para a pesquisa.

Ao propor a análise de situações de juros simples em livros didáticos do Ensino Médio, a presente pesquisa se constitui como um estudo documental (BARBOSA, 2018). Esse estudo permite uma análise ampliada que favorece a observação do processo de amadurecimento dos indivíduos, grupos, instituições ou cultura, ou seja, os documentos fornecem novos elementos para as análises (TREMBLAY, 1968).

Cellard (2008), ao analisar o trabalho do pesquisador no estudo documental, afirma que ele deve identificar textos pertinentes e avaliar sua representatividade.

Assim, consideramos relevante analisar o conjunto de situações de juros simples contidas em livros didáticos, que é um material de cunho pedagógico intrinsicamente envolvido no contexto escolar.

Diante desse contexto, a presente pesquisa norteia-se pela seguinte questão: Qual a tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais?

Com a intenção de responder o problema da pesquisa, estabeleceu-se como objetivo principal *estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais.*

3.1 O livro didático como fonte documental de dados

Há, por certo, uma abundância de fontes documentais, cuja variedade não pode ser comparada com a informação que essas fontes contêm (CELLARD, 2008). Para selecionar o conjunto de situações de juros simples para a presente pesquisa, poderíamos ter escolhido diversas fontes de dados, por exemplo, os exames nacionais ou internacionais de desempenho escolar, artigos científicos, dissertações e teses de pesquisas, entre outros documentos que contemplam o tema e situações de juros simples.

O livro didático é considerado um material de articulação entre as ideias e entre professor e aluno, integrando as práticas diárias da sala de aula; semelhantemente, é um direcionador de atividades educativas a serem desenvolvidas fora da escola (MELO; LOPES; OLIVEIRA; 2017).

A pesquisa de Barros e Boaventura (2019) menciona que os livros didáticos são utilizados como material didático e possuem grande relevância na maioria das salas de aula. Melo, Lopes e Oliveira (2017, p. 105) destacam que o livro didático "[...] é, em muitos exemplos do cotidiano pedagógico das escolas, a única ferramenta de trabalho docente".

Para Bittar (2017), o pesquisador que busca compreender alguns motivos de dificuldades de aprendizagem confrontadas pelos alunos tem, como uma das fontes a serem examinadas, o livro didático. Mesmo não sendo o único material didático, o LD é o principal documento utilizado pelo professor no planejamento de suas aulas (BITTAR, 2017).

O livro didático tem se destacado como uma fonte de interesse entre os pesquisadores nos últimos trinta anos, conforme Choppin (2004). Assim, várias pesquisas, com diferentes abordagens, utilizam-se dos livros didáticos como fonte de dados. Considerando a relevância e a singularidade do livro didático no contexto escolar, optamos pela escolha desse material como fonte de dados para identificação de situações de juros simples.

Choppin (2004) apresenta duas categorias de análise do livro didático. A primeira, considerando o livro didático como um documento histórico, analisa os conteúdos em busca de informações, sejam ideológicas ou apenas do conteúdo ensinado. A segunda considera o livro didático como um produto fabricado, comercializado, negligenciando os conteúdos abordados, ou, ainda, como um dispositivo em determinado contexto (CHOPPIN, 2004).

A investigação do pesquisador na primeira categoria, a saber, considerando o livro didático um documento histórico, não se refere à história dos livros didáticos, mas à investigação de um determinado conteúdo, de uma noção, de um personagem, de uma disciplina, de um conceito, de como a literatura escolar é apresentada (CHOPPIN, 2004).

Compreendemos que o LD de matemática constitui-se como a principal fonte de informações, propostas pedagógicas, contextos, conceitos e conteúdos, tornando-se, por um lado, um guia para a prática docente e, por outro, para o aluno, erigindo-se como a principal referência de conceitos matemáticos e de situações com que o mesmo se depara para resolver.

Portanto, o LD torna-se uma fonte de dados valiosa, quanto ao aspecto de documento histórico (CHOPPIN, 2004), para seleção e identificação de situações de juros simples em nossa investigação, dada a sua importância no contexto escolar.

Esclarecemos que essa pesquisa não se propõe a analisar o livro didático, nem responder questionamentos sobre a pertinência de como o conceito de juros simples é tratado nas obras, mas a analisar o conjunto de situações identificadas, considerando o LD apenas uma fonte documental.

3.2 A seleção dos livros didáticos de matemática para a presente investigação

Para esta investigação, torna-se pertinente situar como são disponibilizados os LD no contexto escolar da rede pública de ensino e quais obras foram selecionadas para essa pesquisa.

Os materiais didáticos distribuídos nas escolas públicas da educação básica do país são estabelecidos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD, conforme decreto nº 9.099, de 18/07/2017, que trata da política de aquisição e distribuição de livros didáticos e literários do governo federal, que consolidou os programas anteriores, como o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), e Programa Nacional Biblioteca na Escola (PNBE).

Conforme Brasil (2018b), a execução do PNLD Ensino Fundamental (regular) e do PNLD Ensino Médio (regular e EJA) seguem as etapas de adesão das escolas, inscrição das editoras conforme os editais, triagem e avaliação, elaboração do guia digital do livro, escolha do livro, pedido, aquisição, produção (confecção), distribuição e recebimento nas escolas.

As obras aprovadas pelo PNLD, conforme exigência de editais e avaliações pedagógicas por especialistas de diferentes áreas do conhecimento, coordenadas pelo Ministério da Educação (MEC), compõem o Guia Digital do PNLD. Dentre outras informações, o Guia Digital contém resenhas com descrição e avaliação das principais características da obra, e orienta o corpo diretivo da escola na escolha das coleções para aquela etapa de ensino (BRASIL, 2018b).

No início dessa investigação, em 2020, as obras mais recentes voltadas para o Ensino Médio disponíveis nas escolas foram escolhidas por meio do PNLD de 2018, que teve como objetivo o atendimento (escolha do livro) a todos os alunos do Ensino Médio e reposição dos livros consumíveis para alunos do Ensino Fundamental, EJA e campo. Houve uma nova escolha do LD para o Ensino Médio em 2021, contudo, os dados estatísticos das aquisições das obras do PNLD 2021 - Projetos integradores e Projeto de vida ainda não foram divulgados pelo Ministério da Educação até a publicação desta investigação.

Com o olhar voltado para as obras do Ensino Médio que apresentam, em seu conteúdo, capítulo específico para o estudo de matemática financeira, e, portanto, de juros simples, o PNLD de 2018 aprovou oito coleções didáticas para a disciplina de Matemática. Cada coleção é composta por três volumes, cada um deles direcionado para uma série do Ensino Médio. Apresentamos, no Quadro 23, as tiragens de cada coleção (aquisições de todos os volumes da coleção) aprovadas no PNLD de 2018 para o Ensino Médio.

Identificador	**Coleção**	**Autores / Editora**	**Editora**	**Tiragem 2018**
LD1	Matemática Ciência e Aplicações	Degenszajn, Iezzi, Almeida, Dolce, Périgo	Saraiva Educação	2.015.531
LD2	Matemática - Contexto & Aplicações	Dante	Ática	1.701.780
LD3	Contato Matemática	Souza, Garcia	FTD	1.491.299
LD4	Conexões com a Matemática	Leonardo	Moderna	810.677
LD5	Quadrante Matemática	Prestes, Chavant	SM	611.511
LD6	Matemática Paiva	Paiva	Moderna	608.220
LD7	Matemática: Interação e Tecnologia	Balestri	LEYA	434023
LD8	Matemática para compreender o mundo	Smole, Diniz	Saraiva Educação	144.516

Quadro 23: Tiragem nacional das coleções dos livros didáticos PNLD 2018
Fonte: BRASIL (2021). Disponível em: http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 20 de jun.2021.

De acordo com o Quadro 23, no ano de 2018, período da escolha do livro didático para o Ensino Médio, as três coleções mais adotadas em âmbito nacional foram: *Matemática Ciência e Aplicações* (DEGENSZAJN; IEZZI; ALMEIDA; DOLCE; PÉRIGO, 2016), *Matemática - Contexto & Aplicações* (DANTE, 2016) e *Contato Matemática* (SOUZA; GARCIA, 2016).

Optamos por selecionar as três coleções mais adotadas em nível nacional, por entendermos sua representatividade no contexto escolar do ensino de matemática, como fonte de dados para identificar as situações presentes no capítulo específico que trata de juros simples.

Embora a BNCC (BRASIL, 2018a) não restrinja ou determine em qual série do Ensino Médio os alunos deverão estudar o conceito de juro simples, para as três coleções mais escolhidas o capítulo específico para o estudo de juro simples é inserido no volume 3, ou seja, no volume destinado à 3ª série do Ensino Médio.

3.3 Direcionamento das análises

Como o foco são situações de juros simples, restringimos as análises àquelas situações encontradas no capítulo específico de cada coleção escolhida. A partir da leitura deste capítulo em cada coleção, optamos por investigar as situações contidas na parte do LD que trata de *atividades propostas* aos alunos, ou seja, os exercícios a serem solucionados pelos alunos após a apresentação, formalização e exercícios resolvidos abarcando o conceito de juros simples.

Compreendemos, para as nossas análises, que as atividades propostas aos alunos, ou exercícios, que estamos denominando por situações, referem-se à definição dada pela TCC (VERGNAUD, 1993).

Vergnaud (2009) afirma que esses problemas são denotados de um conteúdo e de pelo menos uma relação entre as medidas do enunciado. Como exemplo de conteúdo, este pode ser relativo a quantidade de pessoas, valores de dinheiro, área, perímetro, entre outros, e, no âmbito da relação entre as medidas, encontram-se binárias, ternárias ou quaternárias. Vergnaud (2009) também menciona, para a característica das medidas, o fato de serem discretas ou contínuas. Dada essa diversidade e a complexidade de problemas, o que as vinculam são as classes de situações que podem ser estabelecidas.

Para identificar essas situações no capítulo específico dos livros, averiguamos se o conteúdo dos enunciados envolvia o conceito de juros simples e se eram estabelecidas relações entre as grandezas.

Para interpretar as situações de juros simples e categorizá-las, as análises foram embasadas na TCC, buscando identificar a tipologia das relações como aditivas, multiplicativas ou problemas mistos. Para categorizar os tipos de situações, buscamos elaborar esquemas relacionais para cada situação e utilizamos, essencialmente, a classificação de categorias e classes das situações das estruturas aditivas e multiplicativas estabelecidas por Vergnaud (1993, 2009) e explicitadas em Gitirana *et al*. (2014).

Para as situações de juros simples que possibilitam uma aproximação com a função afim, utilizamos as categorias estabelecidas para situações relacionadas ao conceito de função afim identificadas como possibilidades de classificação, mencionadas por Miranda (2019).

Para as relações entre as grandezas, como exemplo, entre capital e taxa, ou entre juro e período, foram elaboradas representações dos cálculos relacionais baseadas nos códigos estabelecidos por Vergnaud (2009). Essas situações foram identificadas e relacionadas a uma das seis categorias de situações do Campo Conceitual aditivo e/ou uma das cinco categorias do campo multiplicativo.

As situações de juros simples investigadas apresentaram características de problemas mais complexos em que “[...] várias relações e várias questões possíveis estão em jogo” (VERGNAUD, 2009, p. 269). Assim, para os problemas com várias relações necessárias para resolução, essas foram denominadas “etapas intermediárias”.

Uma dessas etapas intermediárias, por exemplo, são as situações de juros simples que exigem uma conversão de medida, ou seja, para resolver o problema é preciso converter a taxa de juro para a unidade temporal do período ou efetuar a conversão do período para a unidade temporal da taxa. As análises das relações estabelecidas nessas conversões de medidas foram baseadas em Gitirana *et al.* (2014) e Vergnaud (2009).

Como as situações de juros simples apresentam etapas intermediárias para alcançar a questão principal do enunciado, propomos representar essas relações em um esquema relacional principal. Esse esquema proposto para cálculo relacional apresenta uma associação dos esquemas relacionais intermediários necessários para resolução.

No próximo capítulo, apresentamos categorias de situações de juros simples que identificamos em nossa pesquisa, utilizando como fonte de dados os livros didáticos de matemática do Ensino Médio, analisadas na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos as análises da pesquisa referente à caracterização das situações de juros simples, identificadas em livros didáticos do Ensino Médio, de acordo com as categorias de situações das estruturas aditivas e multiplicativas da Teoria dos Campos Conceituais.

Para cada situação, foram investigadas as relações estabelecidas entre as grandezas, identificando a sua categorização e propondo caracterizá-las conforme as estruturas aditivas e multiplicativas de Vergnaud (1993; 2009), Gitirana *et al.* (2014), e dos resultados da investigação de Miranda (2019).

Foram identificadas 33 situações de juros simples, sendo 13 do LD1, 6 do LD2 e 14 do LD3. Verificamos que as situações de juros simples apresentam uma característica de problemas complexos, em que ocorrem várias relações e se envolvem diversas questões (VERGNAUD, 2009). Para compreendermos essas relações, consideramos o exemplo da situação na Figura 11:

> *28.* O preço à vista de uma TV é R$ 900,00. Pode-se, entretanto, optar pelo pagamento de R$ 500,00 de entrada e mais R$ 500,00 um mês após a compra.
> a) Qual é a taxa mensal de juros simples desse financiamento?

Figura 11: Exemplo de problema complexo pela perspectiva da TCC
Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p.162)

O questionamento principal do problema é calcular a taxa de juros envolvida no financiamento do equipamento quando é dada uma entrada e, após um mês da compra, paga mais uma parcela. Contudo, para solucionar essa questão, são necessárias etapas anteriores, como: identificar o montante da operação, que é o valor de R$ 500,00 (parcela após um mês); o capital financiado, que é R$400,00 (900 – 500), uma operação de composição de medidas do campo conceitual das estruturas aditivas; o valor dos juros na operação, que são R$100,00 (a diferença entre o montante R$500,00 e o capital R$400,00), uma operação de transformação de medidas; e calcular a taxa de juros a partir do valor do capital, do valor dos juros e do período, que é um mês. A última etapa é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples* e classe *partição.*

Para o questionamento principal do enunciado, de obter o valor da taxa, está inserido o contexto do montante (M) na situação; sendo assim, a questão principal é de categoria do tipo mista, envolvendo, pelo menos, uma operação de estrutura aditiva e, pelo menos, uma operação de estrutura multiplicativa.

Além disso, o processo de resolução das situações de juros simples apresenta relações e questões a serem consideradas, caracterizando-as, pela perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, como situações complexas.

Para as análises aqui apresentadas, com base em Vergnaud (2009), denominamos as etapas de resolução em consonância com a divisão em duas partes: *intermediária* e *principal*. No que se refere ao termo *intermediária*, em relação às situações, Vergnaud (2009, p.18) menciona que "[...] o objetivo não pode ser alcançado a não ser depois de várias *etapas intermediárias*; existem, muitas vezes, vários caminhos possíveis que pedem, em decorrência, uma análise". A respeito do termo *principal*, Vergnaud (2009, p. 273) observa que "[...] as questões intermediárias que a criança é levada a colocar a si própria são de uma dificuldade desigual conforme o modo pelo qual elas aparecem escritas na estrutura *principal* do problema a resolver". Portanto, compreendemos como pertinente a utilização desses termos, baseados na Teoria dos Campos Conceituais, para se referir às etapas de resolução da situação de juros simples.

Assim, para cada situação analisada, propomos o *esquema relacional principal* como uma combinação dos esquemas relacionais intermediários, que busca representar a estrutura principal do problema a resolver.

Este capítulo está organizado em quatro seções. Incialmente, a seção 4.1 apresenta as análises das situações identificadas na categoria *Composição de medidas com etapas intermediárias*. A seção 4.2 trata das análises das situações da categoria *Proporção simples com etapas intermediárias*, e a seção 4.3 é sobre as análises da categoria *Proporção simples e transformação de medidas com etapas intermediárias*.

Por fim, a seção 4.4 aborda especificamente sobre a conversão de unidade de medida do período ou da taxa, uma etapa intermediária necessária quando está inserida no contexto da situação, característica peculiar das situações de juros simples.

O Quadro 24 mostra uma síntese das classificações da categoria da questão principal identificadas nas situações de juros simples de cada livro didático selecionado para esta pesquisa. Cada uma delas é detalhada em seção específica conforme a sua estrutura principal e as etapas intermediárias.

Categorias da questão principal das situações de juros simples (com etapas intermediárias)	**LD1**	**LD2**	**LD3**	**Total**
Composição de medidas	2	0	0	2
Proporção simples	1	5	5	11
Proporção simples e transformação de medidas	10	1	9	20

Quadro 24: Síntese das categorias da questão principal das situações identificadas
Fonte: O autor

Ao final de cada análise da situação de juros simples, propomos um quadro, com o objetivo de sistematizar o esquema relacional e evidenciar a caracterização dessas situações complexas.

4.1 Composição de medidas com etapas intermediárias

As situações de juros simples em que a questão principal do enunciado foi classificada como composição de medidas totalizaram duas situações presentes nos livros didáticos analisados, ambas do LD1. Esses problemas são do tipo misto, uma vez que as etapas intermediárias do cálculo estabelecem relações ternárias e quaternárias das estruturas multiplicativas e relações ternárias das estruturas aditivas, como no exemplo da Figura 12.

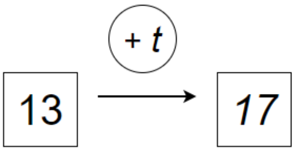
25. Uma conta de gás, no valor de R$ 48,00, com vencimento para 13 de abril, trazia a seguinte informação: “Se a conta for paga após o vencimento, incidirão sobre o seu valor multa de 2% e juros de 0,033% ao dia, que serão incluídos na conta futura”.
Qual será o acréscimo a ser pago sobre o valor da próxima conta por um consumidor que quitou o débito em 17 de abril? E se ele tivesse atrasado o dobro do número de dias para efetuar o pagamento?

Figura 12: Questão principal de composição de medidas com etapas intermediárias
Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p.162)

O questionamento principal da situação é calcular o acréscimo (*A*) a ser pago na próxima fatura do consumidor que atrasou o pagamento da conta (C) atual, no valor de R$ 48,00. O atraso gerou uma multa (*m*) a uma taxa de 2% e juros de mora

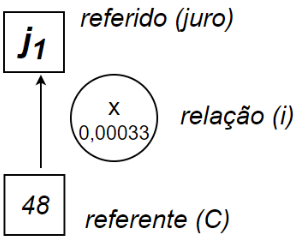
(J) de 0,033%/dia. O acréscimo (*A*) é uma composição entre os valores da multa (*m*) e dos juros (*J*).

Para resolver a questão, são necessárias etapas intermediárias de cálculo. O enunciado dispõe de informações implícitas necessárias para a resolução. O período a ser analisado na situação foi dado com o dia do vencimento da conta (13 de abril) e o dia de quitação atrasado (17 de abril). Para obter o período (t) é preciso efetuar o cálculo da diferença entre as datas, $t = 4$, uma relação ternária das estruturas aditivas da categoria *transformação de medidas,* conforme o esquema relacional a seguir.



Os juros cobrados (J) pelo atraso da conta são de regime de juros simples, ou seja, juros simples. Contudo, para auferir esse valor, é necessária uma etapa intermediária, relativa ao cálculo do juro cobrado para o período unitário (j_1), para uma unidade diária. O juro é a remuneração obtida, a qualquer título, a partir de uma taxa percentual aplicada sobre o capital; assim, considerando a taxa percentual como a relação de uma comparação multiplicativa, um escalar que separa duas medidas, no caso em questão, sendo referente ao valor da conta C, e o juro unitário, o referido, que é a 0,033 parte de cem do valor em questão, ou seja, $0{,}033\% = \frac{0{,}033}{100} = 0{,}0033\ de\ C$, tem-se uma relação ternária das estruturas multiplicativas, da categoria *comparação multiplicativa* com referido desconhecido, ou seja, o juro unitário desconhecido.

Apresentamos um esquema relacional relacionado ao juro para o período unitário ($j_1 = C.i$).



Essa estrutura evidencia que foi dado o referente, que é valor da conta, $C = 48$, a taxa *i= 0,033%/dia,* que se trata da relação, e busca-se o referido, que é juro cobrado para o período unitário (j_1). Algebricamente, temos

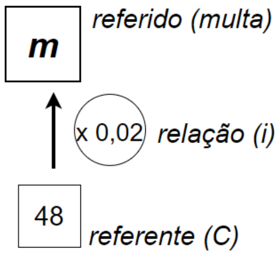
$j_1 = C.i = 48 \times \frac{0{,}033}{100} = 0{,}01584$. Assim, o valor de 0,01584 reais representa o juro cobrado para cada dia de atraso.

Para análise dos juros (*J*) do período, há uma relação de proporcionalidade do valor do juro cobrado para um dia e o valor dos juros para quatro dias. Representamos o seguinte esquema relacional:

período (dia)	Juros (reais)
1	0,01584
4	***J***

Esse esquema permite inferir que se trata de uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples* e classe *um para muitos*. Sabendo o valor $j_1 = 0{,}01584$ e o período $t = 4$, tem-se a expressão numérica para os juros $J = 4 \times 0{,}01584 = 0{,}06336$. Esse valor corresponde aos juros de mora cobrados para os quatro dias de atraso da conta.

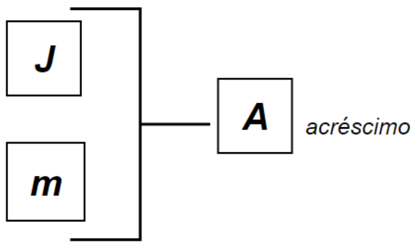
O valor da multa consiste numa sanção pecuniária, uma penalização pelo atraso do pagamento da conta, porém, não relacionada ao tempo de atraso. Trata-se de uma taxa percentual como uma relação de comparação multiplicativa, um escalar que separa duas medidas de mesma natureza; no caso em específico, o referido (valor da multa) e o referente (valor da conta). Assim, temos uma relação ternária das estruturas multiplicativas, que pode ser representada por meio do esquema relacional:



A multa (m) é uma relação ternária das estruturas multiplicativas da categoria comparação multiplicativa, em que são dados o referente(valor da conta $C = 48$) e a relação, que é taxa *i = 2%,* um escalar que separa duas medidas. A multa (m) é a segunda parte de cem do valor em questão, ou seja, $2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02\ de\ C$.

Algebricamente, tem-se $m = 48 \times 0{,}02 = 0{,}96$. Assim, a multa gerada pelo atraso no pagamento é de 0,96 reais. Esse valor é cobrado a partir do momento do atraso e não depende do momento da quitação: se o atraso for de 4 dias ou 30 dias, por exemplo, a multa será a mesma.

A questão principal do enunciado da situação da Figura 12 solicita o valor do acréscimo (*A*), que é dado pela composição da multa (m) e dos juros (J). Assim, pode-se representar o esquema relacional como:



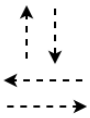
Trata-se de uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria *composição de medidas,* em que se busca a composição das medidas conhecidas. Algebricamente, tem-se $A = m + J = 0{,}96 + 0{,}06336 = 1{,}02336$. Portanto, o acréscimo A será de 1,02 reais pelo atraso de quatro dias na quitação da conta.

Nessa situação, têm-se as relações entre a conta (C) e o juro cobrado para um dia (j_1), entre o juro diário e o valor dos juros (J) para todo o período de atraso, entre a conta e a cobrança da multa, e a relação do acréscimo final à conta, que se trata da composição dos juros e da multa. Em outras palavras, temos questões envolvidas que são complexas e demandam outros conceitos para resolução, a exemplo da distinção entre a noção de juros simples para calcular os juros de mora, em que o período é variável, e a multa de mora, que não se relaciona com o tempo.

Como descrito, essa situação possui etapas intermediárias necessárias para responder à questão principal do enunciado, que solicitou o valor do acréscimo

Pela teoria adotada nessa pesquisa, a representação das relações por meio dos esquemas relacionais permite analisar matematicamente outros domínios além do numérico e as relações não numéricas (VERGNAUD, 2009). Para representar essas relações mais complexas das situações de juros simples, que buscam contemplar as relações e operações envolvidas na situação, adotamos os códigos estabelecidos por Vergnaud (2009).

Para distinguir os esquemas relacionais intermediários dos esquemas relacionais principais, propusemos uma adaptação dos códigos estabelecidos por Vergnaud, como apresentado no Quadro 25:

Código	Descrição
	Retângulo tracejado - um número para representar medidas em etapa intermediária.
	Círculo tracejado - número relativo para representar transformações em etapa intermediária.
	Flechas tracejadas – uma transformação, relação de comparação, ou uma relação.
	Chave tracejadas – Composição de elementos de mesma natureza.

Quadro 25: Código adaptado para esquema relacional das etapas intermediárias
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009, p. 201)

Consideramos pertinente a utilização desses códigos em linhas tracejadas, baseadas na Teoria dos Campos Conceituais, para caracterizar as situações de juros simples das etapas intermediárias. Contudo, para aquelas relações que fazem referência ao questionamento principal da situação, mantemos os códigos em linhas contínuas, por se tratarem da mesma ideia de representação estabelecida por Vergnaud (2009).

Essa distinção entre os traços dos códigos utilizados nos esquemas relacionais visa apresentar uma característica de complexidade dessas situações, uma vez que há diversas relações e questões envolvidas nas situações de juros simples, como mostram as análises desta pesquisa.

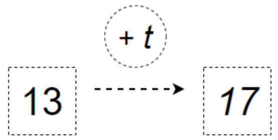
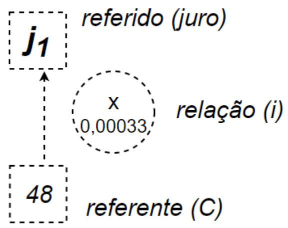
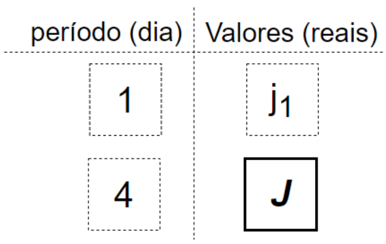
Consideramos cinco etapas intermediárias para resolver a questão principal da situação descrita na Figura 12. A etapa para encontrar o período (t) enquadra-se na categoria *transformação de medidas*, e a etapa para encontrar o valor de juro para um dia (j_1) consiste na categoria de *comparação multiplicativa* com o valor da conta (C), dada a relação *i* da taxa de juros, e utilizando-se os códigos em linha tracejada.

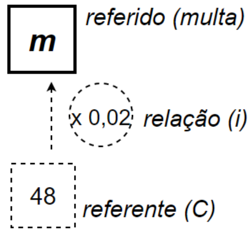
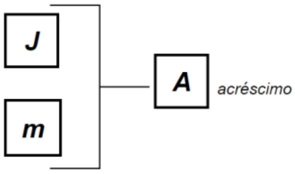
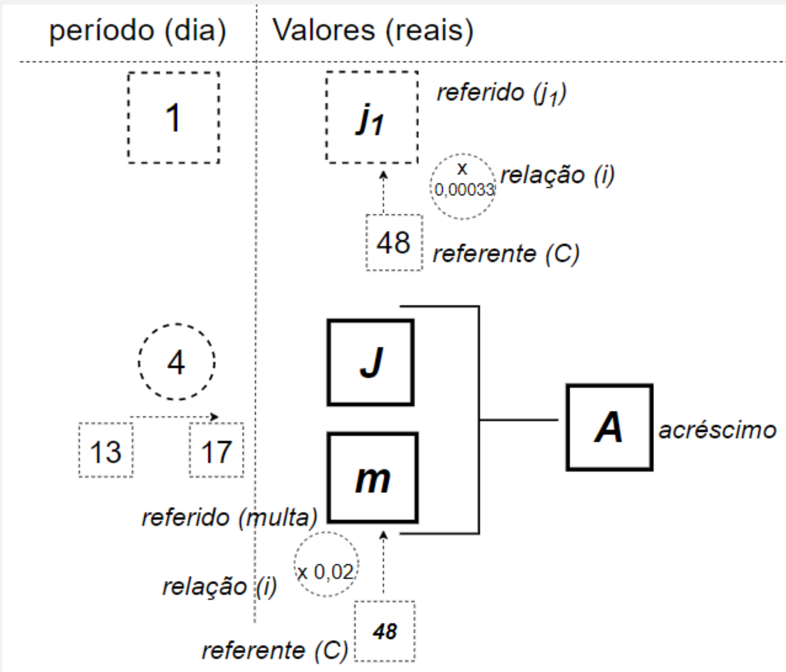
A etapa para calcular os juros (J) para todo o período de atraso refere-se a uma relação de *proporção simples – um para muitos.* Para as grandezas dessa etapa, o período de quatro dias e os juros diários, utilizamos linhas tracejadas, à exceção do código da grandeza juros (J), que representamos em linha contínua por compreendermos que faz parte da questão principal da situação.

Para a etapa do cálculo da multa (*m*), uma relação de *comparação multiplicativa,* utilizamos o código em linha contínua, pois consideramos que ela pertence à questão principal da situação. As demais grandezas e relações, como a taxa *i* e o referente, foram inseridos em linha tracejada.

A etapa que consiste no cálculo do acréscimo (A), da categoria de *composição de medidas* entre os juros (J) e da multa (m), foi representada pelos códigos em linha contínua, pelo fato de que a consideramos como parte da estrutura principal da situação-problema. Entretanto, no Quadro 26, que sistematiza as relações desse exemplo, consideramos essa relação específica uma etapa intermediária, pois, a partir da combinação dela com as demais etapas intermediárias é que propomos a estrutura do esquema relacional principal.

O Quadro 26 apresenta as organizações das medidas, indicando as relações entre elas, o que denota a característica de complexidade das relações envolvidas na situação da categoria *composição de medidas com etapas intermediárias.*

Etapa	Expressão numérica	Esquema relacional	Categoria / classe
INTERMEDIÁRIA	$17 - 13 = 4$		Transformação de medidas
	$48 \times \frac{0{,}033}{100} = 0{,}01584$		Comparação multiplicativa
	$0{,}01584 \times 4 = 0{,}06336$		Proporção simples – um para muitos

	$48 \times \frac{2}{100} = 0{,}96$		Comparação multiplicativa
	$0{,}96 + 0{,}06336 = 1{,}02336$		composição de medidas
	Esquema relacional principal		Composição de medidas, com etapas intermediárias de duas comparações multiplicativas, transformação de medidas e proporção simples
			

Quadro 26: Esquemas de Composição de Medidas com etapas intermediárias
Fonte: O autor

Para cada etapa intermediária, utilizamos a nomenclatura das classes de situações do Campo Conceitual das estruturas aditivas (VERGNAUD, 2009) e do Campo Conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009; GITIRANA *et al*, 2014).

Para a proposta da nomenclatura do esquema relacional principal, consideramos a questão principal do problema e as etapas intermediárias. Nesse caso, a questão principal foi obter o acréscimo (A), que é uma composição de medidas entre os juros (J) e a multa (m), a partir das etapas intermediárias. Assim, propusemos uma nomenclatura de *Composição de medidas, com etapas intermediárias de duas comparações multiplicativas, transformação de medidas e uma proporção simples.*

As situações de composição de medidas com etapas intermediárias identificadas nos livros didáticos abordam o contexto e relações sobre o conceito de juros de mora e a multa de mora, em que a composição dessas relações se torna a questão principal do problema.

A próxima seção apresenta situações de juros simples em que a questão principal envolve proporção simples com etapas intermediárias.

4.2 Proporção simples com etapas intermediárias

Onze foram as situações de juros simples em que a questão principal foi classificada como *proporção simples*, tendo sido encontradas uma no LD1, cinco no LD2 e outras cinco no LD3. Todas as situações apresentam as características de situações complexas, pois demandam etapas intermediárias para resolução.

Dentre as 11 situações dessa categoria, identificamos que seis necessitam de uma etapa intermediária peculiar do contexto da matemática financeira: a conversão de unidades de medida do período ou da taxa. Assim, para atingir o objetivo de responder à questão principal da situação, é necessário converter essas unidades, tendo duas possibilidades para tal: converter o período para a mesma unidade de medida temporal da taxa ou converter a unidade da taxa para mesma unidade de medida do período.

Essas características podem ser encontradas no exemplo da Figura 13, extraída do LD2, a seguir.

> *29*. Se uma mercadoria cujo preço é de R$ 200,00 for paga em 6 meses, com taxa de 20% ao ano, quanto será pago de juros no sistema de juros simples?

Figura 13: Questão principal de proporção simples com etapas intermediárias
Fonte: Dante (2016, p.25)

A situação apresenta como questionamento principal o valor dos juros simples (*J*) a ser cobrado na compra de uma mercadoria que custa 200 reais, que representa o capital (C) da operação, e que foi paga durante um período (*t*) de 6 meses, ao custo de uma taxa (*i*) de 20%/ano.

O enunciado dispõe de informações das grandezas da taxa e do período da operação em unidades de medida temporal distintas. O período foi dado em meses, sendo um total de 6 meses na situação, enquanto a taxa foi dada em percentual ao ano, o que significa que a unidade temporal da taxa é distinta da unidade mês do período.

Nota-se que as relações entre as grandezas período e taxa devem estar na mesma unidade temporal para se encontrar o valor dos juros (J). Isso significa que, em se adotando o prazo de 6 meses do enunciado, um caminho para solução seria converter a taxa de juros de 20%/ano para um percentual ao mês. Da mesma forma, um segundo caminho seria adotar a taxa de juros de 20%/ano dada no enunciado e converter o período de 6 meses para unidade anual.

Para o primeiro caminho, o de converter a taxa percentual ao ano para uma taxa percentual ao mês, tem-se uma relação quaternária das estruturas multiplicativas. Lembremos que no sistema de juros simples as taxas de juros equivalentes são taxas de juros proporcionais, portanto, uma taxa de 12%/ano é proporcional e, ao mesmo tempo, equivalente à uma taxa de 1%/mês.

Para o exemplo da Figura 13, a relação da taxa de 12%/ano está para uma taxa de 1%/mês, assim como a taxa de 20%/ano está para a taxa de *i* %/mês, é representada no esquema relacional a seguir:

taxa (% / ano)	taxa (% / mês)
12	1
20	***i***

Essa relação é da categoria de *proporção simples e* classe *cota,* em que se busca a quantidade de cotas com base em uma medida conhecida. Pode-se expressar esta relação de conversão da taxa, algebricamente, por: $i \times 12 = 1 \times 20$, ou ainda, $i = 20 \times \frac{1}{12} = \frac{20}{12}$, que, calculando, resulta em aproximadamente $i = 1{,}66$. Logo, a taxa convertida para unidade temporal de mensal é $i = 1{,}66$%/mês, se considerarmos duas casas decimais.

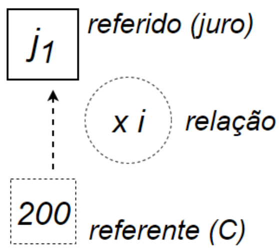
O segundo caminho seria converter o período de 6 meses em uma medida anual, uma relação quaternária das estruturas multiplicativas em que 12 meses está para 1 ano, assim como 6 meses está para o período *t* anos. O seguinte esquema relacional representa essa relação quaternária:

período (mês)	período (ano)
12	1
6	*t*

Trata-se da categoria *proporção simples e* classe *cota,* em que se busca a quantidade de cotas com base em uma medida conhecida. Pode-se expressar esta relação de conversão do período, algebricamente, por: $t \times 12 = 1 \times 6$, ou ainda, $t = 6 \times \frac{1}{12}$, que, calculando, resulta em $t = 0{,}5$. Logo, o período convertido em unidade temporal anual é dado por $t = 0{,}5$ anos.

Assim, para continuidade da resolução pode-se considerar a taxa de 20%/ano dada no enunciado e o período que foi convertido para 0,5 anos; ou considerar o período de 6 meses dado no enunciado e a taxa convertida de aproximadamente 1,66%/mês. Os dois caminhos permitem estabelecer uma relação de comparação entre o capital (C) e o valor do juro para o período unitário, considerada uma etapa intermediária para auferir o valor dos juros (J) no período estabelecido pela situação-problema.

Para o primeiro caminho, o juro para o período unitário (j_1) é o valor referido a um ano; algebricamente, tem-se $j_1 = C.i = 200 \times \frac{20}{100} = 40$, ou seja, o juro (j_1) para o período unitário de um ano é de 40 reais. Para o segundo caminho, o juro para o período unitário (j_1) é o valor referido para um mês, e, algebricamente, tem-se $j_1 = C.i = 200 \times \frac{1{,}66}{100} = 3{,}33$, ou seja, o juro (j_1) para o período unitário de um mês é de 3,33 reais. Podem-se representar essas relações a partir do esquema relacional:



O esquema relacional para os dois caminhos é uma relação ternária das estruturas multiplicativas, da categoria *comparação multiplicativa* com referido desconhecido, em que foi dado o referente, que é o capital C, a relação, que é a taxa *(i),* e busca-se o referido, que é o juro (j_1) para o período unitário.

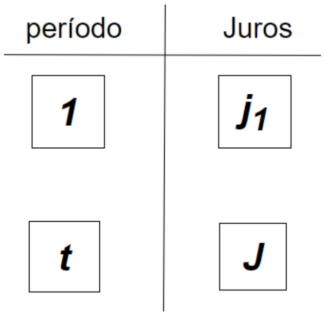
O valor dos juros (J) cobrado durante o período da operação é o mesmo para os dois caminhos, seja a escolha pela conversão da unidade da taxa ou pela conversão do período. Para a taxa de 20%/ano dada no enunciado e o juro de 40 reais ao ano, algebricamente, tem-se:

$$J = j_1.t = 40 \times 0{,}5 = 20.$$

Considerando o período de 6 meses dado no enunciado e o juro 3,33 reais ao mês, tem-se o valor aproximado dos juros de 19,98 reais, por não se utilizar a dízima periódica no cálculo. Trata-se de uma característica da situação de juros simples quando há necessidade de se efetuar conversões de medidas e há obtenção de dízimas periódicas. Contudo, considerando os valores em fração, algebricamente, tem-se:

$$J = j_1.t = (200 \times \frac{20}{12} \times \frac{1}{100}) \times 6 = 20.$$

Sobre os juros (*J*), podem ser representados pelo seguinte esquema relacional:



Por esse esquema, é possível inferir tratar-se de uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples* e classe *um para muitos que se utiliza* para obter o valor dos juros. Independentemente da opção de conversão da medida para resolver a situação-problema, seja a conversão da taxa ou a conversão do período e, consequentemente, do valor obtido para o juro de período unitário (j_1), não há interferência em categoria e classe do cálculo relacional dos juros (J), visto que as relações entre as grandezas são preservadas, e o valor será o mesmo.

Verifica-se que, na situação apresentada, estabeleceram-se relações entre as conversões de medidas, a relação entre o capital (C) e o juro (j_1) obtido para uma unidade anual ou mensal, e a relação de proporcionalidade entre o juro unitário e o valor dos juros (J) para todo o período da operação.

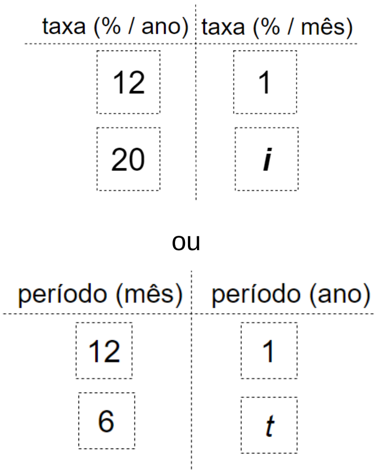
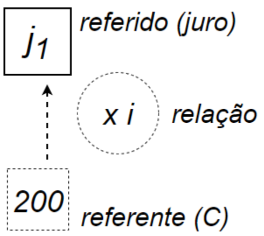
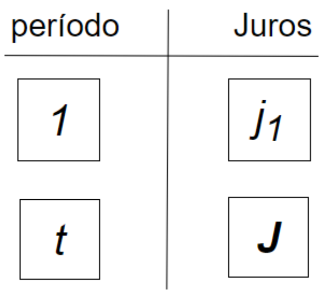
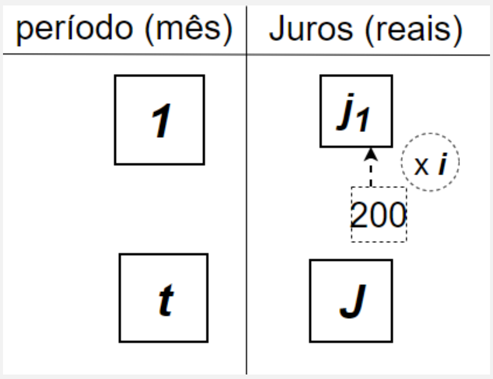
Consideramos essas relações identificadas como etapas intermediárias necessárias para resolver o questionamento principal do enunciado, que solicitou o valor dos juros ao final da operação. Para caracterizar essas etapas intermediárias, utilizamos a adaptação dos códigos de Vergnaud (2009) em linhas tracejadas (Quadro 25).

A etapa de conversão de medidas é uma relação quaternária de proporcionalidade das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples*. Nessa situação, a opção pela conversão da taxa se configura na classe *cota*, e a opção pela conversão do período, também pela classe *cota*.

Encontrar o valor de juro (j_1), para um mês ou para um ano, consiste na categoria de *comparação multiplicativa,* com o valor do capital (C), tendo sido dada a relação *i* da taxa de juros; utilizam-se então os códigos em linha tracejada para caracterizá-la como etapa intermediária, à exceção da grandeza juro (j_1)*,* que representamos em linha contínua por compreendermos que faz parte da questão principal da situação.

A etapa para calcular os juros (J) para todo o período da operação refere-se a uma relação de *proporção simples – um para muitos,* tendo sido representada pelos códigos em linha contínua, devido ao fato de ser parte da estrutura principal da situação. Consideramos essa relação especifica uma etapa intermediária, pois a partir da combinação dela com as demais etapas intermediárias é que propomos a estrutura do esquema relacional principal.

O conceito de juros simples pode ser modelizado como uma função linear do tipo $J(t) = C \cdot i \cdot t$, para $t > 0$, e estabelecer relações entre as grandezas conforme o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas. Considerando essa aproximação entre juros simples e estruturas multiplicativas, nesse caso, compreendemos a possibilidade de elaborar esquemas relacionais, conforme apresentado no Quadro 27.

Etapa	Expressão numérica	Esquema relacional	Categoria
INTERMEDIÁRIA	$20 \times \frac{1}{12} = \frac{20}{12} = 1{,}66$ ou $6 \times \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5$		Proporção simples (cota)
	$200 \times \frac{20}{100} = 40$ ou $200 \times \frac{20}{12} \times \frac{1}{100} = 3{,}33$		Comparação multiplicativa
	$200 \times \frac{20}{100} \times 0{,}5 = 20$ ou $200 \times \frac{20}{12} \times \frac{1}{100} \times 6 = 20$		Proporção simples (um para muitos)
	Esquema relacional principal 		Proporção simples com etapas intermediárias de proporção simples, comparação multiplicativa; e conversão de medidas.

Quadro 27:Esquemas de *proporção simples* com etapas intermediárias
Fonte: O autor

Como essa situação possui a característica de conversão de medidas da categoria de *proporção simples,* e constataram-se duas opções de resolução a serem escolhidos pelo indivíduo e que possuem esquemas relacionais distintos, optou-se por não inserir esses esquemas relacionais na estrutura principal, porém, inserimos a informação da necessidade de conversão de medida na nomenclatura, para categorizar essa situação.

Para a proposta da nomenclatura do esquema relacional principal, consideramos a questão principal do problema e as etapas intermediárias. No caso em específico, a questão principal envolve obter os juros (J) durante o período (t) da operação, proporcional ao juro da unidade mensal ou anual. Assim, propusemos uma nomenclatura: *Proporção simples com etapas intermediárias de proporção simples, comparação multiplicativa; e conversão de medidas.*

Nessa categoria de situações de juros simples, em que a questão principal é classificada como *proporção simples,* foi possível identificar duas variações na forma em que são apresentadas em livros didáticos de matemática do Ensino Médio, sendo o caso da classe *multiplicação – um para muitos* e da classe *partição*, conforme o Quadro 28.

Categoria da questão principal	**Variações da classe**	**LD1**	**LD2**	**LD3**
Proporção simples	*Um para muitos*	1	3	4
	Partição	0	2	1
	Cota	0	0	0

Quadro 28: Variações da categoria proporção simples com etapas intermediárias
Fonte: O autor

Considerando as variações da categoria *proporção simples* da classe *partição*, identificamos que a questão principal dessas situações objetiva calcular o valor da taxa de juros (i) ou do capital (C), como apresentado no exemplo da Figura 14.

27. Uma dívida de R$ 750,00 foi paga em 8 meses depois de contraída e os juros foram de R$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros?

Figura 14: Proporção simples *(classe partição)* com etapas intermediárias
Fonte: Dante (2016, p.25)

Nesse caso, a etapa intermediária seria o cálculo do juro para o período unitário (j_1), que é o valor referido a um mês, e, posteriormente, ocorreria a comparação multiplicativa com o valor da dívida, para obter a taxa de juros.

A próxima seção apresenta situações de juros simples que envolvem relações com o montante (*M*), situações que, por vezes, necessitam de conversão de medidas.

4.3 Proporção simples e transformação de medidas com etapas intermediárias

Vinte foram as situações de juros simples em que a questão principal foi classificada como *proporção simples e transformação de medidas*, sendo que foram identificadas dez no LD1, uma no LD2 e outras nove no LD3. Todas as situações apresentam as características de situações complexas, pois demandam etapas intermediárias para resolução. Dentre as vinte situações dessa categoria, identificamos que seis também necessitam uma etapa intermediária específica: a conversão de unidades de medida do período ou da taxa.

Identificamos que essas situações estabelecem relações com o conceito de montante *(M)* e que fazem parte do questionamento principal do enunciado. O montante simples *(M)* pode ser modelizado como uma função afim do tipo $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0, e estabelecer relações entre as grandezas conforme o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas e das estruturas aditivas.

Considerando essas aproximações, identificamos que a estrutura principal das situações de juros simples que envolvem o conceito de montante são do tipo *mistas*, pois estabelecem, ao menos, uma relação aditiva e, ao menos, uma relação multiplicativa.

Apresentamos como exemplo dessa categoria a situação contida no livro didático LD3, que possui etapas intermediárias e necessidade de conversão de unidades de medida, conforme a Figura 15 a seguir.

> *38.* Júlio aplicou, sob regime de juro simples, a importância de R$ 7500,00, com taxa de 2,5% a.m., por um período de dois trimestres.
> a) Qual era o montante ao fim desse período?

Figura 15: Proporção simples e transformação de medida com etapas intermediárias
Fonte: Souza, J.; Garcia, J. (2016, p.24)

O questionamento principal da situação é calcular o montante (M) a ser acumulado durante um período (t) de dois trimestres em que um capital (C) é aplicado a uma taxa (i) de 2,5%/mês. O valor do montante (M) é o resultado da soma entre o capital (C) e os juros (J) obtidos durante o período.

O enunciado fornece dados das grandezas da taxa e do período da operação em unidades de medida temporal distintas. O período foi dado em trimestres, enquanto a taxa foi dada em percentual ao mês, ou seja, a unidade temporal da taxa é distinta da unidade trimestre do período.

Nota-se que as relações entre as grandezas período e taxa devem estar na mesma unidade temporal para que se encontre o valor dos juros (J). Adotado o prazo de 2 trimestres do enunciado, uma opção para solução é converter a taxa de juros de 2,5%/mês para um percentual ao trimestre. Por outro lado, em se adotando a taxa de juros de 2,5%/mês dada no enunciado, deve-se efetuar a conversão do período de 2 trimestres para unidade mensal.

A opção de converter a taxa percentual de 2,5%/mês para uma taxa percentual ao trimestre é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, conforme representado no esquema relacional a seguir, sendo que nas situações do regime de juros simples, as taxas de juros equivalentes são taxas de juros proporcionais:

taxa (% / mês)	taxa (% / trimestre)
1	3
2,5	***i***

Essa relação é da categoria de *proporção simples e* classe *um para muitos,* em que se busca o valor correspondente à medida proporcional. Pode-se expressar esta relação de conversão da taxa, algebricamente, por: $i \times 1 = 3 \times 2{,}5$, que, calculando, resulta em $i = 7{,}5$. Logo, a taxa convertida para unidade temporal de trimestre é $i = 7{,}5$%/trimestre.

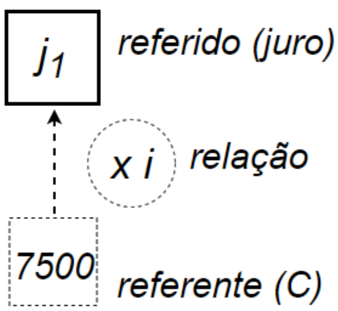
A outra opção é converter o período de 2 trimestres em uma medida mensal, sendo essa uma relação quaternária das estruturas multiplicativas. Pode-se expressar esta relação de conversão do período, algebricamente, por: $t \times 1 = 3 \times 2$, que, calculando, resulta no período convertido $t = 6$ meses. Representando por meio do esquema relacional, temos:

período (mês)	período (trimestre)
3	1
t	2

Trata-se da categoria *proporção simples e* classe *um para muitos,* em que 1 trimestre está para 3 meses, assim como 2 trimestres está para o período *t*.

Assim, para a continuidade da resolução, pode-se considerar a taxa de 2,5%/mês dada no enunciado e o período que foi convertido para 6 meses; ou o período de 2 trimestres dado no enunciado e a taxa convertida de 7,5%/trimestre. As duas opções permitem estabelecer uma relação de comparação entre o capital (C) e o valor do juro para o período unitário mensal ou trimestral, considerada uma etapa intermediária para auferir o valor dos juros (J) no período estabelecido pela situação.

Para a opção da taxa de 2,5%/mês, o juro para o período unitário (j_1) é o valor referido a um mês, que, algebricamente, constitui $j_1 = C.i = 7500 \times \frac{2{,}5}{100} = 187{,}5$, ou seja, o juro (j_1) para o período unitário de um mês é de 187,5 reais. Para opção da taxa 7,5%/trimestre, o juro para o período unitário (j_1) é o valor referido para um trimestre, que, algebricamente, representa-se por $j_1 = C.i = 7500 \times \frac{7{,}5}{100} = 562{,}5$ ou seja, o juro (j_1) para o período unitário de um trimestre é de 562,5 reais. Podem-se representar essas relações a partir do esquema relacional:



O esquema relacional para as duas opções é uma relação ternária das estruturas multiplicativas, da categoria *comparação multiplicativa* com referido desconhecido, em que foi dado o referente (capital C), a relação (taxa *i)* e busca-se o referido, que é o juro (j_1) para o período unitário.

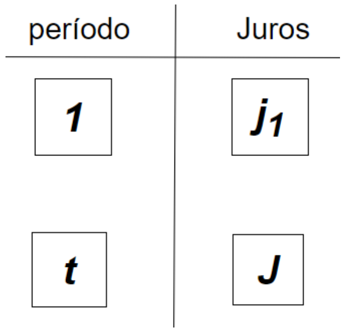
O valor dos juros (J) cobrado durante todo o período da aplicação é o mesmo para as duas opções. Para o período de 6 meses e o juro de 187,5 por mês, algebricamente, tem-se:

$$J = j_1 . t = 187{,}5 \times 6 = 1125$$

Para o período de 2 trimestres e o juro de 562,5 por um trimestre, algebricamente, tem-se:

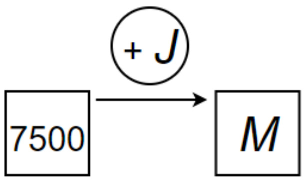
$$J = j_1 . t = 562{,}5 \times 2 = 1125$$

Os juros (*J*) são uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, podendo ser representados pelo seguinte esquema relacional:



Assim, enquadra-se na categoria *proporção simples* e classe *um para muitos* a estrutura para se obter o valor dos juros. A opção de conversão da medida para resolver a situação-problema, não implica na categoria e classe do cálculo relacional dos juros.

A questão principal da situação é encontrar o valor do montante *M,* que é uma relação dinâmica e resulta de uma transformação da medida inicial, nesse caso, o capital *C*, pelos juros J auferidos no período. Pode-se representar o esquema relacional como:



Trata-se então de uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria *transformação de medidas*, na qual busca-se a medida final, sendo uma transformação positiva. Algebricamente, escreve-se $M = C + J = 7500 + 1125 = 8625$.

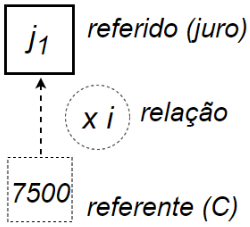
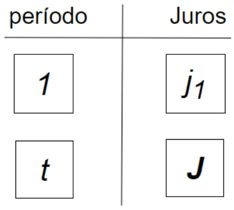
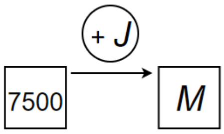
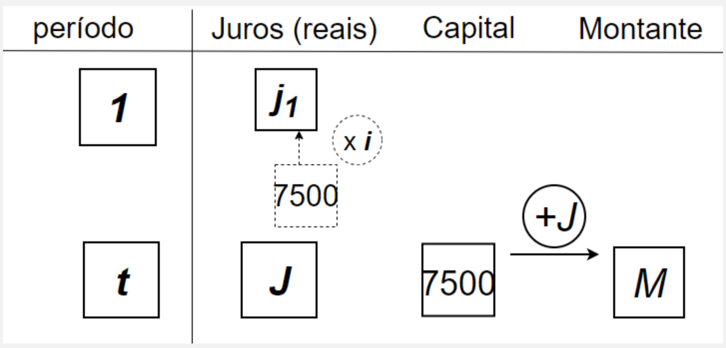
Consideramos as relações identificadas nessa situação como etapas intermediárias necessárias para resolver o questionamento principal do enunciado, que solicitou o valor do montante ao final do período de uma aplicação.

A etapa para obter o valor de juro unitário (j_1) é da categoria de *comparação multiplicativa,* e utilizam-se os códigos em linha tracejada para caracterizá-la como etapa intermediária, à exceção da grandeza juro (j_1), que representamos em linha contínua por compreendermos que faz parte da questão principal da situação.

As etapas para obtenção dos juros (J) e para cálculo do montante (M) foram representadas pelos códigos em linha contínua, por fazerem parte da estrutura principal da situação-problema. Consideramos, ainda, essa relação específica uma etapa intermediária, pois a partir da combinação dela com as demais etapas intermediárias é que propomos a estrutura do esquema relacional principal.

Como o montante *M* do regime de juros simples pode ser modelizado algebricamente como uma função afim do tipo $M(t) = C.i.t + C$, consideramos a possibilidade de aproximação das situações de montante simples com as estruturas aditivas e multiplicativas para propor o Quadro 29, com as expressões numéricas e os esquemas relacionais das etapas.

Etapa	Expressão numérica	Esquema relacional	Categoria
INTERMEDIÁRIA	$3 \times 2,5 = 7,5$ ou $3 \times 2 = 6$	taxa (% / mês) | taxa (% / trimestre) 1 | 3 2,5 | ***i*** ou período (mês) | período (trimestre) 3 | 1 t | 2	Proporção simples (um para muitos)

	$7500 \times \frac{2{,}5}{100} = 187{,}5$ ou $7500 \times \frac{7{,}5}{100} = 562{,}5$		Comparação multiplicativa
	$187{,}5 \times 6 = 1125$ ou $562{,}5 \times 2 = 1125$		Proporção simples (um para muitos)
	$7500 + 1125 = 8625$		Transformação de medidas
	Esquema relacional principal 		Proporção Simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de comparação multiplicativa, proporção simples; e conversão de medida.

Quadro 29:Esquemas de proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias
Fonte: o autor

Como a situação tem a característica de conversão de medidas da categoria de *proporção simples* e possui esquemas relacionais distintos, optou-se por não inserir esses esquemas relacionais na estrutura principal, porém, inserimos a informação da necessidade de conversão de medida na nomenclatura, para categorizar essa situação.

Como nomenclatura do esquema relacional principal, consideramos a questão principal do problema e as etapas intermediárias. Nesse caso, a questão principal foi obter o montante (M). Assim, propôs-se a nomenclatura *Proporção Simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de comparação multiplicativa, proporção simples; e conversão de medida.*

No âmbito dessa categoria de situações de juros simples, em que a questão principal envolve o contexto de montante (M), sendo então classificada como *proporção simples* e *transformação de medidas,* foi possível identificar variações na forma como são apresentadas em livros didáticos de matemática do Ensino Médio, conforme o Quadro 30.

Categorias / classes	**Transformação de medida positiva**	**Transformação de medida negativa**
Proporção simples – um para muitos	6	0
Proporção simples – partição	9	0
Proporção simples – cota	5	0

Quadro 30: Variações da categoria proporção simples e transformação de medidas
Fonte: O autor

Para a variação da categoria *proporção simples – partição* e *transformação de medida positiva*, identificamos que a questão principal dessas situações objetiva calcular o valor da taxa de juros (i) ou do capital (C), inserido o contexto do montante (M), como apresentado no exemplo da Figura 16.

> *42.* Certa loja de informática vende uma impressora à vista por R$270,00, ou em parcela única de R$298,35, paga 90 dias após a compra. Caso um consumidor deseje comprar pagando após os 90 dias, qual será a taxa mensal de juros simples paga?

Figura 16: Proporção simples *(classe partição)* e transformação de medidas positiva
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.24)

Nesse caso, o capital (C) é o valor de R$270,00, e o montante (M), o valor de R$298,35, após 90 dias da compra. Trata-se de uma relação ternária de transformação de medidas positiva, já que houve um acréscimo entre o capital inicial e o montante final, a partir dos juros da operação. A questão principal busca o valor da taxa mensal de juros, uma relação quaternária de *proporção simples* da classe *partição.*

Considerando a variação da categoria *proporção simples – cota* e *transformação de medida positiva*, identificamos que a questão principal de suas situações objetiva calcular o período (t), inserido o contexto do montante (M), como apresentado no exemplo da Figura 17.

41. De quanto tempo um capital necessita para ser triplicado, se aplicado a uma taxa de juro simples de 8% ao mês?

Figura 17: Proporção simples *(classe partição)* e transformação de medidas positiva
Fonte: Souza e Garcia (2016, p.24)

Essa situação torna-se mais complexa, pois o enunciado não fornece os dados do capital e do montante. É necessário estabelecer uma relação entre essas grandezas, em que o capital C, após determinado período t, gerou um Montante triplicado, ou seja, 3C. Trata-se de uma relação ternária de transformação de medidas positiva, já que houve um acréscimo (juros) de 2C entre o capital inicial e o montante final. A questão principal busca o valor do período, uma relação quaternária de *proporção simples* da classe *cota.*

Dentre as 20 situações da categoria *proporção simples e transformação de medidas*, não identificamos uma situação que tivesse a variação de transformação negativa.

Diante disso, a próxima seção apresenta uma discussão embasada na TCC para a conversão de medidas em situações de juros simples.

4.4 Conversão das unidades de medidas da taxa ou do período

Identificamos, entre as 33 situações de juros simples que foram analisadas para esta pesquisa, doze que necessitam da conversão de medidas para que se responda a questão principal do enunciado. As análises indicaram duas opções nessas conversões, seja a opção de converter a taxa para a mesma unidade temporal do período, ou a opção de converter o período para a mesma unidade temporal da taxa. Quando a unidade de medida temporal da taxa *(i)* é igual à unidade de medida temporal do período *(t)*, não há necessidade de conversão de medidas.

Comparando as unidades de medida temporal, convencionamos utilizar *dia, mês e ano*. Essa escolha ocorre porque são as unidades de medida mais recorrentes na fonte de dados selecionada (livros didáticos LD1, LD2 e LD3, de matemática do Ensino Médio) e, também, porque são as unidades de medida mais utilizadas pela sociedade, especificamente no mercado financeiro.

Estabelecemos as seguintes relações entre a natureza da unidade temporal do período (t) e taxa (i):

t = i,

compreendemos que a natureza da unidade temporal do período (t) e taxa (i) são as mesmas, e, portanto, não há necessidade de conversão das medidas. Exemplos:

$t = 60\ dias\ e\ i = 0{,}033\%/dia$;

$t = 18\ meses\ e\ i = 0{,}5\%/mês$;

$t = 3\ anos\ e\ i = 6\%/ano$,

t > i,

a natureza da unidade temporal do período (t) é maior que a unidade temporal da taxa (i), portanto, há necessidade de conversão das medidas para resolução. Exemplos:

$t = 60\ meses\ e\ i = 0{,}033\%/dia$;

$t = 1\ ano\ e\ i = 1\%/dia$;

$t = 3\ anos\ e\ i = 0{,}5\%/mês$,

t < i,

a natureza da unidade temporal do período (t) é menor que a unidade temporal da taxa (i), portanto, há necessidade de conversão das medidas para resolução. Exemplos:

$t = 28\ dias\ e\ i = 0{,}5\%/mês$;

$t = 180\ dias\ e\ i = 6\%/ano$;

$t = 120\ meses\ e\ i = 18\%/ano$.

Assim, no Quadro 31, propomos uma síntese entre as possibilidades de comparação das unidades de medida temporal do período (t) e a da taxa (i).

Comparação entre as unidades de medida temporal		**taxa (i)**		
		dia	mês	ano
período (t)	dia	*t = i*	*t < i*	*t < i*
	mês	*t > i*	*t = i*	*t < i*
	ano	*t > i*	*t > i*	*t = i*

Quadro 31: Comparação entre unidades de medida temporal
Fonte: O autor

Ressaltamos que, mesmo utilizando unidades de medida temporal pouco convencionais, como *bimestre, trimestre, quadrimestre, semestre*, essas derivam originalmente da unidade em mês, o que torna análoga as comparações do Quadro 31.

Consideramos dois tipos de parâmetros para as discussões da conversão entre a taxa e a conversão do período:

1 – A unidade de medida temporal da taxa *(i)* é *maior* que a unidade de medida temporal do período *(t).* Um exemplo é quando é informado no enunciado o período de 6 meses e a taxa de 20%/ano. Ou seja, a unidade temporal da taxa é dada em *ano,* e o período está em *mês*. Apresentamos as discussões desse parâmetro na seção 4.4.1. Adotamos para esse parâmetro de análise das unidades de medida temporal a relação $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{i}$ para representá-la.

2 – A unidade de medida temporal da taxa *(i)* é *menor* que a unidade de medida temporal do período *(t)*. Um exemplo é quando é dada a taxa de 2,5%/mês e o período de 2 trimestres. Ou seja, a unidade temporal da taxa é dada em *mês,* e o período está em *trimestre*. Apresentamos as discussões desse parâmetro na seção 4.4.2. Adotamos para esse parâmetro de análise das unidades de medida temporal a relação $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{i}$ para representá-la.

Para as análises dos parâmetros citados acima, apresentamos duas situações identificadas no LD1, que, embora não contextualizadas, permitiram que as análises e discussões tivessem foco nas características da conversão de medidas baseadas na Teoria dos Campos Conceituais. Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), para a categoria de *proporção simples* das estruturas multiplicativas, pode-se aprofundar as discussões do esquema relacional por meio de uma análise vertical (escalar) e de análise horizontal (função), a partir das grandezas e medidas do enunciado.

4.4.1 Conversão das unidades de medida para a relação $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{i}$

Nesta seção, são analisadas as relações de conversão de medidas, tanto para converter o período como para converter a taxa. O parâmetro investigado é quando a unidade de medida temporal do período é *menor* que a unidade de medida temporal da taxa, $t < i$, como exemplo da situação da Figura 18, extraída do LD1.

> *24*. Obtenha o montante de uma dívida, contraída a juros simples, nas seguintes condições:
> a) capital: R$ 400,00; taxa: 48% ao ano; prazo: 5 meses;

Figura 18: Exemplo da situação para a relação $\boldsymbol{t} < \boldsymbol{i}$
Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p.162)

As duas próximas seções analisam os dois caminhos possíveis para resolver a etapa intermediária peculiar das situações de juros simples: converter as unidades do período ou converter a unidade de medida da taxa.

4.4.1.1 Conversão do período

O enunciado apresenta o período em 5 meses. Nesse caso, analisamos por meio do esquema relacional a conversão da medida do período para ano.

período (mês)	período (ano)
12	1
5	***t***

Trata-se de uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, classificada como da categoria *proporção simples* do tipo *cota*. Nela, busca-se a medida em anos para o período de 5 meses; sabendo que em um ano há 12 meses, a expressão numérica é dada por $t\ =\ 5 \times \frac{1}{12}\ = \frac{5}{12}$.

Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), as discussões do cálculo relacional são realizadas pelas análises vertical e horizontal das relações.

Para análise vertical, há duas formulações: *t anos estão para 1 ano, assim como 5 meses está para 12 meses*; e *t anos estão para 5 meses, assim como 1 ano está para 12 meses.*

Primeira formulação da análise vertical:

$$\frac{t\ ano}{1\ ano} = \frac{5\ meses}{12\ meses}$$

$$t\ ano = \frac{5\ meses}{12\ meses} \times 1ano$$

$$t\ ano = \frac{5\ \cancel{meses}}{12\ \cancel{meses}} \times 1ano$$

$$t\ ano = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}} \times 1ano$$

Assim, $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Segunda formulação da análise vertical:

$$\frac{t\ ano}{5\ meses} = \frac{1\ ano}{12\ meses}$$

$$t\ ano = \frac{5\ meses}{12\ meses} \times 1ano$$

$$t\ ano = \frac{5\ \cancel{meses}}{12\ \cancel{meses}} \times 1ano$$

$$t\ ano = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}} \times 1ano$$

Logo, $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

O operador escalar permite passar de uma linha a outra em uma mesma categoria de medidas.

Para a análise horizontal, Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014) propõem análises a partir da noção da taxa de proporcionalidade, descrita no capítulo 2 desta pesquisa, dada como $f(x) = a.\ x$, em que *a* é coeficiente de dimensão ou operador função.

Como 12 meses corresponde a 1 ano, tem-se:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(12meses) = a \times x = 1ano$$

$$a \times (12meses) = 1ano$$

$$a = \frac{1\ ano}{12\ meses}$$

Assim, $a = \frac{1\ ano}{12\ meses}$ é o operador função.

Portanto, esse operador função permite passar de uma grandeza para outra. Aplicando esse operador para o período de 5 meses, temos:

$$f(x) = a \times x$$

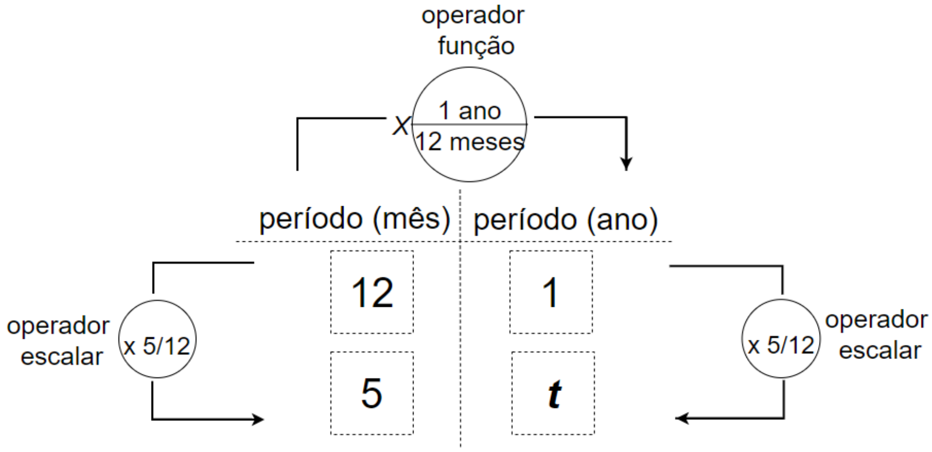
$$f(5\ meses) = \frac{1\ ano}{12\ meses} \times (5meses)$$

$$f(5\ meses) = \frac{1\ ano\ \times 5\ \cancel{meses}}{12\ \cancel{meses}} = \frac{5}{12}ano$$

$$f(5\ meses) = \frac{5}{12}ano$$

Assim, 5 meses correspondem a $\frac{5}{12}ano$, utilizando-se o operador função.

O esquema relacional com o operador escalar e o operador função é representado por:



O operador função $\frac{\boldsymbol{1\ ano}}{\boldsymbol{12\ meses}}$ permite migrar de uma grandeza para outra, em virtude de operar com dimensões (ano/mês). Para o caminho inverso, ainda na análise horizontal, utiliza-se a operação inversa do operador função.

O operador escalar $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$ sem dimensão opera na vertical no esquema relacional, sendo a razão entre os valores da mesma grandeza.

4.4.1.2 Conversão da taxa

O enunciado apresenta a taxa de 48%/ano. Nesse caso, analisamos, por meio do esquema relacional, a conversão da medida da taxa para mês. Como mencionado, no regime de juros simples, as taxas de juros equivalentes são taxas de juros proporcionais. Trata-se de uma relação quaternária, da categoria *proporção simples* do tipo *cota.*

Contudo, Vergnaud (1993, 2009) apresenta a categoria de proporção simples como uma relação quaternária composta por quatro grandezas, duas a duas, de mesma natureza, tendo uma relação de proporcionalidade.

Nessa pesquisa, propomos para a análise da conversão da taxa como uma relação quaternária composta por quatro relações (taxas), duas a duas, de mesma proporcionalidade. Isto significa propor para a categoria de *proporção simples* das estruturas multiplicativas que também sejam utilizadas para representar a proporcionalidade entre relações e não somente entre grandezas, como o esquema a seguir:

taxa (% / ano)	taxa (% / mês)
12	1
48	***i***

Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), as discussões do cálculo relacional são realizadas pelas análises vertical e horizontal das relações. Contudo, propomos análises vertical e horizontal para uma proporcionalidade entre relações.

Para análise vertical, há duas formulações: ***i*** %/mês *está para 1%/mês, assim como 48%/ano está para 12%/ano*; e ***i*** %/mês *está para 48%/ano, assim como 1%/mês está para 12%/ano.*

Primeira formulação da análise vertical:

$$\frac{i\ \%/m\hat{e}s}{1\ \%/m\hat{e}s} = \frac{48\ \%/ano}{12\ \%/ano}$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48\ \%/ano}{12\ \%/ano} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48\ \cancel{\%/ano}}{12\ \cancel{\%/ano}} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48}{12} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \mathbf{4}\ \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

Assim, $\mathbf{4}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Segunda formulação da análise vertical:

$$\frac{i\ \%/m\hat{e}s}{48\ \%/ano} = \frac{1\ \%/m\hat{e}s}{12\ \%/ano}$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48\ \%/ano}{12\ \%/ano} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48\ \cancel{\%/ano}}{12\ \cancel{\%/ano}} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \frac{48}{12} \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

$$i\ \%/m\hat{e}s = \mathbf{4}\ \times\ 1\ \%/m\hat{e}s$$

Logo, $\mathbf{4}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Nesse caso, o operador escalar permite passar de uma linha a outra em uma mesma categoria de relações.

Para a análise horizontal, Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014) propõem análises a partir da noção da taxa de proporcionalidade, descrita no capítulo 2 desta pesquisa, dada como $f(x) = a.\ x$, em que *a* é coeficiente de dimensão ou operador função.

Como estamos propondo uma análise da proporcionalidade entre relações e considerando que a taxa de $12\ \%/ano$ corresponde a uma taxa de $1\ \%/mês$, tem-se:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(12\ \%/ano) = a \times x = 1\ \%/mês$$

$$a \times (12\ \%/ano) = 1\ \%/mês$$

$$a\ = \frac{\frac{1\%}{mês}}{\frac{12\%}{ano}} = \frac{1\%}{mês} \times \frac{ano}{12\%}$$

$$a\ = \frac{1\cancel{\%}}{mês} \times \frac{ano}{12\cancel{\%}} = \frac{ano}{12\ mês}$$

Assim, $a\ = \frac{ano}{12\ mes}$ é o operador função.

Portanto, esse operador permite passar de uma relação (taxa) para outra. Aplicando esse operador para taxa de 48%/ano, temos:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(48\ \%/ano) = \frac{ano}{12\ mês} \times (48\ \%/ano)$$

$$f(48\ \%/ano) = \frac{ano}{12\ mês} \times \frac{48\%}{ano}$$

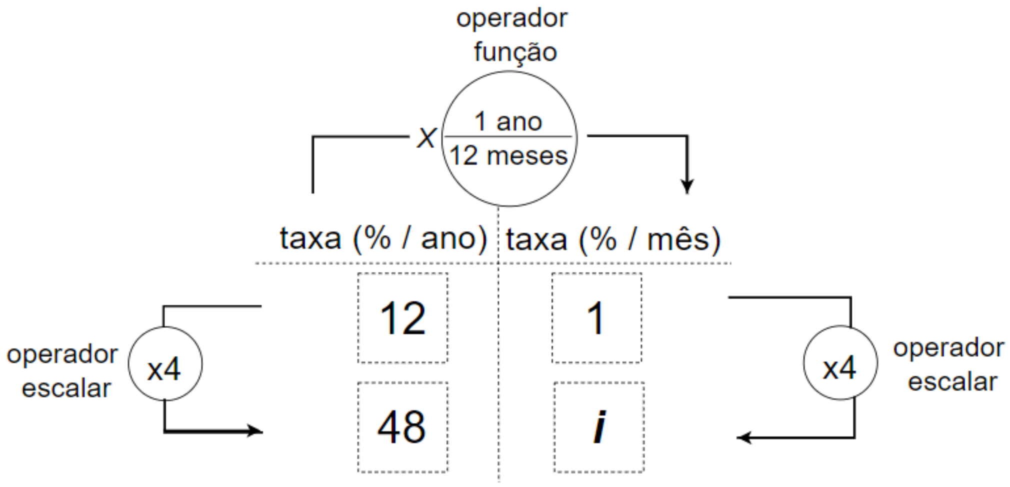
$$f(48\ \%/ano) = \frac{\cancel{ano}}{12\ mês} \times \frac{48\%}{\cancel{ano}} = \frac{48\%}{12mês}$$

$$f(48\ \%/ano) = \frac{48\%}{12mês} = \frac{4\%}{mês}$$

$$f(48\ \%/ano) = 4\%/mês$$

Assim, a taxa de 48%/ano corresponde a 4%/mês utilizando-se o operador função, lembrando que no regime de juros simples taxas equivalentes são proporcionais.

O esquema relacional com o operador escalar e o operador função é representado por:



O operador função $\frac{\boldsymbol{1\ ano}}{\boldsymbol{12\ meses}}$ permite migrar de uma relação para outra, em virtude de operar com dimensões (ano/mês). Para o caminho inverso, ainda na análise horizontal, utiliza-se a operação inversa do operador função.

O operador escalar **4** sem dimensão opera na vertical no esquema relacional, sendo a razão entre as relações na vertical.

Para essas duas possibilidades de conversão de medida analisadas, elaboramos o Quadro 32:

Situação	Expressão numérica	Esquema relacional	Categoria / classe
Conversão de PERÍODO	$5 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$	período (mês) | período (ano) 12 | 1 5 | ***t***	Proporção simples - COTA
Conversão de TAXA	$48 \times \frac{1}{12} = \frac{48}{12} = 4$	taxa (% / ano) | taxa (% / mês) 12 | 1 48 | ***i***	Proporção simples – COTA

Quadro 32: Comparação entre as situações de conversão de medidas para $t < i$
Fonte: O autor

Portanto, quando a relação da unidade temporal entre taxa e período é tal que $t < i$, temos a categoria de *proporção simples* da classe *cota,* para a situação de conversão de período quando está em jogo a proporcionalidade entre grandezas, e para a situação de conversão de taxa quando está em jogo a proporcionalidade entre relações.

4.4.2 Conversão das unidades de medida para relação $\boldsymbol{t > i}$

Nesta seção, são investigadas as relações de conversão de medidas para o parâmetro quando a unidade de medida temporal do período é *maior* que a unidade de medida temporal da taxa, $t > i$, como exemplo da situação da Figura 19, extraída do LD1.

> *24*. Obtenha o montante de uma dívida, contraída a juros simples, nas seguintes condições:
> a) capital: R$ 5.000,00; taxa: 0,25% ao dia; prazo: 3 meses;

Figura 19: Exemplo da situação para a relação $\boldsymbol{t > i}$
Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p.162)

As próximas duas seções analisam os dois caminhos possíveis para resolver a etapa intermediária de conversão de unidade de medidas.

4.4.2.1 Conversão do período

O enunciado apresenta o período em 3 meses. Nesse caso, analisamos pelo esquema relacional a conversão da medida do período para dias.

período (mês)	período (dia)
$\boxed{1}$	$\boxed{30}$
$\boxed{3}$	$\boxed{\boldsymbol{t}}$

É uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, da categoria *proporção simples* do tipo *um para muitos*. A expressão numérica é $t = 3 \times 30 = 90$.

Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), dadas as grandezas e medidas do enunciado, temos as análises vertical e horizontal das relações na categoria de proporção simples.

Para análise vertical, há duas formulações: *t dias estão para 30 dias, assim como 3 meses estão para 1 mês*; e *t dias estão para 3 meses, assim como 30 dias estão para 1 mês.*

Primeira formulação da análise vertical:

$$\frac{t\ dias}{30\ dias} = \frac{3\ meses}{1\ mes}$$

$$t\ dias = \frac{3\ meses}{1\ mes} \times 30\ dias$$

$$dias = \frac{3\ \cancel{meses}}{1\ \cancel{mes}} \times 30 dias$$

$$t\ dias = \mathbf{3} \times 30\ dias$$

Assim, *3* é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Segunda formulação da análise vertical:

$$\frac{t\ dias}{3\ meses} = \frac{30\ dias}{1\ mes}$$

$$t\ dias = \frac{3\ meses}{1\ mes} \times 30\ dias$$

$$t\ dias = \frac{3\ \cancel{meses}}{1\ \cancel{mes}} \times 30 dias$$

$$t\ dias = \mathbf{3} \times 30\ dias$$

Da mesma forma, *3* é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Para a análise horizontal, propõem-se interpretações a partir da noção da taxa de proporcionalidade, dada como $f(x) = a. x$, em que *a* é coeficiente de dimensão ou operador função (VERGNAUD, 2009; GITIRANA *et al.,* 2014).

Considerando que 1 mês corresponde a 30 dias, tem-se:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(1\ \text{mês}) = a \times x = 30\ dias$$

$$= a \times (1\ \text{mês}) = 30\ dias$$

$$a = \frac{30\ dias}{1\ \text{mês}}$$

Assim, $a = \frac{30\ dias}{1\ \text{mês}}$ é o operador função da situação-problema.

Aplicando esse operador para o período de 3 meses, tem-se:

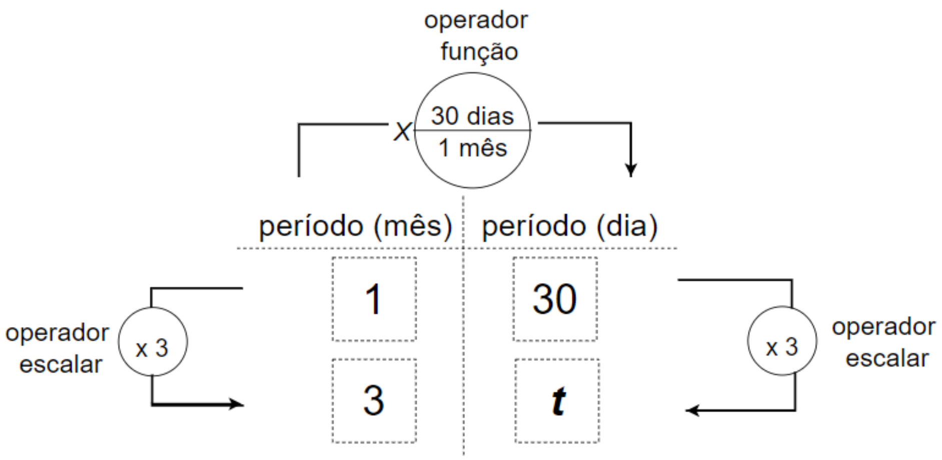
$$f(x) = a \times x$$

$$f(3\,meses) = \frac{30\,dias}{1\,mês} \times (3meses)$$

$$f(3\,meses) = \frac{30\,dias\ \times 3\,\cancel{meses}}{1\,\cancel{mes}} = 90\,dias$$

$$f(3\,meses) = 90\,dias$$

O esquema relacional com o operador escalar e o operador função é representado como:



O operador função $\frac{30\,dias}{1\,mes}$ permite migrar de uma grandeza para outra, visto que ele opera com dimensões (dia/mês). Para o caminho inverso, ainda na análise horizontal, utiliza-se a operação inversa do operador função.

O operador escalar $\mathbf{\frac{5}{12}}$, sem dimensão, opera na vertical do esquema relacional, sendo a razão entre os valores da mesma grandeza.

4.4.2.2 Conversão da taxa

O enunciado apresenta a taxa como 0,25%/dia. Nesse caso, analisamos por meio do esquema relacional a conversão da medida da taxa para mês. Trata-se de uma relação quaternária, da categoria *proporção simples.*

Propomos para a análise da conversão da taxa como uma relação quaternária composta por quatro relações (taxas), duas a duas, de mesma proporcionalidade, ou seja, buscamos representar a proporcionalidade entre relações e não somente entre grandezas, como o esquema a seguir:

taxa (% / dia)	taxa (% / mês)
1	30
0,25	***i***

Conforme Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014), as discussões do cálculo relacional são realizadas pelas análises vertical e horizontal. Contudo, estaremos propondo análises vertical e horizontal para uma proporcionalidade entre relações.

Para análise vertical, há duas formulações: ***i*** %/mês *está para 30%/mês, assim como 0,25%/dia está para 1%/dia*; e ***i*** %/mês *está para 0,25%/dia, assim como 30%/mês está para 1%/dia.*

Primeira formulação da análise vertical:

$$\frac{i\ \%/mês}{30\ \%/mês} = \frac{0{,}25\ \%/dia}{1\ \%/dia}$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25\ \%/dia}{1\ \%/dia} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25\ \cancel{\%/dia}}{1\ \cancel{\%/dia}} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25}{1} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{1}{4} \times\ 30\ \%/mês$$

Assim, $\mathbf{\frac{1}{4}}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Segunda formulação da análise vertical:

$$\frac{i\ \%/mês}{0{,}25\ \%/dia} = \frac{30\ \%/mês}{1\ \%/dia}$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25\ \%/dia}{1\ \%/dia} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25\ \cancel{\%/dia}}{1\ \cancel{\%/dia}} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{0{,}25}{1} \times\ 30\ \%/mês$$

$$i\ \%/mês = \frac{1}{4} \times\ 30\ \%/mês$$

Logo, $\mathbf{\frac{1}{4}}$ é o *operador escalar* (operador sem dimensão).

Nesse caso, o operador escalar permite passar de uma linha a outra em uma mesma categoria de relações.

Para a análise horizontal, Vergnaud (2009) e Gitirana *et al.* (2014) propõem análises a partir da noção da taxa de proporcionalidade, dada como $f(x) = a.\ x$, em que ***a*** é coeficiente de dimensão ou operador função.

Como estamos propondo uma análise da proporcionalidade entre relações e considerando que a taxa de $1\%/dia$ corresponde a uma taxa de $30\%/mês$ no sistema de juros simples, tem-se:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(1\ \%/dia) = a \times x = 30\%/mês$$

$$a \times (1\ \%/dia) = 30\ \%/mês$$

$$a\ = \frac{\frac{30\%}{mês}}{\frac{1\%}{dia}} = \frac{30\%}{mês} \times \frac{dia}{1\%}$$

$$a\ = \frac{30\cancel{\%}}{mês} \times \frac{dia}{1\cancel{\%}} = \frac{30\ dia}{mês}$$

Assim, $a\ = \frac{30\ dias}{mes}$ é o operador função.

Portanto, esse operador permite passar de uma relação (taxa) para outra. Aplicando esse operador para taxa de 0,25%/dia, temos:

$$f(x) = a \times x$$

$$f(0{,}25\ \%/dia) = \frac{30\ dia}{mês} \times (0{,}25\ \%/dia)$$

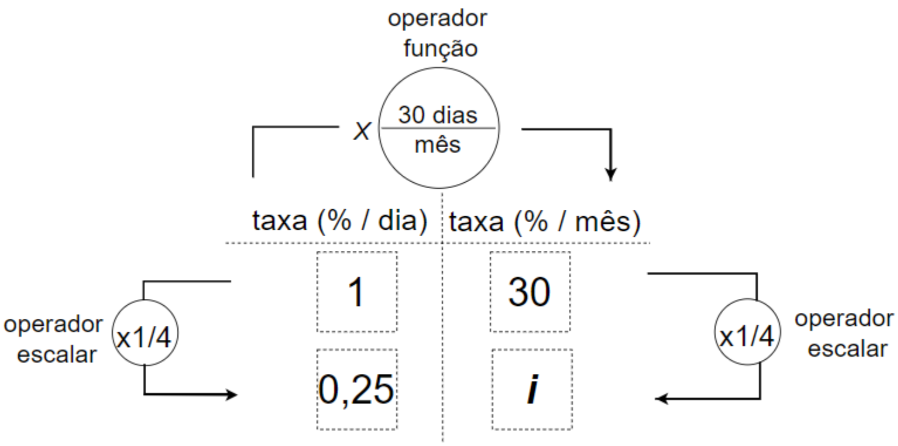
$$f(0{,}25\%/dia) = \frac{30\ dia}{mês} \times \frac{0{,}25\%}{dia}$$

$$f(0{,}25\%/dia) = \frac{30\ \cancel{dia}}{mês} \times \frac{0{,}25\%}{\cancel{dia}} = \frac{7{,}5\%}{mês}$$

$$f(0{,}25\ \%/dia) = 7{,}5\%/mês$$

Assim, a taxa de 0,25%/dia corresponde a 7,5%/mês utilizando-se o operador função, lembrando que no regime de juros simples taxas equivalentes são proporcionais.

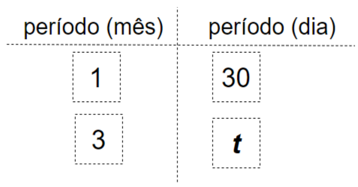
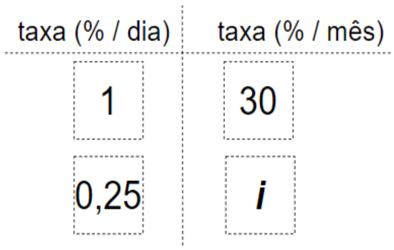
O esquema relacional com o operador escalar e o operador função é representado por:



O operador função $\frac{\textbf{30 dias}}{\textbf{mês}}$ permite migrar de uma relação para outra, em virtude de operar com dimensões (dias/mês). Para o caminho inverso, ainda na análise horizontal, utiliza-se a operação inversa do operador função.

O operador escalar $\frac{1}{4}$ sem dimensão opera na vertical no esquema relacional, sendo a razão entre as relações na vertical.

Para essas duas possibilidades de conversão de medida analisadas, elaboramos o Quadro 33:

Situação	Equação	Esquema relacional	Categoria / classe
Conversão de PERÍODO	$3 \times 30 = 90$		Proporção simples – UM PARA MUITOS
Conversão de TAXA	$\frac{0,25}{100} \times 30 = 0,075$		Proporção simples – UM PARA MUITOS

Quadro 33: Comparação entre as situações de conversão de medidas para $t > i$
Fonte: O autor

Portanto, quando a relação da unidade temporal entre taxa e período é tal que $t > i$, temos a categoria de *proporção simples* da classe *um para muitos,* para a situação de conversão de período quando está em jogo a proporcionalidade entre grandezas, e para a situação de conversão de taxa quando está em jogo a proporcionalidade entre relações.

4.4.3 Considerações sobre a caracterização da conversão de medidas

Dentre as 33 situações identificadas de juros simples nas três obras, verificamos que 12 exigiram, para a resolução, uma conversão de medida, ou seja, efetuar a conversão da unidade de medida do período analisado para a mesma unidade de medida temporal da taxa, ou converter a unidade de medida temporal da taxa para a mesma medida do período.

O Quadro 34, sistematiza as relações de conversão de medidas das situações analisadas na seção 4.4.1 (Figura 18) e na seção 4.4.2 (Figura 19).

<table>
<tr><th>Parâmetro</th><th>Situação</th><th>Expressão numérica</th><th>Esquema relacional</th><th>Categoria / Classe</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade de medida temporal do período (t) MENOR que unidade de medida temporal da taxa (i)

t < i</td><td>Conversão de PERÍODO</td><td>$5 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$</td><td><table><tr><th>período (mês)</th><th>período (ano)</th></tr><tr><td>12</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>t</td></tr></table></td><td>Proporção simples – COTA</td></tr>
<tr><td>Conversão de TAXA</td><td>$48 \times \frac{1}{12} = \frac{48}{12} = 4$</td><td><table><tr><th>taxa (% / ano)</th><th>taxa (% / mês)</th></tr><tr><td>12</td><td>1</td></tr><tr><td>48</td><td>i</td></tr></table></td><td>Proporção simples – COTA</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade de medida temporal do período (t) MAIOR que unidade de medida temporal da taxa (i)

t > i</td><td>Conversão de PERÍODO</td><td>$3 \times 30 = 90$</td><td><table><tr><th>período (mês)</th><th>período (dia)</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td></tr><tr><td>3</td><td>t</td></tr></table></td><td>Proporção simples – UM PARA MUITOS</td></tr>
<tr><td>Conversão de TAXA</td><td>$\frac{0,25}{100} \times 30 = 0,075$</td><td><table><tr><th>taxa (% / dia)</th><th>taxa (% / mês)</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td></tr><tr><td>0,25</td><td>i</td></tr></table></td><td>Proporção simples – UM PARA MUITOS</td></tr>
</table>

Quadro 34: Comparação entre esquemas relacionais da conversão de medidas - geral
Fonte: O autor

No Quadro 34, identificamos quando a unidade de medida temporal do período (t) é menor que unidade de medida temporal da taxa (i). Como exemplo, o período é dado em dias, e a relação da taxa, em mês ou ano; ou o período é dado em mês, e a relação da taxa em ano, e, assim, temos as seguintes categorias e classe de situações:

- Conversão do período: proporção simples (cota)
- Conversão da taxa: proporção simples (cota)

Para a conversão de taxa buscamos representar a proporcionalidade entre relações e não somente entre grandezas.

Por outro lado, ocorre de a unidade de medida temporal do período (t) ser maior que a unidade de medida temporal da taxa (i). Como exemplo, o período é dado em mês ou ano, e a relação da taxa, em dia; ou o período é dado em ano, e a relação da taxa em mês, e, assim, temos as seguintes categorias e classes de situações:

- Conversão do período: proporção simples (um para muitos)
- Conversão da taxa: proporção simples (um para muitos)

Da mesma forma, para a conversão de taxa buscamos representar a proporcionalidade entre relações e não somente entre grandezas.

De fato, essas mesmas características foram identificadas nas demais 10 situações (do total de 12 que necessitaram de conversão de medida), para resolvê-las. Conforme a fundamentação teórica adotada para essa pesquisa, constatamos que essa conversão de medidas em situações de juros simples é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples* sendo aplicada tanto para grandezas (conversão do período) como também para relações (conversão de taxas).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria dos Campos Conceituais evidencia a importância do conjunto de situações a serem enfrentadas pelo sujeito para a compreensão de um conceito, pois em cada situação ele poderá elaborar novos esquemas, que possibilitam novas aprendizagens.

Segundo Vergnaud (1996), um pesquisador interessado no desenvolvimento cognitivo durante a experiência de um sujeito é guiado a considerar como objeto de estudo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos. Na presente investigação, consideramos o conjunto das situações relacionadas ao conceito de juros simples.

Como fonte de dados, foram selecionadas as três obras de livros didáticos de matemática mais escolhidas em âmbito nacional, conforme dados estatísticos do FNDE (BRASIL, 2021), aprovadas pelo PNLD do ano de 2018, pela sua relevância no contexto escolar. Em cada obra, averiguamos o capítulo específico que tratava de juros simples, que em todas as obras pertencia ao volume direcionado à 3ª série do Ensino Médio.

A presente pesquisa buscou responder a seguinte questão: Qual a tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais?

Para responder a questão de pesquisa, utilizamos o aporte da Teoria dos Campos Conceituais, em especial, o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas e aditivas; a análise dos problemas aditivos e problemas mistos proposta por Vergnaud (2009); as análises de situações do campo multiplicativo de Gitirana *et al.* (2014); e a classificação de situações do tipo mista, identificadas em livros didáticos do Ensino Médio por Miranda (2019).

A partir das análises das situações e da forma analítica do juro simples $J(t) = C \cdot i \cdot t$, para t ≥ 0, consideramos uma aproximação com o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas por meio da relação dos seus termos, ou seja, consideramos uma relação multiplicativa entre $C \cdot i$ e uma relação multiplicativa entre o termo $(C \cdot i)$ com o termo *t*, ou seja, $(C \cdot i) \cdot t$.

Por outro lado, para as situações e a forma analítica do montante simples $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0, também consideramos uma aproximação com o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, devido às relações do termo

$C \cdot i \cdot t$, e uma aproximação com o Campo Conceitual das estruturas aditivas entre o termo $C \cdot i \cdot t$ com o termo C, ou seja, as situações de montante simples são identificadas nos problemas mistos. Foram identificadas e analisadas 33 situações que envolvem o contexto de juros simples, sendo 13 situações do livro didático LD1, 6 do LD2 e 14 situações identificadas no LD3.

Essas situações foram identificadas a partir da escolha do pesquisador pelo livro didático de matemática para o Ensino Médio como fonte de dados. Compreendemos que, a partir de outras fontes de dados, é possível expandir e avançar na caracterização das situações de juros simples, portanto, nessa pesquisa, não buscamos esgotar as possiblidades de categorias e classes.

Verificamos que todas as situações de juros simples identificadas têm características de problemas complexos, em que “[...] várias relações e várias questões possíveis estão em jogo” (VERGNAUD, 2009, p. 269). Elas apresentam, pelo menos, duas relações, podendo ser ternárias ou quaternárias, e a característica de etapas intermediárias para atingir a questão principal do problema.

A partir da caracterização das situações de juros simples como do tipo complexas, tendo etapas intermediárias para resolução, compreendemos que elas não se enquadram em situações do tipo puramente aditivas ou multiplicativas. Mesmo que a questão principal da situação seja uma categoria somente da estrutura aditiva ou da multiplicativa, as situações apresentam a necessidade de etapas intermediárias, e por isso as caracterizamos como complexas e mistas.

O Quadro 35 apresenta as categorias e as variações das classes das situações de juros simples identificadas, conforme proposto nessa pesquisa, de categorizar as situações a partir da questão principal do enunciado.

Categorias da questão principal das situações de juros simples	**Total**
Composição de medidas	2
Proporção simples (um para muitos)	8
Proporção simples (partição)	3
Proporção simples (um para muitos) e transformação de medidas (positiva)	6
Proporção simples (partição) e transformação de medidas (positiva)	9
Proporção simples (cota) e transformação de medidas	5

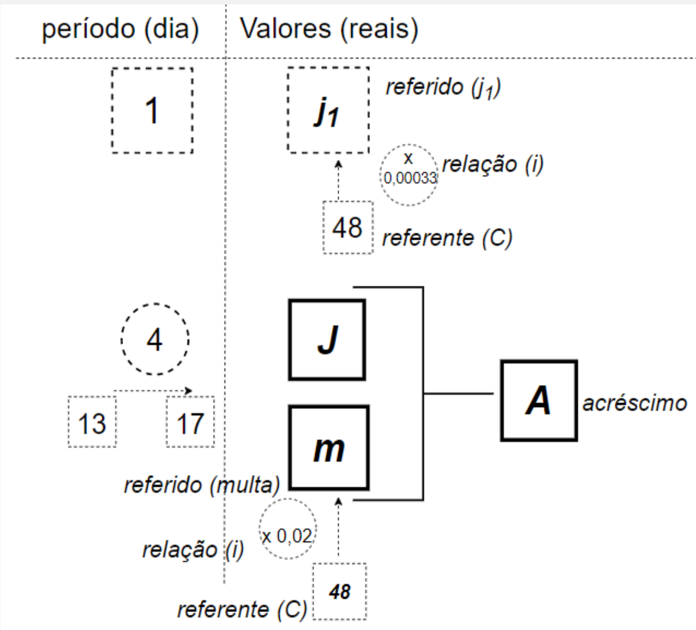
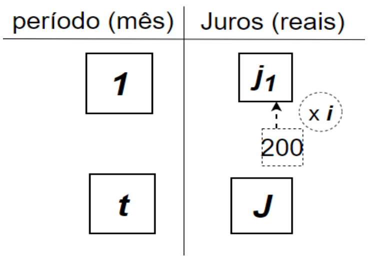
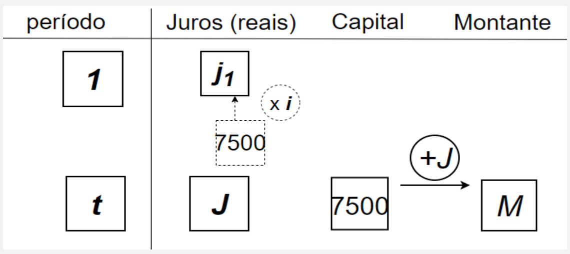
Quadro 35: Síntese das categorias da questão principal das situações identificadas
Fonte: O autor

As situações identificadas com o contexto de montante simples em suas relações foram categorizadas em *transformação de medidas*. O montante é um estado final que é obtido pela transformação do estado inicial (capital), a partir dos juros. Essa característica se deve ao fato de que os juros, nesse caso, atuam como uma transformação dinâmica, que proporciona uma mudança de estado, um movimento ao longo do tempo percorrido na operação.

Nas análises não foram identificadas situações cuja questão principal envolvesse relações de *transformação de medidas negativa*. Porém, vislumbramos a possibilidade de haver essa categoria, pois a relação entre o capital e o montante poderá ocorrer pela transformação de juros negativos, ou seja, para um determinado período (t) no qual possa haver prejuízo na operação, resultando em um montante menor que o capital inicial.

Para caracterização das situações, propomos a elaboração de um quadro contendo os diagramas dos esquemas relacionais das etapas intermediárias e do esquema relacional principal. Esse esquema principal é uma associação entre os diagramas das etapas intermediárias necessárias para atingir a questão principal do enunciado. Para elaboração desses esquemas relacionais, propomos uma adaptação dos códigos estabelecidos por Vergnaud (2009) para distinguir os esquemas relacionais intermediários daqueles esquemas envolvidos diretamente à questão principal da situação. Os esquemas relacionais da etapa intermediária foram propostos em linha tracejada, e os esquemas da estrutura principal, em linha contínua, conforme estabelecido por Vergnaud (2009).

O Quadro 36 apresenta três exemplos de esquemas relacionais, que caracterizam uma síntese dentre os propostos nessa investigação.

<table>
<tr><td colspan="2">Situação: Uma conta de gás, no valor de R$ 48,00, com vencimento para 13 de abril, trazia a seguinte informação: “Se a conta for paga após o vencimento, incidirão sobre o seu valor multa de 2% e juros de 0,033% ao dia, que serão incluídos na conta futura”. Qual será o acréscimo a ser pago sobre o valor da próxima conta por um consumidor que quitou o débito em 17 de abril? E se ele tivesse atrasado o dobro do número de dias para efetuar o pagamento? Fonte: Iezzi et al. (2016, p.162).</td></tr>
<tr><th>Esquema relacional principal</th><th>Nomenclatura</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Composição de medidas, com etapas intermediárias de duas comparações multiplicativas, transformação de medidas e proporção simples.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situação: Se uma mercadoria cujo preço é de R$ 200,00 for paga em 6 meses, com taxa de 20% ao ano, quanto será pago de juros no sistema de juros simples? Fonte: Dante (2016, p.25)</td></tr>
<tr><th>Esquema relacional principal</th><th>Nomenclatura</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Proporção simples com etapas intermediárias de proporção simples, comparação multiplicativa; e conversão de medidas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situação: Júlio aplicou, sob regime de juro simples, a importância de R$ 7500,00, com taxa de 2,5% a.m., por um período de dois trimestres. a) Qual era o montante ao fim desse período? Fonte: Souza, J.; Garcia, J. (2016, p.24)</td></tr>
<tr><th>Esquema relacional principal</th><th>Nomenclatura</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Proporção Simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de comparação multiplicativa, proporção simples; e conversão de medida.</td></tr>
</table>

Quadro 36: Síntese dos esquemas relacionais principais
Fonte: O autor

Conforme as informações fornecidas e as etapas intermediárias da situação, os diagramas dos esquemas relacionais principais são alterados. Por isso, consideramos as situações de juros simples como complexas, visto que há várias questões e relações envolvidas e interligadas na resolução.

Dentre as 33 situações analisadas de juros simples que foram identificadas nos três livros didáticos selecionados, verificamos que 12 exigiram, para resolução, uma conversão de medida, ou seja, efetuar a conversão da unidade de medida do período analisado para a mesma unidade de medida temporal da taxa, ou converter a unidade de medida temporal da taxa para a mesma medida do período.

As conversões de medidas são etapas intermediárias necessárias para a resolução da situação estabelecida por uma relação quaternária das estruturas multiplicativas. Em cada caso, categorizamos essas relações. Por meio dessas análises da conversão de medidas em situações de juros simples, com base na Teoria dos Campos Conceituais, propomos, no Quadro 37, a caracterização para as conversões de medida.

Categoria / classe das situações	unidade de medida temporal do período (t) ***maior*** que a unidade temporal da taxa (i)	unidade de medida temporal do período (t) ***menor*** que a unidade temporal da taxa (i)
	t > i	***t < i***
conversão de medida do período (t)	***Proporção simples – um para muitos***	***Proporção simples - cota***
conversão de medida da taxa (t)	***Proporção simples – um para muitos***	***Proporção simples - cota***

Quadro 37: Possibilidades de categorias para conversão de medidas
Fonte: o autor

Analisamos que a categoria da estrutura multiplicativa nas situações de conversão de medidas é de *proporção simples*, variando a classe conforme a comparação entre as unidades temporais. Observa-se que não teremos a classe quarta proporcional nessas situações, pois, sempre, uma das medidas das grandezas relacionadas será unitária.

Em todos os casos, a categoria estabelecida é *proporção simples*, classe que varia conforme o caminho escolhido para conversão.

Por meio das análises da conversão de taxas, identificamos a possiblidade de uma proporcionalidade entre relações. Assim, a categoria de *proporção simples* das estruturas multiplicativas que compõem quatro grandezas, duas a duas, de mesma natureza, tendo uma relação de proporcionalidade, propusemos estendê-las para analisar situações que compõem quatro relações, duas a duas, como apresentado no Quadro 38 a seguir:

Categoria	classe	Esquema relacional	Descrição
Proporção simples (isomorfismo de medidas) **entre relações**	Um para muitos ou multiplicação	$\boxed{1}\ \vert\ \boxed{r_2}$ $\boxed{r_3}\ \vert\ \boxed{\boldsymbol{R_4}}$	Dadas quatro relações, duas a duas proporcionais (1; r_3) e (r_2; R4), busca-se o resultado da relação (R_4) proporcional.
	Cota	$\boxed{1}\ \vert\ \boxed{r_2}$ $\boxed{\boldsymbol{R_3}}\ \vert\ \boxed{r_4}$	Dadas quatro relações, duas a duas proporcionais, (1; R_3) e (r_2; r_4), busca-se o resultado da relação (R_3) unitária.

Quadro 38: Possibilidade da categoria de proporção simples entre relações
Fonte: o autor

Como pesquisas futuras, sugerimos aprofundar as análises sobre a categoria de proporção simples das estruturas multiplicativas para situações que envolvem proporcionalidade entre relações, além das situações de juros simples.

Além disso, essa pesquisa poderá inspirar pesquisadores para aprofundar os estudos sobre situações de juros simples em busca de uma aproximação de um campo conceitual próprio.

Destacamos a pertinência deste estudo quanto à investigação dos diferentes tipos de situações de juros simples, pois, conforme a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), é a diversidade de situações enfrentadas pelo sujeito que dão sentido ao conceito.

A identificação e a caracterização das situações de juros simples poderão auxiliar professores a escolher situações adequadas a serem propostas no contexto escolar, propiciando aos estudantes a elaboração de novos esquemas e a aprendizagem do conceito de juros simples.

REFERÊNCIAS

AMORIM, V. **O Ensino de Matemática Financeira:** do livro didático ao mundo. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 14. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

BARBOSA, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e distanciamentos. In OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. (Orgs.). **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática** Brasília: SBEM, 2018, p. 17-57.

BEZERRA FILHO, E. O.; SPINDOLA, E. B. M., Análise de temáticas sobre educação financeira em Livros didáticos dos anos finais do ensino Fundamental. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. [S.l.], v.12, n. 2, p. 1-24, 2021

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017.

BARROS, L. E. W. B. de. Cálculo: um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica. Dissertação (mestrado). Universidade Federal da Paraiba. João Pessoa, PB, 2013. 103f.

BARROS, R. A.; BOAVENTURA, T. da S. L. Desenvolvimento dos Campos Conceituais Aditivo e Multiplicativo no Ensino dos Números Negativos: Uma Análise Crítica de Livros Didáticos. **Perspectivas da Educação Matemática** – INMA/UFMS – v. 12, n. 28 – Ano 2019.

BEZERRA FILHO, E. O.; ESPINDOLA, E. B. M. Análise de temáticas sobre educação financeira em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Pernambuco, v. 12, n. 2, p. 1-24, 2021.

BEZERRA FILHO, E. O. **Educação Matemática Crítica**: Uma sequência didática para o ensino de matemática e educação financeira a partir do tema Inflação. 2019, 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

BRASIL. Casa Civil. Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010. **Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF**, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. Brasília, DF, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base**. Brasília, DF, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 20 maio. 2019.

BRASIL. **Programas do livro – funcionamento.** FNDE, 2018b. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/ programas-do-livro/pnld/funcionamento>. Acesso em: 21 de ago. de 2021.

BRASIL. **Programas do livro – dados estatísticos.** FNDE, 2021**.** Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 21 de ago. de 2021.

CABELLO, C. A. de S. **Relações Institucionais para o Ensino da Noção de Juros na Transição Ensino Médio e Ensino Superior.** Dissertação (mestrado). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010. 163f.

CASTELO BRANCO, A. C. **Matemática financeira aplicada**: método algébrico, HP-12c, Microsoft excel. 3.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

CELLARD, A. A análise documental. In: POUPART, Jean. **A pesquisa qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa.** São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, dez. 2004.

CASA DA MOEDA DO BRASIL - CMB. **Origem do Dinheiro. 2011** Disponível em: https://www.casadamoeda.gov.br/portal/socioambiental/cultural/origem-do-dinheiro.html. Acesso em: 20. set. 2021.

DANTE, L. R. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília. ano 16, n. 69, p. 82-90, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – contexto e aplicações**. 3ª ed. Editora Ática: 2016.

DEGENSZAJN, David; IEZZI, Gelson; ALMEIDA, Nilze de; DOLCE, Osvaldo; PÉRIGO, Roberto. **Matemática: ciências e aplicações**. 9ª Ed. Saraiva Educação: 2016.

FARIA, W. L S. Matemática Financeira Aplicada aos Ensinos Fundamental e Médio. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2015. 81f.

FERGUSON, N. **A ascensão do dinheiro**: a história financeira do mundo. Tradução Cordelia Magalhães. São Paulo: Editora Planeta do Brasil, 2009.

FRANCO, E. N. **A matemática financeira e o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016. 136f

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. A. Análise de livro didáctico e a construção de um processo de ensino por meio de tarefas e técnicas: contribuições da TAD. In SALZAR, J. F.; GUERRA, F. U. (Org.). **Investigaciones en Educacion Matematica**. Lima: Fondo Editorial da PUC Peru, 2016, p. 217-237.

GITIRANA, V. *et al*. **Repensando a Multiplicação e a Divisão**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. **ZETETIKÉ**. Campinas. v.18, n.33, p.43-62, 2010.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. Matemática financeira: relações entre situações reais e educação para consumo. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 81-95, 2011.

KISTEMANN JR, M. A.; COUTINHO, C. Q. S.; FIGUEIREDO A. C. Cenários e desafios da educação financeira com a Base Curricular Comum Nacional (BNCC): Professor, Livro Didático e Formação. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** Pernambuco, v. 11, n. 1, p. 1-26. 2020.

KISTEMANN JR, M. A.; LINS, R. C. Enquanto isso na sociedade de consumo líquido-moderna: a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores. **Bolema.** Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1303-1326, 2014.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**. Brasília, ano 16, nº 69, p. 1-9, jan/mar. 1996.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio –** Volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2004.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido dos. O Raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, 2014. p. 517-533.

MELO, C. I. B. de; LOPES, T. M. R.; OLIVEIRA. J. L. de. Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE. In: **Revista Thema,** v. 14, n.4, p. 100-113, 2017.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim**: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, 2019.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OCDE)**. Improving Financial Literacy**: Analysis of Issues and Policies. Paris: OCDE Publishing, 2005.

OTERO, M. R. La Teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud. *In:* OTERO, M. R; FANARO, M. A.; SUREDA, P. LLANOS, V. C.; ARLEGO, M. (org) **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física**. Buenos Aires: Dunken, 2014. p. 15-32.

PESSOA, C. A. S.; MUNIZ JR, I.; KISTEMANN JR, M. A. Cenários sobre educação financeira escolar: entrelaçamentos entre a pesquisa, o currículo e a sala de aula de Matemática. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Pernambuco, v. 9, n. 1, p. 1-28, 2018.

RODRIGUES, M. U.; SILVA, J. M. N.; RODRIGUES, R. S. S. Estado da arte de dissertações e teses no Brasil sobre educação financeira e/ou matemática financeira no período de 2000 a 2020. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Pernambuco, v. 12, n. 2, p. 1-27, 2021.

ROSSETI JUNIOR, H.; SCHIMIGUEL J. Matemática financeira: educação matemática e a história monetária. **Enciclopédia Biosfera -**Centro Científico Conhecer. Goiânia, vol.7, n.13, 2011. p. 1540-1549.

SANTANA, E. R. S. **Adição e subtração**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus-BA: Editus, 2012.

SANTANA, E. R. S; LIMA, D. C. Teoria dos Campos Conceituais. *In*. SANTANA, E. R. S; LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A. (org.). **Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º ano.** Itabuna: Via Litterarum, 2017**.**

SANTOS JUNIOR, V. B. **Juros simples e compostos**: análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa. Tese (doutorado). Universidade Anhanguera de São Paulo, 2017. 495f.

SANTOS JUNIOR, V. B.; DIAS, M. A.; GUADAGNINI, M. R. Juros Simples e compostos nos documentos oficiais e livros didáticos do ensino fundamental – anos finais. *In:* CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. 7., 2017, Canoas. **Anais** [...] Canoas: Ulbra, 2017. p. 1-15.

SILVA, C. V. da. **As representações sociais de juros e de seu ensino por professores de matemática da educação básica do Brasil e ensino básico e secundário de Portugal**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estácio de Sá, 2018. 193f.

SOMAVILLA, A. S.; BASSOI, T. S. Formação Financeira no Contexto Educacional: alguns sugerementos. **Perspectivas da Educação Matemática**. Campo Grande. v. 12, n. 28. 2019. p. 229 – 244.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. da S. R**. #Contato matemática**, 3º ano. 1 ed. São Paulo: FTD, 2016.

SUREDA, P. *et al.* **Secuencia didáctica para enseñar las funciones exponenciales en la escuela secundaria**: una propuesta diseñada en el marco de la teoría de los campos conceptuales. 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2017.

TREMBLAY, M. A. **Initiation a la recherche dans les sciences humaines**. Montreal: McGraw-Hiíl, 1968.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**. Campinas. v.16, n.30, p.139-162, 2008.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 03,p. 155-192.

VERGNAUD, G**. A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino de Matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. a Conceptual Development and Learning. **Revista Qurriculum**, v. 26, p. 39-59, 2013a.

VERGNAUD, G.b Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013b.

ZANELLA, M. S. **Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária**, 2013. Dissertação (mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringa-PR, 2013. 147f.