unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

CARLA LARISSA HALUM RODRIGUES

INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CASCAVEL – PR
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGCEM
ÁREA DE CONCETRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARLA LARISSA HALUM RODRIGUES

CASCAVEL – PR
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARLA LARISSA HALUM RODRIGUES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE - *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Veridiana Rezende

CASCAVEL – PR

2021

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Rodrigues, Carla Larissa Halum
Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental / Carla Larissa Halum Rodrigues; orientadora Veridiana Rezende . -- Cascavel, 2021.
179 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2021.

1. Anos Iniciais. 2. Função. 3. Problemas mistos. 4. Teoria dos Campos Conceituais. I. Rezende , Veridiana , orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CARLA LARISSA HALUM RODRIGUES

INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestra em Educação em Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:

Veridiana Rezende

Orientadora - Veridiana Rezende

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)

Eurivalda R. dos S. Santana

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Marli Schmitt Zanella.

Marli Schmitt Zanella

Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Clélia Maria Ignatius Nogueira

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 13 de dezembro de 2021.

DEDICATÓRIA

A Deus.
Ao meu amado esposo, Ciro Broza.
Aos meus pais, Carlos e Samira.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por me proporcionar saúde, sabedoria e perseverança para conquistar mais esta etapa da minha vida.

Aos meus pais, Carlos Lúcio Rodrigues e Samira Halum Vicentin, por me ensinarem a trilhar caminhos bons e compreenderem a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização desta pesquisa.

Ao meu esposo, Ciro Broza, por todo incentivo, auxílio, compreensão e pelo seu amor incondicional, tornando esta etapa mais alegre.

À professora, Doutora Veridiana Rezende, por toda orientação, confiança, dedicação, ensinamentos e profissionalismo. A você, minha eterna gratidão.

Às professoras, Doutoras Clélia Maria Ignatius Nogueira, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana e Marli Schmitt Zanella, por terem gentilmente aceitado participar da banca examinadora desta pesquisa e pelas valiosas contribuições desde o exame de qualificação.

A todos os professores do PPGECEM que contribuíram com a minha formação.

Aos colegas da turma de mestrado e doutorado PPGECEM – 2019, em especial, a minha amiga Adriele Waideman e meu amigo Victor Hugo Antunes, pela amizade construída, pelas viagens, conversas descontraídas e incentivos.

Aos colegas do grupo GEPeDiMa, pelas sugestões e estudos compartilhados.

A todos os alunos, professores e equipe pedagógica das instituições de ensino que colaboraram com a realização desta pesquisa.

Aos meus amigos, Karina, Alcides, Fabrícia, Bruna Kelly, Carol, Adriele, Sandra, Rosangela, Tamires, Renã, Malu e Osvaldo Broza, pelo apoio, compreensão e torcida para a realização deste sonho.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, estiveram comigo nesta jornada. Muito obrigada!

RODRIGUES, Carla Larissa Halum. **INVARIANTES OPERATÓRIOS ASSOCIADOS AO CONCEITO DE FUNÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.** 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2021.

RESUMO

Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, idealizada por Gérard Vergnaud, considera que a construção de um conceito pelo sujeito pode ser observada pelos invariantes operatórios mobilizados por ele em diferentes situações. Dentre estas situações são citados os problemas mistos, que envolvem relações aditivas e multiplicativas no mesmo problema. Com essa perspectiva, a presente pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de analisar invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, na resolução de problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. Para o desenvolvimento da investigação, foram propostos quatro problemas mistos para serem resolvidos individualmente por 12 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de diferentes escolas públicas do interior do Paraná, por meio do aplicativo *Google Meet*. Os problemas mistos elaborados pertencem às subclasses diferentes da classe *proporção simples e transformação de medidas.* Para as análises foram consideradas as resoluções escritas dos alunos, bem como os diálogos entre alunos e pesquisadora, possibilitando as análises de esquemas e de invariantes operatórios que foram modelados na forma de teoremas em ação e explicitados como conceitos em ação. A análise dos esquemas dos alunos permitiu indicar a mobilização de quinze (15) teoremas em ação verdadeiros e dois (2) teoremas em ação falsos; associados a eles, foram identificados dezesseis (16) conceitos em ação. A maioria dos indícios de teoremas em ação mobilizados pelos alunos é composta por propriedades isomórficas da função linear. Foi constatado que o mesmo teorema em ação pode ser manifestado em esquemas diferentes da mesma classe de problemas ou de classe diferente. Dentre os conceitos em ação, destaca-se a mobilização pelos alunos das ideias-base de função: *correspondência, dependência, variável, regularidade* e da ideia de *proporcionalidade*. A mobilização das ideias-base de função varia de acordo com a subclasse de problema e com o esquema utilizado pelo aluno com vista a resolver o problema. Os resultados apontam ainda que os alunos do 5º ano trazem em seus esquemas invariantes operatórios implícitos associados ao conceito de função. Por consequência, ressalta-se a importância de o professor estar ciente dos invariantes operatórios implícitos associados ao conceito de função, possíveis de serem manifestados pelos alunos em situações envolvendo a *proporção simples e transformação de medidas* para que seja possível potencializar o pensamento funcional de seus alunos. Isto permite indicar que é preciso considerar o desenvolvimento do conceito de função ao logo do processo escolar.

Palavras-chave: Anos Iniciais; Didática da Matemática; Função; Problemas mistos; Teoria dos Campos Conceituais.

RODRIGUES, Carla Larissa Halum. **OPERATIVE INVARIANTS ASSOCIATED TO THE CONCEPT OF FUNCTION MOBILIZED BY THE ELEMENTARY SCHOOL 5th GRADE STUDENTS.** 2021. 179 f. Dissertation (Master's) – Postgraduate Program in Science Education and Mathematical Education, State University of Western Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2021.

ABSTRACT

This research, based on the Conceptual Fields Theory, idealized by Gérard Vergnaud, considers that the construction of a concept by the subject may be observed through operative invariants mobilized by him/her in different situations. Among these situations, mixed problems are mentioned, which involve additive and multiplicative relationships in the same problem. By this perspective, this research was carried out with the aim at analyzing operative invariants associated with the conceptual field of functions mobilized by the Elementary School 5th grade students to solve mixed problems type *simple proportion* and *measurement transformation*. To develop the investigation, four mixed problems were proposed to be individually solved by 12 5th grade students from different public schools in the State of Paraná countryside, through the *Google Meet* app. Mixed problems elaborated belong to the subclasses different from the *simple proportion* and *measurement transformation* classes. To perform the analysis, solutions written by the students were considered, and dialogues among students and the researcher as well, enabling analyses of schemas and operative invariants which were modeled as theorems in action and made explicit as concepts in action. Analyses of students' schemes enabled indicate mobilization of fifteen (15) true theorems in action and two (2) false theorems in action; associated to them, sixteen (16) concepts in action belonging to the conceptual field of functions were identified. Most theorems in action mobilized by students are composed by linear function isomorphic properties. It was verified that even theorem in action might be manifested in different schemes from the same class of problems, or different ones. Among the concepts in action, mobilization of the basic ideas of function by students is highlighted: *variable, correspondence, dependence, regularity, and* the idea of *proportionality.* The mobilization of basic function ideas varies according to the problem subclass and with the scheme used by the student to solve the problem. Results still point that 5th grade students bring their operational invariant schemes implicitly, associated with the concept of function. Consequently, the importance of teacher being awareness on the implicit invariant operatory associated to the concept of function is highlighted because they are possible potentialize the function thoughts of the students. This allows us to indicate that it is necessary to consider the development of the concept of function along the schooling process.

Keywords: Early Years; Didactics of Mathematics; Function; Mixed problems; Conceptual Fields Theory.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse em pesquisar *invariantes operatórios em problemas mistos* surgiu da minha[1] experiência como professora de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e em decorrência dos estudos realizados acerca da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), durante o Mestrado, nas disciplinas cursadas e no grupo de pesquisa do qual participo GEPeDiMa[2] - Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática.

Concluí o curso de Formação de Docentes na modalidade Normal, em nível Médio, no ano de 2010, e por isso sou habilitada para exercer profissão de docente na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, cargo que exerço desde 2012 em escolas municipais do interior do Paraná.

Em 2011 ingressei no Curso de Pedagogia na Universidade Cesumar (Unicesumar) e, em paralelo, no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Durante a graduação em Matemática, participei do Programa de Iniciação Científica (PIC), momento em que tive a oportunidade de realizar as minhas primeiras pesquisas. Naquele momento, elas estavam associadas às apreensões operatórias manifestadas por licenciandos dos 3º e 4º anos de Matemática, a partir de uma tarefa de Geometria, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, idealizada por Raymond Duval.

Ainda na graduação em Matemática, participei do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), período em que tive a oportunidade de estudar, debater com colegas e professores sobre o ensino de Matemática, experimentar tarefas em sala de aula e escrever um capítulo de livro e artigos acerca das tendências metodológicas Resolução de Problemas e Investigação Matemática, que foram publicados em Anais de Eventos.

Após finalizar as graduações, em 2017 realizei um Curso de Especialização *Lato Sensu* em Neuropsicopedagogia, e cursei como aluna não regular a disciplina de Didática da Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste).

[1] O início da introdução deste texto está escrito na primeira pessoa do singular porque apresenta a experiência profissional e acadêmica da pesquisadora.
[2] Endereço do site do GEPeDiMa: http://prpgem.unespar.edu.br/gepedima.

No ano de 2019, participei da seleção e fui aprovada como aluna regular no Curso de Mestrado do PPGECEM/Unioeste, que me conduziu à participação no Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática - GEPeDiMa que tem se dedicado ao desenvolvimento de pesquisas com vistas ao mapeamento do Campo Conceitual da Função afim, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

O conceito de função é considerado um conceito fundamental para Matemática (CARAÇA, 1998), e seu estudo deve perpassar os diferentes níveis escolares (BRASIL, 2018). Pesquisas (TRINDADE,1996; OLIVEIRA, 1997; BIANCHINI; PUGA, 2006; ROSSINI, 2006; SILVA, 2008; SANTOS, 2013; REZENDE, NOGUEIRA, 2014; PIRES, 2016; BERNARDINO *et al.*, 2019; CALADO, NOGUEIRA, REZENDE, 2020) mostram dificuldades de alunos de diferentes níveis de ensino, incluindo alunos do Ensino Superior e até mesmo professores na compreensão do conceito de função.

O documento que direciona atualmente os currículos brasileiros da Educação Básica, a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (BRASIL, 2018), recomenda que alguns aspectos da Álgebra devem se fazer presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade e, ainda, que a noção intuitiva de função pode ser explorada "[...] por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)". Porém, a formalização do conceito de função deve acontecer a partir do 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 270).

Com base na Teoria dos Campos Conceituais, partimos do pressuposto que um conceito se desenvolve pelo aluno ao longo do processo escolar, em decorrência das diferentes situações experimentadas. Isto ocorre porque situações variadas possibilitam o desenvolvimento de diferentes esquemas pelos alunos, ao mesmo tempo em que envolvem vários conceitos, invariantes operatórios e representações simbólicas associadas a um conceito único (VERGNAUD, 1983; 1996*a*).

Na Teoria dos Campos Conceituais, o termo *situações*[3] apresenta o sentido de *tarefa*, sendo elas que permitem o desenvolvimento de esquemas. Vergnaud (1996*a*, p. 157) considera como esquema "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situação [...]", e nele devem ser pesquisados os conhecimentos em ação do sujeito.

[3] As situações propostas aos alunos são problemas, sendo denominadas de situações-problema.

Segundo Vergnaud (1993, 2009*b*), os conhecimentos presentes nos esquemas de um sujeito formados por um conjunto de objetos, teoremas, propriedades e relações são denominados *invariantes operatórios,* e são diferenciados em dois tipos: conceitos em ação e teoremas em ação. “Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação” (VERGNAUD, 2009*b*, p. 23) pelo aluno, mas que pode ser falsa do ponto de vista científico.

Esses conhecimentos podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não. Por exemplo, o algoritmo da divisão é um esquema que envolve diferentes invariantes operatórios, mas que geralmente os alunos não conseguem explicitá-los. As representações simbólicas são essenciais para retratar os esquemas e transformar os invariantes operatórios implícitos em explícitos (VERGNAUD, 1993).

Vergnaud (1996*a*) defende a importância de reconhecer os conhecimentos implícitos manifestados pelos alunos em determinadas situações, sejam eles pertinentes ou não para a situação proposta, para propor boas tarefas que possibilitem a reflexão e a possível desestabilização de conhecimentos equivocados.

Com o propósito de direcionar o aluno para a compreensão do conceito do função no decorrer do processo escolar, e minimizar suas dificuldades no processo de construção deste conceito, consideramos que diferentes situações envolvendo as ideias-base de função, tais como *variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização* (TINOCO, 2002; PAVAN, 2010, NOGUEIRA, 2014, REZENDE, NOGUEIRA, CALADO, 2020), e a ideia de *proporcionalidade* (BRASIL, 2018) sejam desenvolvidas pelos alunos desde os anos iniciais.

Dentre os campos conceituais associados a conceitos matemáticos estabelecidos por Vergnaud (1996*a*; 2009*a*), tomamos como base para o desenvolvimento desta pesquisa dois deles, quais sejam: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Para os problemas de estruturas aditivas, Vergnaud (1996*a*; 2009*a*) apresenta seis tipos de relações: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação e composição de duas relações. Para os problemas de estruturas multiplicativas, o pesquisador estabeleceu cinco tipos de relações, elas são (re)apresentas por Gitirana *et al*. (2014) com as seguintes nomenclaturas:

comparação multiplicativa; produto de medidas; proporção simples; proporcionalidade múltipla e função bilinear.

Problema que envolve relações aditiva e multiplicativa simultaneamente é nomeado por Vergnaud (2009*a*) como *problema misto*. Com a intenção de identificar a presença (ou não) desse tipo de problemas em livros didáticos dos anos iniciais, consideramos a coleção de livros didáticos Ápis Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizadas em diferentes escolas municipais do interior do Paraná, e identificamos 46 problemas mistos, sendo 5 no livro do 2º ano, 7 no livro do 3º ano, 12 no livro do 4º ano e 22 no livro do 5º ano. Desse modo, nota-se que o livro didático Ápis Matemática do 5º ano contém a maior quantidade e variedade de problemas mistos (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

Vergnaud (2009*a*) define os problemas mistos, mas não apresenta uma classificação para tais situações. No entanto, Miranda (2019), também participante do GEPeDiMa, estabeleceu *a priori* 30 possibilidades de classes para os problemas mistos, com base nas classes de problemas dos campos aditivo e multiplicativo estabelecidas por Vergnaud (1993; 2009*a*). Ainda identificou algumas classes de problemas mistos em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, associando-as ao conceito de função afim. Dentre elas, a classe *proporção simples e transformação de medidas*, tipologia adotada para os problemas que compõem o instrumento de pesquisa da presente investigação.

A escolha da classe de problemas mistos *proporção simples e transformação de medidas* para compor o instrumento de pesquisa aconteceu com base nos critérios: ser a classe mais simples para elaborar diferentes problemas mistos, pois as grandezas envolvidas nesses problemas podem ter suas medidas transformadas (aumentadas ou diminuídas); a noção de função ser introduzida a partir de situações envolvendo a proporcionalidade (BRASIL, 2018); está intrinsecamente relacionada às pesquisas do GEPeDiMa, porque permite a modelação dos problemas mistos na forma analítica da função afim $b \pm ax = y$, com a e b reais positivos (MIRANDA, 2019); a vasta possibilidade de subclasses, que podem gerar maior variedade de invariantes operatórios; estar presente nos problemas mistos de livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio (MIRANDA, 2019), e nos problemas mistos dos livros didáticos Ápis de Matemática elaborados para os anos iniciais do Ensino Fundamental (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

Com o intuito de identificar a existência de pesquisas que envolvem invariantes operatórios, no ano de 2021 realizamos uma pesquisa no banco de dados Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por teses e dissertações em que constassem, em seus títulos, palavras-chave e/ou objetivos com o termo *invariantes operatórios*. Nessa referida busca, encontramos apenas 44 pesquisas, sendo 23 dissertações e 11 teses. Nossos estudos indicaram que nenhuma dessas pesquisas teve como objetivo investigar invariantes operatórios associados ao conceito de função com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Considerando, com base na Teoria dos Campos Conceituais, que a construção de um conceito pelo sujeito pode ser observada pelos invariantes operatórios mobilizados por ele em diferentes situações, a presente pesquisa é norteada pela seguinte questão: *Que invariantes operatórios* associados ao conceito de função *são mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas?*

Buscando responder a essa questão de pesquisa, estabelecemos como objetivo geral: analisar invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*.

Para atingir esse objetivo, elaboramos quatro problemas mistos, considerando as subclasses da classe *proporção simples e transformação de medidas*, que foram resolvidos por doze alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, sendo três estudantes de cada escola. Ao todo participaram desta pesquisa quatro escolas públicas, localizadas em diferentes regiões de uma cidade do interior do Paraná.

A escolha pelo 5º ano do Ensino Fundamental se deu pelo fato de os alunos estarem frequentando o último nível de escolaridade dos anos iniciais e já apresentarem algumas competências referentes aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, conforme constatado nas pesquisas de Pavan (2010), Rezende e Rodrigues (2019), Silva (2021), e previsto pela BNCC (BRASIL, 2018). Porém, tais competências podem não ter sido desenvolvido conforme previstas pela BNCC, pois devido à pandemia da Covid-19, do dia 23 de março de 2020 ao dia 26 de julho de 2021, as aulas presenciais foram suspensas e os alunos tiveram aulas remotas[4].

[4] Trata-se do conteúdo disponibilizado online.

A resolução dos problemas mistos pelos alunos aconteceu individualmente, em um único encontro entre aluno e pesquisadora, por meio do aplicativo *Google Meet,* momento em que foi apresentando um problema de cada vez para o aluno resolver. Após as resoluções dos quatro problemas mistos, cada aluno enviou fotos de suas resoluções para a pesquisadora pelo *WhatsApp,* e ela, diante das fotos com as resoluções, solicitou ao aluno que falasse como pensou para resolver cada problema.

Para as análises, foram consideradas as resoluções escritas dos alunos e as transcrições do diálogo final com a pesquisadora. Contribuíram para as análises diversas pesquisas (PAVAN, 2010; FERRAZ, 2016; BECK, 2018; MAGINA, PORTO, 2018; CALADO, 2020) que identificaram invariantes operatórios associados ao conceito de função em situações multiplicativas.

A Teoria dos Campos Conceituais respaldou a construção desta pesquisa porque se trata de uma teoria cognitivista que permite ao professor/pesquisador compreender o funcionamento e o desenvolvimento dos conceitos pelos alunos, mediante as diferentes situações, no decorrer do processo escolar (VERGNAUD, 1996*a*). Especificamente, a TCC respaldou a fundamentação teórica, a constituição das classes/subclasses de problemas mistos, e as análises dos esquemas e dos possíveis invariantes operatórios manifestados pelos alunos.

No que se refere à estrutura desta pesquisa, ela está dividida em seis partes: Introdução, os quatro capítulos e as considerações finais, seguidas das referências e apêndices. No capítulo 1 apresentamos aspectos do conceito de função, as ideias associadas ao conceito de função, e a articulação teórica de pesquisas envolvendo invariantes operatórios associados à função.

No capítulo 2 descrevemos os principais elementos que compõem a TCC, apresentamos a classe de *transformações de medidas* do Campo Aditivo e a classe de *proporção simples* do Campo Multiplicativo e, por fim, explicitamos problemas mistos e a classe *proporção simples e transformação de medidas*.

Já, no capítulo 3 descrevemos os procedimentos metodológicos assumidos para a pesquisa de forma detalhada.

No capítulo 4 apresentamos as análises dos esquemas dos alunos, buscando desvendar indicativos de invariantes operatórios associados ao conceito de função.

O texto encerra-se com as considerações finais da pesquisa, apresentando resposta a questão de norteadora e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1

ESTUDO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo apresentamos brevemente os estudos realizados sobre o conceito de função: a evolução, as definições, as representações, as orientações da BNCC, as dificuldades de aprendizagem pelos alunos, bem como a ideia *proporcionalidade* e as ideias-base de função *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização,* possíveis de serem manifestadas desde os anos iniciais. Por fim, apresentamos pesquisas envolvendo invariantes operatórios associados ao conceito de função.

1.1 O conceito de função

Segundo Caraça (1998), o conceito de função é considerado um dos conceitos fundamentais de toda Matemática, “[...] não só pelo seu papel central e unificador nesta área do conhecimento, como também pela sua aplicação a outros ramos do conhecimento humano. Neste sentido, seu aprendizado é um dos objetivos mais importantes a ser alcançado [...]” ao logo do processo escolar pelos alunos (TRINDADE, 1996, p. 104).

Esse conceito originou-se da tentativa de cientistas e filósofos desenvolverem um instrumento matemático que contribuísse para analisar e dominar os fenômenos naturais (o movimento dos corpos, a vaporização da água, a passagem de uma corrente elétrica num condutor, a germinação de uma semente, entre outros), descrever regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizá-las (CARAÇA, 1998). Atualmente, as funções já não são apenas previsões dos fenômenos que acontecem com regularidade, o grau de generalização das funções supera o real e exige que a abstração seja fundamental no entendimento desse conceito (NOGUEIRA, 2014).

De acordo com Pires (2016), o conceito de função demorou para ser formalizado pela humanidade, cujos primeiros indícios datam 2.000 anos a.C. com a civilização babilônica, até a formalização, que aconteceu somente no século XX, organizada pelo grupo Bourbaki. Durante esse período surgiram diferentes concepções de função, que “[...] respaldadas no pensamento científico e filosófico, contribuiu com a evolução do conceito desse objeto matemático, desencadeando as definições que temos nos dias atuais” (PIRES, 2016, p. 10).

Em 1939, um grupo de matemáticos que utilizava o pseudônimo de Nicolas Bourbaki publicou o primeiro livro da coleção *Théorie des Ensembles*, que contém a seguinte definição de função:

> Sejam *E* e *F* dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de *E* e uma variável *y* de *F* é dita *relação funcional em y se, qualquer que seja x ϵ E, existe um elemento y de F e um só, que esteja na relação considerada com* x. Dá-se o nome de *função* à operação que associa, assim, a todo elemento *x ϵ E* o elemento *y ϵ F* que se encontra na relação dada com *x*; diz-se que *y* é o *valor* da função para o elemento *x* e que a função é *determinada* pela relação funcional considerada (BOURBAKI, 1970, E.R.5, grifos original *apud* RIBEIRO; CURY, 2015, p. 44).

Pires (2016) menciona que essa definição faz uma distinção entre relação funcional e função. A relação funcional é uma relação de variação entre os elementos de dois conjuntos, e a função determina a operação que associa os elementos de x de um conjunto com os elementos de y de outro conjunto. “Uma função é determinada pela relação funcional estabelecida entre os elementos” (PIRES, 2016, p. 10).

Caraça (1998) apresenta a definição mais atual do conceito de função:

> [...] sejam x e y variáveis representativas de conjunto de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \rightarrow y$. A x chama-se *variável independente* e a y *variável dependente* (CARAÇA, 1998, p. 121, grifos nossos).

Para estabelecer a correspondência entre duas variáveis, utiliza-se a expressão analítica, constituindo a lei matemática $y = expressão\ analítica$. A expressão analítica “[...] consiste em um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y”, por exemplo, a função $y(x)$, cuja definição analítica é $y = 5x + 3$ (CARAÇA, 1998, p. 122).

Segundo Caraça (1998), a representação geométrica da função $y(x)$ corresponde a um conjunto de pontos no plano cartesiano, em que para cada valor a da variável x corresponde um valor b da variável y, permitindo a construção do ponto $M(a, b)$, como podemos observar na Figura 1.

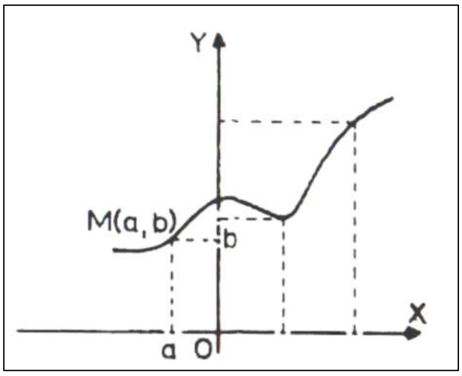


Figura 1: Representação geométrica da função
Fonte: Caraça (1998, p. 127).

Para Oliveira (1997), podemos utilizar, para representar uma função, uma tabela, um gráfico, um diagrama de flechas ou uma expressão algébrica, representações essas que constituem parte do conjunto de representações simbólicas, segundo a teoria de Vergnaud. Desta forma, “[...] a flexibilidade na passagem de uma representação a outra e o emprego constante da representação verbal (em linguagem corrente, oral ou escrita) são fundamentais para a construção do conceito de função” (TRINDADE, 1996, p. 107).

O documento que direciona o ensino de Matemática no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, recomenda o desenvolvimento do pensamento algébrico com o estudo das ideias de regularidade, generalização de padrões, propriedades da igualdade e das noções de função desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essas ideias e noções podem ser exploradas por meio da resolução de problemas envolvendo proporcionalidade direta, mas sem o uso de letras para expressar regularidades (BRASIL, 2018).

A BNCC recomenda, ainda, que essas ideias previstas para serem desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental sejam retomadas, aprofundadas e ampliadas nos anos finais da mesma etapa de ensino. Também prevê para os alunos o desenvolvimento de outras ideias essenciais para que o conceito de função seja construído, como as ideias de equivalência, variação, interdependência, proporcionalidade, a regularidade e a generalização, fazendo o uso de linguagem Matemática. Tais ideias contribuem para a formalização do conceito de função e de suas representações numérica, algébrica e gráfica no 9º ano do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio (BRASIL, 2018).

Em relação à compreensão do conceito de função, diversas pesquisas (TRINDADE,1996; OLIVEIRA, 1997; BIANCHINI; PUGA, 2006; ROSSINI, 2006;

SILVA, 2008; SANTOS, 2013; REZENDE, NOGUEIRA, 2014; PIRES, 2016; BERNARDINO *et al.*, 2019; CALADO, NOGUEIRA, REZENDE, 2020) mostram dificuldades dos alunos de diferentes níveis de ensino, incluindo alunos do Ensino Superior e até mesmo professores. As principais dificuldades dos alunos relacionadas ao ensino e aprendizagem do conceito de função mencionadas nessas pesquisas advêm da não compreensão das variáveis envolvidas, da dependência entre elas, e da associação entre as diferentes formas de representação simbólica envolvida.

As dificuldades podem estar relacionadas ao ensino de função ofertado ao aluno, pois "[...] frequentemente a atenção do aluno é focada na montagem da equação, não havendo nenhuma menção nem questionamento quanto à variação e à relação de dependência das grandezas envolvidas" (BRAGA, 2006, p. 82-83).

Para Leal (1990 *apud* TRINDADE, 1996, p. 107), "[...] a falta de uma preparação dos alunos para a construção do conceito de função, ao longo dos primeiros sete anos de escolaridade é uma das principais responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem desse tópico".

Segundo Tinoco (2002), para minimizar as dificuldades no processo de construção desse conceito e acontecer a aprendizagem, o professor precisa propor aos alunos situações que, além de trabalhar o conteúdo específico de cada situação, permita explorar a ideia principal do conceito de função: uma variável é perfeitamente determinada a partir do conhecimento de outra. Após um longo período no Ensino Fundamental explorando situações envolvendo essa ideia, que é possível apresentar e formalizar o conceito de função.

Com base na Teoria dos Campos Conceituais, inferimos que, para a compreensão do conceito de função, é necessário que, desde os anos iniciais, o aluno vivencie um conjunto de situações envolvendo a relação funcional, além das diferentes representações linguísticas e simbólicas pertencentes a esse conceito, permitindo-lhe mobilizar invariantes operatórios.

Entre as situações que envolvem a relação funcional, citam-se os problemas multiplicativos e os problemas mistos (aditivo e multiplicativo), como identificado em várias pesquisas (PAVAN, 2010; TEIXEIRA, 2016; MAGINA; PORTO, 2018; BECK, 2018; CERON, 2019; MIRANDA, 2019; CALADO, 2020). Isso é possível porque a ideia de proporcionalidade presente em situações multiplicativas é um caso específico de relação funcional (TINOCO, 2002).

As situações multiplicativas envolvendo a relação funcional levam o aluno a mobilizar diferentes conceitos que fazem parte do Campo Conceitual das Funções, entre eles os conceitos de “[...] relação entre conjuntos, variação, dependência, correspondência, variável dependente e independente, entre outros conceitos” (OLIVEIRA, 1997, p. 8).

Campiteli e Campiteli (2006) consideram importantes para a constituição do conceito de função as ideias de: proporcionalidade, dependência, continuidade, descontinuidade, relação, variável, regularidade, correspondência e generalização. “O desenvolvimento dessas ideias pode ser feito por meio de atividades ligadas ao dia-a-dia [*sic*] dos alunos, mediante as quais eles se familiarizam também com as formas de representar funções [...]” (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 37).

De acordo com Miranda (2019), cada tipo de função apresenta suas próprias ideias-base. Assim, as ideias-base de função sugeridas por Campiteli e Campiteli (2006) aplicam-se a determinados tipos de função e a outros não; por exemplo, a ideia de proporcionalidade aplica-se a funções lineares. Desta forma, “[...] para compreender o Campo Conceitual das Funções é preciso compreender/estabelecer o Campo Conceitual de cada tipo de função” (MIRANDA, 2019, p. 21).

Considerando os aspectos históricos e epistemológicos para a construção do conceito de função e respaldado em Caraça (1998), Tinoco (2002), Pavan (2010) e Nogueira (2014), o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) vem defendendo que ideias-base de função são todas aquelas que servem para todas as funções, e isso ocorre com as ideias de *correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização.*

A seguir apresentamos, de forma sucinta, as ideias-base de função e a ideia de *proporcionalidade*, pois segundo a BNCC, ela permite o desenvolvimento da noção intuitiva de função desde os anos iniciais (BRASIL, 2018), e constitui a classe de problema utilizada nesta pesquisa.

1.2 Ideias associadas ao conceito de função

Tomando como base os autores Caraça (1998), Trindade e Moretti (2000); Tinoco (2002); Campiteli; Campiteli (2006), Pavan (2010), Nogueira (2014), Calado, Nogueira e Rezende (2020), nesta pesquisa assumimos que as ideias-base função *variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização,* e a ideia de *proporcionalidade* associada ao conceito de função, podem ser desenvolvidas pelos alunos desde os anos iniciais por meio de situações-problema.

A seguir, apresentamos uma descrição breve de cada uma dessas ideias relacionadas ao conceito de função, seguindo a sequência lógica das ideias-base de função apresentada por Ciani, Nogueira e Berns (2019): *variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização* e, por fim, apresentamos a ideia de *proporcionalidade*.

Caraça (1998, p. 120), ao explicitar a respeito do conceito de função, introduz o conceito de *variável* da seguinte forma: “Seja E um conjunto qualquer de números, [...], e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo representativo de qualquer dos elementos do conjunto E chamamos de *variável*”. Sem essa representação simbólica para os conjuntos, não obteríamos uma generalidade conveniente para expressar a correspondência entre dois conjuntos.

Queiroz (2008) apresenta três usos da *variável,* dependendo da situação a ser explorada, sendo elas: como termo desconhecido - encontrar um valor ou valores que tornem a sentença verdadeira; número genérico - quando x pode assumir qualquer valor em expressões, parâmetros ou equações expressas de forma generalizada; e relacionamento funcional - quando ocorre a variação simultânea entre as variáveis, em que é possível determinar o valor de uma das *variáveis* quando a outra é conhecida.

Segundo Nogueira (2014), a *variável* como termo desconhecido, mas específico, apresenta o mesmo sentido da *variável* como incógnita. Para exemplificar a ideia *variável* com significado de termo desconhecido, consideramos a seguinte situação: “Escreva uma equação que expresse a multiplicação de um número desconhecido por três e que adicionado a dois, resulte em onze” (QUEIROZ, 2008, p. 43).

Um exemplo de *variável* como número genérico é dado por Nogueira (2014), ao multiplicar o número 1 por outros números, por exemplo: $1 \times 0 = 0$; $1 \times 5 = 5$; $1 \times 23 = 23$; $1 \times (-8) = -8$; e $1 \times 146 = 146$, o produto do número 1 por outro número qualquer apresenta como resultado esse outro número. Como isso acontece sempre, pode-se usar uma expressão algébrica $1 \cdot x = x$ para indicar esse fato.

De acordo com Queiroz (2008), as situações envolvendo um relacionamento funcional podem ser representadas em tabelas, gráficos, expressões analíticas ou problemas verbais. Como exemplo de problema verbal, o autor cita que "determinada escola [...], efetua o pagamento de seus professores através do seguinte sistema: um valor fixo de $R\$\ 3{,}00$ por mês mais a quantidade de aulas dadas multiplicada por 2. Determine uma fórmula que forneça o valor deste salário" (QUEIROZ, 2008, p. 44). "Pela situação expressa acima, atribuindo a x o número de aulas dadas em determinado mês e chamando de y o salário a ser recebido, podemos representar o relacionamento descrito por: y = 2x + 3" (QUEIROZ, 2008, p. 45).

A ideia de *correspondência* é muito importante para compreensão do conceito de função (CARAÇA, 1998). Ainda, segundo o autor, a lei de *correspondência* entre dois elementos refere-se à maneira pela qual pensar no antecedente desperta o pensar no consequente. Por exemplo, a correspondência entre o objeto (antecedente) e o número (consequente): "[...] apontar para um dos objetos e dizer um, apontar para outro e dizer dois, e vai procedendo assim até esgotar os objetos da coleção; se o último número pronunciado for oito, dizemos que a coleção tem oito objetos" (CARAÇA, 1998, p. 6), como podemos visualizar na Figura 2.

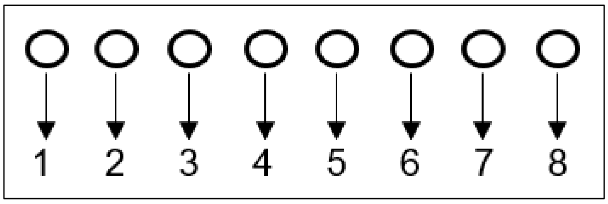


Figura 2: Correspondências entre objetos e números
Fonte: Adaptado de Caraça (1998).

A definição de função contempla uma *correspondência* unívoca no sentido de $x \rightarrow y$, ou seja, cada elemento a do conjunto A corresponde com apenas um elemento b do conjunto B. Também podemos falar em *correspondência* entre conjuntos quando, por exemplo, o conjunto A corresponde ao conjunto B; ou ainda, na *correspondência* entre a expressão analítica e os lugares geométricos.

A ideia de *dependência* entre as grandezas variáveis proporciona à Matemática um caráter dinâmico, e isso torna o conceito de função importante para toda a Matemática (CARAÇA, 1998). Segundo Tinoco (2002), a ideia de *dependência* numa relação funcional consiste na determinação de uma grandeza (variável dependente) a partir variação da outra grandeza (variável independente).

Para explorar a ideia de *dependência* entre duas grandezas variáveis, Pavan (2010) sugere apresentar aos alunos situações-problema que envolvam duas variáveis, nas quais se peça a determinação do valor de uma variável em função da outra, por exemplo: “O preço que se tem de pagar por certa mercadoria é feito de acordo com a quantidade de mercadoria que se compra. Assim, o preço depende da quantidade (peso), logo o preço é função da quantidade” (PAVAN, 2010, p. 25).

A ideia de *dependência* não é simples de ser construída pelo aluno e, portanto, uma estratégia que pode auxiliar no desenvolvimento dessa ideia é utilizar situações que fazem parte do contexto do aluno (PAVAN, 2010).

A ideia de *regularidade* surgiu a partir de observações e estudos de fenômenos naturais, com o propósito de descobrir suas causas e consequências. Os cientistas descobriram que alguns fenômenos naturais apresentam *regularidades*, isto é, comportamentos idênticos, com as mesmas condições iniciais, o que permite fazer repetições e previsões (CARAÇA, 1998). Com isso, a ideia de *regularidade* tornou-se “[...] um dos elementos mais determinantes da natureza” (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 21).

Trindade e Moretti (2000) consideram essencial para a construção do conceito de função a identificação de *regularidades* em situações reais, em sequências numéricas ou padrões geométricos. Para auxiliar na evolução dessa ideia, Trindade e Moretti (2000) sugerem tarefas com tabelas, que também contribuem para o desenvolvimento de outras ideias base de função, como a ideia de *dependência*.

Segundo Nogueira (2014), a ideia de *regularidade* pode ser desenvolvida desde a Educação Infantil, por exemplo, com o padrão de repetição de uma sequência por meio de desenhos; e com as crianças maiores ao apresentar sequências numéricas do tipo: 5, 10, 15, 20, ... e pedir que adivinhem o número seguinte. Para isso, as crianças precisam perceber que a sequência está aumentando de 5 em 5, e então, para adivinhar o número seguinte, elas precisam somar 5 ao número anterior.

Para Campiteli e Campiteli (2006), é importante propor aos alunos situações em que não há *regularidade*, com a finalidade de que eles percebam que nem todos os fenômenos obedecem a uma *regularidade* e, portanto, não há função que o descreva.

A ideia de *generalização* advém da observação dos fenômenos que ocorrem com regularidade, uma vez que, ao perceber uma regularidade, é possível estabelecer uma generalização, e esta capacidade de generalização envolve abstração (TINOCO, 2002).

As tarefas que envolvem a *generalização* “[...] consistem em gerar, a partir dos casos particulares dados, novos casos particulares ou a expressão do termo geral. Para isso, é necessário gerar um padrão ou padrão de comportamento dos elementos conhecidos” (MERINO; CAÑADAS; MOLINA; 2013, p. 27)

Tinoco (2002) menciona a importância de analisar a validade da lei para qualquer caso, registrando-a não somente para casos particulares, por exemplo, na sequência numérica: 0, 5, 10, 15, 20, ..., podemos generalizar essa regularidade por meio da linguagem natural, ao afirmar que os números são todos múltiplos de cinco. Também é importante que os alunos, em ano escolar oportuno, desenvolvam a capacidade de generalizar na linguagem matemática algébrica, nesse caso, $y = 5x$.

Pesquisas, tais como de Bernardino *et al* (2019), Calado, Nogueira e Rezende (2020) e Tinoco (2002), mostram que, dentre as ideias-base de função, a ideia de *generalização* é a mais difícil de ser compreendida pelos alunos. Para que essas dificuldades sejam superadas ou minimizadas, essas pesquisas defendem que situações envolvendo as ideias-base de função devem ser proporcionadas aos alunos desde os anos Iniciais.

Segundo Vergnaud (2007), a *proporcionalidade* é um dos conhecimentos matemáticos mais utilizado todos os dias e em diferentes profissões, pois ela “[...] é o culminar da aritmética elementar e o alicerce de tudo o que se segue [...]” (LESH; POST; BEHR, 1998, p. 96)

Para Lesh, Post e Behr (1998, p. 93), o raciocínio proporcional “[...] envolve o sentido de co-variância [*sic*] e múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação”. Além disso, o raciocínio proporcional envolve a relação entre duas grandezas a partir dos conceitos de taxa, razão, quociente e fração, e pode ser representado na linguagem natural (se x está para *y,* então *t* está para *z*) pelo esquema sagital, ou pela equação $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Para Lesh, Post e Behr (1998, p. 121), Piaget, ao estudar o raciocínio proporcional, concluiu que ele se desenvolve “[...] a partir (1) de uma estratégia compensatória global (frequentemente de natureza aditiva) passando por (2) uma estratégia multiplicativa sem generalização a todos os casos, até (3) à estruturação final da lei das proporções”.

Lima *et al*. (2016) mencionam que uma proporção é uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, para quaisquer números reais $c,\ x$, tem-se a proporção direta $f(cx) = cf(x)$, ou a proporção inversa $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c\ \neq\ 0$. Isto porque, “[..] escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c\ \in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função linear” (LIMA *et al*., 2016, p. 96).

Consideramos que a ideia de *proporcionalidade* está implícita no esquema do aluno, quando a proporção entre as grandezas permanece igual. Segundo Tinoco (2002), a ideia de *proporcionalidade* pode ser explorada quando se conhece uma grandeza e pode-se obter o valor correspondente da outra, ao multiplicar o valor da grandeza conhecida por uma constante (*taxa*). Por exemplo, se um litro de leite custa a reais, então x litros custam $y\ =\ ax$ reais.

As ideias apresentadas são essenciais à construção do conceito de função e devem ser introduzidas aos poucos e gradativamente, à medida que os conteúdos desenvolvidos com alunos oferecem oportunidades (TINOCO, 2002).

Na próxima seção, apresentamos pesquisas envolvendo invariantes operatórios associados ao conceito de função em situações-problema.

1.3 Pesquisas envolvendo invariantes operatórios associados à função

Considerando que o campo conceitual multiplicativo envolve o conceito de função (VERGNAUD, 1996*a*), e o raciocínio funcional pode ser definido como a capacidade de estabelecer a relação entre grandezas (TEIXEIRA; MAGINA; MERLINI, 2016), procuramos evidenciar pesquisas (PAVAN, 2010; FERRAZ 2016; BECK, 2018; MAGINA; PORTO, 2018; CALADO, 2020) que identificaram invariantes operatórios associados ao conceito de função em situações multiplicativas.

Tais pesquisas foram encontradas de modo diversificado: os trabalhos de Calado (2020), Magina e Porto (2018) e Pavan (2010) foram estudadas no âmbito do GEPeDiMa; e as pesquisas de Ferraz (2016) e Beck (2018) foram encontradas ao realizar uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo termo *invariantes operatórios*.

Pavan (2010), ao desenvolver sua pesquisa de mestrado, investigou se as crianças da 4ª série (atual 5º ano) do Ensino Fundamental reconhecem e mobilizam as ideias-base de função - *variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização* - na resolução de problemas de estrutura multiplicativa ou estruturas aditiva e multiplicativa, simultaneamente. Para essa investigação, realizou a aplicação de problemas para 10 alunos de uma Escola Municipal do interior do Paraná por meio de entrevistas individuais, seguindo as orientações do Método Clínico Piagetiano.

As situações-problema propostas aos alunos pertencem às classes de problemas multiplicativos estabelecidas por Vergnaud (1983; 2009*a*). Elas foram divididas em cinco baterias, e em cada uma delas explorou-se uma ideia-base de função. Como exemplo, a ideia de *dependência* é explorada no problema: *Pedro chegou à cidade de São Paulo. Para ir até a casa de seu primo, ele chamou um táxi. O táxi cobra uma taxa fixa de R$ 4,00, mais R$ 1,20 por quilometro rodado. Se a casa do primo de Pedro fica a 15 quilômetros de onde ele está, quanto ele pagará para o motorista?* Isto porque o preço a pagar pela corrida de táxi não dependia apenas dos quilômetros rodados, mas de uma taxa fixa também, que deveria ser adicionada para encontrar o valor total. Segundo a autora, essa ideia ficou clara para as crianças.

Pavan (2010), além de investigar as ideias-base de função, indicou esquemas e teoremas em ação manifestados pelos alunos em situações-problema (Quadro 1).

Esquemas	Teoremas em ação
Adições sucessivas.	Iteração aditiva.
Correlação entre um dedo e 10 (dezena).	Bijeção.
Algoritmo da multiplicação.	$f(x) = ax$.
Algoritmo da multiplicação e da soma.	$f(x) = ax + b$.
Algoritmo da multiplicação.	Se $a \cdot b = c$, então $a \cdot n \cdot b = n \cdot c$.
Divisão de m por n.	Divisão por números inteiros.
Algoritmo da multiplicação.	Tabuada $a \cdot x = b$

Quadro 1: Esquemas e teoremas em ação
Fonte: Adaptado de Pavan (2010).

A autora concluiu, em sua pesquisa, que os alunos do 5º ano reconhecem e mobilizam de modo intuitivo as ideias-base envolvidas no conceito de função, ao resolverem situações-problema envolvendo estruturas aditiva e multiplicativa (problemas mistos) ou estrutura multiplicativa.

Ferraz (2016), em sua pesquisa, teve como objetivos identificar os conhecimentos dos alunos do 6º ano sobre as diferentes noções que envolvem o campo multiplicativo, e investigar a mobilização de conhecimentos acerca do campo multiplicativo ao longo do desenvolvimento das tarefas propostas aos alunos. Para atingir esses objetivos, foram organizados encontros para aplicação dos problemas das classes de proporção simples e produto de medidas, discussão das estratégias de resolução e realização das entrevistas com os alunos. A resolução dos problemas aconteceu tanto de forma individual quanto em grupo.

Para as análises, Ferraz (2016) considerou as resoluções de quatro alunos, que apresentaram trajetórias distintas. A análise aconteceu por classe de problemas, destacando estratégias, teoremas em ação e principais dificuldades dos alunos.

No Quadro 2, apresentamos as estratégias e teoremas em ação mobilizados pelos alunos nas situações de proporção simples.

Estratégias	Teorema em ação
Contagem. Algoritmo da divisão. Algoritmo da multiplicação. Algoritmo da divisão acompanhado de uma multiplicação. Tentativa e erro. Adições sucessivas. Multiplicações sucessivas. Propriedade linear da proporcionalidade (estratégia escalar).	Se x unidades custam y, então z unidades custam $\frac{y}{x}$. z.
	Se x é o dobro (triplo, metade, ...) de y, então t (valor a descobrir) será o dobro (triplo, metade, ...) de z.
	Se o valor da unidade corresponde a x, então y unidades correspondem a x vezes y.
	Se x unidades custam y, então z unidades custam $y \cdot z$. (falso para a classe de quarta-proporcional).
	Se *x* representa o todo e *y* representa o tamanho das partes (quota), então o número de partes em que o todo foi dividido será igual a x dividido por y.
	$a \cdot x = b$
	Se *x* representa o total de partes e *y* o total de partes a serem distribuídas, então *x* dividido por *y* é igual ao valor correspondente à unidade.
	A multiplicação sempre aumenta e a divisão diminui (válido para os números decimais).

Quadro 2: Estratégias e teoremas em ação
Fonte: Autora com base em Ferraz (2016).

A partir das análises, a pesquisadora concluiu que os alunos do 6º ano já possuíam alguns conhecimentos relacionados às classes de proporção simples um para muitos, cota e partição; construíram e adaptaram esquemas relacionados às situações envolvendo quarta proporcional, bem como ampliaram e ressignificaram compreensão acerca das operações de multiplicação e divisão (FERRAZ, 2016).

Beck (2018), em sua pesquisa, teve como objetivo descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por 24 estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem pensamento algébrico. Para isso, fundamentou-se na TCC, na Epistemologia Genética e nos conceitos algébricos.

Para coleta e análise dos dados, baseou-se no Método Clínico de Piaget. A aplicação do Método Clínico aconteceu por meio de quatro situações envolvendo o pensamento algébrico: 1) problema da balança; 2) copos comutativos; 3) álgebra das mesas; e 4) problemas das balas. O pesquisador, ao analisar as estratégias de resolução dos alunos na situação 3, identificou os invariantes operatórios apresentados no Quadro 3.

Conceito em ação	Teorema em ação
Uma medida para cada objeto.	Multiplicação das balas por um fator.
Uma medida para mais de um objeto.	Relacionar proporcionalmente duas grandezas.
Relação biunívoca entre as grandezas.	Regra de associar acrescentando um.
Relação proporcional entre quaisquer grandezas.	Regra de dobrar as quantidades.

Quadro 3: Conceitos em ação e teoremas em ação
Fonte: Adaptado de Beck (2018).

Com essa pesquisa, Beck (2018, p. 122) conclui que

> [...] é possível o desenvolvimento de intervenções pedagógicas que mobilizem o pensamento algébrico desde os anos iniciais, porém é preciso ter em vista que as representações são muito particulares e que as expressões utilizadas pelas crianças revelam o nível das estratégias mentais que elas são capazes de alcançar para diferentes tipos de noções algébricas.

Magina e Porto (2018) analisaram as estratégias utilizadas por 80 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem três situações-problema que envolvem o conceito de função. Para análise das estratégias, as autoras contaram com contribuições da Teoria dos Campos Conceituais e dos estudos pautados na investigação sobre *early álgebra*[5].

Para as autoras, o raciocínio funcional está presente em algumas situações aritméticas e algébricas, por exemplo, em situações aritméticas, como “[...] sabendo que 1 carro tem 4 rodas, quantas rodas têm 5 carros?”; e em situações algébricas: $f(x) = 4x$, em que a quantidade de rodas depende da quantidade de carros.

Magina e Porto (2018) apresentam os teoremas em ação identificados a partir das estratégias de resolução, sustentadas por operações de divisão e multiplicação, como observa-se no Quadro 4, na próxima página.

[5] Segundo Magina e Porto (2018), o trabalho com a álgebra nos anos iniciais está presente no currículo em vários países do mundo, sendo denominda *early álgebra*.

Estratégias	Teoremas em ação
10 | 2 10 5 00 3 x5 15	10 → 2 x → 3
5, 1, 1, 1 5, 1, 1 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1	f(3) = 5+1+1+1 f(2)= 5+1+1 f(6)= 5+1+1+1+1+1+1
5+3=8 5+6=11 5+2=7	f(3)= 5 +3.1 f(2) = 5+2.1 f(6)= 5 + 6.1

Quadro 4: Estratégias e teoremas em ação
Fonte: Adaptado de Magina e Porto (2018).

Os resultados dessa pesquisa apontam que os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental "[...] trazem em seu repertório competências necessárias à formação do raciocínio funcional ancorado em operações básicas da adição", e que é possível a formação conceitual da função nessa etapa escolar, desde que o professor conheça os teoremas em ação mobilizados pelos alunos, de modo que possa transformá-los em conhecimentos explícitos (MAGINA; PORTO, 2018, p. 11).

Calado[6] (2020), em sua pesquisa de mestrado, investigou os conhecimentos relacionados à generalização mobilizados por 32 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem situações envolvendo função afim. Para essa investigação, fundamentou-se na TCC, elaborou uma sequência didática nos moldes da Engenharia Didática, e implementou a referida sequência respaldada na Teoria das Situações Didáticas. No momento da implementação, os alunos foram organizados em grupos (duplas e/ou trios).

Os resultados dessa investigação apontam, a partir das estratégias de resolução dos alunos, doze teoremas em ação implícitos, sendo sete relativos a conhecimentos verdadeiros e cinco a conhecimentos equivocados, como podemos observar na próxima página (Quadro 5).

[6] Integrante do GEPeDiMa.

Indícios do TAV	Teoremas em ação verdadeiros e falsos
Para situações na quais as variáveis são diretamente proporcionais, ao calcular $f(n)$, para qualquer número n natual, determina $f(1)$ e multiplica por n.	**TAV1:** $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1),\ \ n \in \mathbb{N}$.
Para situações na quais as variáveis são diretamente proporcionais, ao calcular $f(x)$, para qualquer x natural, realiza sucessivas somas de $f(1)$.	**TAV2:** $f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x),\ \ x \in \mathbb{N}$.
Utiliza uma letra para representar qualquer quantidade.	**TAV3:** Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, multiplica k por $f(x)$ e soma a constante c.	**TAV4:** $f(kx) + c = k \times f(x) + c,\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Ao desenvolver a representação gráfica da função afim, localiza pontos no plano cartesiano e traça uma reta unindo esses pontos.	**TAV5:** É possível desenhar os pontos no gráfico e uni-los usando uma linha reta.
Utiliza a representação gráfica da função afim para determinar as coordenadas de pontos que pertencem ao gráfico.	**TAV6:** A representação gráfica da função afim associa cada grandeza do eixo x a uma única grandeza do eixo y.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, soma k parcelas de $f(1)$ e a constante c.	**TAV7:** $f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) + c$ $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$
Escolhe uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	**TAF1:** Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, soma $f(x)$ com a constante c.	**TAF2:** $f(kx) + c = f(x) + c,\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, multiplica k por $f(x)$.	**TAF3:** $f(kx) + c = k \times f(x),\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, realiza a soma de k com a constante c e multiplica por x.	**TAF4:** $f(kx) + c = (k + c)x$, $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para a situação na qual as variáveis não são diretamente proporcionais, ao calcular $f(n)$, para qualquer n natural, determina $f(1)$ e multiplica por n.	**TAF5:** $f(n) = n \times f(1), n \in \mathbb{N}$.

Quadro 5: Teoremas em ação verdadeiros e falsos
Fonte: Calado (2020, p. 175).

De acordo com a pesquisadora, tais teoremas em ação verdadeiros e falsos contribuem com a preparação dos professores, ao trabalharem com o conteúdo de função, pois indicam as possibilidades de equívocos e de acertos que os alunos podem manifestar durante o ensino de função afim.

Calado (2020) identificou as ideias-base de função mobilizadas pelos alunos nas estratégias de resolução das situações propostas. As ideias de *correspondência*, *dependência* e *regularidade* foram mobilizadas "[...] ao estabelecerem relações de correspondência e dependência entre as variáveis envolvidas em cada situação no desenvolvimento de casos particulares. A ideia base de *variável* foi manifestada [...] no desenvolvimento das generalizações algébricas" (CALADO, 2020, p. 178).

Essas pesquisas mostram que, desde os anos iniciais, os alunos podem manifestar ideias associados ao conceito de função tais como *variável, correspondência, dependência, regularidade, generalização e proporcionalidade*; diferentes representações, tais como: numérica, pictórica e verbal (linguagem natural); diferentes esquemas - *contagem, adições e subtrações sucessivas, algoritmos da divisão e da multiplicação* - e diferentes invariantes operatórios, desde que sejam propostas a esses alunos tarefas organizadas previamente com essa finalidade.

Na sequência apresentamos os principais aspectos que justificam o desenvolvimento desta pesquisa.

Síntese e justificativa para o desenvolvimento desta investigação:

Com base no exposto até aqui, justificamos o desenvolvimento desta pesquisa a partir dos seguintes aspectos:

- ✓ O conceito de função é considerado um dos conhecimentos fundamentais na Matemática (CARAÇA,1998);
- ✓ O longo período que a humanidade percorreu para chegar na formalização do conceito de função indica a importância de trabalhar este conceito no decorrer do processo escolar, e não diretamente com sua formalização, no 9º ano do Ensino Fundamental;
- ✓ Um conceito se desenvolve pelo aluno ao longo do processo escolar e em decorrência das diferentes situações vivenciadas (VERGNAUD, 1993);
- ✓ Pesquisas (TRINDADE,1996; OLIVEIRA, 1997; BIANCHINI; PUGA, 2006; ROSSINI, 2006; SILVA, 2008; SANTOS, 2013; REZENDE, NOGUEIRA, 2014; PIRES, 2016; BERNARDINO *et al.*, 2019; CALADO, NOGUEIRA, REZENDE, 2020) mostram dificuldades de alunos de diferentes níveis de ensino, incluindo alunos do Ensino Superior e até mesmo professores, a respeito do conceito de

função;

- ✓ A BNCC (BRASIL, 2018) recomenda que a noção intuitiva de função seja desenvolvida por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas, desde os anos iniciais;
- ✓ Além da proporcionalidade, as ideias-base de função - *correspondência, dependência, regularidade, variável e generalização* também podem ser manifestadas e exploradas pelos alunos desde os anos iniciais (TINOCO, 2002; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020);
- ✓ Existem pelo menos 30 classes de problemas mistos (MIRANDA, 2019), e cada uma delas admite diferentes subclasses;
- ✓ Dentre as possíveis classes de problemas mistos, a classe *proporção simples e transformação de medidas* foi estabelecida e identificada nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (MIRANDA, 2019), também identificada na coleção Ápis Matemática do anos iniciais (DANTE, 2017; RODRIGUES; REZENDE, 2021); e
- ✓ Invariantes operatórios são modelos preciosos associados aos conhecimentos possíveis de serem manifestados pelos sujeitos durante a ação (VERGNAUD, 1996*a*).

Sendo assim, o principal objetivo desta pesquisa é: analisar invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. O objetivo geral e o conjunto de aspectos elencados acima justificam o desenvolvimento da presente pesquisa, especialmente por assegurar seu diferencial perante as demais investigações já realizadas e identificadas pela autora desta dissertação, acerca de conhecimentos de função manifestados por alunos dos anos iniciais.

A partir dessa justificativa e desse objetivo geral, consideramos essencial para o desenvolvimento desta pesquisa o referencial teórico alicerçado nos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, apresentado a seguir, no capítulo 2.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos os principais elementos da Teoria dos Campos Conceituais que dão sustentação para o desenvolvimento desta investigação, incluindo o Campo Conceitual das estruturas aditivas, contemplando os problemas da classe de *transformação de medidas;* e o Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, considerando os problemas da classe de *proporção simples*. Além disso, explicitamos os problemas mistos trazendo subclasses, esquemas relacionais e exemplos da classe de *proporção simples e transformação de medidas*.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), idealizada por Gérard Vergnaud na década de 80, e formalmente apresentada em 1990, é uma teoria cognitivista que visa a fornecer uma estrutura que permite, ao professor e/ou pesquisador, compreender o desenvolvimento de conceitos pelo sujeito ao longo do processo escolar, possibilitando-lhe traçar as filiações e rupturas entre conhecimentos. Pelo fato de fornecer uma estrutura para compreensão dos conhecimentos dos alunos em situações de aprendizagem, apresenta contribuições para a Didática da Matemática (VERGNAUD, 1996*a,* 2017).

A Teoria dos Campos Conceituais "[...] começou a ser elaborada a fim de explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações números-espaço e da álgebra" (VERGNAUD, 1996*a*, p. 155). Logo, por ser uma teoria que permite compreender os processos cognitivos, ela pode ser utilizada em diversas áreas, tais como na Física, na Biologia, entre outras. Dentre as possibilidades de campos conceituais estudados na Física, por exemplo, citamos os campos conceituais da Mecânica, da Eletricidade e da Termodinâmica, investigados por Moreira (2002).

Para a elaboração da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (2009*a*) esclarece ter recebido várias influências teóricas, entre elas as dos psicólogos Jean

Piaget e Lev Semyonovich Vygotsky. Vergnaud (1996*b*; 2007) reconhece, especialmente para a TCC, a importância do conceito de esquema e dos invariantes operatórios, elementos presentes na teoria de Piaget, bem como do papel da linguagem e das formas simbólicas presentes na teoria de Vygotsky.

Vergnaud (1996*a*) considera necessária a formação de um Campo Conceitual, pois compreende que um conceito não se forma em uma única classe de situações; e uma situação, por mais simples que seja, envolve vários conceitos.

A partir dessas considerações, Vergnaud (1996*a*; 2009*b)* estabelece que um conceito é formado por uma terna de conjuntos (S, I, L), sendo "S" o conjunto de situações; "I" o conjunto dos invariantes operatórios; e "L" é o conjunto das representações linguísticas e simbólicas. Em geral, não há correspondência biunívoca entre eles, o que significa que nenhum dos conjuntos pode ser excluído, para que ocorra a aprendizagem de um conceito.

Na Teoria dos Campos Conceituais, o termo *situação* tem o sentido de *tarefa*, as situações complexas podem ser consideradas um conjunto de subtarefas a serem realizadas pelos sujeitos, e a natureza e as dificuldades específicas devem ser conhecidas pelos professores (VERGNAUD, 1993).

O conjunto de situações é considerado porta de entrada para formação de um Campo Conceitual e envolve duas ideias principais: a de variedade e a de história. A primeira refere-se à existência de várias situações associadas a um mesmo Campo Conceitual, sendo possível estabelecer o conjunto das classes de problemas associados a um conceito; e a segunda refere-se aos conhecimentos dos sujeitos elaborados mediante experiências em situações variadas.

No entanto, não basta que o aluno realize um cálculo numérico adequado para a situação proposta, é preciso que ele compreenda e experimente diferentes situações relacionadas ao conceito em questão, de modo a expandir seus conhecimentos. Para isso, é preciso que o professor conheça diferentes classes de situações relacionadas a um determinado Campo Conceitual, para propor aos alunos situações que possibilitem o desenvolvimento de esquemas e, assim, não ficar propondo situações em que o aluno utilize o mesmo esquema (GITIRANA *et al.*, 2014).

Vergnaud (1996*a,* p. 157) denomina *esquema* "[...] a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações [...]". Compreendemos que o esquema é a forma como o aluno organiza seus conhecimentos para resolver o problema de determinada classe de situações.

> [...] O caráter invariante, é posto de maneira que um esquema pode ser organizado de formas diferenciadas, no entanto, existem elementos que são de fundamental importância para a sua organização e que o indivíduo pode não variar, usando sempre a mesma organização para aquela classe de situações. Quando isso ocorre, afirma-se que esse é o esquema do estudante para aquela classe de situações (OLIVEIRA; SANTANA; SILVA, 2018, p. 94).

Considerando o conceito de esquema, Vergnaud (1993, 1996*a*) distingue as situações em duas classes: na primeira classe de situações, os procedimentos são automatizados e organizados por um esquema; e na segunda classe de situações, vários esquemas são acionados, analisados e possivelmente acomodados, a fim de atingir a solução desejada.

Para Vergnaud (1993, p. 3), "[...] os esquemas são, em geral, eficazes, mas nem sempre efetivos. Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência a leva, seja a mudar de esquema, seja a modificar o esquema". A partir de novos esquemas, os estudantes tornam-se capazes de enfrentar situações cada vez mais complexas.

Partindo dos esquemas manifestados diante de uma diversidade de situações, o sujeito atribui sentido ao conceito. Por exemplo: o sentido da adição para um sujeito pode ser adquirido a partir dos esquemas e suas representações manifestadas para resolver várias situações associadas à ideia de adição (VERGNAUD, 1996*a*).

Santana *et al.* (2007) mencionam que o aluno resolve uma situação com maior ou menor competência dependendo da quantidade de esquemas que possui em seu repertório. Essa diversidade de esquemas que o sujeito possui é adquirida pela experiência em situações variadas (VERGNAUD,1993).

Segundo Vergnaud (1998, p. 172), "[...] há esquemas perceptivo-gestuais como o de contar objetos, ou de fazer um gráfico ou um diagrama, mas há também esquemas verbais, como o de fazer um discurso, e esquemas sociais, como o de seduzir outra pessoa ou o de gerenciar um conflito".

Nas situações-problema do campo aditivo (adição e subtração) observa-se, por exemplo, que estão presentes esquemas de juntar, separar e colocar em correspondência um a um. Já no campo multiplicativo (multiplicação e divisão), os esquemas podem ser os de correspondência um para muitos e de distribuição (VERGNAUD,1993).

Os algoritmos, por exemplo, são esquemas, mas nem todos os esquemas são algoritmos. “Um algoritmo é uma regra (ou uma conjunção de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, de conduzir à sua solução” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 309). Para Vergnaud (1996*a*), é difícil as crianças explicitarem as regras pertencentes ao algoritmo da adição, embora sejam capazes de executar a sequência das regras na operação; por isso há sempre muito conhecimento implícito nos esquemas.

Segundo Vergnaud (1996*a*, 2009*b*), um esquema é formado por quatro componentes: antecipações do objetivo que se refere aos procedimentos traçados ao iniciar a resolução das situações e aos efeitos que são de se esperar; regras de ação são do tipo *se ... então*, que constituem as ações do sujeito; invariantes operatórios que contém os conhecimentos implícitos ou explícitos; e inferências que permitem *calcular* as regras e antecipações a partir das informações e dos invariantes operatórios de que dispõe o sujeito.

Os objetivos são a parte intencional do esquema, organizados sequencialmente e hierarquicamente. Já as regras são condicionadas pela representação dos objetivos e pelas conceitualizações que permitem desenvolver um conjunto linear de ações, utilizando condições do tipo *se ... então*, expressas e analisadas por meio dos invariantes operatórios (VERGNAUD, 2009*b*). Em outras palavras, “[...] as regras têm a função teórica de expressar o caráter generativo do esquema. São as regras que permitem compreender a maneira que a atividade é gerada pouco a pouco” (VERGNAUD, 2007, p. 5)[7].

Segundo Vergnaud (1993), os invariantes operatórios são conhecimentos implícitos ou explícitos, conscientes ou não, presentes nos esquemas do sujeito em uma situação de aprendizagem. Eles são formados por um conjunto de objetos, teoremas, propriedades e relações, denominado *significado*.

Os invariantes operatórios são diferenciados em três tipos lógicos: invariantes do tipo proposição, funções proposicionais e invariantes do tipo argumento (VERGNAUD, 1996*a*).

- *Invariantes do tipo proposições* são suscetíveis de ser verdadeiros ou falsos. Os teoremas em ação são invariantes deste tipo (VERGNAUD, 1996*a*).

---

[7] Las reglas, tienen la función teórica de expresar el carácter generativo del esquema. Son las reglas las que permiten asir la manera en que la actividad es generada poco a poco (VERGNAUD, 2007, p. 5).

Um exemplo de teorema em ação associado ao conceito de função é mencionado por Vergnaud (1996*a*): Entre os 8 e 10 anos, as crianças compreendem que, se uma quantidade de objetos à venda for multiplicada por 2, por 3, por 4, por 5, por 100, ou por qualquer outro número, seu preço será 2, 3, 4, 5, 10 ou 100 vezes superior. Pode-se exprimir este conhecimento por meio de um teorema em ação verdadeiro: Se $n, x \epsilon \mathbb{N}$, então $f(nx) = nf(x)$, sendo x a quantidade de objetos, n um número qualquer, e f a relação entre objetos e o número.

Vergnaud (2017) esclarece que um teorema em ação pode ser universal ou local. Um teorema em ação é local quando é verdadeiro para uma determinada situação matemática, mas é falso em outra situação matemática. Por exemplo, ao considerar que, na multiplicação entre números naturais, a multiplicação entre dois números *aumenta*, ou seja, o resultado é maior que as partes; e a divisão entre dois números *diminui*, isto é, o resultado é menor que as partes. "Trata-se de um teorema em ação [...] verdadeiro para os números naturais, mas falso para os números racionais" (VERGNAUD, 2017, p. 55).

O aluno, ao utilizar um teorema em ação falso, acredita que ele é verdadeiro para aquela situação, em outras palavras, a manifestação de um teorema em ação falso significa um conhecimento verdadeiro para o aluno que o mobiliza. Com o intuito de superar alguns equívocos cometidos pelos alunos, Vergnaud (1996*a*) defende a importância de reconhecer os conhecimentos implícitos manifestados pelos alunos, sejam eles falsos ou verdadeiros, para propor boas tarefas que possibilitem a reflexão e a possível desestabilização desses conhecimentos equivocados.

Para Nogueira e Rezende (2014, p. 52), "[...] ao desestabilizar conhecimentos falsos mobilizados pelos alunos, ao vivenciarem momentos de desequilíbrios, hesitações e conflitos, entendemos que os alunos passam de um nível de conhecimento para outro mais elaborado [...]", ou seja, a desestabilização de conhecimentos falsos pelos alunos auxilia na aprendizagem do conceito em questão.

Segundo Vergnaud (1998), os alunos geralmente são incapazes de explicar, ou mesmo expressar em linguagem natural os teoremas em ação. Então, é necessário analisar com cautela suas ações e resoluções matemáticas para tentar desvendar tais conhecimentos implícitos manifestados pelos sujeitos.

- *Invariantes do tipo função proposicional* não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas são indispensáveis para construção das proposições. Os conceitos em ação são invariantes deste tipo. Por exemplo, é indispensável à conceitualização das estruturas multiplicativas, o conceito de *proporcionalidade*.

O conceito em ação trata-se de um conceito pertinente na ação, que permite identificar os objetos, as propriedades e relações associadas aos teoremas em ação. Por objeto, o pesquisador considera os

> [...] objetos materialmente perceptíveis e objetos construídos pela cultura, pela ciência, pela técnica, ou pelo próprio sujeito individual". Por propriedades e relação o pesquisador considera os "predicados observáveis e predicados que podem ser inferidos a partir dos observáveis, mas que são eles próprios, construções culturais e individuais (VERGNAUD, 2009*b*, p. 21).

Vergnaud (1996*a*, p. 164) considera os seguintes tipos de funções proposicionais:

- ✓ Funções com um argumento, as propriedades. Por exemplo: "x é uma constante".
- ✓ Funções com dois argumentos, as relações binárias. Por exemplo: "x corresponde a y".
- ✓ Funções com três argumentos, as relações ternárias. Por exemplo: "y é igual a x mais z".
- ✓ Funções com quatro argumentos, as relações quaternárias e funções com mais de quatro argumentos. Por exemplo: "x está para y assim como v está para z.

Segundo Vergnaud (1996*a,* p. 164), existe uma relação dialética entre função proposicional e proposição: "[...] não existe função proposicional sem proposição e não existe proposição sem função proposicional. Da mesma maneira, conceitos em ação e teoremas em ação se constroem em estreita interação".

- *Invariantes do tipo argumento* são os conhecimentos explícitos que surgem dos conhecimentos implícitos (função proposicional e proposição). Em matemática, os argumentos podem ser números (6 + 4 = 10), objetos materiais (a bola está à direita de Carlos), personagens (João é mais baixo que Paulo), relações (*maior que* é uma relação assimétrica), e mesmo proposições (*4 é um divisor de 8* é a recíproca de *8 é um múltiplo de 4*) (VERGNAUD, 1996*a*).

"As concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que não são verdadeiros teoremas e conceitos científicos, mas que podem evoluir para eles" (MOREIRA, 2002, p. 20). Para auxiliar nesse processo as "[...] palavras e outros símbolos, sentenças e outras expressões simbólicas, são instrumentos cognitivos indispensáveis [...]" (VERGNAUD 1990, p. 20 *apud* MOREIRA, 2002, p. 22).

Os significantes são constituídos pelo "[...] conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas…) que permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam" (VERGNAUD, 2009*b*, p. 29).

Na Teoria dos Campos Conceituais, a representação tem uma função tripla: "[...] ajudar à identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; ajudar ao raciocínio e à inferência; ajudar à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação" (VERGNAUD, 1996*a*, p. 180). Isso significa que a representação contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Vergnaud (2009*a*), a noção de representação não se reduz ao uso adequado de símbolos ou de signos, ela representa a interação entre o significado (I) e o significante (R). "Um exemplo para diferenciar representação (significado, significante) e a realidade pode ser retirado dos números naturais. [...] V ou 5, temos dois signos (dois significantes) para representar uma mesma ideia (um significado) do número cinco" (MAGINA *et al*., 2008, p. 9).

As formas de representação mais frequentes de uma situação, segundo Vergnaud (2009*a*), são: linguagem natural, esquema sagital, escrita algébrica, tabela cartesiana, correspondência entre conjuntos, e esquema de Euler-Venn (para conjuntos). Essas formas de representação "[...] foram desenvolvidas pelas sociedades humanas ao longo da história, para representar os conhecimentos tidos como verdadeiros, comunicar suas intenções e sustentar seus processos de pensamento" (VERGNAUD, 2009*b*, p. 26). Porém, nem sempre o aluno consegue expressar todo o seu conhecimento explicitamente por meio dessas representações, ou seja, existe muito de implícito no pensamento e na ação dos sujeitos.

As diversas formas de representação podem contribuir para identificação do significado. Por exemplo, é possível representar o mesmo teorema referente às estruturas aditivas de diversas maneiras, conforme Vergnaud (1996*a*).

a) na linguagem natural: o estado inicial é o estado final ao qual se acrescenta aquilo que foi gasto ou perdido, e a que se subtrai aquilo que se recebeu ou se ganhou;

b) escrita algébrica: $F = T(I) \rightarrow I = T^{-1}(F)$;

c) esquema sagital (Figura 3):

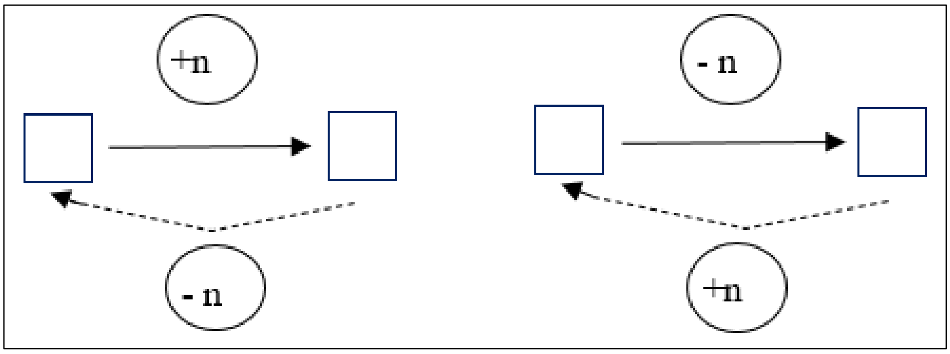


Figura 3: Esquema sagital
Fonte: Vergnaud (1996*a*, p. 187).

Nesse sentido, Vergnaud (2009*a*, p. 174) menciona a importância de o sujeito coordenar diversas formas de representação de um conceito: "[...] nada é mais fecundo, no plano pedagógico, do que exercícios de passagem de um material a outro, ou de uma representação à outra".

A seguir, apresentamos os campos conceituais aditivo e multiplicativo, que são base para a constituição dos problemas mistos. Para os referidos campos conceituais, Vergnaud estabelece a classificação dos problemas considerando a estrutura matemática associada.

2.2 Campo conceitual das estruturas aditivas

Vergnaud (1993) estabelece como campo conceitual das estruturas aditivas o conjunto das situações que envolvem uma ou várias adições e subtrações, além do conjunto dos conceitos e teoremas interligados a estas situações. As situações aditivas envolvem diferentes conceitos, entre os quais citamos: cardinal, medida, inversão, transformação temporal, comparação, composição binária, composição de transformações e de relações, operação unária, número natural e relativo, entre outros.

Os conceitos de comparação, adição e subtração, de acordo com Vergnaud (1996*a*), são explorados desde os seis anos pelas crianças, a partir de situações cotidianas, como: comprar bombons, pôr objetos à mesa, contar pessoas, jogar bolinhas, entre outras que favorecem o desenvolvimento da conceitualização de Matemática. Corroborando com essa afirmação, um dos objetivos de aprendizagem presentes na BNCC (BRASIL, 2018) para crianças a partir de quatro anos é estabelecer relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades.

Os problemas de estruturas aditivas são classificados por Vergnaud (1993, 2009*a*) em seis tipos, sendo esses: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações. Essas classes de problemas aditivos são relações ternárias que ligam três elementos entre si, por exemplo, $4 + 3 = 7$.

Essa classificação dos problemas é resultado de considerações matemáticas e psicológicas, pois os alunos apresentam dificuldades distintas na resolução dos problemas de estruturas diferentes, mesmo que sejam resolvidos pela mesma operação numérica (VERGNAUD, 1993).

Magina *et al.* (2008) oferecem uma classificação a respeito da complexidade exigida do aluno na resolução de problemas. Os problemas cuja resolução demanda situações mais simples são chamados de protótipos, e conforme aumenta a nível de complexidade, os problemas são chamados de 1ª extensão, 2ª extensão, 3ª extensão e 4ª extensão.

Para auxiliar na compreensão das diferenças entre as classes de problemas, Vergnaud (2009*a*) utiliza o esquema relacional e as equações equivalentes ao esquema. Os esquemas relacionais são elaborados baseando-se no código estabelecido por Vergnaud (2009*a*), conforme o Quadro 6.

Nomenclatura	Símbolo	Significado
Retângulo	$\square$	número natural
Círculo	$\bigcirc$	número relativo
Chave vertical	$\}$	composição de elementos de mesma natureza
Chave horizontal	$\overbrace{\qquad}$	
Fecha horizontal	$\longrightarrow$	uma transformação ou uma relação, quer dizer a composição de elementos de natureza diferente
Fecha vertical	$\uparrow$	

Quadro 6: Símbolos que compõem os cálculos relacionais
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

As equações equivalentes aos esquemas relacionais são representadas pelos símbolos apresentados no Quadro 7.

Símbolo	Significado
N	Um número natural
(+ n) ou (- n)	Um número relativo
+	A adição de dois números naturais
+	A adição de um número natural e um número relativo.
+	A adição de dois números relativos.

Quadro 7: Símbolos que compõem as equações
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

Os números naturais não são positivos e nem negativos; já os números relativos podem ser positivos ou negativos. “Os números naturais representam medidas dos conjuntos de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 199).

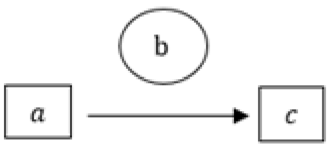
Nesta pesquisa, utilizamos problemas do tipo *transformação de medidas*, e por isso, a seguir, discorremos somente a respeito desta tipologia de problemas.

Problemas do tipo transformação de medidas

Problemas do tipo *transformação de medidas* consistem na transformação de uma quantidade inicial (estado inicial) em uma quantidade final (estado final), na qual a ideia temporal está sempre envolvida (MAGINA *et al*., 2008).

Segundo Magina *et al*. (2008), os problemas do tipo transformação apresentam três níveis diferentes de complexidade: problemas de transformação com o estado final desconhecido são denominados protótipos; problemas de transformação com a transformação desconhecida são considerados de 1ª extensão; e problemas de transformação com o estado inicial desconhecido são considerados de 4ª extensão.

Esses problemas podem ser representados na forma de esquemas sagitais e equações associadas a esse esquema (Quadro 8).

Esquema sagital	Equação
	$a \boldsymbol{+} b = c$

Quadro 8: Representações da classe transformação de medidas
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

Segundo Vergnaud (2009*a*), a lei de composição **+** corresponde à aplicação de uma transformação sobre uma medida, isto é, a adição de um número natural (a) e um número relativo (b). Essa relação de *transformação de medidas* pode ser explicitada ou permanecer mental.

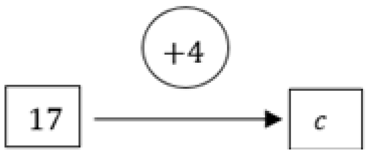
Para os problemas de que envolvem a relação de *transformação de medidas*, Vergnaud (2009*a*) distinguiu seis classes, que foram elaboradas a partir da transformação b ser positiva ou negativa, e a pergunta do problema referir-se ao termo desconhecido: o estado final c (conhecendo a e b), a transformação b (conhecendo a e c), o estado inicial a (conhecendo b e c).

A seguir, apresentamos exemplos das seis classes de problemas envolvendo a relação de *transformação de medidas*.

<u>*Classe 1:*</u> *Transformação positiva com o estado final desconhecido*

Nessa classe, conhecendo o estado inicial (a) e a transformação positiva (b), obtemos o estado final (c).

Exemplo 1: “Havia 17 pessoas dentro de um ônibus, subiram 4. Quantas pessoas estão ali dentro, agora?” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 207).

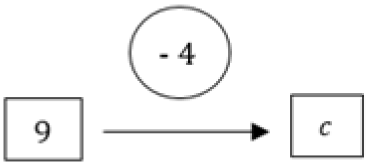
Esquema sagital	Equação
	$17 + (+4) = c$ $21 = c$

Quadro 9: Representações da classe transformação positiva, com o estado final desconhecido
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

<u>*Classe 2:*</u> *Transformação negativa com o estado final desconhecido*

Nessa classe, conhecendo o estado inicial (a) e uma transformação negativa (b), obtemos um estado final (c).

*Exemplo 2: “*João tem 9 balas. Ele deu 4 para sua irmãzinha. Com quantas ele ficou?” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 208).

Esquema sagital	Equação
	$9 + (-4) = c$ $c = 5$

Quadro 10: Representações da classe transformação negativa, com o estado final desconhecido
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

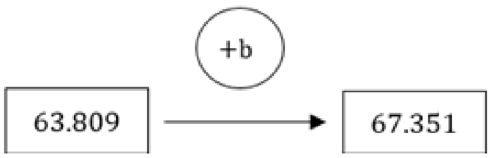
Vergnaud (2009*a*) esclarece que o cálculo relacional[8] que implica na resolução dos exemplos 1 e 2 é o mais simples, porque se refere à aplicação de uma transformação direta ao estado inicial para obter o estado final. Entretanto, quando o estado inicial é um valor menor que a transformação negativa, sua aplicação não é possível; por exemplo, não se pode dar 4 bombons quem somente tem 3 bombons.

Os resultados da pesquisa realizada por Magina *et al.* (2008) com 782 crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em escolas da rede Estadual de São Paulo, comprovam que desde a 1ª série os alunos já dominam os problemas que buscam pelo estado final, pois problemas como esses são abordados no dia a dia da criança antes de ela iniciar sua vida escolar.

Classe 3: Transformação positiva com a transformação desconhecida

Nessa classe, conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c), obtemos uma transformação positiva (b). Como o estado final (c) é maior que o estado inicial (a), a transformação (b) é positiva.

Exemplo 3: "Um paulistano viaja de carro em férias. Ao sair de São Paulo seu velocímetro marca 63.809 km; na volta marca 67.351 km. Quantos quilômetros ele percorreu durante as férias?" (VERGNAUD, 2009*a*, p. 208).

Esquema sagital	Equação
	$63.809 + (+b) = 67.351$ $b = 67.351 - 63.809$ $b = 3.542$

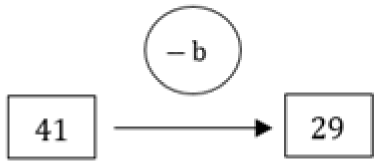
Quadro 11: Representações da classe transformação positiva, com a transformação desconhecida
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

[8] Conforme Verganud, o cálculo relacional refere-se às operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas (MAGINA *et al*., 2008).

<u>Classe 4:</u> Transformação negativa com a transformação desconhecida

Nessa classe, conhecendo o estado inicial (a) e o estado final (c), obtemos uma transformação negativa (b). Como o estado final (c) é menor que o estado inicial (a), a transformação (b) é negativa.

Exemplo 4: "Paulo acabou agora um jogo de bolinhas de gude. Ele tinha 41 bolinhas antes de jogar. E agora ele tem 29. Quantas bolinhas ele perdeu?" (VERGNAUD, 2009*a*, p. 208).

Esquema sagital	Equação
	$41 + (-b) = 29$ $b = 41 - 29$ $b = 12$

Quadro 12: Representações da classe transformação negativa, com a transformação desconhecida
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

Conforme Vergnaud (2009*a*), o cálculo relacional que implica na resolução dos problemas dos exemplos 3 e 4 é mais complexo, porque são dados os estados inicial e final e busca-se pelas transformações. Para a resolução desses problemas há dois principais procedimentos, sendo eles: o procedimento de complemento[9] e o procedimento de diferença[10].

O procedimento de complemento consiste em buscar a transformação sem fazer a subtração, o que é preciso acrescentar ou retirar do estado inicial para chegar ao estado final. Esse procedimento só é possível com números pequenos, aqueles que se prestam a um cálculo mental e quando a transformação é positiva.

Vergnaud (1996*a*) apresenta um teorema em ação referente ao conjunto complementar: se B está contido em A, então o cardinal de B é menor ou igual ao cardinal de A.

Santana (2010), ao analisar os esquemas de resolução das situações-problema de composição de medidas e transformação de medidas de 98 estudantes do 3º ano

[9] Iezzi e Murakami (1985, p. 33) definem o conjunto complementar do seguinte modo: "Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação à A o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

[10] Os mesmos autores definem a diferença entre conjuntos da seguinte forma: "Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B" (IEZZI; MURAKAMI, 1985, p. 33).

do Ensino fundamental, identificou que 20 estudantes mobilizaram invariantes operatórios relacionados ao conjunto complementar, sendo o conceito em ação o conjunto complementar e o teorema em ação “[...] o complementar B em relação a A unido a B é igual a A [...]” (SANTANA, 2010, p. 258).

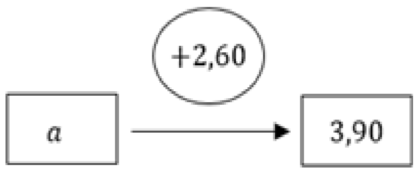
O procedimento de diferença consiste em buscar, pela subtração entre os estados final e inicial, o valor da transformação. O procedimento de diferença permite ao aluno raciocinar sobre a transformação nas relações que unem estado final e inicial, e calcular a subtração entre os estados final e inicial.

O valor absoluto da transformação não é obtido da mesma maneira quando a transformação é positiva e negativa. No exemplo 3, a transformação positiva pode ser obtida pela equação $|\ b\ | = c - a,$ enquanto no exemplo 4, a transformação negativa pode ser obtida pela equação $|\ b\ | = a - c$.

<u>Classe 5:</u> *Transformação positiva com o estado inicial desconhecido*

Nessa classe, conhecendo o estado final (c) e a transformação positiva (b), obtemos o estado inicial (a).

Exemplo 5: “Henrique acaba de achar R$ 2,60 na calçada. Ele os colocou no seu moedeiro. Ele tem agora, em tudo R$ 3,90. Quanto dinheiro ele tinha em seu moedeiro antes do achado?” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 208).

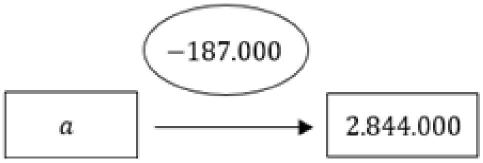
<table>
<tr><th>Esquema sagital</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$a + (+2{,}60) = 3{,}90$
$a = 3{,}90 - 2{,}60$
$a = 1{,}30$</td></tr>
</table>

Quadro 13: Representações classe transformação positiva, com o estado inicial desconhecido
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

<u>Classe 6:</u> *Transformação negativa com o estado inicial desconhecido*

Nessa classe, conhecendo o estado final (c) e a transformação negativa (b), obtemos o estado inicial (a).

Exemplo 6: “Em 1974, a população de Paris era de 2.844.000 habitantes; em cinco anos a cidade havia perdido 187.000 habitantes. Quantos habitantes Paris tinha em 1969?” (VERGNAUD, 2009*a*, p. 209).

Esquema sagital	Equação
	$a + (-187.000) = 2.844.000$ $a = 2.844.000 + 187.000$ $a = 3.031.000$

Quadro 14: Representações classe transformação negativa, com o estado inicial desconhecido
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

O cálculo relacional que implica na solução dos problemas dos exemplos 5 e 6 é considerado, por Vergnaud, ainda mais complexo, porque a solução canônica implica na inversa da transformação direta. Assim, ao estado final é aplicado uma transformação inversa, portanto, é preciso aplicar $-b$ a c para encontrar a. Explicando de outra maneira, se uma diminuição faz passar do estado inicial ao estado final, então um aumento faz passar do estado final ao estado inicial. Vergnaud (2007, p. 7) apresenta esse teorema em ação da seguinte forma: $Se\ F = T\ (I), então\ I = T^{-1}\ (F)$.

Ainda, para resolução dos problemas dos exemplos 5 e 6, pode-se utilizar o procedimento de complemento e o procedimento de estado inicial hipotético, que consiste em formular uma hipótese sobre determinado estado inicial, aplicar-lhe uma transformação direta para resultar no estado final, e corrigir a hipótese, caso não chegue ao estado final dado no problema.

A pesquisa realizada por Magina *et al.* (2008), com 782 crianças, mostra que mais de 80% dos alunos da 4ª série (atual 5º ano) têm sucesso com problemas de transformação, com o estado inicial desconhecido.

Segundo Magina *et al.* (2008, 2010), nos problemas de transformação de medidas, as palavras-chave (ganhar, perder, doar, receber etc.) conduzem o aluno a escolher qual operação ele deve utilizar para resolver a situação. Assim, essas palavras podem tanto facilitar quanto dificultar a resolução, pois as ações de ganhar nem sempre significam adição, e de perder nem sempre significam subtração.

Magina *et al.* (2008; 2010) mostram que as crianças têm menos sucesso ao resolver os problemas de transformação, quando no enunciado tem a palavra-chave que conduz à operação contrária ao que se espera na resolução. Logo, o uso da palavra-chave não pode ser enfatizado na escola como critério para escolha da operação a ser utilizada para resolução do problema, em vez da interpretação da situação.

2.3 Campo conceitual das estruturas multiplicativas

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, segundo Vergnaud (1993), refere-se a um conjunto de situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação entre elas, o conjunto de conceitos e teoremas associados à multiplicação/divisão. Dentre os conceitos envolvidos nas situações multiplicativas, citamos: "[...] fração, função linear, bilinear e não linear, composição de funções lineares, razão, taxa, proporção, análise dimensional, combinação, produto cartesiano, área, volume, isomorfismo, entre outros" (GITIRANA *et al*., 2014, p. 24).

Segundo Vergnaud (2009*a,* p. 260), "Numerosas classes de problemas podem ser identificadas segundo a forma da relação multiplicativa, segundo o caráter discreto ou contínuo das quantidades em jogo, segundo as propriedades dos números utilizados etc.".

Para os problemas de estruturas multiplicativas, Vergnaud (1983; 1996*a*; 2009*a*) estabeleceu cinco tipos de relações: único espaço de medida, produto de medidas, isomorfismo de medidas, proporção múltipla e função n-linear. Esses tipos de relações multiplicativas são apresentas por Gitirana *et al.* (2014) com as seguintes nomenclaturas: comparação multiplicativa, produto cartesiano, proporção simples, proporcionalidade múltipla e função bilinear.

As situações-problema de comparação multiplicativa e produto cartesiano são relações ternárias que ligam três elementos entre si; e as situações-problema de proporção simples, proporcionalidade múltipla e função bilinear são relações quaternárias que ligam quatro elementos entre si.

Para esta pesquisa, utilizamos as situações-problema envolvendo a relação quaternária de proporção simples ou isomorfismo de medidas, por isso selecionamos discorrer, em seguida, somente a respeito desta tipologia de problemas.

Problemas do tipo proporção simples

Os problemas do tipo *proporção simples* envolvem uma relação entre quatro quantidades: duas a duas de mesma natureza, sendo três quantidades conhecidas e uma desconhecida. A relação de proporção simples descreve um grande número de situações na vida comum e técnica, pois os elementos colocados em relação podem ser de naturezas diferentes, por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, durações e distâncias (VERGNAUD, 1983; 2009*a*).

Essa relação quaternária permite gerar quatro classes de problemas: proporção simples um para muitos; proporção simples partição; proporção simples cota; e proporção simples quarta proporcional, que variam de acordo com a quantidade desconhecida. Nos problemas de proporção simples um para muitos, partição e cota, uma dessas quantidades é igual a um.

Para distinguir essas classes de problemas, Vergnaud (1983, 1996*a*) propõe os seguintes esquemas sagitais: M_1 e M_1 representam quantidades/medidas de grandezas distintas; x representa a quantidade desconhecida (incógnita); a, b, c representam as quantidades conhecidas e distintas.

um para muitos	
M_1	M_2
1 →	a
b →	x

partição	
M_1	M_2
1 →	x
a →	b

cota	
M_1	M_2
1 →	a
x →	b

quarta proporcional	
M_1	M_2
a →	b
c →	x

Quadro 15: Esquemas sagitais das classes de proporção simples
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1996*a*).

Vergnaud (1996*a*) define as classes de problemas de acordo com a posição da quantidade/medida desconhecida, porque conforme a posição da medida desconhecida, a solução do problema pede uma multiplicação ou divisão. Logo, a solução dos problemas das classes de proporção simples um para muitos e quarta proporcional pede uma multiplicação, e a solução dos problemas das classes de partição e cota pede uma divisão.

Gitirana *et al.* (2014), a partir de estudos respaldados pela TCC e de resultado de pesquisa realizadas com alunos, realizaram uma releitura das classes de estruturas multiplicativas, classificando-as de acordo com o nível de complexidade. As situações multiplicativas foram classificadas em protótipo e extensões, assim como as situações aditivas também foram classificadas deste modo por Magina *et al*. (2008).

Nos problemas de proporção simples, os níveis de complexidade variam de três maneiras diferentes: os problemas de proporção simples um para muitos e partição são classificados como protótipos; os problemas de proporção simples do tipo cota são caracterizados como de 1ª extensão; e os problemas de proporção simples do tipo quarta proporcional são classificados como 2ª extensão (GITIRANA *et al.*, 2014).

Para Gitirana *et al.* (2014), essa classificação busca contribuir com os professores para que tenham expectativas mais reais do nível de complexidade exigido dos alunos na resolução de problema e, assim, saber quais situações trabalhar e o que esperar dos estudantes ao longo dos anos de escolaridade.

A seguir, para cada classe de problemas de proporção simples, apresentamos sua descrição, um exemplo e suas representações na forma de esquema e equação.

<u>*Classe 1:*</u> *Proporção simples do tipo um para muitos*

Nessa classe, o valor unitário é conhecido e deseja-se saber o valor da segunda grandeza da mesma natureza.

Exemplo 1: “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGNAUD, 2009a, p. 239).

Esquema sagital	Equação
$$\begin{array}{c\|c} pacotes & iogurtes \\ \hline 1 \longrightarrow & 4 \\ 3 \longrightarrow & x \end{array}$$	$3 \times 4 = x$ $12 = x$

Quadro 16: Representações da classe de proporção simples do tipo um para muitos
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1983).

Segundo Gitirana *et al.* (2014), quando o aluno resolve esse tipo de problema por multiplicação 3×4 ou pela soma repetida de $4 + 4 + 4$, utiliza o teorema em ação que corresponde à “propriedade linear da proporcionalidade”, aplicando a razão entre as medidas da mesma grandeza. A razão é obtida dividindo $\frac{3\,pacotes}{1\,pacote} = 3$.

E, considerando que $f(3)$, uma relação entre a quantidade de pacotes e a quantidade de iogurtes, é obtida ao multiplicar a razão pela quantidade de iogurtes em um pacote. No caso particular: $f(3) = f(3 \times 1) = 3 \times f(1) = 3 \times 4 = 12$. Portanto, tem-se o seguinte teorema matemático referente à propriedade linear da proporcionalidade: $f(kx) = kf(x)$, sendo $f(x)$ a relação entre duas grandezas, e k um número sem dimensão (um escalar). (VERGNAUD,1983, 1996*a*, 2007).

<u>*Classe 2:*</u> *Proporção simples do tipo partição*

Nessa classe, conhece-se o valor de muitos e deseja-se descobrir o valor unitário.

Exemplo 2: "Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?" (VERGNAUD, 2009*a*, p. 239).

<table>
<tr><th>Esquema sagital</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$garrafas$</th><th>$reais$</th></tr>
<tr><td>$1 \longrightarrow$</td><td>a</td></tr>
<tr><td>$3 \longrightarrow$</td><td>12</td></tr>
</table>
</td><td>$3 \times a = 12$
$a = \frac{12}{3}$
$a = 4$</td></tr>
</table>

Quadro 17: Representações da classe de proporção simples do tipo partição
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1983).

O procedimento para a resolução desse problema envolve "[...] considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao tamanho das partes, que o dividendo é representado pelo todo (valor/quantidade a ser dividida) e que o divisor refere-se [*sic*] ao número de partes em que o todo é dividido" (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 238).

<u>*Classe 3:*</u> *Proporção simples do tipo cota*

Nessa classe, tanto o valor de muitos, quanto o valor unitário são conhecidos e de mesma natureza; e deseja-se conhecer uma nova grandeza de outra natureza.

Exemplo 3: "Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?" (VERGNAUD, 2009*a*, p. 240).

<table>
<tr><th>Esquema sagital</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$pacotes$</th><th>$reais$</th></tr>
<tr><td>$1 \longrightarrow$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$x \longrightarrow$</td><td>12</td></tr>
</table>
</td><td>$x \times 4 = 12$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3$</td></tr>
</table>

Quadro 18: Representações da classe de proporção simples do tipo cota
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1983).

Segundo Gitirana *et al.* (2014), muitos alunos, mesmo antes de conhecer a multiplicação ou a divisão, realizam agrupamentos com as subtrações sucessivas para resolver esse tipo de problema.

Outro procedimento utilizado para resolver esse tipo de problema é pela operação de divisão, em que "[...] o quociente a ser obtido refere-se ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo é representado pelo todo e o divisor refere-se ao tamanho das partes (quota)" (LAUTERT; SPINILLO, 2002. p. 238).

<u>Classe 4:</u> Proporção simples do tipo quarta proporcional

Nessa classe, o que se deseja saber é o valor da segunda grandeza de mesma natureza, mas o valor correspondente à unidade não é informado e nem solicitado.

Exemplo 4: "Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos? (GITIRANA *et al*. 2014, p. 239).

<table>
<tr><th>Esquema sagital</th><th>Equação</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>$bolos$</th><th>$ovos$</th></tr>
<tr><td>$3 \longrightarrow$</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$6 \longrightarrow$</td><td>x</td></tr>
</table>
</td><td>
$3 \times x = 6 \times 15$
$x = \frac{90}{3}$
$x = 30$
</td></tr>
</table>

Quadro 19: Representações da classe de proporção simples do tipo quarta proporcional
Fonte: Adaptado de Vergnaud (1983).

A situação torna-se complexa quando as medidas das duas grandezas conhecidas não são múltiplas. Nesse caso, é comum o aluno encontrar o valor da unidade, como se resolvesse um problema de partição, e com a posse do valor da unidade, ele resolve o problema como se fosse uma situação de um para muitos (GITIRANA *et al.,* 2014).

Para resolução de problemas da classe quarta proporcional, pode-se utilizar a regra de três, que consiste em aplicar uma propriedade de proporcionalidade: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A BNCC (BRASIL, 2018) recomenda que essa regra não seja trabalhada nos anos iniciais.

Gitirana *et al.* (2014), ao aplicar um instrumento diagnóstico com 782 alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, concluíram que a partir do 4º ano os alunos já têm competência para solucionar problemas do tipo quarta proporcional.

Análises vertical e horizontal de um problema de proporção simples

Segundo Vergnaud (2009*a*), para problemas de proporção simples, há dois tipos de análises que contribuiem para a resolução do problema, a análise vertical (escalar) e a análise horizontal (função). Retornemos ao exemplo 1 para mostrar essas análises.

A análise vertical está centrada na noção operador escalar[11] (sem dimensão), a qual permite passar de uma linha à outra em elementos de mesma natureza.

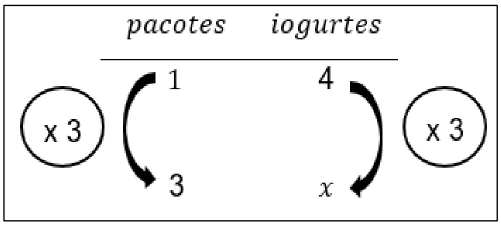


Figura 4: Análise vertical (escalar) da classe proporção simples
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

Os números 1 e 3 representam as quantidades de pacotes, e os números 4 e x representam as quantidades de iogurtes. Ambos são medidas, mas de natureza diferente. "[...] Os operadores verticais $(\times 3)$ são operadores sem dimensões, ou escalares, que permitem passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas" (VERGNAUD, 2009*a*, p. 244).

A análise horizontal está centrada na noção de operador função[12], que permite relacionar elementos de naturezas diferentes.

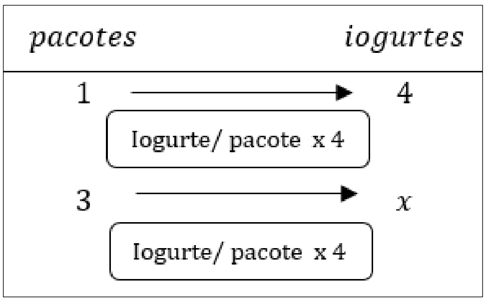


Figura 5: Análise horizontal (função) da classe proporção simples
Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009*a*).

[11] Nesta pesquisa, optamos em utilizar o termo razão em vez de operador escalar.
[12] Nesta pesquisa, optamos em utilizar o termo taxa em vez de operador função.

O operador função $(\times 4)$, que faz passar de 1 pacote a 4 iogurtes, é o mesmo que faz passar de 3 pacotes a x iogurtes. Segundo Vergnaud (2009*a*), esses operadores horizontais representam funções e expressam a passagem de uma categoria de medidas à outra, de onde o emprego de uma forma verbal expressa uma relação: iogurte por pacote = iogurte/pacote.

Para verificar a análise vertical e horizontal, Vergnaud (2009*a*) utiliza outra análise própria da relação quaternária, denominada *análise dimensional*.

Na análise vertical, temos que x iogurtes estão para 4 iogurtes, assim como 3 pacotes estão para 1 pacote.

A equação correspondente é:

$$\frac{x\ iogurtes}{4\ iogurtes} = \frac{3\ pacotes}{1\ pacote}$$

Multiplicando os dois membros da equação por 4 iogurtes e simplificando as dimensões, temos:

$$x\ iogurtes = \frac{3\ \cancel{pacotes}}{1\ \cancel{pacote}} \times 4\ iogurtes$$

Eliminamos o denominador igual a 1.

$$x\ iogurtes\ \ = 3 \times 4\ iogurtes$$

Assim, obtemos a primeira forma empregada para encontrar o valor de x.

Na análise horizontal, temos que x iogurtes estão para 3 pacotes, assim como 4 iogurtes estão para 1 pacote.

A equação correspondente é:

$$\frac{x\ iogurtes}{3\ pacotes} = \frac{4\ iogurtes}{1\ pacote}$$

Multiplicando os dois membros da equação por 3 pacotes, e simplificando as dimensões, temos:

$$x\ iogurtes = \frac{4\ iogurtes}{1\ \cancel{pacote}} \times 3\ \ \cancel{pacotes}$$

Eliminamos o denominador igual a 1.

$$x\ iogurtes\ \ = 3 \times 4\ iogurtes$$

Logo, obtemos outra forma empregada para encontrar o valor de x.

A análise horizontal é mais complexa, pois implica não somente na noção de relação numérica, mas também aquela de quociente de dimensões, nesse caso, iogurtes por pacote.

Teoremas em ação associados às propriedades isomórficas da função linear

Na resolução de problemas do tipo proporção simples, os alunos manifestam naturalmente teoremas em ação associados às seguintes propriedades isomórficas da função linear:

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$
$$f(x - x') = f(x) - f(x')$$
$$f\ (kx) = kf(x)$$
$$f(kx + kx') = kf(x) + kf(x')$$

Ainda, os alunos mobilizam como teorema em ação a propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (VERGNAUD, 1983; 1996*a*; 2007):

$$f\ (x) = ax$$
$$x = \frac{f(x)}{a}$$

Lima *et al.* (2016, p. 95) apresentam as propriedades isomórficas da função linear ao mencionarem o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, cujo enunciado é:

> Seja $f: R \to R$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:
> (1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
> (2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
> (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Esses teoremas em ação formados pelas propriedades isomórficas da função linear, apresentados por Vergnaud (1983; 1996*a*; 2007) deram respaldo para o desenvolvimento da análise desta pesquisa, no que se refere aos possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos.

A seguir, apresentamos uma discussão a respeito dos problemas mistos que serviu de base para a organização do instrumento desta pesquisa.

2.4 Problemas mistos

Para Vergnaud (2009*a*), os problemas complexos são problemas aritméticos constituídos por várias relações e vários elementos, entre eles, os problemas que comportam somente relações aditivas; os problemas que comportam somente relações multiplicativas; e os problemas mistos, que envolvem relações de tipo multiplicativo (multiplicação e divisão) e relações de tipo aditivo (adição e subtração) simultaneamente.

Os problemas mistos carecem de interpretações para que os alunos identifiquem as relações existentes entre os elementos do campo multiplicativo e do campo aditivo e, assim, possam desenvolver esquemas que possibilitem a resolução da situação proposta.

O pesquisador estabeleceu algumas informações que devem guiar a ação do professor para que o ensino por meio de problemas complexos seja eficaz: fazer a criança formular as perguntas que tenham sentido em relação ao enunciado; separar as informações úteis e inúteis; representar vários caminhos para encontrar a solução e fazer estabelecer elos entre elas; em caso de insucesso, recorrer a uma reconstrução material e gesticulada da situação dada no enunciado (VERGNAUD, 2009*a*). Além disso, Vergnaud (2009*a*) recomenda o trabalho coletivo, para que esquemas sejam elaborados de forma colaborativa entre professores e alunos.

Identificamos algumas pesquisas que contemplam problemas mistos nos anos iniciais (PAVAN, 2010; TEIXEIRA, 2016; MAGINA; PORTO, 2018; CERON, 2019), embora não deixem explícito o termo *problemas mistos*. A Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2018) menciona o trabalho a ser realizado com problemas aditivos e multiplicativos nos anos iniciais. Os livros didáticos Ápis Matemática, propostos aos anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentam problemas mistos para os alunos resolverem (DANTE, 2017; RODRIGUES; REZENDE, 2019*;* 2021).

Em uma investigação preliminar (RODRIGUES; REZENDE, 2019), foi proposto que quatro problemas mistos, retirados da coleção de livros didáticos Ápis Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, fossem resolvidos por 22 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Identificamos que os alunos apresentam conhecimentos aritméticos que possibilitam resolvê-los, mas mostraram que não estavam habituados com esse tipo de problema, ao apresentarem dificuldades para estabelecer relações entre os dados do enunciado, o que implicou em cálculos e resultados equivocados.

Na pesquisa de Miranda (2019) foram estabelecidas, *a priori,* 30 possibilidades de classes para os problemas mistos, com base nas classes de problemas dos Campos Aditivo e Multiplicativo propostos por Vergnaud (2009*a*). A autora também analisou os problemas propostos em livros didáticos de Matemática, sendo dois do 9º ano do Ensino Fundamental e dois do 1º ano do Ensino Médio, com a finalidade de identificar algumas dessas classes, e concluiu que as situações-problema relacionadas ao conceito de função afim são passíveis de serem analisadas segundo problemas mistos e problemas multiplicativos. Para cada classe de problema identificada nos livros didáticos de Matemática, a autora apresenta uma expressão analítica da função correspondente, como apresentado no Quadro 20.

Categoria	Expressão analítica
Proporção simples	$y = ax$
Produtos de medidas	$y = ax$
Composição de medidas	$y = ax$ ou $y = \pm ax \pm b$
Proporção simples e composição de medidas	$y = ax \pm b$
Proporção simples e transformação de medidas	$y = b \pm ax$
Comparação multiplicativa e composição de medidas	$y = ax + b$
Comparação multiplicativa e transformação de medidas	$y = ax$
Proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas	$y = ax + b$
Comparação multiplicativa e proporção simples	$y = ax$

Quadro 20: Expressão analítica resultante do tipo de relação
Fonte: Miranda (2019, p.148).

Dentre as classes de problemas mistos estabelecidas e identificadas por Miranda (2019) e por Rodrigues e Rezende (2021), descrevemos a seguir a classe de *proporção simples e transformação de medidas*, tipologia adotada para os problemas que compõem o instrumento de pesquisa da presente investigação.

Classe: Proporção simples e transformação de medidas

A classe de problema misto do tipo *proporção simples e transformação de medidas* é formada por uma relação quaternária de proporção simples, do campo multiplicativo, e por uma relação ternária de transformação de medidas, do campo aditivo.

Miranda (2019) estabeleceu e identificou essa classe nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio; e Rodrigues e Rezende (2021), na coleção Ápis Matemática dos anos iniciais (DANTE, 2017).

Para estabelecer as possibilidades de subclasses para problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas,* foram consideradas as quatro variações da classe proporção simples combinadas com as seis variações da classe transformação de medidas, o que possibilitou a formação de 24 subclasses, conforme apresentado no Quadro 21.

<table>
<tr><th>Campo multiplicativo</th><th>Campo aditivo</th></tr>
<tr><td>Proporção simples um para muitos.</td><td rowspan="4">Transformação positiva, com o estado inicial desconhecido.
Transformação positiva, com a transformação desconhecida.
Transformação positiva, com o estado final desconhecido.
Transformação negativa, com o estado inicial desconhecido.
Transformação negativa, com a transformação desconhecida.
Transformação negativa, com o estado final desconhecido.</td></tr>
<tr><td>Proporção simples partição.</td></tr>
<tr><td>Proporção simples cota.</td></tr>
<tr><td>Proporção simples quarta proporcional.</td></tr>
</table>

Quadro 21: Subclasses de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação
Fonte: Autora.

Na sequência, apresentamos a análise de um problema misto pertencente à subclasse *proporção simples um para muitos e transformação negativa com o estado final desconhecido*, que foi extraído do livro didático Ápis Matemática proposto para o 4º ano do Ensino Fundamental (Quadro 22).

Em seis caixas há 300 clipes. Marcelo comprou 3 caixas de clipes e já usou 30 clipes. Quantos clipes ele ainda tem?

Quadro 22: Problema misto do tipo proporção simples e transformação de medidas
Fonte: Dante (2017, p. 198).

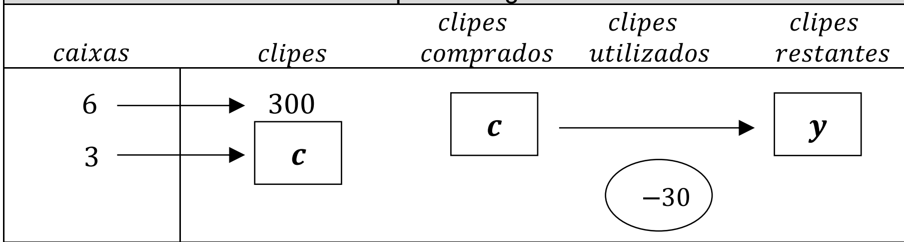
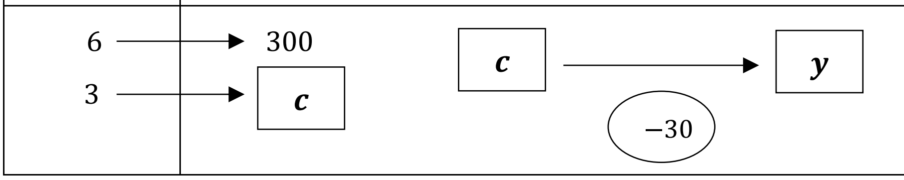
Para analisar as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado desse problema, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado, assim como a pergunta final (designada por a), como sugerido por Vergnaud (2009*a*, p. 289).

Tabela 1: Correspondência entre os dados do enunciado do problema misto

$caixas$	$clipes$	$clipes$ $comprados$	$clipes$ $utilizados$	$clipes$ $restantes$
6	300	$\boxed{\boldsymbol{c}}$	30	$\boxed{\boldsymbol{y}}$
3	$\boxed{\boldsymbol{c}}$			

Fonte: A autora.

Para resolver esse problema, primeiramente é necessário determinar a quantidade de clipes em 3 caixas. Para isso, considera-se a relação quaternária de *proporção simples do tipo quarta proporcional*. Assim, 6 caixas estão relacionadas a 300 clipes e 3 caixas estão relacionadas a c clipes. Diante do resultado da quantidade de clipes em 3 caixas, podemos encontrar a quantidade de clipes restantes por meio de uma relação ternária de *transformação de medidas*, cujo estado inicial corresponde à quantidade de clipes em 3 caixas; a transformação diz respeito a 30 clipes utilizados; e deseja-se descobrir o estado final, a quantidade de clipes restantes. Para representar essas relações propõe-se o seguinte esquema sagital e equação, baseado nos esquemas propostos por Vergnaud (2009*a*) para os campos aditivo e multiplicativo e na pesquisa de Miranda (2019).

Esquema sagital	Equação
	$3 \times \frac{300}{6} = c$ $150 = c$
	$150 - 30 = y$ $120 = y$

Quadro 23: Representações da classe de proporção simples e transformação de medidas
Fonte: Autora.

A equação correspondente ao problema proposto é: $3 \times \frac{300}{6} - 30 = y$.

Nossas análises mostram que essa classe possibilita a maior variedade de subclasses que podem ser modeladas por uma equação, considerando o contexto dos anos iniciais. Portanto, essa classe possibilita a proposição de problemas com estruturas diferentes entre si, permitindo aos alunos a manifestação de diferentes esquemas, conceitos e teoremas em ação e maneiras de representá-los.

Como "a relação de proporcionalidade é um caso específico da relação funcional" (TINOCO, 2002, p. 45), na resolução de problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas,* os alunos podem mobilizar conceitos em ação e teoremas em ação associados ao conceito de função, mesmo que implicitamente.

No próximo capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento desta pesquisa, bem como o problema, objetivo geral e o instrumento de pesquisa.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são descritos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento desta investigação. Apresentam-se o problema de pesquisa, os objetivos, a abordagem de pesquisa, os sujeitos colaboradores e as respectivas instituições de ensino. Também se demonstram a produção de dados, uma síntese da análise de livros didáticos, o estudo piloto, os critérios para a elaboração do instrumento de pesquisa, a análise do instrumento de pesquisa e os pressupostos estabelecidos para as análises das resoluções dos alunos.

3.1 Problema de pesquisa

A partir das justificativas e da fundamentação teórica apresentadas nos capítulos precedentes, a presente pesquisa foi norteada pela seguinte questão: *Que invariantes operatórios associados ao conceito de função são mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas?*

3.2 Objetivos

Objetivo geral

Com o intuito de responder ao problema de pesquisa, estabeleceu-se como objetivo geral *analisar invariantes operatórios associados ao conceito de função* mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas.*

Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, três objetivos específicos foram constituídos:

- ✓ estabelecer as subclasses da classe *proporção simples e transformação de medidas* para problemas mistos;

- ✓ analisar os esquemas desenvolvidos pelos sujeitos da pesquisa na resolução de problemas mistos; e
- ✓ investigar a mobilização das ideias-base de função.

3.3 Abordagem de pesquisa

Procurando atingir os objetivos propostos, foi realizada uma pesquisa qualitativa, de caráter interpretativo, permitindo que o problema de pesquisa fosse investigado de forma não só a descrever os invariantes operatórios, mas interpretá-los e analisá-los.

Bogdan e Biklen (1994) identificam cinco características fundamentais na investigação qualitativa: o contato do investigador com o ambiente natural contribui para compreensão dos dados[13]; é descritiva, o que permite o registro dos dados e a disseminação dos resultados; o investigador interessa-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados; os dados são analisados de forma indutiva; e o sentido que os participantes atribuem a suas experiências tem importância fundamental.

Assim, podemos considerar que o estudo das resoluções escritas dos alunos e das transcrições do diálogo final com a pesquisadora contêm uma interpretação subjetiva por parte do pesquisador, que juntamente com a fundamentação teórica permite estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo.

3.4 Os sujeitos colaboradores da pesquisa

Devido ao objetivo geral desta pesquisa, os sujeitos colaboradores, incluindo aqueles que participaram do estudo piloto, foram 18 alunos de escolas públicas brasileiras que frequentavam o 5º ano do Ensino Fundamental. Nesse nível de ensino, os alunos possuem a idade entre 10 e 11 anos.

Para o estudo principal participaram 12 alunos, que foram convidados pelos seus professores dentre aqueles de desempenho mediano em Matemática, ou seja, nem com alto e nem com baixo desempenho.

---

[13] "Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

A escolha pelo 5º ano do Ensino Fundamental se deu pelo fato de os alunos estarem frequentando o último nível de escolaridade dos anos iniciais e em fase de consolidação de conhecimentos referentes aos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, conforme constatado nas pesquisas de Silva (2021), Rezende e Rodrigues (2019), Pavan (2010), e com o previsto pela BNCC (BRASIL, 2018).

Conforme mencionado na BNCC (BRASIL, 2018), a expectativa é que, no 5º ano, os alunos resolvam problemas com diferentes ideias da adição e da multiplicação e envolvendo números naturais e números racionais, cuja representação decimal é finita. Contudo, essa competência e outras competências previstas pela BNCC podem não ter sido desenvolvidas pelos alunos, pois devido à pandemia da Covid-19, do dia 23 de março de 2020 à 26 de julho de 2021, as aulas presenciais foram suspensas e os alunos tiveram aulas de modo remoto. A resolução pelos alunos do instrumento de pesquisa ocorreu nesse período, no mês de junho de 2021.

3.5 As instituições de ensino

Com o objetivo de realizar uma pesquisa que não representasse especificamente uma realidade escolar, fez-se a opção por diversificar as escolas em que os sujeitos colaboradores estão vinculados. Participaram desta pesquisa alunos de quatro escolas públicas, localizadas em diferentes regiões de uma cidade do interior do Paraná, sendo três alunos por escola. Na Figura 6 mostra-se a localização de cada escola participante da pesquisa, representadas pelos símbolos de localização em vermelho, com um chapéu branco ao meio.

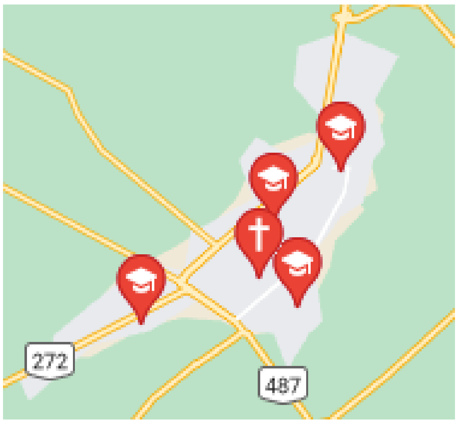


Figura 6: Localização das quatro escolas públicas brasileiras
Fonte: *Google Maps.*

No ano de 2020, os alunos dessas quatro escolas ficaram em ensino remoto por causa da pandemia de Covid-19. Eles foram atendidos por meio do conteúdo disponibilizado online, por meio de vídeos, tendo como principal recurso tecnológico o celular; e pedagógico, o livro didático e as atividades impressas buscadas por seus pais na escola. No primeiro semestre do ano de 2021, ainda no ensino remoto, foram acrescentadas as aulas via *Google Meet* para os alunos que tinham acesso à internet, mas com o tempo de aula reduzido. A partir do dia 26 de julho de 2021, essas escolas aderiram ao ensino híbrido, que consiste numa aprendizagem presencial e remota, permitindo que o aluno estude uma semana na escola e uma semana em casa. Porém, os pais dos alunos podiam optar entre o ensino remoto e híbrido.

3.6 A produção dos dados

Em conformidade com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, duas cópias do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (APÊNDICE A) e do Termo de Assentimento (APÊNDICE B), foram entregues aos responsáveis pelos alunos e aos alunos, respectivamente, solicitando suas assinaturas, para depois realizarmos a produção de dados. Esses termos contêm as explicações éticas, a finalidade da pesquisa e os procedimentos que foram realizados com as crianças, incluindo a necessidade das gravações de vídeo.

No período da produção de dados, no mês de junho de 2021, devido à pandemia de Covid-19, as instituições de ensino estavam fechadas para atendimento presencial. Neste contexto, a pesquisadora entrou em contato com a direção e as professoras das escolas pelo celular, e conversou a respeito da pesquisa. Essas professoras aceitaram colaborar com a pesquisa e prontamente entraram em contato com os pais dos alunos, que se disponibilizaram a participar desta pesquisa. Na sequência, as professoras passaram o número do celular do responsável por cada aluno para a pesquisadora.

A pesquisadora entrou em contato pelo celular com cada responsável pelo aluno, explicou a respeito da pesquisa e marcou o dia e o horário para levar os termos de consentimento e assentimento e as folhas com os espaços para a resolução de cada problema misto (APÊNDICE E). No dia marcado, a pesquisadora foi de máscara até a frente da residência de cada aluno, tomando os cuidados necessários de prevenção do Covid-19, entregou uma pasta com os termos e as folhas para anotar as resoluções, explicou ao aluno como seria o momento de resolução das situações e agendou o dia e o horário.

Os dados foram produzidos a partir da resolução pelos alunos de quatro problemas mistos, que aconteceu em um único encontro, no mês de junho de 2021, para 12 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Os encontros entre pesquisadora e cada aluno (individualmente) aconteceram por meio do aplicativo *Google Meet*, que é gratuito, da *Google*, que oferece chamadas de vídeo pelo celular ou computador. O link do *Google Meet* foi enviado no celular dos *pais e/ou responsável* pelo aluno por meio de mensagem pelo *WhatsApp.* Os pais e os alunos já conheciam o aplicativo *Google Meet*, pois os alunos estavam tendo aulas online por meio dele.

Para auxiliar as análises da pesquisa, optou-se por gravar os encontros em vídeo por meio de uma extensão gratuita do *Google Chrome* chamada de *Screencastify,* que possibilitou à pesquisadora analisar as reações dos alunos durante a resolução de cada problema e transcrever o diálogo final com o aluno.

No momento dos encontros, foi solicitado aos alunos que pegassem a folha de papel entregue, borracha, lápis ou caneta para realizarem a resolução de cada situação e, ainda, foi explicado que eles poderiam resolver os problemas do modo que considerassem mais viável e pertinente, mas a pesquisadora não poderia ajudá-los.

Durante os encontros, os problemas mistos foram apresentados na seguinte ordem: fixamos o primeiro problema, sendo esse o mais fácil, conforme constatado no estudo piloto, e alternamos os outros três problemas mistos de seis modos diferentes, o que possibilitou a formação de 6 ordens diferentes, permitindo que cada 2 alunos resolvessem o problema em uma mesma ordem.

Cada situação-problema foi apresentada individualmente ao aluno na tela do celular ou computador por meio do aplicativo *Google Meet*. Diante da situação-problema, o aluno tentou resolvê-la. Após a resolução de uma situação-problema, o aluno informava que tinha concluído e então passávamos para a próxima situação-problema, até finalização da aplicação dos quatro problemas mistos.

Ao término da resolução, a pesquisadora pedia as fotos das resoluções de cada situação-problema, que foram enviadas pelo *WhatsApp* para a pesquisadora, assim garantindo que eles não fizessem alterações em suas resoluções para não interferir nos dados a serem analisados.

Na sequência, diante das resoluções dos problemas mistos, foi realizado um diálogo entre o aluno e a pesquisadora, com o intuito de auxiliar as análises e realizá-las do modo mais fiel possível. Nesse momento foi solicitado ao aluno que falasse como pensou para resolver cada situação-problema proposta, o que permitiu à pesquisadora acompanhar o raciocínio do aluno, sem corrigir as respostas dadas. Como são 12 alunos participantes, as transcrições dos diálogos foram realizadas na íntegra (APÊNDICE G).

A princípio, não se almejava realizar a produção de dados com os sujeitos colaboradores da pesquisa por meio do aplicativo *Google Meet*, mas nas escolas públicas, com aproximadamente 60 alunos e sem a parte do diálogo final. Entretanto, devido à pandemia do Covid-19, não se tinha previsão do retorno das aulas presenciais, então optou-se em realizar a produção dos dados de maneira online.

3.7 Síntese da análise dos problemas mistos em livros didáticos de Matemática

Considerando que o livro didático é o instrumento pedagógico mais utilizado pelos professores na condução do ensino e todos os alunos das escolas públicas brasileiras tem o direto de recebê-lo (MELO; LOPES; OLIVEIRA, 2017), fizemos uma análise da coleção de cinco livros didáticos Ápis Matemática (DANTE, 2017) destinada aos anos iniciais do Ensino Fundamental e adotado pelas escolas participantes desta pesquisa, com o intuito de identificar quais classes de problemas mistos (aditivos e multiplicativos) são contempladas nessa coleção.

Para identificar cada problema misto, analisamos as relações aditivas e as relações multiplicativas presentes no enunciado, representamos essas relações na forma de esquema sagital e equação, baseado em Vergnaud (1996*a*, 2009*a*) e Miranda (2019) para, então, apresentar a classificação para o referido problema.

Essa investigação mostrou a presença de quarenta e seis (46) problemas mistos, pertencentes a sete classes distintas, na coleção Ápis Matemática (DANTE, 2017). No Quadro 24, na próxima página, apresentamos cada classe de problema misto identificada na coleção, a quantidade de problemas mistos em cada ano escolar relacionadas à determinada classe, a quantidade total de problemas mistos por classe, e a quantidade total de problemas mistos por ano escolar.

Classificação	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Proporção simples e composição de medidas.	3	2	7	7	**19**
Proporção simples e transformação de medidas.	0	1	3	3	**7**
Proporção simples, composição e transformação de medidas	2	2	0	2	**6**
Comparação multiplicativa e transformação de medidas.	0	0	0	5	**5**
Comparação multiplicativa e composição de medidas.	0	2	2	0	**4**
Proporção simples, composição e comparação aditiva.	0	0	0	3	**3**
Produto de medidas e composição de medidas.	0	0	0	2	**2**
Total	**5**	**7**	**12**	**22**	**46**

Quadro 24: Classes e quantidade de problemas mistos presentes na coleção Ápis Matemática (2017)
Fonte: Rodrigues e Rezende (2021, p. 285).

As informações do Quadro 24 mostram que, no livro Ápis Matemática destinado ao 5º ano, foi identificada a maior quantidade e variedade de problemas mistos. Tal fato pode ocorrer por uma escolha do autor do livro, mas também pelo fato de que se espera que os alunos do quinto ano tenham habilidades necessárias para resolver esses tipos de situações-problema. Afinal, conforme a BNCC (BRASIL, 2018, p. 268), a expectativa é que, nos anos iniciais, os alunos apresentem a habilidade de resolver problemas, "[...] envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados".

Um exemplo de problema-misto pertencente à classe *proporção simples e transformação de medidas,* extraído do livro didático Ápis Matemática (DANTE, 2017, p. 198) proposto para o 4º ano do Ensino Fundamental, foi apresentado no capítulo 2.

Com a classificação dos problemas mistos constatamos, na obra, o predomínio de problemas mistos da classe *proporção simples e composição de medidas,* totalizando 19 problemas. Já a classe *produto de medidas e composição de medidas* foi a menos identificada, contendo apenas dois problemas em toda a obra. Tal fato revela pouco equilíbrio entre as diferentes classes de problemas mistos propostos na coleção, além do fato de diversas possibilidades de classes não terem sido contempladas, por exemplo, a classe *proporção simples e comparação aditiva*.

Defendemos a importância da proposição de problemas mistos desde os anos iniciais de escolarização, e argumentamos a favor da classificação desses problemas para que os professores possam ter ciência de sua diversidade, não apenas no que se refere ao contexto, mas principalmente em relação às suas estruturas. Destarte, cada classe de problemas possui estrutura própria que possibilita raciocínios, esquemas e representações diferentes a serem desenvolvidos pelos alunos no decorrer do processo escolar, em decorrência das situações vivenciadas.

Portanto, a análise dos problemas mistos presentes nos livros didáticos destinados aos anos iniciais auxiliou a pesquisadora na identificação e compreensão das classes propostas aos alunos, e a inferir que são poucas as situações mistas proporcionadas aos alunos em cada nível escolar. Com isso, os alunos dos anos iniciais não estão acostumados com esse tipo de situação-problema, o que pode levá-los a não estabelecer todas as relações envolvidas na situação proposta. Ainda, a análise dos problemas mistos deu respaldo para a elaboração do instrumento de pesquisa, ao contribuir com a escolha da classe de problemas e permitir observar a quantidade de questões por problema, o contexto e a magnitude dos números.

3.8 O estudo piloto

O estudo piloto teve como propósito verificar se os problemas mistos elaborados serviriam como instrumento de pesquisa para indicar os possíveis invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados pelos colaboradores da pesquisa.

Com esse propósito, no mês de agosto do 2020, realizamos um estudo piloto com 6 alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná, alunos da professora/pesquisadora, autora desta dissertação. A pesquisadora, sendo professora desses alunos, teve o contato facilitado com suas famílias, com a oportunidade de conversar pessoalmente para explicar sobre a pesquisa, momento oportuno em que eles estiveram na escola, pois estávamos no período da pandemia de Covid-19 e as aulas estavam acontecendo de maneira remota. Após o aceite de participação pelos pais e alunos, foram entregues os termos de consentimento e assentimento e agendado um horário para resolução dos problemas.

Para o estudo piloto foram utilizados oito problemas mistos (APÊNDICE C), elaborados a partir das seguintes subclasses.

Proporção simples um para muitos e transformação negativa, com o estado final desconhecido.
Proporção simples um para muitos e transformação positiva, com o estado inicial desconhecido.
Proporção simples partição e transformação negativa, com a transformação negativa desconhecida.
Proporção simples partição e transformação positiva, com o estado final desconhecido.
Proporção simples cota e transformação negativa, com a transformação negativa desconhecida.
Proporção simples cota e transformação positiva, com a transformação positiva desconhecida.
Proporção simples quarta proporcional e transformação negativa, com o estado final desconhecido.
Proporção simples quarta proporcional e transformação positiva, com o estado inicial desconhecido.

Quadro 25: Subclasses de problemas mistos utilizados no estudo piloto
Fonte: Autora.

Para a aplicação das situações-problema, consideramos as mesmas condições mencionadas anteriormente, a respeito da produção dos dados. Diante dos resultados prévios alcançados com os dados produzidos no estudo piloto, realizamos uma análise prévia dos esquemas e dos possíveis indicativos de invariantes operatórios associados ao conceito de função.

Após o estudo piloto foram feitas alterações nos enunciados de alguns problemas mistos em relação à coerência e aos valores numéricos, pois para os enunciados com números pequenos, os alunos estavam utilizando o cálculo mental, e alguns valores não estavam condizentes com a situação proposta.

Para compor o instrumento de pesquisa, selecionamos quatro situações-problema ao invés de oito, pois verificamos, com o estudo piloto, que os alunos mobilizaram invariantes operatórios semelhantes quando as subclasses dos problemas envolviam a mesma classe de proporção simples, e distintas classes de transformação de medidas ou distintas classes de proporção simples, e a mesma classe de transformação de medidas.

Na resolução dos problemas mistos do estudo piloto, os alunos manifestaram esquemas expressos pelas representações numérica (algoritmos) e pictórica (desenhos), e indicativos de invariantes operatórios, que não mencionamos nessa parte do texto, pois foram identificados no estudo principal.

3.9 Elaboração do instrumento de pesquisa

Para a elaboração do instrumento de pesquisa, foram levados em consideração os estudos preliminares sobre funções do primeiro capítulo; os pressupostos de Vergnaud, conforme os quais, para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações relacionadas a esse conceito ao longo do tempo; o nível de ensino correspondente ao 5º ano do Ensino Fundamental, com referência aos conteúdos e objetivos de aprendizagem propostos na BNCC; a identificação das características dos problemas aditivos, multiplicativos e mistos apresentados por Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019), dos problemas multiplicativos apresentados por Gitirana *et al.* (2014), e dos problemas mistos presentes na coleção Ápis Matemática do anos iniciais (DANTE, 2017); os diferentes contextos para os enunciados, de modo a criar um ambiente acolhedor e possibilitar ao aluno perceber que eles podem fazer parte do seu cotidiano; e o estudo piloto, que permitiu identificar quais dos problemas mistos elaborados seriam mais pertinentes para constituir o instrumento de pesquisa. Ainda, para elaboração dos problemas mistos, foram levados em consideração os valores da variável didática descritos a seguir.

3.9.1 Variável didática

A variável didática de um problema ou uma situação é aquela cujos valores são escolhidos pelo professor. A variável didática é um caso particular de variável cognitiva, pois mudança dos valores que lhe são atribuídos podem alterar "[...] o conhecimento necessário para a resolução de um problema e/ou os processos de aprendizagem" (ALMOULOUD, 2016, p. 121).

Os problemas mistos foram elaborados considerando como variável didática a classe de problemas *proporção simples e transformação de medidas* e seus respectivos valores, que são as quatro subclasses apresentadas no Quadro 26.

Proporção simples um para muitos e transformação negativa, com o estado inicial desconhecido.
Proporção simples partição e transformação negativa, com a transformação negativa desconhecida.
Proporção simples cota e transformação positiva, com a transformação positiva desconhecida.
Proporção simples quarta proporcional e transformação positiva, com o estado final desconhecido.

Quadro 26: Valores da variável didática: subclasses de problemas mistos
Fonte: Autora.

A escolha da variável didática, a classe *proporção simples e transformação de medidas* para compor o instrumento de pesquisa, aconteceu com base nos seguintes critérios: ser a classe mais simples para elaborar diferentes problemas mistos, pois as grandezas envolvidas nesses problemas podem ter suas medidas transformadas (aumentadas ou diminuídas); a noção de função ser introduzida a partir de situações envolvendo a proporcionalidade (BRASIL, 2018); estar intrinsecamente relacionada às pesquisas do GEPeDiMa, porque permite a modelação dos problemas mistos na forma analítica da função afim: $b \pm ax = y$, com a e b reais positivos (MIRANDA, 2019); a vasta possibilidade das subclasses, que podem gerar uma maior variedade de invariantes operatórios; estar presente nos problemas mistos de livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio (MIRANDA, 2019) e nos problemas mistos dos livros didáticos Ápis de Matemática elaborados para os anos iniciais do Ensino Fundamental (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

Dentre as 24 subclasses estabelecidas para a classe de problemas *proporção simples e transformação de medidas* (Quadro 21), selecionamos quatro subclasses (valores da variável didática) para elaboração dos quatro problemas mistos, conforme apresentado no Quadro 26. A seleção dos valores da variável didática aconteceu com base nos seguintes critérios: conter as situações das classes *um para muitos, partição, cota e quarta proporcional*, da classe de proporção simples combinados com a classe de transformação *positiva* ou *negativa;* e o termo desconhecido de cada subclasse corresponder a um dos elementos da equação $b \pm ax = y$, sendo b o estado inicial, a transformação negativa, x a transformação positiva e y o estado final.

3.10 Análise do instrumento de pesquisa

A presente subseção consiste na apresentação e análise dos quatro problemas mistos que compõem o instrumento de pesquisa. Para cada problema misto, apresentamos a variável didática e respectivos valores, e todos os problemas tiveram a mesma variável didática e mudaram apenas seus valores. Na sequência, apresentamos duas análises. A primeira consistiu na análise do enunciado do problema misto, com o objetivo de mostrar sua classificação e suas representações pelo esquema sagital e pela equação, estabelecidos a partir das classes, esquemas sagitais e equações propostos por Vergnaud (2009*a*) para os campos aditivo e multiplicativo, e com base na pesquisa de Miranda (2019), que investigou especificamente problemas mistos associados ao conceito de função afim.

A segunda consistiu na análise dos possíveis esquemas a serem apresentados pelos colaboradores desta pesquisa e das possíveis ideias-base de função: *correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização* e, a ideia *proporcionalidade* associada ao conceito de função, que podem ser mobilizadas pelos colaboradores. Apresentamos tais ideias de forma aleatória, pois segundo Silva (2021, p. 29) "[...] a compreensão de uma ideia base serve de degrau para a compreensão das demais, porém não exatamente de maneira linear e sequencial".

Problema misto 1:

O problema misto 1 foi constituído pela seguinte variável didática e respectivo valor:

- A classe proporção simples e transformação de medidas - a subclasse proporção simples um para muitos e transformação negativa com o estado inicial desconhecido.

Mariana tinha alguns ingressos para brinquedos de um parque de diversões para distribuir aos seus amigos. Cada um de seus 7 amigos recebeu 3 ingressos e, ainda, restaram 4 ingressos para Mariana. Quantos ingressos ela tinha antes da distribuição?

Para mostrar a subclasse a que pertence esse problema misto, analisamos as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado. Para isso, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por b), como sugerido por Vergnaud (2009*a*).

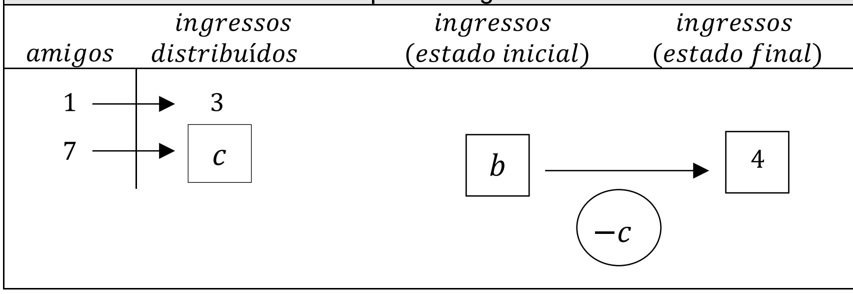
Tabela 2: Correspondência entre os dados do enunciado do problema misto 1

$amigos$	$ingressos$ $distribuídos$	$ingressos$ $(estado\ inicial)$	$ingressos$ $(estado\ final)$
1	3		
7	$\boxed{c}$	$\boxed{b}$	4

Fonte: A autora.

Para resolver esse problema misto, é necessário determinar quantos ingressos Mariana distribuiu. Para isso, considera-se a relação quaternária de *proporção simples do tipo um para muitos* entre a quantidade de amigos e a quantidade de ingressos distribuídos. Assim, 1 amigo está relacionado a 3 ingressos; e 7 amigos estão relacionados a c ingressos, primeira quantidade que se deseja descobrir. Na sequência, pretende-se determinar quantos ingressos Mariana tinha antes da distribuição. Então, utiliza-se uma relação ternária de *transformação de medidas*, e o estado inicial consiste em quantos ingressos Mariana tinha antes da distribuição; a transformação negativa diz respeito à quantidade de ingressos distribuídos; e o estado final consiste na quantidade de ingressos que sobraram.

Nessa subclasse, a transformação é um número relativo negativo, pois a relação estabelecida é a *quantidade de ingressos distribuídos por amigo*. Para representar essas relações, propõe-se o seguinte esquema sagital e equação, baseado em Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019):

Esquema sagital	Equação
	$b+(-c)=4$ $b+(-3\times7)=4$ $b-21=4$ $b=25$

Quadro 27: Representações da subclasse proporção simples um para muitos e transformação negativa com o estado inicial desconhecido
Fonte: Autora adaptado de Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Ao analisar a estrutura desse problema misto, consideramos que ele pertence à subclasse *proporção simples um para muitos e transformação negativa* com o estado inicial desconhecido. Segundo Miranda (2019), essa subclasse tem como característica ter um estado final que é transformado em um estado inicial, sendo o estado final uma medida conhecida e a *transformação negativa* uma medida desconhecida, resultado de uma relação quaternária de *proporção simples um para muitos.*

Possíveis esquemas de resolução

Esquemas (pertinentes para a situação)	
$amigos$ | $ingressos\ distribuídos$ razão $\times 7$ 1 | 3 razão $\times 7$ 7 | c $7 \times 3 = 21$ $21 + 4 = 25$ ou $7 \times 3 + 4 = 25$	Taxa $amigos \xrightarrow{\times 3} ingressos\ distribuídos$ 1 | 3 7 | c $3 \times 7 = 21$ $21 + 4 = 25$ ou $3 \times 7 + 4 = 25$
$1 \longrightarrow 3$ $2 \longrightarrow 6$ $3 \longrightarrow 9$ $4 \longrightarrow 12$ $5 \longrightarrow 15$ $6 \longrightarrow 18$ $7 \longrightarrow 21$ $21 + 4 = 25$	$3+3+3+3+3+3+3 = 21$ $21 + 4 = 25$ $3+3+3+3+3+3+3+4 = 25$
Esquemas (não pertinentes para a situação)	
$3 \times 7 = 21$ $7 + 3 + 4 = 14$	$3 \times 7 = 21$ $21 - 4 = 17$ (subtrair o estado final)

Quadro 28: Possíveis esquemas de resolução para o problema misto 1
Fonte: Autora.

Possíveis ideias associados ao conceito de função

- ✓ A ideia de *correspondência* pode ser identificada a partir do estabelecimento da correspondência entre a quantidade de amigos e a quantidade de ingressos distribuídos;
- ✓ A ideia de *dependência* pode ser estabelecida ao determinar que a quantidade de ingressos distribuídos depende da quantidade de amigos;
- ✓ A ideia de *variável* pode ser identificada ao apresentar uma variação do número de amigos e, consequentemente, do total de ingressos distribuídos;
- ✓ A ideia de *regularidade* pode ser identificada ao alterar a quantidade de amigos

de um em um, e a quantidade de ingressos distribuídos de três em três;

- ✓ A ideia de *generalização* pode ser identificada ao estabelecer que é possível encontrar a quantidade de ingressos distribuídos para qualquer quantidade de amigos multiplicando a quantidade de amigos pela taxa (3 ingressos por amigo);
- ✓ A ideia de *proporcionalidade* pode ser identificada ao manter a proporção 1:3 e/ou a partir do estabelecimento das seguintes relações matemáticas:
    - A quantidade total de ingressos distribuídos para *7* amigos é o mesmo que *7* vezes (razão) a quantidade de ingressos distribuídos para um amigo;
    - A quantidade total de ingressos distribuídos para 7 amigos é o mesmo que 3 ingressos por amigo (taxa) multiplicado por 7 amigos.

Problema misto 2:

O problema misto 2 foi constituído pela seguinte variável didática e respectivo valor:

- A classe proporção simples e transformação de medidas - a subclasse proporção simples quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido.

A piscina de Camila está com 400 litros de água e ela pretende enchê-la com uma torneira cuja vazão é de 20 litros de água a cada 5 minutos. Quantos litros de água terá a piscina após abrir a torneira por 15 minutos?

Para mostrar a subclasse a que pertence esse problema misto, analisamos as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado. Com esse objetivo, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por y), como sugerido por Vergnaud (2009*a*).

Tabela 3: Correspondência entre os dados do enunciado do problema misto 2

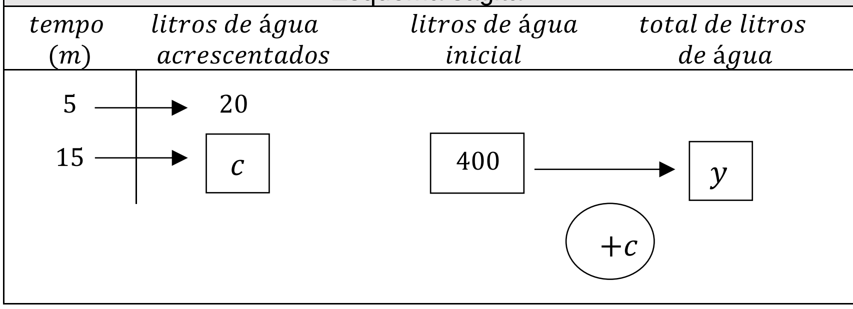
$tempo$ (m)	$litros\ de\ água$ $acrescentados$	$litros\ de\ água$ $inicial$	$total\ de$ $litros\ de\ água$
5	20		
15	$\boxed{c}$	400	$\boxed{y}$

Fonte: A autora.

Para resolver esse problema misto, primeiramente é necessário determinar a quantidade de litros acrescentados na piscina com 15 minutos de enchimento. Para isso, considera-se a relação quaternária de *proporção simples quarta proporcional* entre o tempo (minutos) e a quantidade de litros de água. Assim, em 5 minutos são acrescentados 20 litros de água à piscina, e deseja-se descobrir quantos litros de água são acrescentados na piscina em 15 minutos.

Diante desse resultado, pode-se determinar a quantidade de litros de água que a piscina terá com 15 minutos de enchimento. Para isso, utiliza-se uma relação ternária de *transformação de medidas*, cujo estado inicial consiste na quantidade de litros de água na piscina; a transformação positiva diz respeito à quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 15 minutos de enchimento; o estado final corresponde à quantidade total de litros de água na piscina com 15 minutos de enchimento.

Para representar essas relações, propõe-se o seguinte esquema sagital e a equação baseados Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Esquema sagital	Equação
	$400 + c = y$ $400 + (\frac{20}{5} \times 15) = y$ $400 + 60 = y$ $y = 460$

Quadro 29: Representações da subclasse proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido
Fonte: Autora, adaptado de Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Ao analisar a estrutura desse problema misto, concluímos que ele pertence à subclasse de *proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido*. Segundo Miranda (2019), essa subclasse tem como característica ter um estado inicial que é transformado em um estado final, sendo o estado inicial uma quantidade fixa e a transformação uma medida desconhecida, resultado de uma relação de proporção simples do tipo quarta proporcional.

Possíveis esquemas de resolução

<table>
<tr><th colspan="2">Esquemas (pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr>
<td>razão $\times 3$ $\begin{array}{c|c} tempo\ (min) & água\ (l) \\ \hline 5 & 20 \\ 15 & c \end{array}$ razão $\times 3$
$3 \times 20 = 60$
$400 + 60 = 460$
ou
$400 + 3 \times 20 = 460$</td>
<td>Taxa
$\times 4$
$\begin{array}{c|c} tempo\ (min) \longrightarrow & água\ (l) \\ \hline 5 & 20 \\ 15 & c \end{array}$
$20 \div 5 = 4$
$4 \times 15 = 60$
$400 + 60 = 460$</td>
</tr>
<tr><td>$400 + 3 \times 20 = 460$</td><td>$20 + 20 + 20 + 400 = 460$</td></tr>
<tr><td>$15 \div 5 = 3$
$3 \times 20 = 60$
$400 + 60 = 460$</td>
<td rowspan="2">$5 \longrightarrow 20$
$10 \longrightarrow 40$
$15 \longrightarrow 60$
$60 + 400 = 460$</td></tr>
<tr><td>$20 + 20 + 20 = 60$
$400 + 60 = 460$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Esquemas (não pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr><td>$15 \times 20 = 300$</td><td>$5 \times 20 = 100$</td></tr>
<tr><td>$3 \times 20 = 60$
(não somar o estado inicial)</td><td>$20 + 20 + 20 = 60$
(não somar o estado inicial)</td></tr>
</table>

Quadro 30: Possíveis esquemas de resolução para o problema misto 2
Fonte: Autora.

Possíveis ideias associados ao conceito de função

- ✓ A ideia de *correspondência* pode ser identificada a partir do estabelecimento da correspondência entre o tempo de enchimento e a quantidade de litros de água acrescentada na piscina;
- ✓ A ideia de *dependência* pode ser identificada ao determinar que a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende da relação entre o tempo que a torneira ficou aberta e a quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos;
- ✓ A ideia de *variável* pode ser identificada ao apresentar uma variação do tempo de enchimento e, consequentemente, da quantidade de litros de água acrescentados na piscina;

- ✓ A ideia de *regularidade* pode ser identificada ao alterar a quantidade de litros de água de 20 em 20 litros, e o tempo de enchimento de 5 em 5 minutos;
- ✓ A ideia de *generalização* pode ser identificada ao estabelecer que é possível encontrar a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em qualquer tempo multiplicando o tempo pela taxa (20 litros a cada 5 minutos); e
- ✓ A ideia de *proporcionalidade* pode ser identificada ao manter a proporção 5:20 e/ou a partir do estabelecimento das seguintes relações matemáticas:
    - A quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos é o mesmo que *3* vezes (razão) a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos;
    - A quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos é o mesmo que 4 litros por minuto (taxa) multiplicado por 15 minutos.

Problema misto 3:

O problema misto 3 foi constituído pela seguinte variável didática e respectivo valor:

- A classe proporção simples e transformação de medidas - a subclasse proporção simples partição e transformação negativa com a transformação desconhecida.

Pedro comprou 4 bolas de basquete iguais para doar a uma escola. Para pagar a loja, ele entregou R$ 200,00 e recebeu R$ 16,00 de troco. Quantos reais Pedro pagou em cada bola de basquete?

Para mostrar a subclasse a que pertence esse problema misto, analisamos as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado. Para isso, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por a), como sugerido por Vergnaud (2009*a*).

Tabela 4: Correspondência entre os dados do enunciado do problema misto 3

valor entregue ($R\$$)	*troco* ($R\$$)	*bola*	*valor pago por bola* ($R\$$)
		1	$\boxed{a}$
200	16	4	$\boxed{c}$

Fonte: A autora.

Para resolver esse problema misto, é necessário determinar o valor pago por 4 bolas. Para isso, considera-se a relação ternária de *transformação de medidas*, e o estado inicial corresponde ao valor de R$ 200,00 entregue para pagar as bolas; o estado final diz respeito ao troco de R$ 16,00; e deseja-se descobrir a transformação negativa, o valor pago por 4 bolas de basquete iguais. Nessa subclasse, a transformação é um número relativo negativo, pois a relação estabelecida é o *valor pago pelas bolas*.

Diante do resultado do valor de 4 bolas, podemos calcular o valor de uma bola de basquete por meio de uma relação quaternária de *proporção simples do tipo partição,* em que 1 bola está relacionada a a reais e 4 bolas estão relacionadas a 184 reais. Para representar essas relações, propõe-se o seguinte esquema relacional e a equação baseados em Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Esquema sagital				Equação
valor entregue ($R\$$)	*troco* ($R\$$)	*bola*	*valor pago por bola* ($R\$$)	$200+(-c)=16$ $200+(-4a)=16$ $4a=184$ $a=46$
$\boxed{200} \xrightarrow{-c}$	$\boxed{16}$	$1 \rightarrow$	$\boldsymbol{a}$	
		$4 \rightarrow$	$\boxed{\boldsymbol{c}}$	

Quadro 31: Representações da subclasse proporção simples do tipo partição e transformação negativa com a transformação negativa desconhecida
Fonte: Autora, adaptado de Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Ao analisar a estrutura desse problema misto, nota-se que ele pertence à subclasse *proporção simples do tipo partição e transformação negativa com a transformação negativa desconhecida,* e tem como característica descobrir o valor unitário de uma medida, sendo essa medida resultado de uma relação de transformação negativa, e o valor unitário resultado de uma relação de proporção simples do tipo partição.

Possíveis esquemas de resolução

<table>
<tr><th colspan="2">Esquemas (pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr><td>$200 - 16 = 184$
$bolas$ $valor\ pago\ (R\$$
razão $\div 4$ 1 a razão $\div 4$
4 184
$184 \div 4 = 46$</td><td>$200 - 16 = 184$
Taxa
$\times 46$
$bolas \longrightarrow valor\ pago\ (R\$)$
1 a
4 184
$\longleftarrow$
$\div 46$
$184 \div 46 = 4$</td></tr>
<tr><td>$200 - 16 = 184$
$184 \div 4 = 46$</td><td rowspan="2">$200 - 16 = 184$
$4 \longrightarrow 184$
$3 \longrightarrow 138$
$2 \longrightarrow 92$
$1 \longrightarrow 46$</td></tr>
<tr><td>$200 \div 4 = 50$
$16 \div 4 = 4$
$50 - 4 = 46$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Esquemas (não pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr><td colspan="2">$200 \div 4 = 50$
(dividir o valor entregue pelo número de bolas e não considerar o troco)</td></tr>
</table>

Quadro 32: Possíveis esquemas de resolução para o problema misto 3
Fonte: Autora.

Possíveis ideias associadas ao conceito de função

- ✓ A ideia de *correspondência* pode ser identificada a partir do estabelecimento da correspondência entre a quantidade de bolas e o valor pago;
- ✓ A ideia de *dependência* pode ser identificada ao determinar que o valor pago em cada bola depende do valor pago em 4 bolas;
- ✓ A ideia de *variável* pode ser identificada ao apresentar uma variação da quantidade de bolas e, consequentemente, do valor pago;
- ✓ A ideia de *regularidade* pode ser identificada ao alterar a quantidade de bolas de 1 em 1, e o preço 46 reais em 46 reais;
- ✓ A ideia de *generalização* pode ser identificada ao estabelecer que é possível encontrar o valor pago em uma bola dividindo o valor pago em x bolas pela

quantidade de bolas; e

- ✓ A ideia de *proporcionalidade* pode ser identificada a partir do estabelecimento da taxa de proporcionalidade - 46 reais por bola, o valor correspondente a unidade, ou do estabelecimento da razão 4 entre 1 e 4, e usar essa razão para descobrir qual o número que multiplicado por 4 dá 186.

Problema misto 4:

O problema misto 4 foi constituído pela seguinte variável didática e respectivo valor:

- A classe proporção simples e transformação de medidas - a subclasse proporção simples cota e transformação positiva com a transformação desconhecida.

Carlos quer comprar um celular que custa R$ 540,00. Ele já possui R$ 60,00, e decidiu economizar R$ 80,00 por mês. Em quantos meses Carlos terá o valor necessário para comprar o celular?

Para mostrar a subclasse a que pertence esse problema misto, analisamos as relações estabelecidas entre as medidas do enunciado. Para isso, foi organizada uma tabela para representar as informações dadas no enunciado e a pergunta final (designada por x), como sugerido por Vergnaud (2009*a*).

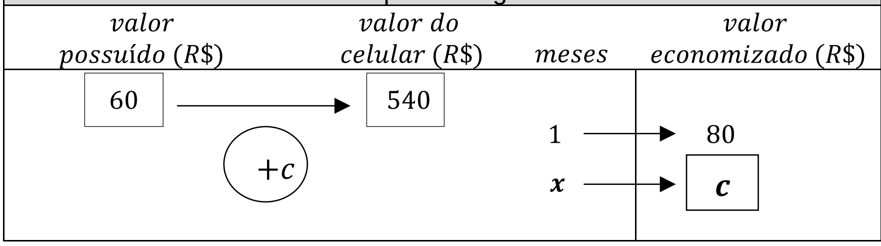
Tabela 5: Correspondência entre os dados do enunciado do problema misto 4

$valor\ possuído$	$valor\ do\ celular$	$meses$	$valor\ economizado$
		1	80
60	540	$\boxed{x}$	$\boxed{c}$

Fonte: A autora.

Para resolver esse problema misto, primeiramente é necessário determinar o valor economizado por Carlos. Para isso, considera-se uma relação ternária de *transformação positiva de medidas*, e o estado inicial consiste no valor que Carlos possui, de R$ 60,00; o estado final diz respeito ao valor do celular, de R$ 540,00; e deseja-se encontrar a transformação positiva, que corresponde ao valor economizado por Carlos em alguns meses.

Diante desse resultado, pode-se encontrar quantos meses do ano já se passaram para Carlos ter economizado um total de 480 reais, a partir de uma relação quaternária de *proporção simples do tipo cota*, em que x se refere a quantos meses do ano Carlos economizou $R\$\ 80{,}00$ e obteve $R\$\ 480{,}00$. Assim, em 1 mês o valor economizado é de $R\$\ 80{,}00$, e pretendemos encontrar quantos meses do ano Carlos levou para economizar o valor de $R\$\ 480{,}00$. Para representar essas relações, propõe-se o seguinte esquema relacional e equação, baseados em Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Esquema sagital	Equação
	$60 + c = 540$ $60 + (80\,x) = 540$ $80\,x = 480$ $x = 6$

Quadro 33: Representações da subclasse proporção simples do tipo cota e transformação positiva, com a transformação positiva desconhecida
Fonte: Autora, adaptado de Vergnaud (2009*a*) e Miranda (2019).

Ao analisar a estrutura desse problema misto, concluímos que ele pertence à subclasse de *proporção simples do tipo cota e transformação positiva com a transformação positiva desconhecida*, e tem como característica descobrir quantas cotas se pode obter com a quantidade dada, sendo essa quantidade dada resultado de uma transformação positiva de medidas, e a quantidade de cotas resultado de uma relação de proporção simples do tipo cota.

Possíveis esquemas de resolução

<table>
<tr><th colspan="2">Esquemas (pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr>
<td>$540 - 60 = 480$

razão $\times 6$ razão $\div 6$
<table><tr><th>$meses$</th><th>$valor$ $economizado$ $(R\$)$</th></tr><tr><td>$1$</td><td>$80$</td></tr><tr><td>$x$</td><td>$480$</td></tr></table>

$80 \times 6 = 480$
ou
$480 \div 80 = 6$</td>
<td>$540 - 60 = 480$

Taxa
$\times 80$
<table><tr><th>$meses$</th><th>$valor$ $(R\$)$</th></tr><tr><td>$1$</td><td>$80$</td></tr><tr><td>$x$</td><td>$480$</td></tr></table>

$\div 80$
$480 \div 80 = 6$</td>
</tr>
<tr><td>$540 - 60 = 480$
$80 \times 6 = 480$</td><td>$60 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 + 80 = 540$</td></tr>
<tr><td>$60 + 80 \times 6 = 540$</td><td>$480 \div 80 = 6$</td></tr>
<tr>
<td>$540 - 60 = 480$
$1 \longrightarrow 80$
$2 \longrightarrow 160$
$3 \longrightarrow 240$
$4 \longrightarrow 320$
$5 \longrightarrow 400$
$6 \longrightarrow 480$</td>
<td>$540 - 60 = 480$
$480 - 80 = 400$
$400 - 80 = 320$
$320 - 80 = 240$
$240 - 80 = 160$
$160 - 80 = 80$
$80 - 80 = 0$</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Esquemas (não pertinentes para a situação)</th></tr>
<tr><td colspan="2">$7 \times 80 = 560$ (não considerar o valor que Carlos já possuía)</td></tr>
</table>

Quadro 34: Possíveis esquemas de resolução para o problema misto 4
Fonte: Autora.

Possíveis ideias associadas ao conceito de função

- ✓ A ideia de *correspondência* pode ser identificada a partir do estabelecimento da correspondência entre a quantidade de meses e o valor economizado;
- ✓ A ideia de *dependência* pode ser identificada ao determinar que o valor para comprar o celular depende apenas do valor economizado em alguns meses;
- ✓ A ideia de *variável* pode ser identificada ao apresentar uma variação da quantidade de meses e, consequentemente, do valor economizado;

- ✓ A ideia de *regularidade* pode ser identificada ao alterar a quantidade de meses de 1 em 1, e o valor de 80 reais em 80 reais;
- ✓ A ideia de *generalização* pode ser identificada ao estabelecer que é possível encontrar a quantidade de meses dividindo o valor economizado x meses pelo valor economizado em por mês;
- ✓ A ideia de *proporcionalidade* pode ser identificada ao manter a porporção 1:80 e a partir do estabelecimento da taxa - 80 reais por mês ou do estabelecimento da razão 6 entre 80 e 480, valor corresponde númericamente a quantidade de meses;

3.1.1 Os pressupostos estabelecidos para as análises das resoluções

As resoluções individuais dos sujeitos colaboradores foram analisadas com base em seus esquemas, expostos por meio de representações numéricas e/ou pictóricas, e explicitado no diálogo entre a pesquisadora e o aluno. As resoluções dos alunos foram agrupadas considerando os esquemas e invariantes operatórios (teoremas em ação e conceito em ação), interpretados pela pesquisadora como correspondentes. Para as análises, observamos as seguintes especificidades:

- ✓ O problema foi ou não resolvido;
- ✓ Os esquemas apresentados são pertinentes ou não para a situação proposta;
- ✓ As subclasses de problemas mistos permitem a mobilização das ideias associadas ao conceito de função;
- ✓ As diferentes estruturas de problemas possibilitam a mobilização de diferentes invariantes operatórios associados ao conceito de função;
- ✓ A predominância de teoremas em ação falsos ou verdadeiros indicados nas respostas dos alunos;
- ✓ Possível explicitação dos conceitos em ação associados aos teoremas em ação; e
- ✓ Associação dos conceitos em ação com os conceitos científicos.

Na análise das resoluções dos alunos, não tivemos a pretensão de esgotar os invariantes operatórios possíveis de serem encontrados. Mas analisamos todas as informações com a intenção de apresentar resultados coerentes e profundos acerca dos conhecimentos implícitos manifestados pelos alunos ao resolverem problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. No próximo capítulo apresentamos a análise das resoluções dos alunos em cada problema misto.

CAPÍTULO 4

ANÁLISES DAS RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS MISTOS

Este capítulo consiste nas análises dos possíveis invariantes operatórios associados ao conceito de função, mobilizados pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a partir da resolução de quatro problemas mistos pertencentes à classe de *proporção simples e transformação de medidas*. Os colaboradores da pesquisa são doze alunos de diferentes escolas municipais do interior do Paraná, que estão identificados neste texto por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A12.

Para as análises, consideram-se as produções escritas dos alunos desenvolvidas durante as resoluções dos problemas mistos e o diálogo final entre o aluno e a pesquisadora. As resoluções dos alunos foram agrupadas considerando os esquemas interpretados pela pesquisadora como correspondentes.

Primeiramente, foram mencionados os esquemas utilizados pelos alunos para resolver os problemas mistos e a maneira de representá-los. Na sequência, foram apresentadas as ideias-base de função - *correspondência, dependência* e *variável, regularidade,* e a ideia de *proporcionalidade,* manifestadas pelos alunos em seus esquemas, pois foram associadas aos invariantes operatórios. Depois, ainda apresentamos os possíveis invariantes operatórios mobilizados pelos alunos.

Os invariantes operatórios modelados na forma de teoremas em ação e explicitados como conceitos em ação, associados aos teoremas, são conhecimentos implícitos e, em alguns casos, inconscientes, contidos nos esquemas dos alunos. O conceito em ação é um objeto ou predicado pertinente; e o teorema em ação é uma proposição verdadeira ou falsa, sendo considerada verdadeira para quem o mobiliza (VERGNAUD, 1996*a*).

Nesta pesquisa, os teoremas em ação falsos são indicados por TAF; e os teoremas em ação verdadeiros indicados por TAV, seguidos de números para diferenciá-los, por exemplo, TAF1, TAF2, TAV1 e TAV2. Ao final das análises de cada problema misto, apresenta-se um quadro os possíveis invariantes operatórios associados à quantidade de alunos que o manifestaram.

4.1 Problema misto 1: proporção simples do tipo um para muitos e transformação negativa com o estado inicial desconhecido

Mariana tinha alguns ingressos para brinquedos de um parque de diversões para distribuir aos seus amigos. Cada um de seus 7 amigos recebeu 3 ingressos e, ainda, restaram 4 ingressos para Mariana. Quantos ingressos ela tinha antes da distribuição?

Esse problema coloca em jogo a relação de proporção simples um para muitos, do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza; e a relação de transformação negativa com o estado inicial desconhecido, do campo aditivo, que consiste na aplicação de uma transformação negativa ao estado final para obter o estado inicial.

Apenas as alunas A9 e A12 não resolveram essa situação de modo esperado, e os demais alunos resolveram-na de forma pertinente. Ao todo foram utilizados, pelos alunos, dois esquemas pertinentes e um esquema não pertinente para a situação proposta, como apresentamos a seguir.

Esquema 1

Para a resolução desse problema misto, os alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11 utilizaram a representação numérica para apresentar, como esquema pertinente, os algoritmos da multiplicação e da adição (Figura 7), conforme esclarece a fala do aluno A6: *Porque, se tem 7 amigos e ela deu 3 ingressos para cada um, se eu fizer 7 × 3 dá 21, mais os 4 ingressos que chego ao número 25*[14].

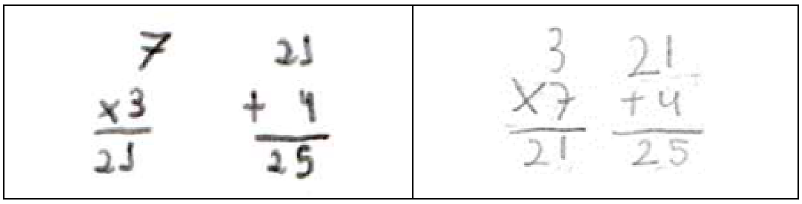


Figura 7: Esquema dos alunos A1 e A2 referente ao problema misto 1
Fonte: Dados da pesquisa.

[14] As falas transcritas dos alunos não sofreram revisão textual, mantendo sua integralidade e particularidades.

Nesse esquema há indícios que, para resolverem esse problema, os alunos estabeleceram implicitamente a ideia de *correspondência* um para muitos - para 1 amigo foram distribuídos 3 ingressos e para 7 amigos foram distribuídos 21 ingressos; a ideia de *dependência* - a quantidade de ingressos distribuídos depende da quantidade de amigos; a ideia de *variável,* ao identificar a variação do número de amigos e, consequentemente, do total de ingressos distribuídos; e a ideia de *proporcionalidade* pela utilização da *taxa de proporcionalidade*[15] - 3 ingressos por amigo ou pela utilização da *razão* – 7 vezes, mantendo a proporção de 1:3. A razão pode ser mobilizada pelo aluno ao compreender quantas vezes a unidade de uma mesma grandeza aumentou, neste caso, o número de amigos aumentou 7 vezes.

No esquema de resoluções dos alunos A1, A5, A6, A8 e A11 existem duas possibilidades de analisar indícios de teoremas em ação, pois na resolução escrita eles fizeram $3 \times 7 = 21$, e ao explicitarem a resolução, disseram $7 \times 3 = 21$. Já os alunos A2, A4, A7 e A10 resolveram e explicitaram do mesmo modo, $7 \times 3 = 21$. Essa interpretação foi feita com base nos textos de Vergnaud (1998; 2009*a*) e Gitirana *et al.* (2014), referentes às resoluções dos alunos em situações multiplicativas.

A primeira possibilidade consiste na mobilização pelos alunos A1, A5, A6, A8 e A11, de um teorema em ação verdadeiro, referente à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (*taxa de proporcionalidade*), quando estabeleceram a seguinte relação matemática: A quantidade total de ingressos distribuídos para *7* amigos é o mesmo que 3 ingressos por amigo (*taxa*) multiplicado por 7 amigos.

Para representar esse teorema em ação verdadeiro em notação matemática, no caso particular, utiliza-se $f(7 \text{ amigos})$ equivalente a quantidade de ingressos distribuídos para 7 amigos, a *taxa* equivalente a 3 ingressos por amigo, 7 equivalente ao número de amigos e o seguinte raciocínio:

$$f(7 \text{ amigos}) = 3 \text{ ingressos por amigo} \times 7 \text{ amigos} = 21 \text{ ingressos}$$

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV1, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme mencionado a seguir.

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, com $x,\ a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa.

[15] Nesta pesquisa, chamamos a taxa de proporcionalidade simplesmente de taxa.

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983,1996*a*, 2007) e Franchi (1999) ao explicitarem a respeito das propriedades isomórficas da função linear; e identificado por Pavan (2010) nas resoluções dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em situações multiplicativas.

A partir do TAV1, identificamos a mobilização, pelos alunos A1, A5, A6, A8 e A11, dos seguintes os conceitos em ação, os quais associamos ao conceito de função: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.*

A outra possibilidade indica que os alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11 podem ter manifestado implicitamente um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos a propriedades isomórficas da função linear, quando realizaram o seguinte raciocínio: a quantidade total de ingressos distribuídos para *7* amigos é o mesmo que *7* vezes a quantidade de ingressos distribuídos para um amigo.

Para expressar esse teorema em ação verdadeiro em notação matemática, no caso particular, utiliza-se 7, equivalente à razão, $f(1 \text{ amigo})$ equivalente a quantidade de ingressos distribuídos por amigo, $f(7 \text{ amigo})$ equivalente a quantidade de ingressos distribuídos para 7 amigos e o seguinte raciocínio:

$$f(7 \text{ amigos}) = f(7 \times 1 \text{ amigo}) = 7 \times f(1 \text{ amigo}) = 7 \times 3 \text{ ingressos} = 21 \text{ ingressos}.$$

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV2, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme representado a seguir.

TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k,\ x \in \mathbb{N}$ e sendo k a razão (um escalar).

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983; 1996*a*; 2007) e Franchi (1999) ao explicitarem a respeito das estruturas multiplicativas; e identificado por Calado (2020) nas resoluções de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em situações multiplicativas.

A partir do TAV2, identificamos indícios da mobilização, pelos alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11, de conceitos em ação associados ao conceito de função, a saber: *correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável.*

Nesse esquema, inferimos que os alunos A1, A5, A6, A8 e A11 podem ter mobilizado o conceito de comutatividade, quando fizeram 3×7 = 21, e ao explicitarem essa resolução, falaram 7×3 = 21. Isto nos levou a conjecturar a possibilidade da mobilização de um teorema em ação verdadeiro, ao qual associamos a propriedade de comutatividade da multiplicação apresentada por Iezzi e Murakami (1977, p. 39)[16].

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV3, e o modelamos, ao considerar k equivalente à razão, e $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme representado a seguir.

TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então
$k \cdot f(x) = f(x) \cdot k,$ com $k,\ x\ \in\ \mathbb{N}$.

Oliveira, Santana e Silva (2018, p. 106) mencionaram essa propriedade comutativa da multiplicação como um possível teorema em ação mobilizado por um aluno do 5º ano em uma situação-problema de proporção simples.

A partir do TAV3, identificamos indícios da mobilização, pelos alunos A1, A5, A6, A8 e A11, dos conceitos em ação de *comutatividade em relação à multiplicação.*

Ainda, inferimos que esse esquema (Figura 7) dos alunos contempla um teorema em ação verdadeiro, que consiste na inversão da transformação. Para exemplificá-lo, em um caso particular, considera-se que a solução canônica do problema consiste em aplicar a transformação positiva correspondente 21 ingressos (oposta da transformação negativa, - 21 ingressos), ao estado final que diz respeito a 4 ingressos e, assim, encontrar o estado inicial, 25 ingressos.

Esse teorema em ação é apresentado por Vergnaud (2007, p. 7) do seguinte modo: “se uma diminuição faz passar do estado inicial ao estado final, então um aumento faz passar do estado final ao estado inicial”.

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV4, e com base em Vergnaud (2007; 2009*a*), o modelamos ao considerar $F,$ o estado final, $-T,$ a transformação direta, $T,$ a transformação inversa, $I,$ o estado inicial e a lei de composição **+** correspondente à adição de um número natural (I) e um número relativo $(T),$ conforme mencionado a seguir.

TAV4: Se $F = I$ **+** $(T),$ então $I = F$ **+** $(-T),$ com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.

[16] A propriedade comutativa da multiplicação: $ab = ba$ para todos $a, b\ \in\ \mathbb{N}$.

A partir do TAV4, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos alunos A1, A2, A5, A6, A7, A8, A10 e A11, na resolução do problema misto 1: *estado inicial, estado final, inversão e transformação.*

No algoritmo da adição, há indícios que os alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11 mobilizaram implicitamente um teorema em ação verdadeiro, ao qual associamos a propriedade de comutatividade da adição, pois a estrutura do problema consiste em somar: “somar 21 a 4”, mas os alunos “somaram 4 a 21”. Isso significa que os alunos supõem que “somar 4 a 21” é o mesmo que “somar 21 a 4”, sendo o mais fácil “somar 4 a 21”, como mostra a Figura 8.

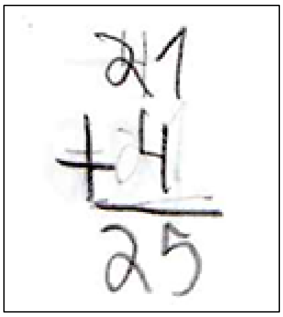


Figura 8: Esquema do aluno A6 referente ao problema misto 1
Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 8, observa-se que o aluno A6 armou e apagou o algoritmo da adição que consiste em somar 21 a 4, e então reescreveu o algoritmo somando 4 a 21. Com isso, inferimos que muitos alunos conhecem a comutatividade da adição e, para melhor organização dos números, preferem escrever o número maior primeiro em vez do menor.

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV5, e o modelamos, ao considerar F, equivalente ao estado final e T, representando a transformação, conforme mencionado a seguir.

TAV5: $F + T = T + F$, com $F \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.

A partir do TAV5, identificamos indícios da mobilização, pelos alunos A1, A2, A6, A7, A10 e A11, dos conceitos em ação de *comutatividade em relação à adição.*

Portanto, para encontrar a quantidade de ingressos distribuídos a 7 amigos, os alunos utilizaram o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples um para muitos, e para encontrar a quantidade de ingressos que ela tinha antes da distribuição, utilizaram o algoritmo da adição com o significado de transformação de medidas.

Esquema 2

Para a resolução desse problema misto, os alunos A3 e A4 apresentaram, como esquema pertinente, uma sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição (Figura 9). Para isso, o aluno A3 utilizou a representação numérica; e a aluna A4 utilizou as representações numérica e pictórica. Esse esquema é assim explicitado pelo aluno A3: *Eu fui somando de 3 + 3 + 3 + 3 até chegar em 7 amigos, que deu 21. Então, se cada amigo tinha 3, que deu 21, e daí restaram 4 ingressos, dá 25 ingressos*. A aluna A4, também, utilizou como parte do esquema o algoritmo da multiplicação.

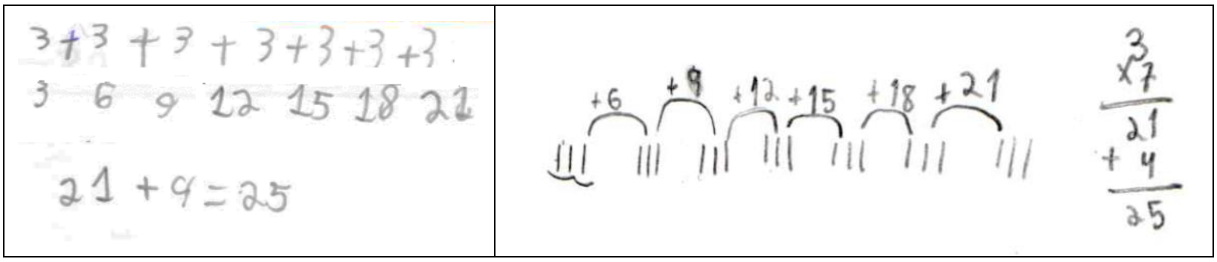


Figura 9: Esquema dos alunos A3 e A4 referente ao problema misto 1
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema dos alunos A3 e A4, há indícios da manifestação da ideia de *correspondência* um para muitos, pois 1 amigo corresponde a 3 ingressos, 2 amigos correspondem a 6 ingressos..., 7 amigos correspondem a 21 ingressos; da ideia de *dependência,* já que a quantidade de ingressos distribuídos depende da quantidade de amigos; da ideia *variável*, ao variar a quantidade de amigos de 1 até 7 amigos, e o número de ingressos distribuídos de 3 até 21 ingressos; ideia de *regularidade,* quando os alunos resolveram a sequência aditiva recursiva somando mais 3 ao resultado anterior, totalizando 21 ingressos; e da ideia de *proporcionalidade,* ao manter a mesma proporção 1:3, quando a sequência aditiva recursiva é efetuada.

Em muitas situações os alunos percebem, mesmo que implicitamente, que existe uma regularidade ou uma lei de formação, "[...] mas mais que perceber é preciso argumentar e justificar que essa lei faz sentido para além dos casos particulares [...]" (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 38).

A partir desse esquema, identificamos que os alunos A3 e A4 podem ter mobilizado um teorema em ação verdadeiro associado à propriedade linear do isomorfismo aditivo. Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, considera-se que os alunos A3 e A4 utilizaram $f(1) = 3$, que representa a quantidade de ingressos distribuídos para um amigo, explícita no enunciado do problema, para manifestarem implicitamente os seguintes raciocínios:

$$f(2) = f(1) + f(1) = 3 + 3 = 6 \qquad f(5) = f(4) + f(1) = 12 + 3 = 15$$

$$f(3) = f(2) + f(1) = 6 + 3 = 9 \qquad f(6) = f(5) + f(1) = 15 + 3 = 18$$

$$f(4) = f(3) + f(1) = 9 + 3 = 12 \qquad f(7) = f(6) + f(1) = 18 + 3 = 21$$

Ao adicionar ou subtrair sucessivamente $f(x)$, uma relação proporcional entre duas grandezas; constatamos um teorema em ação verdadeiro, identificado pela sigla TAV6, como representado a seguir, em um caso geral.

TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade, então
$f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983, 1996*a*, 2007) e Franchi (1999) ao explicitarem a respeito das propriedades isomórficas da função linear; e identificado por Calado (2020) nas resoluções de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem problemas de função afim.

A partir do TAV6, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos alunos A3 e A4 na resolução do problema misto 1: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade e variável.*

No esquema da aluna A4, há indícios da mobilização de um teorema em ação verdadeiro, que evidencia a filiação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo. Para exemplificá-lo, considera-se $f(1)$ representando a quantidade de ingressos distribuídos para um amigo, 7 equivalente à razão e o seguinte raciocínio:

$$f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = 7 \times f(1)$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV7, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, como representado a seguir.

TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade, então
$f(x') + \cdots + f(x') = k \cdot f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.

Subjacente ao TAV7, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pela aluna A4 na resolução do problema misto 1: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.*

Os alunos A3 e A4, ao utilizarem o algoritmo da adição para aplicar 21 ingressos distribuídos (transformação inversa) a 4 ingressos restantes (estado final), podem ter mobilizado o TAV4: *Se* $F = I + (-T)$, *então* $I = F + T$, *com* $F, I \in \mathbb{N}$ *e* $T \in \mathbb{Z}$, associado aos conceitos em ação de *estado inicial, estado final, inversão e transformação*. Também o TAV5: $F + T = T + F$, com $F \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, associado aos conceitos em ação de *comutatividade em relação à adição.*

Portanto, para encontrar a quantidade de ingressos distribuídos a 7 amigos, os alunos A3 e A4 utilizaram uma sequência aditiva recursiva com significado de proporção simples um para muitos; e para encontrar a quantidade de ingressos que ela tinha antes da distribuição, utilizaram o algoritmo da adição com o significado de transformação de medidas.

Segundo Gitirana *et al.* (2014), a sequência aditiva recursiva consiste em um esquema limitado, pois não seria facilmente aplicado para a resolução de problemas que envolvem valores maiores. Por exemplo, não é viável aplicar esse esquema na seguinte situação: *Calcule a quantidade total de chocolates em 73 pacotes de pingos de chocolate, sabendo que cada pacote contém 103 chocolates*, porque o aluno teria que fazer a soma de 73 parcelas iguais a 103. Com isso, mencionamos a importância de o professor propor, aos alunos, situações com os valores numéricos diferentes, para que o estudante utilize esquemas mais eficientes, propiciando a expansão de seus conhecimentos.

Esquema 3

Para a resolução desse problema misto, as alunas A9 e A12 apresentaram, como esquema não pertinente para a situação, o algoritmo da adição (Figura 10). Nesse esquema, as alunas A9 e A12 simplesmente responderam os problemas sem refletir sobre as relações envolvidas entre dados numéricos dos enunciados, apenas operando com os números do enunciado, o que não conduziu à solução do problema.

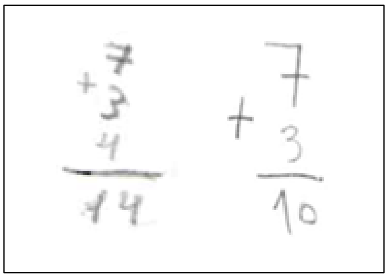


Figura 10: Esquema das alunas A9 e A12 referente ao problema misto 1
Fonte: Dados da pesquisa.

O esquema ineficaz manifestado pelas alunas A9 e A12 expressa a soma dos números presentes no enunciado do problema. Ainda, a aluna A12 não estabeleceu a quantidade de ingressos restantes, chegando à conclusão de que Mariana tinha 10 ingressos, o que também produz um resultado não apropriado para a situação.

Gitirana *et al.* (2014, p. 106) observa tais resoluções representadas numericamente pelos alunos do 5º ano e do 9º ano do Ensino Fundamental em problemas de proporção simples, e salienta: “Resoluções como essa são comuns entre alunos do 2º ao 5º ano, mas também foram observadas entre estudantes de anos mais adiantados, embora em menor frequência”. Logo, alunos de diferentes níveis de ensino operam com dados do enunciado sem estabelecer as relações existentes no problema.

Considerações sobre a análise do problema misto 1

Na resolução do problema misto do tipo *proporção simples um para muitos e transformação negativa com o estado inicial desconhecido,* identificamos dois esquemas pertinentes desenvolvidos pelos alunos: um esquema envolvendo os algoritmos da adição e da multiplicação; e o outro um esquema envolvendo uma sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição. Ainda se obteve um esquema não pertinente, que consiste no algoritmo da adição. Para representar esses esquemas, foram utilizadas as seguintes representações: pictórica por meio de tracinhos; e numérica, a partir de algoritmos.

Os alunos A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11, ao utilizarem o algoritmo da multiplicação, manifestaram mesmo que implicitamente as ideias de *correspondência, dependência, variável e proporcionalidade.* Já os alunos A3 e A4, ao utilizarem a sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade e proporcionalidade*.

A partir da análise de dois esquemas pertinentes para a situação proposta, apresentamos indícios que os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11 mobilizaram, mesmo que implicitamente, invariantes operatórios associados ao conceito de função, sendo sete teoremas em ação verdadeiros e quatorze conceitos em ação, como podemos visualizar no Quadro 35.

Teoremas em ação	Conceitos em ação	Alunos
TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, com $x, a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.	A1, A5, A6, A8 e A11.
TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k, x \in \mathbb{N}$ e sendo k a razão.	Correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável.	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$, com $k, x \in \mathbb{N}$.	Comutatividade em relação à multiplicação.	A1, A5, A6, A8 e A11.
TAV4: Se $F = I + (T)$, então $I = F + (-T)$, com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.	Estado inicial, estado final, inversão e transformação.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
TAV5: Se $F \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, então $F + T = T + F$.	Comutatividade em relação à adição.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.	Adição de funções lineares correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade e variável.	A3 e A4.
TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.	Adição de funções lineares correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.	A4.

Quadro 35: Invariantes operatórios mobilizados no problema misto 1
Fonte: A autora.

Segundo Campiteli e Campiteli (2006) o conceito em ação de *proporcionalidade* é uma ideia de função manifestada pelos alunos e os conceitos em ação de *correspondência, dependência, variável e regularidade* mobilizados pelos alunos ao resolverem a situação proposta, são considerados pelo GEPeDiMa como ideias-base função. Portanto, a exploração pelo aluno de situações dessa subclasse, envolvendo diferentes valores numéricos para variáveis, e oportunizada pelo professor, que conhece esses invariantes operatórios, pode ser significativa para o desenvolvimento do conceito de função desde os anos iniciais.

4.2 <u>Problema misto 2</u>: proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido

A piscina de Camila está com 400 litros de água e ela pretende enchê-la com uma torneira cuja vazão é de 20 litros de água a cada 5 minutos. Quantos litros de água terá a piscina após abrir a torneira por 15 minutos?

Esse problema coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo quarta proporcional, do campo multiplicativo, que associa muitas quantidades de uma grandeza com muitas quantidades da outra grandeza, e a relação de transformação positiva com o estado final desconhecido, do campo aditivo, que consiste na aplicação uma transformação positiva ao estado inicial para obter o estado final.

Os alunos A1, A2, A8 e A10 resolveram corretamente essa situação-problema; e os demais alunos, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A11 e A12, não resolveram corretamente. Ao todo foram utilizados dois esquemas pertinentes e quatro esquemas não pertinentes para a situação proposta, como apresentamos a seguir.

Esquema 1

Para a resolução desse problema misto, os alunos A1 e A8 utilizaram a representação numérica para apresentar, como esquema pertinente, os algoritmos da multiplicação e da adição, como podemos visualizar na Figura 11. Esse esquema é confirmado na fala da aluna A8: *Como a cada 5 minutos saía 20 litros da torneira e* *ela deixou 15 minutos a torneira ligada, então 3 × 5 da 15; então 3 × 20. O resultado daria 60, que é só somar com o que já estava na piscina que dava 460*.

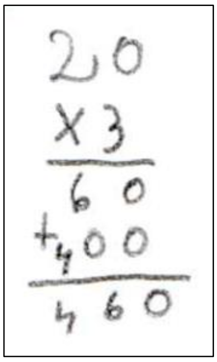


Figura 11: Esquema da aluna A8 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos A3, A5, A6 apresentaram como esquema somente o algoritmo da multiplicação, ignorando a quantidade de litros de água que já havia na piscina, como atestado na fala do aluno A3: *Eu fiz 20 × 3, pois se 5 minutos era 20 litros, 10 minutos será 40 litros, e 15 minutos será 60 litros.* Também, na fala do aluno A6: *Se a cada 5 minutos enche 20 litros, em 15 minutos é só somar 5 + 5 + 5 que vai dar o resultado, e fazer 20 × 3 que vai dar 60.* Logo, os alunos A3, A5, A6 manifestaram um esquema incompleto, que não levou à resolução da situação proposta. Para representar o esquema incompleto, utilizou-se a representação numérica, como mostra a Figura 12.

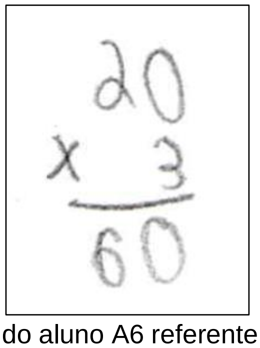


Figura 12: Esquema do aluno A6 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

Com o objetivo de resolver esse problema, inferimos que os alunos A1, A3, A5, A6 e A8 manifestaram mesmo que implicitamente a ideia de *correspondência* de muitos para muitos, sendo expressa em *5 minutos* vazam da torneira *20 litros de água* e *15 minutos* vazam da torneira *60 litros de água*; a ideia de *dependência* - a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende de quantos litros de água vaza da torneira em 15 minutos; e da quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos; a ideia de *variável,* ao perceberem a variação do tempo e, consequentemente, da quantidade de litros de água acrescentados na piscina; e da ideia de *proporcionalidade* - se 15 minutos é igual a três vezes 5 minutos, então três vezes 20 litros de água é igual a 60 litros de água, sendo três vezes a razão.

A ideia de *regularidade* foi identificada na fala do aluno A3, quando somou 5 minutos ao número anterior até totalizar 15 minutos; e somou 20 litros de água ao número anterior até totalizar 60 litros de água. Também, na fala do aluno A6 há indícios da ideia de *regularidade,* quando o aluno percebe que o tempo de enchimento aumenta de 5 em 5 minutos e menciona a decomposição aditiva do número 15 em 5 + 5 + 5 para encontrar a razão: 3 vezes.

Nesse esquema, os alunos A1, A3, A5, A6 e A8 podem ter manifestado implicitamente um teorema em ação verdadeiro associado à propriedade linear do isomorfismo de medidas, quando realizaram a seguinte relação matemática: A quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos é o mesmo que *3* vezes a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos.

Para expressar esse teorema em ação verdadeiro em notação matemática, considera-se 3 equivalente à razão, $f(5 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água em 5 minutos, e $f(15 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos. Portanto,
$f(15 \text{ minutos}) = f(3 \times 5 \text{ minutos}) = 3 \times f(5 \text{ minutos}) = 3 \times 20$ litros de água $=$ 60 litros de água.

Assim, conjecturamos a mobilização, pelos alunos A1, A3, A5, A6 e A8, do TAV2: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$,* com k, $x \in \mathbb{N}$ e sendo k a razão (um escalar), e dos seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável*.

Há indícios que os alunos A1, A3 e A6 mobilizaram o TAV3: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$* com $k,\ x \in \mathbb{N}$, associado ao conceito em ação de *comutatividade em relação à multiplicação,* quando na resolução escrita fizeram 3 × 20 = 60, e ao explicitarem sobre essa resolução, afirmarem 20 × 3 = 60.

O aluno A6 ao explicitar sobre seu esquema mencionou a decomposição aditiva do número 15 em partes iguais para encontrar a razão. Isto nos levou a conjecturar a possibilidade da mobilização do TAV7: *Seja f uma relação de proporcionalidade,* *então* $f(x') + \cdots + f(x') = k \cdot f(x')$, *com* $x \in \mathbb{N}$ *e* k *sendo a razão* e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável*. Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, considera-se $f(5 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água em 5 minutos, 3 equivalente à razão e o seguinte raciocínio:

$$f(5 \text{ minutos}) + f(5 \text{ minutos}) + f(5 \text{ minutos}) = 3 \times f(5 \text{ minutos})$$

Ainda, ao utilizar o algoritmo da adição como esquema, os alunos A1 e A8 mobilizaram um teorema em ação verdadeiro, que consiste em aplicar uma transformação direta de adição ao estado inicial para encontrar o estado final. Para exemplificá-lo, considera-se que a solução canônica do problema consiste em aplicar a transformação representada por 60 litros de água ao estado inicial, que diz respeito a 400 litros de água e, assim, encontrar o estado final, 460 litros de água.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV8, e o modelamos, ao considerar F, o estado final, I, o estado inicial e T, a transformação, como representado a seguir.

TAV8: $F = I + (\pm T)$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.

A partir do TAV8, foram identificados os seguintes conceitos em ação, mobilizados pelos alunos A1 e A8, na resolução do problema misto 2: *estado inicial, estado final e transformação.*

Portanto, para encontrar a quantidade de litros de água acrescentados na piscina após abrir a torneira por 15 minutos, os alunos A1, A3, A5, A6 e A8 utilizaram o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples do tipo quarta proporcional; e para encontrar a quantidade a quantidade de litros de água que terá a piscina após abrir a torneira por 15 minutos, os alunos A1 e A8 utilizaram o algoritmo da adição com o significado de transformação de medidas.

Esquema 2

Para resolver o problema misto 2, a aluna A4 utilizou um esquema não pertinente, que consiste no algoritmo da multiplicação, e para representá-lo ela utilizou a representação numérica (Figura 13). Ao ser questionada como pensou para resolver o problema, a aluna A4 disse: *Se eu multiplicasse 15 $\times$ 20, aí dá o tanto de água que a piscina tem em 15 minutos.*

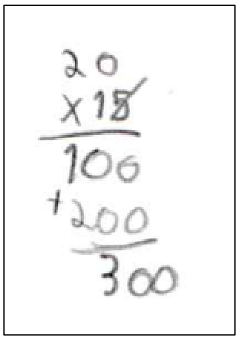


Figura 13: Esquema da aluna A4 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observar a resolução da aluna A4, inferimos que ela não estabeleceu uma relação aditiva com a quantidade de litros de água que já tinha na piscina, não mobilizou a ideia de *correspondência* muitos para muitos, e a ideia de *dependência* pertinentes ao problema, mas estabeleceu a seguinte ideia de *correspondência* muitos para muitos – em 5 minutos a torneira tem uma vazão de 20 litros de água, em 15 minutos a torneira tem uma vazão de 300 litros de água. Também, a seguinte ideia de *dependência* – a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende do tempo que a torneira ficou aberta. Diante disso, notamos que a aluna A4 não mobilizou a ideia de *proporcionalidade,* pois a proporção 5:20 não se manteve constante.

Com isso, presumimos que a aluna A4 mobilizou um teorema em ação falso para a subclasse de *proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido,* quando realizou o seguinte raciocínio: a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos é o mesmo que 15 vezes a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos, ou seja, ela em vez de buscar pela razão ($k = 3$), multiplicou 15 (um número qualquer, que não é a razão) por 20 litros de água.

Para expressar esse teorema em ação falso em notação matemática, considera-se 15 representando um número qualquer, $f(15\ \text{minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos, e $f(5\ \text{minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos. Portanto,

$$f(15\ \text{minutos}) = 15 \times f(5\ \text{minutos}) = 15 \times 20\ \text{litros de água} = 300\ \text{litros de água}.$$

Identificamos esse teorema em ação falso pela sigla TAF1, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme mencionado a seguir.

TAF1: Seja f uma relação de proporcionalidade,
então $f(x') = x' \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e $x > 1$.

Esse teorema em ação falso também é identificado por Ferraz (2016) nas resoluções dos alunos do 6º ano em problemas da classe de proporção simples.

A partir do TAF1, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pela aluna A4: *correspondência e dependência.*

Portanto, para encontrar a quantidade de litros de água acrescentados na piscina após abrir a torneira por 15 minutos, a aluna A4 utilizou o algoritmo da multiplicação sem envolver a ideia de *proporcionalidade* e, então não obteve a resolução correta para o problema misto.

Esquema 3

A aluna A11 utilizou, como esquema não pertinente ao problema, o algoritmo da multiplicação e não estabeleceu a relação aditiva, pois ignorou a quantidade de litros de água que já tinha na piscina. Para isso, utilizou a representação numérica, como apresentado na Figura 14.

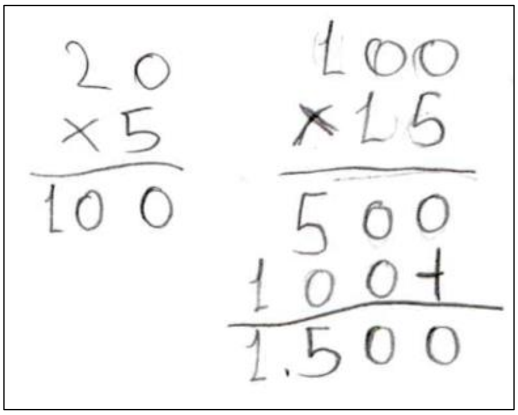


Figura 14: Esquema da aluna A11 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que esse esquema não é pertinente ao problema proposto, pois a aluna A11 não mobilizou a ideia de *correspondência* de muitos para muitos, a ideia de *dependência* condizentes com o problema, pois considerou a *taxa* 20 litros de água por minuto em vez de 4 litros de água por minuto, e não a manteve constante. Com isso, não manifestou a ideia *proporcionalidade,* necessária para solução da situação.

No primeiro algoritmo da multiplicação, há indícios que a aluna A11 mobilizou implicitamente a ideia de *correspondência* um para muitos, sendo: em cada minuto, a torneira tem uma vazão de 20 litros de água e, em 5 minutos a torneira tem uma vazão de 100 litros de água; a ideia de *dependência* - a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende do tempo que a torneira ficou aberta e da quantidade de água que vaza da torneira em 1 minuto; a ideia de *variável,* ao perceber que a variação do tempo implica na variação da quantidade de litros de água acrescentados na piscina; e a ideia de *proporcionalidade,* ao considerar a *razão* (5 vezes), mantendo a proporção de 1:20.

No segundo algoritmo da multiplicação, a aluna mobilizou a ideia de *correspondência* muitos para muitos: em 5 minutos a torneira tem uma vazão de 100 litros de água, e em 15 minutos a torneira tem uma vazão de 1.500 litros de água; a ideia de *dependência* - a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende do tempo que a torneira ficou aberta e da quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos.

Neste caso, inferimos que a aluna A11 considera o problema como uma situação de proporção simples um para muitos e, com isso, há indícios da mobilização do TAV2 - *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x) = f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$*, com* $k, x \in \mathbb{N}$ *e sendo* k *a razão (um escalar),* e dos seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável.* Para exemplificá-lo, considera-se a seguinte relação matemática em um caso particular: a quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 5 minutos é o mesmo que 5 vezes a quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 1 minuto.

Para expressar o TAV2 em termos matemáticos, considera-se 5 um número qualquer, $f(5 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos, e $f(1 \text{ minuto})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 1 minuto. Portanto,

$$f(5 \text{ minutos}) = 5 \times f(1 \text{ minutos}) = 5 \times 20 \text{ litros de água} = 100 \text{ litros de água.}$$

Ainda, nesse esquema presumimos que A11 mobilizou o TAF1 - *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x' \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$* e $x > 1$, e os conceitos em ação de *correspondência* e *dependência,* quando realizou o seguinte raciocínio: a quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 15 minutos é o mesmo que 15 vezes a quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 5 minutos.

Em notação matemática, podemos expressar esse teorema em ação falso ao considerar $x' = 15$, $f(5\text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos, $f(15\text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 15 minutos, e o seguinte procedimento:
$f(15\text{ minutos}) = 15 \times f(5\text{ minutos}) = 15 \times 100$ litros de água $= 1.500$ litros de água.

Logo, para encontrar a quantidade de litros de água acrescentados na piscina após abrir a torneira por 15 minutos, a aluna A11 utilizou um algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples do tipo um para muitos e o outro algoritmo da multiplicação sem envolver a ideia de *proporcionalidade*.

Esquema 4

As alunas A2 e A12 apresentaram, como esquema não pertinente para a situação, o algoritmo da multiplicação, e não consideraram a relação aditiva, ignorando a quantidade de litros de água que já havia na piscina. Para isso, utilizaram a representação numérica (Figura 15).

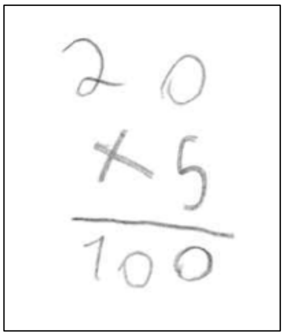


Figura 15: Esquema da aluna A12 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

É possível notar que esse esquema não é pertinente ao problema proposto, pois as alunas A2 e A12 não identificaram a ideia de *correspondência* de muitos para muitos e a ideia de *dependência* condizentes com o problema, mas manifestaram outra ideia de *correspondência* muitos para muitos - em 15 minutos, a torneira tem uma vazão de 100 litros de água e outra ideia de *dependência* - a quantidade de litros de água acrescentada na piscina depende da quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos. Também, não mobilizaram a ideia de *proporcionalidade,* pois não estabeleceram a *razão* entre as grandezas de mesma natureza e nem a *taxa* de proporcionalidade, de modo que a proporção fosse mantida.

O esquema manifestado pelas alunas A2 e A12 indica a possibilidade da mobilização um teorema em ação falso para essa subclasse de problema misto. Para exemplificá-lo, considera-se a seguinte relação matemática em um caso particular: A quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 15 minutos é o mesmo que 5 vezes a quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 5 minutos.

Para expressar esse teorema em ação falso em notação matemática, considera-se 5 um número qualquer, $f(5 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 5 minutos, e $f(15 \text{ minutos})$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentada na piscina em 15 minutos. Portanto,

$$f(15 \text{ minutos}) = f(5 \times 5 \text{ minutos}) = 5 \times f(5 \text{ minutos}) = 5 \times 20 \text{ litros de água} = 100 \text{ litros de água}.$$

Identificamos esse teorema em ação falso pela sigla TAF2 e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme modelado a seguir.

TAF2: Seja f uma relação de proporcionalidade,
então $f(x') = x \cdot f(x)$, com $x, x', n \in \mathbb{N}$.

A partir do TAF2, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelas alunas A2 e A12: *correspondência* e *dependência.*

A aluna A2, ao resolver o problema, percebeu que seu esquema não era pertinente e então apresentou um novo esquema, sendo esse esquema pertinente ao problema (Esquema 5). Essa maneira de agir da aluna A2 vai ao encontro do que é mencionado por Vergnaud (1993, p. 3): “[...] Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência a leva, seja a mudar de esquema, seja a modificar o esquema”.

Esquema 5

Para a resolução desse problema misto, as alunas A2 e A10 apresentaram, como esquema pertinente, uma sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição. A aluna A2, também, apresentou o algoritmo da divisão explicitamente para encontrar a razão (Figura 16). Esse esquema é explicitado na fala pela aluna A2: *[...] 15 ÷ 5 deu 3, daí eu fiz de mais aqui. Podia ser 3 × 20, que deu 60, aí dá 460.* Para representar o esquema, as alunas A2 e A10 utilizaram a representação numérica.

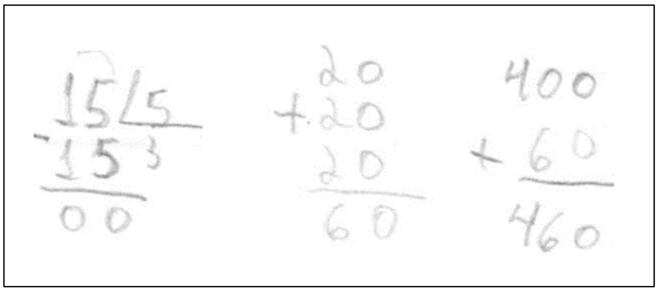


Figura 16: Esquema do aluno A2 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

A aluna A7 apresentou como esquema somente uma sequência aditiva recursiva e, assim, não estabeleceu uma relação aditiva com a quantidade de litros de água que já havia na piscina, como atestado na fala da aluna A7: *Eu somei 3 vezes, o 20 que deu 60 litros.* Logo, a aluna A7 apresentou um esquema incompleto, utilizando a representação numérica, que não levou à resolução do problema misto.

Nesse esquema utilizado pelas alunas A2, A7 e A10, podemos indicar a manifestação da ideia de *correspondência* muitos para muitos - 5 minutos corresponde a 20 litros de água, 10 minutos corresponde a 40 litros de água, e 15 minutos corresponde 60 litros de água; da ideia de *dependência* - a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende da relação entre o tempo que a torneira ficou aberta e a quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos; da ideia *variável* ao variar o tempo em minutos e, consequentemente, a quantidade de litros acrescentada na piscina; da ideia de *proporcionalidade,* ao adicionar 3 vezes (razão) 20 litros de água para manter a proporcionalidade - 3 vezes 5 minutos são 15 minutos, então 3 vezes 20 litros de água são 60 litros de água, contribuindo para a manifestação da ideia de *regularidade,* quando os alunos resolveram a sequência aditiva recursiva somando mais 20 ao resultado anterior, totalizando 60 litros de água.

A partir dessa análise, considera-se que as alunas A2, A7 e A10 podem ter manifestado o TAV6: *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, *com* $x \in \mathbb{N}$, associado aos conceitos em ação de *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade* e *variável.* Para exemplificá-lo, considera-se $f(15 \text{ minutos})$ representando a quantidade de litros de água em 15 minutos, $f(5 \text{ minutos})$ representando a quantidade de litros de água em 5 minutos, e o seguinte raciocínio:

$$f(15 \text{ minutos}) = f(5 \text{ minutos} + 5 \text{ minutos} + 5 \text{ minutos}) =$$
$$f(5 \text{ minutos}) + f(5 \text{ minutos}) + f(5 \text{ minutos}) =$$
$$20 \text{ litros de água} + 20 \text{ litros de água} + 20 \text{ litros de água} = 60 \text{ litros de água.}$$

Esse teorema em ação é identificado por Gitirana *et al*. (2014) nas resoluções dos alunos em situações-problema do tipo quarta proporcional. Segundo as autoras, o valor correspondente à soma é a soma dos valores correspondentes.

A aluna A4 ao explicitar sobre seu esquema, [...] *eu fiz de mais aqui. Podia ser 3 × 20, que deu 60* [...], apresenta indícios da mobilização do TAV7: *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x') + \cdots + f(x') = k \cdot f(x')$, *com* $x \in \mathbb{N}$ *e* k *sendo a razão* e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.*

Ao utilizar outro algoritmo da adição como parte do esquema, as alunas A2 e A10 podem ter manifestado o TAV8: $F = I + (\pm T)$, *com* F, $I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, e os conceitos em ação de *estado inicial, estado final e transformação.* Esse teorema em ação já foi exemplificado anteriormente.

Contudo, para encontrar a quantidade de litros de água acrescentada na piscina após abrir a torneira por 15 minutos, as alunas A2, A7 e A10 utilizaram a sequência aditiva recursiva com significado de proporção simples um para muitos; e para encontrar a quantidade de litros de água que terá a piscina após abrir a torneira por 15 minutos, as alunas A2 e A10 utilizaram o algoritmo da adição com o significado de transformação de medidas.

Esquema 6

Para a resolução desse problema misto, a aluna A9 utilizou, como esquema não pertinente, o algoritmo da adição, representado numericamente, como mostra a

Figura 17. Nesse esquema, a aluna A9 simplesmente realiza a soma dos números do enunciado, o que não conduziu à solução do problema.

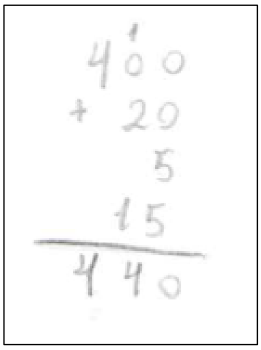


Figura 17: Esquema da aluna A9 referente ao problema misto 2
Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se inferir que a aluna A9 apresenta dificuldades em compreender as relações estabelecidas no enunciado do problema e, como precisava encontrar uma resposta, somou os números presentes no problema, ocasionando a resolução incorreta.

Esse tipo de resolução também foi identificado na pesquisa de Araujo (2015), envolvendo alunos dos 5º anos do Ensino Fundamental, com o objetivo de estudar as dificuldades dos alunos ao resolvem situações-problema aditivas e multiplicativas.

Considerações sobre as análises do problema misto 2

Na resolução do problema misto do tipo *proporção simples quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido,* identificamos dois esquemas pertinentes desenvolvidos pelos alunos, sendo um esquema envolvendo os algoritmos da adição e da multiplicação; e um esquema envolvendo uma sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição. Também identificamos quatro esquemas não pertinentes para a situação, sendo três envolvendo o algoritmo da multiplicação e um envolvendo o algoritmo da adição. Para representar esses esquemas, foram utilizadas representações numéricas.

Os alunos A1, A3, A5, A6 e A8, ao utilizarem o algoritmo da multiplicação, manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável e proporcionalidade.* Ainda, os alunos A6 e A8 mobilizaram a ideia de *regularidade*. Já as alunas A4, A11, A12, ao utilizarem o algoritmo da multiplicação, mobilizaram as ideias de *correspondência e dependência* não condizentes com a situação proposta. Ao utilizarem uma sequência aditiva recursiva, as alunas A2, A7 e A10 manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade e proporcionalidade.*

Ao observar todos os esquemas, nota-se que os alunos não identificaram a *taxa*, sendo ela essencial para mobilização da ideia de *generalização* e do conceito de função, como mencionado por Magina, Merlini e Santos (2016, p. 70), a resolução por meio do operador funcional (taxa) é "[...] um conhecimento de base para o trabalho com o conceito de função nos anos mais avançados de escolaridade". Logo, é fundamental que o professor explore, com os alunos, o conceito de taxa em situações-problema, pois ele contribui para o desenvolvimento do conceito de função.

A partir da análise desses esquemas, apresentamos indícios que os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10, A11e A12 mobilizaram, mesmo que implicitamente, invariantes operatórios associados ao conceito de função, sendo cinco teoremas em ação verdadeiros, dois teoremas em ação falsos, e dez conceitos em ação, como podemos visualizar no Quadro 36

Teoremas em ação	Conceitos em ação	Alunos
TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com k sendo a razão (escalar).	Correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável.	A1, A3, A5, A6, A8 e A11.
TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$, com $k,\ x \in \mathbb{N}$.	Comutatividade com relação à multiplicação.	A1, A3 e A6.
TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.	Adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.	A2, A7 e A10.
TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.	Adição de funções lineares correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.	A6.
TAV8: $F = I$ **+** $(\pm T)$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.	Estado inicial, estado final e transformação.	A1, A2, A8 e A10.
TAF1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x' \cdot f(x)$, com $x, x' \in \mathbb{N}$ e $x > 1$.	Correspondência e dependência.	A4 e A11.
TAF2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x \cdot f(x)$, com $x, x' \in \mathbb{N}$.	Correspondência e dependência.	A2 e A12.

Quadro 36: Invariantes operatórios mobilizados no problema misto 2.
Fonte: A autora.

Observa-se que, nessa subclasse, os alunos do 5º ano apresentaram mais dificuldades para estabelecer as relações lógicas presentes no enunciado, o que confirma os resultados apresentados na pesquisa de Gitirana *et al.* (2014): o percentual de acertos de 89 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problema de quarta proporcional é de 32%. Com isso, salientamos a importância de trabalhar com as diferentes subclasses de problemas, e não privilegiar somente uma subclasse, pois com a experiência, ao resolverem problemas de várias subclasses e a maturidade, os conceitos vão sendo desenvolvidos pelos alunos.

4.3 Problema misto 3: proporção simples do tipo partição e transformação negativa com a transformação negativa desconhecida

Pedro comprou 4 bolas de basquete iguais para doar a uma escola. Para pagar a loja, ele entregou R$ 200,00 e recebeu R$ 16,00 de troco. Quantos reais Pedro pagou em cada bola de basquete?

Esse problema coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo partição, do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza, e a relação de transformação negativa com a transformação desconhecida, do campo aditivo, que consiste na aplicação do estado final ao estado inicial para obter a transformação.

Os alunos A1, A2, A5, A8 e A10 resolveram corretamente essa situação-problema, e os demais alunos A3, A4, A6, A7, A9, A11 e A12, não resolveram corretamente. Ao todo foram manifestados dois esquemas pertinentes para a situação e quatro esquemas não pertinentes, como apresentamos a seguir.

Esquema 1

Para a resolução desse problema misto, o aluno A1 apresentou como esquema pertinente o algoritmo da subtração e as sequências aditivas recursivas. Por meio de tentativa e erro, foi fazendo as sequências aditivas recursivas para encontrar o mesmo valor estabelecido na operação de subtração. Para isso, utilizou a representação numérica, como podemos visualizar na Figura 18. No momento do diálogo, ao falar como pensou para resolver o problema, o aluno A1 relatou: *Fiz a conta 200 – 16, que deu 184. Daí eu fiz 35 $\times$ 4, que deu 140; 40 $\times$ 4, que deu 160; 45 $\times$ 4 que deu 180. Daí eu achei o resultado 46 $\times$ 4, que deu 184*.

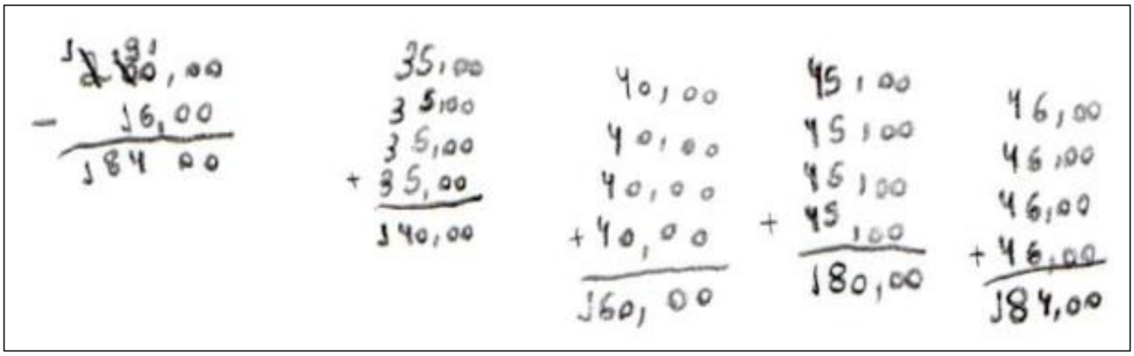


Figura 18: Esquema do aluno A1 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

No esquema apresentado pelo aluno A1, conjecturamos o estabelecimento da ideia *correspondência* um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 46 reais; e em 4 bolas, pagou 184 reais; da ideia de *dependência,* ao determinar que o valor pago em cada bola depende do valor pago em 4 bolas e do valor do troco; da ideia de *variável*, mesmo não deixando clara essa ideia, tem em mente que pode encontrar o valor pago de quantas bolas quiser, contando de 46 em 46, pois cada parcela corresponde ao valor de uma bola; da ideia de *proporcionalidade,* ao adicionar 4 vezes (razão) 46 reais para manter a proporcionalidade - 4 vezes 1 bola são 4 bolas, então e 4 vezes 46 reais são 184 reais, que contribuiu para manifestação da ideia de *regularidade,* ao resolver a sequência aditiva recursiva somando mais 46 ao resultado anterior, totalizando 184 reais.

Ao utilizar o algoritmo da adição como esquema inferimos, com base em Vergnaud (2009*a*), que o aluno A1 mobilizou um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos ao procedimento de diferença. Vergnaud (2009*a,* p. 210) estabelece este teorema em ação do seguinte modo: “[...] se b faz passar de a para c então b é igual a diferença entre c e a”.

Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, podemos subtrair o estado final, representado por 16 reais, do estado inicial, representado por 200 reais e, assim, encontrar a transformação, 184 reais.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV9, e o modelamos com base em Vergnaud (2009*a*), ao considerar F representando o estado final, T representando a transformação, e I representando o estado inicial, conforme mencionado a seguir:

TAV9: Se $F = I + (-T)$, então $T = I - F$ com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F < I$

A partir do TAV9, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo aluno A1 na resolução do problema misto 3: *diferença*, *estado inicial, estado final e transformação.*

Ainda, no esquema utilizado pelo aluno A1 há indícios da mobilização do TAV6: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$*, e dos seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.* Para exemplificá-lo em um caso particular, considera-se $f(4 \text{ bolas})$ representando o valor pago em 4 bolas, $f(1 \text{ bola})$ representando o valor pago em 1 bola, e o seguinte raciocínio:

$$f(4 \text{ bolas}) = f(1 \text{ bola} + 1 \text{ bola} + 1 \text{ bola} + 1 \text{ bola}) =$$
$$f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) =$$
$$46 \text{ reais} + 46 \text{ reais} + 46 \text{ reais} + 46 \text{ reais} = 184 \text{ reais}$$

Observa-se que o aluno A1 utiliza a operação de adição para resolver o problema, mas ao explicitar sobre sua resolução, menciona a operação de multiplicação, o que evidencia uma filiação entre o raciocínio aditivo e multiplicativo. Com isso, conjecturamos a mobilização pelo aluno A1 do TAV7: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') + \cdots + f(x') = k \cdot f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão* e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável*.

Para exemplificar o TAV7, considera-se 4 representando a razão, $f(1 \text{ bola})$ representando o valor pago em 1 bola, e o seguinte raciocínio:

$$f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) + f(1 \text{ bola}) =$$
$$4 \times f(1 \text{ bola}) = 4 \times 46 \text{ reais} = 184 \text{ reais.}$$

Portanto, para encontrar o valor pago em 4 bolas, o aluno A1 utilizou o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas; e para encontrar o valor pago em 1 bola, utilizou uma sequência aditiva recursiva com significado de proporção simples um para muitos.

Esquema 2

Os alunos A2, A5, A8 e A10 utilizaram a representação numérica para descrever, como esquema pertinente para a situação, os algoritmos da subtração e da divisão. Cabe ressaltar que a aluna A2 ainda fez a operação de multiplicação para verificar se o resultado da operação de divisão estava correto, como podemos visualizar na Figura 19.

A resolução empregada pela aluna A2 demostra compreensão na relação existente entre a divisão e a multiplicação. Segundo Gitirana *et al.* (2014, p. 102), “[...] A associação entre multiplicação e divisão pode ser destacada pelo professor, pois é uma ótima oportunidade de se apresentarem aos alunos as relações de proximidade entre a divisão e a multiplicação”.

No momento de diálogo, o aluno A5, ao explicar como pensou para resolver o problema, afirmou: *Eu fiz 200 – 16, que dá 184, e dividi 184 por 4, que dá 46 cada bola. Eu paguei 30 na minha bola de basquete, essa tá muito caro*. Por meio dessa fala, observa-se que há sempre um conhecimento implícito no esquema que os alunos não conseguem explicitar, embora sejam capazes de resolver a situação proposta (VERGNAUD, 1996*a*).

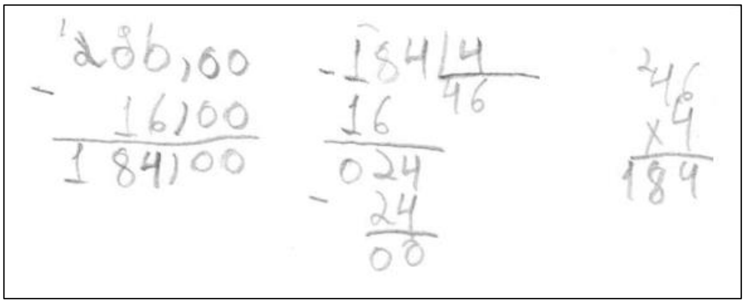


Figura 19: Esquema da aluna A2 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

Há indícios que, para resolverem esse problema, os alunos A2, A5, A8 e A10 mobilizaram a ideia de *correspondência* de um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 46 reais; e em 4 bolas, pagou 184 reais; a ideia de *dependência,* ao determinar que o valor pago em cada bola depende do valor pago em 4 bolas; e, ao dividir o valor de 184 reais pela quantidade de 4 bolas encontraram a *taxa* de proporcionalidade - 46 reais por bola. Por meio dessa *taxa*, conjecturamos que os alunos têm em mente que podem encontrar o valor a pagar em quantas bolas quiser, o que expressa a ideia de *variável*.

O esquema utilizado pelos alunos A2, A5, A8 e A10 apresenta indicativo da mobilização do TAV9: *Se* $F = I + (-T)$, *então* $T = I - F$ com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, e dos seguintes conceitos: diferença, *estado inicial, estado final* e *transformação.*

Ainda nesse esquema indicamos, com base em Vergnaud (1983; 1996*a*; 2007), que os alunos A2, A5, A8 e A10 mobilizaram um teorema em ação verdadeiro, expresso pela propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade. Para exemplificá-lo em termos matemáticos, considera-se 4 equivalente à quantidade de bolas, e $f(4 \text{ bolas})$ representando o valor pago em 4 bolas.

$$\frac{f(4)}{4} = \frac{184}{4} = 46$$

Identificamos o teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV10, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, conforme mencionado a seguir:

TAV10: Seja f uma relação de proporcionalidade, então
$a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.

A partir do TAV10, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos alunos A2, A5, A8 e A10: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.*

Ferraz (2016) identifica o TAV10 manifestado na resolução de problemas de estruturas multiplicativas de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Presumimos que a aluna A2, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, para verificar o resultado da divisão pode ter mobilizado o TAV1: *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x) = a \cdot x$, *se* $x, a \in \mathbb{N}$, *sendo* a *a taxa e,* os seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável,* quando realizou a seguinte relação matemática para um caso particular - o valor pago em 4 bolas é o mesmo que 46 reais por bola (taxa) multiplicado por 4 bolas. Logo,

$$f(4 \text{ bolas}) = 46 \text{ reais por bola} \times 4 \text{ bolas} = 184 \text{ reais.}$$

Portanto, para encontrar o valor pago em 4 bolas, os alunos utilizaram o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas; e para encontrar o valor pago em 1 bola, utilizaram o algoritmo da divisão com significado de proporção simples do tipo partição.

Esquema 3

Para a resolução do problema misto 3, os alunos A4, A6 e A11 utilizaram, como esquema pertinente, o algoritmo da divisão. Para isso, utilizaram a representação numérica. A aluna A11, ainda, utilizou o algoritmo da subtração (Figura 20), como podemos observar em sua fala: *Eu fiz 200 dividido por 4, que deu 50, daí eu peguei o 50 - 16, que deu 34*. Já os alunos A4 e A6 não estabelecerem a relação de transformação de medidas, somente a relação de proporção simples do tipo partição.

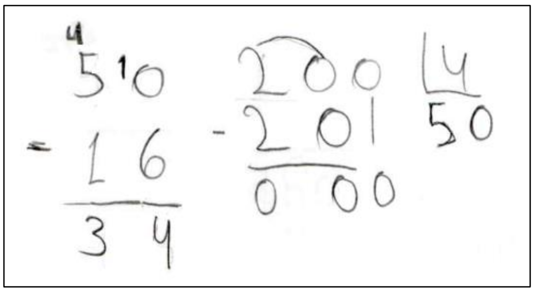


Figura 20: Esquema da aluna A11 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observar o esquema dos alunos A4, A6 e A11, nota-se que ele não é pertinente ao problema proposto, pois não identificaram a ideia de *correspondência* de um para muitos, a ideia de *dependência* e a ideia *proporcionalidade* condizentes com o problema, mas identificamos o estabelecimento da seguinte ideia de *correspondência* de um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 40 reais; e em 4 bolas, pagou 200 reais; da ideia de *dependência* - o valor pago por uma bola depende do valor paga em 4 bolas; da *taxa* de proporcionalidade - 50 reais por bola - ao dividir o valor de 200 reais pela quantidade de 4 bolas; e da ideia de *variável,* ao considerar que, a partir dessa taxa, pode-se encontrar o valor pago em quantas bolas quiser.

No esquema dos alunos A4, A6 e A11, há indicativos da mobilização do TAV10: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa,* e dos seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.* Para exemplificá-lo em notação matemática, considera-se 4 equivalente à quantidade de bolas, $f(4$ bolas$)$ representando o valor pago em 4 bolas, e o seguinte raciocínio.

$$\frac{f(4)}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

No algoritmo da subtração utilizado pela aluna A11, há indícios da mobilização do TAV9: *Se* $F = I + (-T)$*, então* $T = I - F$*,* com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, e dos seguintes conceitos em ação - *diferença, estado inicial, estado final e transformação,* ao realizar o seguinte raciocínio: subtrair o estado final representado por 16 reais do estado inicial representado por 50 reais e, assim, encontrar a transformação, 34 reais.

Neste caso, a aluna A11 cometeu um erro ao subtrair 16 reais (o troco ao comprar 4 bolas) de 50 reais, em vez de subtrair 4 reais (o troco proporcional ao comprar de uma bola) de 50 reais e, assim, não encontrou a solução pertinente ao problema.

Portanto, os alunos A4, A6 e A11, para encontrar o valor pago em 1 bola, utilizaram o algoritmo da divisão com significado de proporção simples do tipo partição, e a aluna A11 também utilizou o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas.

Esquema 4

Para a resolução desse problema misto, a aluna A7 apresenta, como esquema não pertinente, o algoritmo da divisão (Figura 21). Tal esquema é relatado na fala de A7: *Peguei o 200 e dividi por 16, que foi o troco, e deu* 12 reais. *Então acho que ele pagou 12 reais em cada bola.* Deste modo, percebe-se que a aluna A7 não compreendeu as relações estabelecidas entre os dados do enunciado do problema, mas sabia que a resolução do problema envolvia uma operação de divisão.

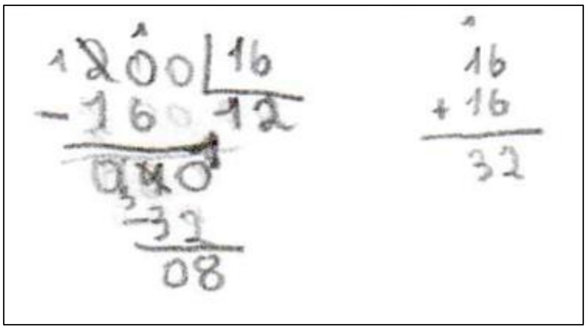


Figura 21: Esquema da aluna A7 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que esse esquema não é pertinente, pois a aluna não manifestou a ideia de *correspondência* de um para muitos, a ideia de dependência e a ideia de proporcionalidade envolvidas na resolução do problema proposto.

Esquema 5

Para a resolução desse problema misto, o aluno A3 apresentou, como esquema não pertinente, o algoritmo da multiplicação (Figura 22) e, para isso, utilizou a representação numérica. Tal esquema é relatado na fala do aluno *A3: Eu fiz 4 x 50, que deu 200. Espera aí... ele pagou 50 ou 54 em cada bola de basquete... é, foi 50 cada bola.* A fala do aluno A3 expressa dúvida em relação ao valor de cada bola.

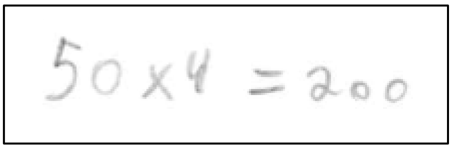


Figura 22: Esquema do aluno A3 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

Também, identificamos esse esquema na fala do Aluno A6: *Para mim, é mais fácil eu ficar contanto o quanto precisa para chegar no resultado daí eu consegui chegar no 50, porque na tabuada do 4 o número que dá isso é o 5, daí eu só completei com um zero depois.* Ao observar a fala do aluno A6, presumimos que ele buscou por um número (5) que, multiplicado por 4, resultaria em 20 e, então, completou esse número com um zero, formando o número 50, para que ele ficasse 10 vezes maior, mantendo a equação equilibrada, $50 \times 4 = 200$.

No esquema dos alunos A3 e A6 há indícios da mobilização da ideia de *correspondência* de um para muitos - em uma bola, Pedro pagou 50 reais; e em 4 bolas, pagou 200 reais; da ideia de *dependência* - o valor pago por uma bola depende do valor paga em 4 bolas; da ideia de *variável,* ao ter em mente que, se alterar a quantidade de bolas, altera-se o valor pago; e da ideia de *proporcionalidade,* ao identificar a taxa - 50 reais por bola, não condizentes com o problema proposto.

Ao analisar esse esquema, indicamos que A3 e A6 mobilizaram o TAV1 - *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, com x, $a \in \mathbb{N}$,* sendo a a taxa; e os conceitos em ação de *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável,* quando multiplicaram a taxa (50 reais por bola) por 4 bolas, resultando em 200 reais. Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro em notação matemática, considera-se 50 representando a taxa, $f(4 \text{ bolas})$ representando o valor pago por 4 bolas, 4 representa a quantidade de bolas, e o seguinte raciocínio:

$$f(4 \text{ bolas}) = 50 \text{ reais por bola} \times 4 \text{ bolas} = 184 \text{ reais}$$

Ainda, nesse esquema, inferimos que o aluno A3 pode ter mobilizado o TAV3 - *Seja* f *relação de proporcionalidade, então* $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k,$ *com* $k, x \in \mathbb{N}$; e o conceito em ação de *comutatividade em relação à multiplicação*, quando fez 50 × 4 = 200; e ao explicitar sobre essa resolução, falou 4 × 50 = 200.

Portanto, os alunos A3, A6 para encontrar o valor pago em 1 bola, utilizaram o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples um para muitos.

Esquema 6

Para a resolução desse problema misto, a aluna A9 apresentou um esquema não pertinente, a operação de adição e subtração; e A12 apresentou, como esquema que não conduziu à resolução, o algoritmo da adição, como mostra a Figura 23. Nesse esquema, as alunas A9 e A12 simplesmente responderam aos problemas sem refletir sobre as relações envolvidas entre dados numéricos do enunciado, apenas operando com os números do enunciado, o que não conduziu à solução do problema.

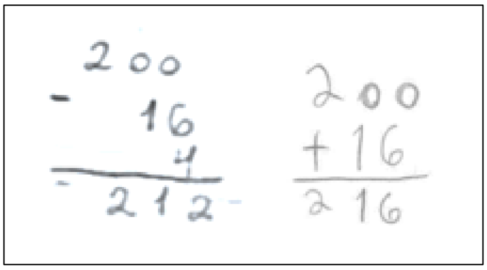


Figura 23: Esquema das alunas A9 e A12 referente ao problema misto 3
Fonte: Dados da pesquisa.

No que se refere aos alunos operarem com dados que não fazem sentido para o problema proposto, Chevallard (1980) relata uma experiência realizada em Grenoble, na França, na qual foi solicitado a 97 alunos responder problemas com dados inadequados, entre eles, o problema conhecido como a Idade do Capitão, que apresenta o seguinte enunciado: Em um barco há 15 cabras e 26 ovelhas. Qual a idade do capitão? O pesquisador relata que, para resolver o problema, a maioria dos alunos somaram a quantidade de cabras e ovelhas e apresentaram um resultado. Com isso, ele concluiu que essa maneira de resolver a situação advém do contrato didático estabelecido na sala de aula, em que o aluno precisa encontrar uma resposta numérica para situação proposta, mesmo quando os dados não fazem sentido.

Considerações sobre as análises do problema misto 3

Na resolução do problema misto pertencente à subclasse *proporção simples do tipo partição e transformação negativa com a transformação negativa desconhecida,* identificamos dois esquemas pertinentes desenvolvidos pelos alunos, sendo um esquema envolvendo o algoritmo da subtração e uma sequência aditiva recursiva; e um esquema envolvendo os algoritmos da divisão e da subtração. Também identificamos quatro esquemas não pertinentes, sendo dois envolvendo o algoritmo da divisão, um envolvendo o algoritmo da multiplicação, e um envolvendo o algoritmo da adição. Para representá-los foram utilizadas representações numéricas.

O aluno A1, ao utilizar uma sequência aditiva recursiva, manifestou as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade e proporcionalidade.* Já os alunos A2, A4, A5, A6, A8, A10 e A11, ao utilizarem o algoritmo da divisão, manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável e proporcionalidade.* Ao utilizar o algoritmo da multiplicação, o aluno A3 manifestou as ideias de *correspondência, dependência, variável e proporcionalidade.*

A partir da análise desses esquemas, apresentamos indícios que os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A10 e A11 mobilizaram, mesmo que implicitamente, invariantes operatórios associados ao conceito de função, sendo seis teoremas em ação verdadeiros, e treze conceitos em ação, como apresentado no Quadro 37.

Teoremas em ação	Conceitos em ação	Alunos
TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, se $x, a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e taxa.	A2, A3 e A6.
TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$, com $k, x \in \mathbb{N}$.	Comutatividade em relação à multiplicação.	A3.
TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.	Adição de funções lineares, correspondência, variável, dependência, regularidade, proporcionalidade e razão.	A1.
TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.	Adição de funções lineares correspondência, variável, dependência, regularidade, proporcionalidade e razão.	A1.
TAV9: Se $F = I + (-T)$, então $\|T\| = I - F$ com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F < I$	Diferença, estado inicial, estado final e transformação.	A1, A2, A5, A8, A10 e A11.
TAV10: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e taxa.	A2, A4, A5, A6, A8, A10 e A11.

Quadro 37: Invariantes operatórios mobilizados no problema misto 3.
Fonte: A autora.

Nessa subclasse, como a relação de *correspondência* não está explicita no enunciado do problema, os alunos apresentaram dificuldades para estabelecer as relações de *correspondência* e *dependência* entre as grandezas, e para encontrar a *taxa* de proporcionalidade. Com isso, salientamos a importância de propor aos alunos situações-problema do tipo partição que busquem por essas relações, de modo a contribuir com o desenvolvimento do conceito de função.

4.4 <u>Problema misto 4:</u> proporção simples do tipo cota e transformação positiva com a transformação positiva desconhecida

Carlos quer comprar um celular que custa R$ 540,00. Ele já possui R$ 60,00, e decidiu economizar R$ 80,00 por mês. Em quantos meses Carlos terá o valor necessário para comprar o celular?

Esse problema coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo cota, do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza, e a relação de transformação positiva com a transformação desconhecida, do campo aditivo, que consiste na aplicação do estado inicial ao estado final para obter a transformação.

Os alunos A1, A5 e A8 resolveram corretamente essa situação-problema, e os demais alunos A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11 e A12 não resolveram corretamente a situação. Ao todo foram manifestados pelos alunos quatro esquemas pertinentes e cinco esquemas não pertinentes para a situação, como apresentamos a seguir.

Esquema 1

Para a resolução desse problema misto, o aluno A1 utilizou, como esquema pertinente, o cálculo mental e as sequências aditivas recursivas. Por meio de tentativa e erro, foi fazendo sequências aditivas recursivas para encontrar o mesmo valor estabelecido no cálculo mental. Para isso, utilizou a representação numérica, como podemos visualizar na Figura 24. No momento do diálogo, ao explicar seu esquema, o aluno A8 utilizou o algoritmo da multiplicação, como exemplificado em sua fala: *Fiz 4 x 80, mas daí eu fiz por mais. Daí o segundo eu fiz × 5. [...] peguei a do 4 e somei*

80. Eu fiz 8 vezes, que é maior, e vezes 7, daí eu fiz a vezes 6. Isso indica a continuidade entre a adição e a multiplicação.

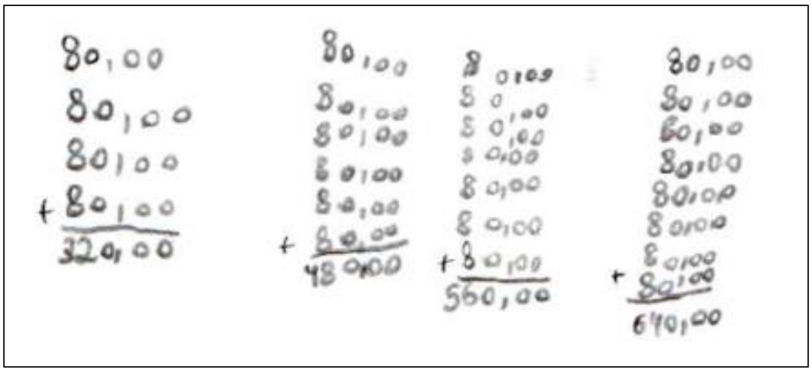


Figura 24: Esquema do aluno A1 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A3 utilizou como esquema não pertinente para a situação, a sequência aditiva recursiva e os algoritmos da adição, como podemos visualizar na Figura 25. No momento do diálogo, o aluno A3 disse: *Sete meses, para mim. Eu fui pensando, 80 + 80 + 80 +...* Observa-se, no esquema do aluno A3, que ele não considerou o valor que Carlos já possuía e, por isso, não apresentou uma resposta correta ao problema, que seria 6 meses, e não sete meses como apresentado em sua resposta.

No esquema do aluno A3, nota-se que ele tentou primeiro por 3 meses, ao somar 160 + 80; depois por quatro meses, ao somar 160 + 160; por 6 meses, ao somar 320 + 160; por sete meses, ao somar 80 sete vezes; também ao somar 320 + 240 e, ainda, por oito meses, ao somar 160 quatro vezes.

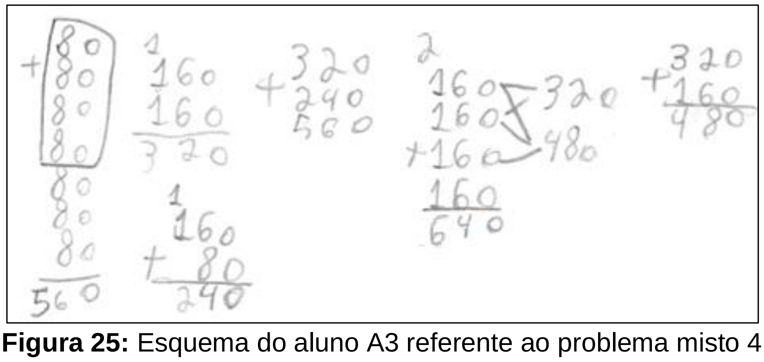


Figura 25: Esquema do aluno A3 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

No esquema apresentado pelos alunos A1 e A3, identificamos a mobilização da ideia de *correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos economizou 80 reais; em 6 meses, Carlos economizou 480 reais; em 7 meses, Carlos economizou 560 reais. Também identificamos a mobilização da ideia de *dependência* - o valor economizado depende da quantidade de meses; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor economizado; da ideia de *proporcionalidade,* ao adicionar 7 vezes (razão) 80 reais para manter a proporcionalidade: 7 vezes 1 mês são 7 meses, então 7 vezes 80 reais são 560 reais; e da ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7), e o valor obtido está aumentando de 80 em 80 (80, 160, 240, 320, 400, 480 e 560). Também, há indício de *regularidade* quando os alunos resolveram a sequência aditiva recursiva somando mais 80 ao resultado anterior, obtendo 560 reais.

O aluno A1 apresenta indicativo da mobilização de um teorema em ação verdadeiro, que consiste em aplicar o estado inicial ao estado final para encontrar a transformação direta. O aluno A1 não representou numericamente o esquema que possibilita a mobilização desse teorema em ação, mas ao realizar as sequencias aditivas recursivas, ele buscava encontrar a transformação correspondente ao resultado desse teorema em ação, o que indica que ele fez um cálculo mental.

Para exemplificá-lo, considera-se que a solução canônica do problema consiste em aplicar o estado inicial, representado por 60 reais, ao estado final, que consiste em 540 reais e, assim, encontrar a transformação, 480 reais. Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV11, como representado a seguir.

TAV11: Se $F = I + T$, então $|T| = F - I$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F > I$.

Subjacente ao TAV11, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizado pelo aluno A1 na resolução do problema misto 4: *diferença, estado inicial, estado final e transformação.*

O esquema utilizado pelos alunos A1 e A3 apresenta indicativo da mobilização do TAV6: *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, *com* $x \in \mathbb{N}$, e dos seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade e variável.* Para exemplificá-lo em notação matemática, considera-se $f(1\ \text{mês})$ equivalente ao valor economizado em 1 mês e o seguinte raciocínio:

$f(6\ \text{meses}) = f(1\ \text{mês} + 1\ \text{mês} + 1\ \text{mês} + 1\ \text{mês} + 1\ \text{mês} + 1\ \text{mês}) =$

$f(1\ \text{mês}) + f(1\ \text{mês}) + f(1\ \text{mês}) + f(1\ \text{mês}) + f(1\ \text{mês}) + f(1\ \text{mês}) =$

$80\ \text{reais} + 80\ \text{reais} + 80\ \text{reais} + 80\ \text{reais} + 80\ \text{reais} + 80\ \text{reais} = 480\ \text{reais}.$

Ainda, no esquema dos alunos A1 e A3, inferimos a mobilização de um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos a uma relação de comparação. Para exemplificá-lo, consideram-se $x = 4$ meses, $x = 5$ meses, $f(4$ meses$)$ equivalente ao valor economizado em 4 meses, $f(5$ meses) equivalente ao valor economizado em 5 meses, e o seguinte raciocínio:

$$4 < 5 \text{ então } f(4) < f(5)$$

Indicamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV12, e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, conforme apresentado a seguir:

TAV12: Seja f uma relação de proporcionalidade, tal que $x < x'$, então $f(x) < f(x')$, com $x,\ x' \in \mathbb{N}$.

A partir do TAV12, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo aluno A1: *comparação, correspondência, dependência e variável.*

Esse conhecimento mobilizado pelos alunos A1 e A3 foi explicitado por Ricco (1982) e Franchi (1999).

Observa-se que o aluno A1 utiliza sequencias aditivas recursivas para resolver o problema, mas ao explicitar sobre sua resolução, menciona a operação de multiplicação, o que evidencia uma filiação entre o raciocínio aditivo e multiplicativo. Com isso, conjecturamos a mobilização pelo aluno A1 do TAV7: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') + \cdots + f(x') = k \cdot f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão* e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.*

Para exemplificar o TAV7, considera-se 6 representando a razão, $f(6$ meses) representando o valor economizado em 6 meses, e o seguinte raciocínio:

$f(6 \text{ meses}) = f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) = 6 \times f(1 \text{ mês}) = 6 \times 80 \text{ reais} = 480 \text{ reais}.$

Portanto, para encontrar a quantidade que Carlos precisava economizar em determinados meses, inferimos que o aluno A1 fez uma operação de subtração com o significado de transformação de medidas, por meio do cálculo mental. Para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, os alunos A1 e A3 utilizaram sequências aditivas recursivas com significado de proporção simples um para muitos. O aluno A3 não encontrou a resolução correta para situação proposta, pois não estabeleceu a relação de transformação de medidas, o que indica falta de compreensão da situação proposta.

Esquema 2

Para resolver a situação proposta, a aluna A2 utilizou a representação numérica para representar, como esquema não pertinente, os algoritmos da adição e da multiplicação (Figura 26). A fala da aluna A2 atesta sua escolha: *Aqui eu fiz 80 + 60, que deu 140. Daí eu fui fazendo de vezes para chegar no valor mais perto que ele queria para comprar o celular: 2×140, que deu 280; 3×140, que deu 420; e 4×140, que deu 560, o mais perto que achei. Deu 4 meses e sobraram 20 reais.*

Observa-se, nesse esquema, que a aluna A2 não identificou a *taxa* - 80 reais por mês - proposta no problema, o que a levou a utilizar um esquema ineficaz.

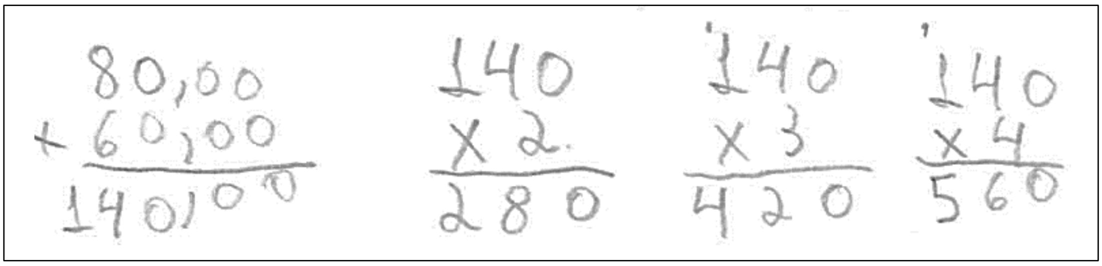


Figura 26: Esquema da aluna A2 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

No esquema da aluna A2, há indícios da mobilização da ideia de *correspondência* de um para muitos - em 1 mês, Carlos obteve 140 reais,..., em 4 meses, Carlos obteve 560 reais; da ideia de *dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas dos meses passados, mas também do valor que Carlos já possuía; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor obtido; da ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3 e 4), e o valor obtido está aumentando de 140 em 140 (140, 280, 420 e 560); e mesmo não deixando explícita a ideia de *generalização*, tem em mente que pode encontrar o valor obtido em qualquer quantidade de mês multiplicando a quantidade de meses pela *taxa* - 140 reais por mês. Embora a aluna A2 tenha apresentado tais ideias associadas ao conceito de função, elas não apresentam valores condizentes para solução da situação proposta.

Segundo Tinoco (2002, p. 6) a *generalização* exige a “[...] capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os”. Para isso, salientamos que é necessário propor ao aluno uma questão específica, levando-o a manifestar essa ideia; por exemplo: *Como encontramos o valor obtido para qualquer quantidade de meses?*

Ao utilizar o algoritmo da adição como parte do esquema, a alunas A2 pode ter mobilizado o TAV8: $F = I + (\pm T)$, *com* $F,\ I \in \mathbb{N}$ *e* $T \in \mathbb{Z}$, e os conceitos em ação de *estado inicial, estado final e transformação.* Para exemplificá-lo, considera-se que a Aluno A2 aplicou a transformação representada por 80 reais ao estado inicial, que diz respeito a 60 reais e, assim, encontrou o estado final, 140 reais.

Também, presumimos que a aluna A2 mobilizou em seu esquema o TAV1: *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x) = a \cdot x$, *com* $x,\ a \in \mathbb{N}$, *sendo* a *a taxa;* e os seguintes os conceitos em ação: *correspondência, dependência, multiplicação, proporcionalidade, regularidade, taxa e variável,* quando considerou $f(1\text{ mês}) = 140$ reais e realizou os raciocínios seguintes:

$$f(2\text{ meses}) = 2\text{ meses} \times 140\text{ reais por mês} = 280\text{ reais}$$
$$f(3\text{ meses}) = 3\text{ meses} \times 140\text{ reais por mês} = 420\text{ reais}$$
$$f(4\text{ meses}) = 4\text{ meses} \times 140\text{ reais por mês} = 560\text{ reais}$$

Portanto, para encontrar a quantidade que Carlos precisava economizar em determinados meses, inferimos que a aluna A2 utilizou o algoritmo da adição com o significado de transformação de medidas. Já para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, a aluna A2 utilizou o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples um para muitos.

Esquema 3

Para a resolução do problema misto 4, a aluna A4 utilizou a representação numérica para representar um esquema não pertinente, que consiste no algoritmo da multiplicação (Figura 27), conforme relatado em sua fala: *Fui multiplicando por 80 até dar o total de dinheiro que precisava ter para comprar o celular*. Porém, a aluna A4 não considerou, para resolver o problema, o valor que Carlos já possuía, e isso a fez considerar que são necessários 7 meses para obter o valor para comprar o celular, o que não está correto para situação proposta.

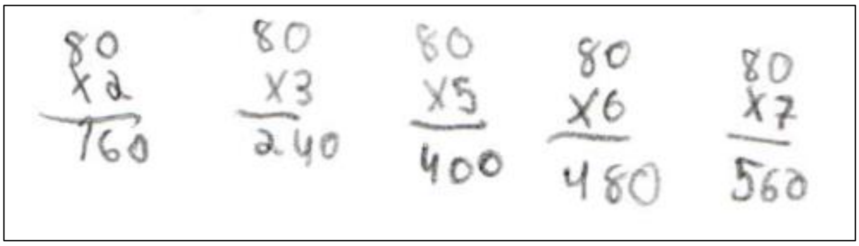


Figura 27: Esquema da aluna A4 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A6 também utilizou, como esquema não pertinente, o algoritmo da multiplicação (Figura 28), como relatado por ele*: Na 3 eu fui vendo na tabuada qual chegava mais perto, e deu a tabuada do 7.* Observa-se que o aluno A6 buscou mentalmente encontrar na tabuada um número que, multiplicado por 8, chegaria perto do 54 e, então, esse número corresponderia ao mesmo número que, multiplicado por 80, chegaria perto do 540, o valor do celular.

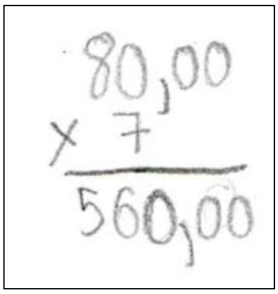


Figura 28: Esquema do aluno A6 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

No esquema apresentado pelos alunos A4 e A6, identificamos a mobilização da ideia de *correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos economizou 80 reais; em 7 meses, Carlos economizou 560 reais. Também, da ideia de *dependência* - o valor economizado depende da quantidade de meses; da ideia de *variável,* ao variar a quantidade de meses para encontrar o valor economizado; da ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7) e o valor obtido está aumentando de 80 em 80 (80, 160, 240, 320, 400, 480, 560); e mesmo não deixando clara a ideia de *generalização*, nota-se uma possibilidade de encontrar o valor economizado em qualquer quantidade de meses multiplicando a quantidade de meses pela *taxa* (80 reais por mês). Embora os alunos A4 e A6 tenham apresentado tais ideias associadas ao conceito de função, não encontraram a solução correta ao problema, pois não consideraram o valor que Carlos já possuía, ou seja, não perceberam a relação de transformação de medidas.

Ao analisar esse esquema, indicamos que os alunos A4 e A6, ao utilizarem o algoritmo da multiplicação, podem ter mobilizado o TAV1 - *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x) = a \cdot x$, *se* x, $a \in \mathbb{N}$, *sendo* a *a taxa;* e os seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, multiplicação, proporcionalidade, taxa e variável,* quando realizaram a seguinte relação matemática para um caso particular: o valor obtido em 7 meses é o mesmo que 80 reais por mês (taxa) multiplicado por 7 meses. Portanto,

$f(7\text{ meses}) = 80$ reais por mês $\times\ 7$ meses $= 560$ reais.

Logo, para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, os alunos A4 e A6 utilizaram o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples um para muitos, e não estabeleceram a relação aditiva de transformação de medidas presente no problema.

Esquema 4

O esquema pertinente para a situação utilizado pelo aluno A5 consiste nos algoritmos da adição (Figura 29), como atestado em sua fala: *Eu fiz tudo de mais, primeiro. Daí eu juntei 60 + 80, 140. Daí 140 + 80, 220; 220 + 80, 300; 300 + 80, 380; 380 + 80, 460; 460 + 80, 540.* Para representá-lo, o aluno A5 utilizou a representação numérica.

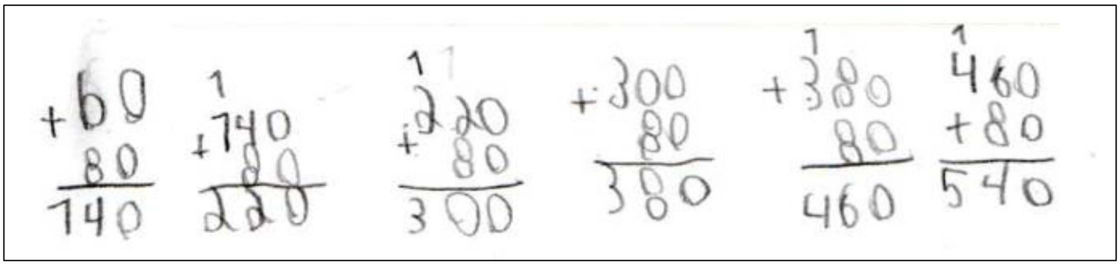


Figura 29: Esquema do aluno A5 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema apresentado pelo aluno A5, identificamos a mobilização da ideia de *correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos obteve 140 reais; em 6 meses, Carlos obteve 540 reais. Também da ideia de *dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas da quantidade de meses que Carlos economizou 80 reais, mas também do valor que Carlos já tinha; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor necessário para comprar o celular; da ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5 e 6) e o valor obtido para comprar o celular está aumentando de 80 em 80 (140, 220, 300, 380, 460, 540). Assim, pode-se encontrar o valor economizado em qualquer quantidade de mês somando 80 ao número anterior, totalizando 540 reais.

No esquema do aluno A5 existem duas possibilidades de analisar indícios de teoremas em ação. A primeira possibilidade consiste na mobilização pelo aluno A5 de um teorema em ação verdadeiro, quando considerou $f(1 \text{ mês})$ o valor obtido em 1 mês e os seguintes raciocínios.

$$f(1 \text{ mês}) = 80 \text{ reais} + 60 \text{ reais} = 140 \text{ reais}$$
$$f(2 \text{ meses}) = f(1 \text{ mês}) + 80 \text{ reais} = 140 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 220 \text{ reais}$$
$$f(3 \text{ meses}) = f(2 \text{ meses}) + 80 \text{ reais} = 220 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 300 \text{ reais}$$
$$f(4 \text{ meses}) = f(3 \text{ meses}) + 80 \text{ reais} = 300 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 380 \text{ reais}$$
$$f(5 \text{ meses}) = f(4 \text{ meses}) + 80 \text{ reais} = 380 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 420 \text{ reais}$$
$$f(6 \text{ meses}) = f(5 \text{ meses}) + 80 \text{ reais} = 420 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 540 \text{ reais}$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV13, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação funcional e c uma constante, como apresentado a seguir:

TAV13: Se f é uma relação funcional então $f(x') = f(x) + c$ com $x', x, c \in \mathbb{N}$ e $x' > 1$.

A partir do TAV13, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo aluno A5: constante, *correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade* e *variável.*

Outra possibilidade consiste na mobilização pelo aluno A5 de um teorema em ação verdadeiro, quando manifestou implicitamente os seguintes raciocínios.

$$f(1 \text{ mês}) = 80 \text{ reais} \times 1 \text{ mês} + 60 \text{ reais} = 140 \text{ reais}$$
$$f(2 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 2 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 220 \text{ reais}$$
$$f(3 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 3 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 300 \text{ reais}$$
$$f(4 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 4 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 380 \text{ reais}$$
$$f(5 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 5 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 460 \text{ reais}$$
$$f(6 \text{ meses}) = 80 \text{ reais} \times 6 \text{ meses} + 60 \text{ reais} = 540 \text{ reais}$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV14, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação funcional, a a taxa e b uma constante, como apresentado a seguir:

TAV14: Se f é uma relação funcional então $f(x) = a \cdot x + b$ com $a, b, x \in \mathbb{N}$.

Subjacente ao TAV14, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelo aluno A5: constante, *correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade, taxa* e *variável.*

Portanto, para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, o aluno A5 utilizou o algoritmo da adição com significado de transformação de medidas.

Esquema 5

O esquema não pertinente para a situação apresentado pela aluna A7 consiste nos algoritmos da adição, e está aportado por meio da representação numérica (Figura 30), conforme atesta sua fala: *Eu fui fazendo 80 + 80, que dá 160. Daí, 160 + 80, que dá 240, e fui fazendo até dar um valor próximo àquele lá, que precisa para comprar o celular.* Observa-se que a aluna A7 não considerou o valor que Carlos já tinha e, com isso, não consegui encontrar a quantidade de meses correta.

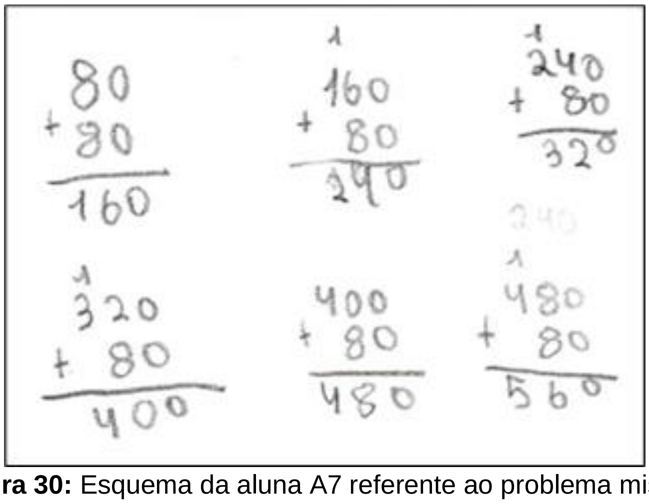


Figura 30: Esquema da aluna A7 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema apresentado pela aluna A7, identificamos a mobilização da ideia de *correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos obteve 160 reais, ... em 7 meses, Carlos obteve 560 reais; da ideia de *dependência* - o valor economizado depende quantidade de meses; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor economizado em 7 meses; da ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está aumentando de 1 em 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7) e o valor economizado está aumentando de 80 em 80 (80, 160, 240, 320, 400, 480, 560). Embora a aluna A7 tenha apresentado tais ideias associadas ao conceito de função, ela não encontrou a solução correta ao problema, pois não considerou o valor que Carlos já possuía, e isso fez com que ela considerasse mais um mês.

É possível indicar, no esquema da aluna A7, a mobilização do TAV6 - *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, *com* $x, x' \in \mathbb{N}$, e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade* e *variável.* Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, considera-se $f(1 \text{ mês}) = 80$ reais, que consiste no valor economizado a cada mês. Logo,

$$f(2 \text{ meses}) = f(1 \text{ mês}) + f(1 \text{ mês}) = 80 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 160 \text{ reais}$$
$$f(3 \text{ meses}) = f(2 \text{ meses}) + f(1 \text{ mês}) = 160 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 240 \text{ reais}$$
$$f(4 \text{ meses}) = f(3 \text{ meses}) + f(1 \text{ mês}) = 240 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 320 \text{ reais}$$
$$f(5 \text{ meses}) = f(4 \text{ meses}) + f(1 \text{ mês}) = 320 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 400 \text{ reais}$$
$$f(6 \text{ meses}) = f(5 \text{ meses}) + f(1 \text{ mês}) = 400 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 480 \text{ reais}$$
$$f(7 \text{ meses}) = f(6 \text{ meses}) + f(1 \text{ mês}) = 480 \text{ reais} + 80 \text{ reais} = 560 \text{ reais}$$

Por fim, para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, a aluna A7 utilizou o algoritmo da adição com significado de transformação de medidas.

Esquema 6

Para resolver o problema misto 4, a aluna A8 utilizou a representação numérica para representar, como esquema não pertinente, o algoritmo da subtração e as subtrações sucessivas (Figura 31), conforme também identificado em sua fala: *Fiz várias contas de menos e o resultado deu 5 meses.* Nota-se que a aluna A8 não encontrou a solução correta para resolver o problema, pois faltou realizar a subtração até obter 0 reais e, então, ao contar a quantidade grupos de 80 reais, que foram subtraídos, obteve 5 meses, em vez de 6 meses.

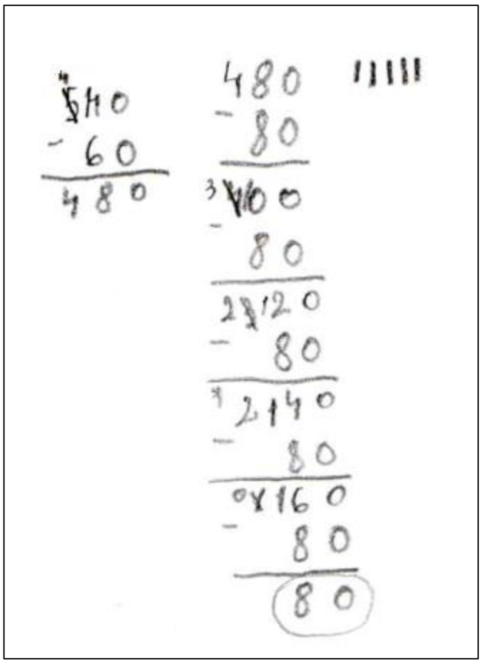


Figura 31: Esquema da aluna A8 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema apresentado pela aluna A8, identificamos a mobilização da ideia de *correspondência* um para muitos - em um mês, Carlos obteve 80 reais; em 5 meses, Carlos obteve 480 reais. Também da ideia de *dependência* - o valor obtido não depende apenas da quantidade de meses, mas também do valor que Carlos já tinha; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor economizado correspondente; e a ideia de *regularidade* - a quantidade de meses está diminuindo de 1 em 1 (6, 5, 4, 3, 2, 1) e o valor economizado está diminuindo de 80 em 80 (480, 400, 320, 240, 160, 80). Portanto, pode-se encontrar a quantidade de meses em que Carlos economizou 80 reais diminuindo 80 ao número anterior.

Ao analisar esse esquema, indicamos que a aluna A8 mobilizou o TAV11 - *Se* $F = I + T$, *então* $|T| = F - I$, *com* $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, *sendo* $F > I$, e os seguintes conceitos em ação: *estado inicial, estado final e transformação,* conforme explicitado anteriormente.

Ainda, indicamos a possibilidade de mobilização do TAV6 - *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, *com* $x, x' \in \mathbb{N}$, e os seguintes conceitos em ação: *adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.* Para exemplificar esse teorema em ação verdadeiro, considera-se $f(6\text{ meses}) = 480$ reais, que consiste no valor economizado em 6 meses; e $f(1\text{ mês}) = 80$ reais, que consiste no valor economizado em 1 mês. Assim, as análises mostram que a aluna A8 indica manifestar tais procedimentos:

$$f(5\text{ meses}) = f(6\text{ meses}) - f(1\text{ mês}) = 480\text{ reais} - 80\text{ reais} = 400\text{ reais}$$
$$f(4\text{ meses}) = f(5\text{ meses}) - f(1\text{ mês}) = 400\text{ reais} - 80\text{ reais} = 320\text{ reais}$$
$$f(3\text{ meses}) = f(4\text{ meses}) - f(1\text{ mês}) = 320\text{ reais} - 80\text{ reais} = 240\text{ reais}$$
$$f(2\text{ meses}) = f(3\text{ meses}) - f(1\text{ mês}) = 240\text{ reais} - 80\text{ reais} = 160\text{ reais}$$
$$f(1\text{ mês}) = f(2\text{ meses}) - f(1\text{ mês}) = 160\text{ reais} - 80\text{ reais} = 80\text{ reais}$$

Portanto, para encontrar a quantidade que Carlos precisava economizar em determinados meses, inferimos que a aluna A8 utilizou o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas; e para encontrar a quantidade de meses que foram necessários economizar 80 reais para obter o valor para comprar o celular, a mesma aluna realizou subtrações sucessivas com significado de proporção simples um para muitos.

Esquema 7

O esquema pertinente para a situação utilizado pela aluna A10 consiste nos algoritmos da subtração e da multiplicação (Figura 32), conforme apresentado em sua fala: *A primeira que eu fiz foi de menos, que é 540 – 60 que dá 480. Depois, fiz uma de vezes: 80 × 6, que também deu 480.* Para representar o esquema, a aluna A10 utilizou a representação numérica.

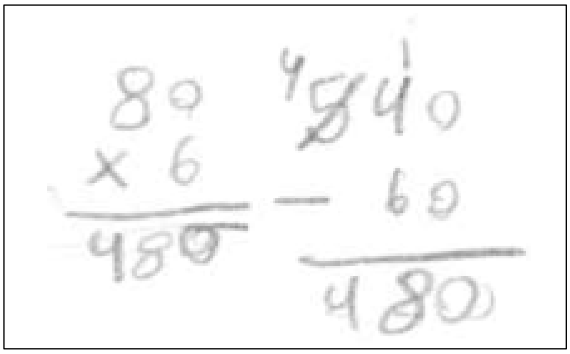


Figura 32: Esquema da aluna A10 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar esse esquema da aluna A10, identificamos indícios da mobilização da ideia de *correspondência* de um para muitos - em 1 mês, Carlos economizou 80 reais; em 6 meses, Carlos obteve 480 reais. Também a ideia de *dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas dos meses passados, mas também do valor que Carlos já possuía; da ideia de *variável,* pois ao variar a quantidade de meses encontra-se o valor economizado correspondente ao número de meses e, da ideia de *proporcionalidade* pela utilização da *taxa* – 80 reais por mês, mantendo a proporção de 1:80.

Ao analisar esse esquema, indicamos que a aluna A10 mobilizou o TAV11 - *Se* $F = I + T$, *então* $|T| = F - I$, *com* $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, *sendo* $F > I$, e os seguintes conceitos em ação: *estado inicial, estado final* e *transformação,* conforme explicitado anteriormente.

A aluna A10, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, pode ter mobilizado o TAV1 - *Seja* f *uma relação de proporcionalidade, então* $f(x) = a \cdot x$, *se* $x, a \in \mathbb{N}$, *sendo* a *a taxa,* e os seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, multiplicação, proporcionalidade, taxa* e *variável,* quando realizou a seguinte relação matemática para um caso particular - o valor obtido em 6 meses é o mesmo que 80 reais por mês (taxa) multiplicado por 6 meses.

Esse teorema em ação pode ser representado em notação matemática ao considerar $f(6$ meses) representando o valor economizado em 6 meses, 80 reais por mês representando a taxa, e o seguinte raciocínio:

$$f(6 \text{ meses}) = f(6 \times 1 \text{ mês}) = 6 \times f(1 \text{ mês}) = 6 \times 80 \text{ reais por mês} = 480 \text{ reais}$$

Nesse esquema, inferimos que a aluna A10 pode ter mobilizado o TAV3 - *Seja* f *relação de proporcionalidade, então* $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$, *com* $k, x \in \mathbb{N}$; e o conceito em ação de *comutatividade em relação à multiplicação*, quando fez 6 × 80 = 480; e ao explicitar sobre essa resolução, pois falou 80 × 6 = 480.

Deste modo, para encontrar a quantidade que Carlos precisava economizar em determinados meses, inferimos que a aluna A10 utilizou o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas; e para encontrar a quantidade de meses que foram necessários para obter o valor para comprar o celular, ela utilizou o algoritmo da multiplicação com significado de proporção simples um para muitos.

Esquema 8

Para resolver o problema misto 4, a aluna A11 utilizou, como esquema pertinente, os algoritmos da subtração, divisão e multiplicação (Figura 33). Para isso, utilizou a representação numérica. Esse esquema é explicitado pela aluna A11: *Primeiro eu fiz 540 – 60, deu 480. Peguei 480 e dividi por 80, daí deu 6, então ele vai ter que economizar em 6 meses.* A aluna A11 apresenta compreender a relação existente entre a divisão e a multiplicação, ao verificar se a operação de divisão estava correta, fazendo a operação de multiplicação.

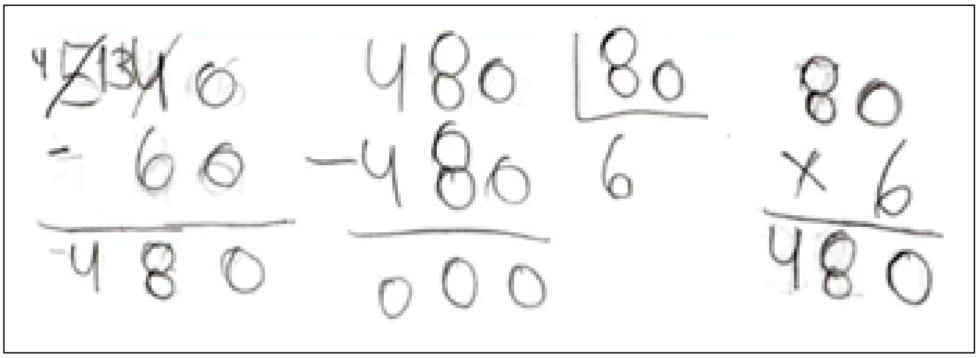


Figura 33: Esquema da aluna A11 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa.

Há indícios que, para resolver esse problema, a aluna A11 mobilizou a ideia de *correspondência* de um para muitos - em 1 mês, Carlos economizou 80 reais; em 6 meses, Carlos obteve 480 reais. Também a ideia de *dependência* - o valor obtido para comprar o celular não depende apenas dos meses passados, mas também do valor que Carlos já possuía; e a ideia de *proporcionalidade,* ao dividir o valor economizado pela *taxa* - 80 reais por mês – e encontrar a quantidade de meses. Ao fazer a verificação da operação de divisão, multiplicando o número de meses encontrado pela taxa, conjecturamos que a aluna tem em mente que pode encontrar o valor a pagar em quantas meses forem necessários, o que expressa indícios da ideia de *variável* e da ideia de *generalização.*

Ao analisar o algoritmo da subtração, indicamos que a aluna A11 mobilizou o TAV11 - *Se* $F = I + T$*, então* $|T| = F - I$*, com* $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, *sendo* $F > I$, e os seguintes conceitos em ação: *estado inicial, estado final e transformação,* quando realizou os seguintes cálculos $540\ (F) - 60\ (I)\ =\ 480\ (T)$.

Também indicamos que a aluna A11 pode ter mobilizado um teorema em ação verdadeiro, o qual associamos a respectiva propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade. Para exemplificá-lo, considera-se $f(6\,\text{meses})$ representando o valor economizado em 6 meses, 80 reais por mês representando a taxa, e o seguinte raciocínio:

$$\frac{f(6)}{80} = \frac{480}{80} = 6 \text{ então } 6 \times 80 = 480$$

Identificamos esse teorema em ação verdadeiro pela sigla TAV15, e o modelamos, ao considerar $f(x)$ uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas, a representando a taxa e x um número natural, como apresentado a seguir:

TAV15: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.

A partir do TAV15, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pela aluna A11: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa* e *variável.*

Ferraz (2016), em sua pesquisa de mestrado, identificou o TAV15 na resolução de problemas de estruturas multiplicativas de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Cabe mencionar que o TAV15 é diferente do TAV10, porque no TAV15 busca-se pela variável (quantidade de cotas) e no TAV10 busca-se pela *taxa* (quantidade de partes), ou seja, o aluno manifesta raciocínio diferente para resolução da situação.

A aluna A11, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, para verificar o resultado da divisão pode ter mobilizado o TAV1: *Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, se $x, a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa e,* os seguintes conceitos em ação: *correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável,* quando realizou a seguinte relação matemática para um caso particular - o valor economizado é o mesmo que 80 reais por mês (taxa) multiplicado por 6 meses. Logo,

$f(6 \text{ meses}) = 80$ reais por mês $\times\ 6$ meses $= 480$ reais.

Portanto, para encontrar o valor que Carlos precisa economizar em x meses, a aluna A11 utilizou o algoritmo da subtração com o significado de transformação de medidas; e para encontrar a quantidade de meses, utilizou o algoritmo da divisão com significado de proporção simples do tipo cota.

Esquema 9

As alunas A9 e A12 utilizaram a representação numérica para representar, como esquema que não conduziu à solução do problema misto, o algoritmo da adição, como mostra a Figura 34.

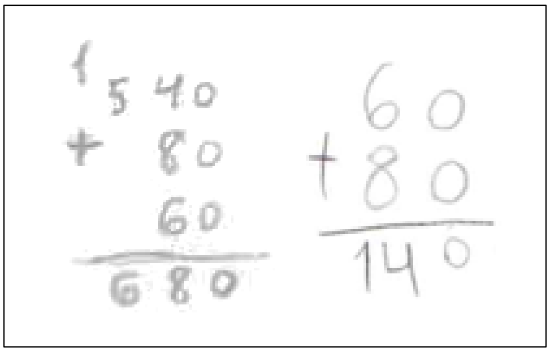


Figura 34: Esquema das alunas A9 e A12 referente ao problema misto 4
Fonte: Dados da pesquisa,

Nesse esquema, as alunas A9 e A12 simplesmente somaram os números do enunciado, o que evidencia nenhuma relação lógica entre os dados do referido enunciado. A aluna A12 também não considerou o valor do celular, chegando à conclusão de que são necessários 140 meses, o que produz um resultado não apropriado para a situação.

Segundo Santomauro (2010), quando a criança não estabelece relações entre os dados do enunciado que levam à resposta, e nem utiliza a operação correta, ela organiza os dados do enunciado com o procedimento que lhe parece mais familiar: a soma, como constatado na resolução das alunas A9 e A12.

Considerações sobre as análises do problema misto 4

Na resolução do problema misto do tipo *proporção simples quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido,* identificamos quatro esquemas pertinentes desenvolvidos pelos alunos, sendo um esquema envolvendo o cálculo mental e as sequências aditivas recursivas; um esquema envolvendo os algoritmos da adição; um esquema os algoritmos da subtração e da multiplicação; e um esquema os algoritmos da subtração, divisão e multiplicação. Ainda, identificamos cinco esquemas não pertinentes, sendo um deles envolvendo os algoritmos da adição e da multiplicação; um esquema, o algoritmo da multiplicação; dois envolvendo o algoritmo da adição; e um esquema envolvendo o algoritmo da subtração e as subtrações sucessivas. Para representar esses esquemas, foram utilizadas representações numéricas.

Os alunos A1 e A3, ao utilizarem uma sequência aditiva recursiva, manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade* e *proporcionalidade.* As alunas A2 e A4, ao utilizarem uma sequência multiplicativa; e o aluno A6, ao utilizar o algoritmo da multiplicação com base na tabuada, manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade* e *proporcionalidade.* Já a aluna A10, ao utilizar o algoritmo da multiplicação, manifestou as ideias de *correspondência, dependência, variável e proporcionalidade.*

A aluna A8, ao utilizar as subtrações sucessivas; e os alunos A5 e A7, ao utilizarem o algoritmo da adição, mobilizaram as ideias de *correspondência, dependência, variável* e *regularidade.* A aluna A11, ao utilizar os algoritmos da divisão e multiplicação, mobilizou as ideias de *correspondência, dependência, variável, regularidade* e *proporcionalidade.*

Para Gitirana *et al.* (2014), os alunos apresentam dificuldades em fazer a associação de um problema multiplicativo que pode ser revolvido por uma divisão. Diante essa dificuldade, eles utilizam outros esquemas para resolver esse tipo de problema, por exemplo: as subtrações sucessivas, como identificado nesta pesquisa.

A partir da análise desses esquemas, apresentamos indícios que os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10, A11e A12 mobilizaram, mesmo que implicitamente, invariantes operatórios associados ao conceito de função, sendo dez teoremas em ação verdadeiros, e quinze conceitos em ação, como podemos visualizar na página seguinte, no Quadro 38.

Teoremas em ação	Conceitos em ação	Alunos
TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x,$ se $x,\ a\ \in\ \mathbb{N}$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e taxa.	A2, A4, A6, A10 e A11.
TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) =\ f(x) \cdot k$, com $k, x\ \in \mathbb{N}$.	Comutatividade em relação à multiplicação.	A10.
TAV6: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.	Adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.	A1, A3, A7 e A8.
TAV7: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.	Adição de funções lineares correspondência, variável, dependência, regularidade, proporcionalidade e razão.	A1.
TAV8: $F = I$ **+** $(\pm T)$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in\ \mathbb{Z}$.	Estado inicial, estado final e transformação.	A2.
TAV11: Se $F = I + T$, então $\|T\| = F -\ I$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F > I$.	Diferença, estado inicial, estado final e transformação.	A1, A8, A10 e A11.
TAV12: Seja f uma relação de proporcionalidade, tal que $x\ <\ x'$, então $f(x) < f(x')$, com $x\ , x' \in \mathbb{N}$.	Comparação, correspondência, proporcionalidade, variável.	A1 e A3.
TAV13: Se f é uma relação funcional então $f(x') = f(x) + c$ com $x', x, c \in\ \mathbb{N}$ e $x' > 1$.	Constante, correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e regularidade.	A5.
TAV14: Se f é uma relação funcional então $f(x) = a \cdot x + b$, com $a, b, x \in\ \mathbb{N}$.	Constante, correspondência, dependência, variável, proporcionalidade, regularidade e taxa.	A5.
TAV15: Seja f uma relação de proporcionalidade, $x =\ \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e taxa.	A11.

Quadro 38: Invariantes operatórios mobilizados no problema misto 4.
Fonte: A autora.

A partir desses invariantes operatórios associados ao conceito de função identificados nos esquemas dos alunos, confirma-se o que foi mencionado por Magina e Porto (2018), que na base das operações aritméticas há noções de função. Neste sentido, a BNCC (BRASIL, 2018) recomenda a aplicação de situações-problema envolvendo a proporcionalidade, que permita o desenvolvimento das noções de função. Pesquisas (TINOCO, 2002; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020; SILVA, 2021) recomendam que as ideias-base de função - *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização* sejam exploradas pelos alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar este texto, apresentam-se respostas relacionadas à questão que norteou o desenvolvimento desta investigação: *Que invariantes operatórios associados ao conceito de função são mobilizados por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas?* Para obter tal resposta, verificaram-se as contribuições da fundamentação teórica e da metodologia adotadas.

Quanto aos procedimentos metodológicos, os dados foram produzidos a partir da resolução, pelos alunos, de quatro de problemas mistos previamente elaboradas, e do diálogo final entre a pesquisadora e os alunos, que aconteceu em um único encontro, no mês de junho de 2021, para 12 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Os encontros entre pesquisadora e cada aluno (individualmente) aconteceram por meio do aplicativo *Google Meet*, pois devido à pandemia de Covid-19, as instituições de ensino estavam fechadas para atendimento presencial. Para auxiliar nas análises da pesquisa, optou-se por gravar os encontros em vídeo, o que possibilitou à pesquisadora analisar as reações dos alunos durante a resolução de cada problema e transcrever o diálogo final com eles.

A Teoria dos Campos Conceituais fundamentou a hipótese de pesquisa: Os problemas mistos pertencentes à classe *proporção simples e transformação de medidas* possibilitam aos alunos a manifestação de invariantes operatórios associados ao conceito de função. Os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo estabelecidos por Vergnaud (1983, 1993, 1996*a*, 2009*a*) foram essenciais para a construção do instrumento de pesquisa e para direcionar a análise das resoluções dos alunos.

Referente às análises, a Teoria dos Campos Conceituais ofereceu subsídios para compreender os esquemas os alunos, oportunizando revelar possíveis conhecimentos implícitos na forma de teoremas em ação e conceitos em ação associados ao conceito de função.

Para a resolução dos problemas mistos, os alunos utilizaram como esquemas os algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão, bem com o cálculo mental, a sequência aditiva recursiva e as subtrações sucessivas, que foram expressas pelas representações numérica (algoritmos) e pictórica (desenhos), sendo a representação pictórica utilizada por apenas dois alunos. Com isso, concluímos que, para uma mesma subclasse de problemas, os alunos mobilizam diferentes esquemas e maneiras de representá-los.

Os alunos, ao resolverem os quatro problemas mistos envolvendo a relação de *proporcionalidade e transformação de medidas* utilizando como esquema o algoritmo da multiplicação, podem ter manifestado implicitamente a ideia de *proporcionalidade* e as ideias-base de função de *correspondência, dependência, variável e regularidade.* Assim, corroboramos com Pavan (2010, p. 87), que afirma: a “[...] multiplicação enquanto conceito se constrói ao mesmo tempo e apoia e serve de apoio às ideias básicas do conceito de função”.

Utilizando a sequência aditiva recursiva ou as subtrações sucessivas, os alunos podem ter manifestado implicitamente a ideia de *proporcionalidade* e algumas ideias-base de função de *correspondência, dependência, variável e regularidade.* Já o algoritmo da divisão permite a manifestação implícita da ideia de *proporcionalidade* e das ideias-base de função de *correspondência, dependência e variável.*

Como esquema, os colaboradores da pesquisa ora utilizaram o algoritmo da adição, ora utilizaram o algoritmo da multiplicação. Com isso, percebe-se que a operação de adição é a mais segura no momento de resolver o problema, e a multiplicação ainda não está consolidada para maioria dos alunos. Segundo Vergnaud (1993), os algoritmos são esquemas efetivos, por isso considera-se que eles foram bastante utilizados nas resoluções dos problemas mistos, tal fato mostra que os alunos do 5º ano dos anos iniciais estão aptos a resolver problemas por meio desses esquemas (algoritmos).

No problema misto 1, que envolve a subclasse *proporção simples um para muitos e transformação de medidas com o estado inicial desconhecido*, foram apresentadas 10 resoluções corretas dentre as 12 resoluções. Os alunos tiveram mais facilidade nessa classe, consideramos que isso ocorreu pelo fato de a taxa de proporcionalidade estar explícita no enunciado do problema. No problema misto 2, que envolve a subclasse *proporção simples quarta proporcional e transformação de medidas com o estado final desconhecido*, foram apresentadas 4 resoluções corretas, analisamos que isso ocorreu pelo fato de a taxa de proporcionalidade não estar explícita no enunciado do problema, e muitos alunos não perceberam a relação aditiva. No problema misto 3, que envolve a subclasse *proporção simples partição e transformação de medidas com a transformação desconhecida*, foram apresentadas 5 resoluções corretas, pois muitos alunos não consideraram a relação de aditiva. Por fim, no problema misto 4, que envolve a *subclasse proporção simples cota e transformação de medidas com a transformação desconhecida*, foram apresentadas 3 resoluções corretas, pois muitos alunos não consideraram a relação de aditiva.

Logo, os alunos podem ter apresentado mais dificuldades nos problemas mistos 3 e 4, pois esses problemas pedem primeiro por uma relação aditiva (subtração); e depois, por uma relação multiplicativa (divisão). Já os problemas mistos 1 e 2 pedem primeiro por uma relação multiplicativa (multiplicação); e depois, por uma relação aditiva (adição).

Como muitos alunos utilizaram esquemas incompletos para a resolução dos problemas mistos, ou seja, apresentaram somente a relação multiplicativa, ignorando a relação aditiva, conjecturamos que os alunos não estão habituados com a resolução de problemas mistos, ainda mais em um período de pandemia do Covid-19, em que as aulas aconteceram de forma remota do dia 20 de março de 2020 até o dia 26 de junho de 2021.

Entre as resoluções que não estão corretas, temos as resoluções das alunas A9 e A12, que resolveram todos os problemas mistos utilizando algoritmos formados pelos dados numéricos dos enunciados, que não apresentam relações lógicas. Deste modo, as alunas A9 e A12 consideraram que qualquer algoritmo envolvendo os dados do enunciado são suficientes para resolver o problema, o que é um equívoco.

Essa maneira de resolver os problemas mistos expressa dificuldades de interpretação e de compreensão das relações lógicas envolvidas entre dados do enunciado, que precisam ser estabelecidas para encontrar a solução do problema. Essas dificuldades também foram mencionadas em diversas pesquisas (CHEVALLARD,1980; SANTOMAURO, 2010; GITIRANA *et al*. 2014; ARAUJO, 2015; ALVARENGA; ANDRADE; SANTOS, 2016). Uma possibilidade que contribui para a superação dessas dificuldades “[...] é mostrar aos alunos que responder um problema sem refletir sobre seu significado – apenas somando ou subtraindo números dos enunciados – pode produzir resultados absurdos” (GITIRANA *et al.*, 2014, p.107).

Nesta pesquisa, observamos que os alunos também apresentam dificuldades para relatar o conhecimento apresentado no esquema, como identificado por Silva

(2021) e mencionado por Vergnaud (1996*a*, p. 159), que é difícil as crianças explicitarem o conhecimento, “[...] embora sejam capazes de executar a sequência de operações. Há sempre muito de implícito nos esquemas”. Esses conhecimentos implícitos nos esquemas são denominados de invariantes operatórios.

A partir dos esquemas dos alunos utilizados para resolução desses problemas mistos, identificamos os possíveis invariantes operatórios implícitos associados ao conceito de função, que foram modelados na forma de teoremas em ação e explicitados como conceitos em ação. Uma síntese dos invariantes operatórios é apresentada no Quadro 39. Na primeira coluna deste quadro, descrevemos a ação do aluno, que permitiu estabelecer os indicativos de teoremas em ação; na segunda coluna, os teoremas em ação; já na terceira coluna, os conceitos em ação; e na quarta coluna, a quantidade de alunos que mobilizaram esses conhecimentos implícitos.

Indícios dos teoremas em ação	Teoremas em ação verdadeiros e falsos	Conceitos em ação	Quantidade de alunos
Ao multiplicar a taxa de proporcionalidade (a) por (x) para obter $f(x)$.	**TAV1**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) = a \cdot x$, com $x, a \in \mathbb{N}$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A10 e A11.
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	**TAV2**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k,\ x \in \mathbb{N}$ e sendo k a razão (um escalar).	Correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$ ou $f(x)$ por (k).	**TAV3**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $k \cdot f(x) = f(x) \cdot k$, com $k, x \in \mathbb{N}$.	Comutatividade em relação à multiplicação.	A1, A3, A5, A6, A8, A10 e A11.
Aplicar a transformação (T) ao estado final (F) para encontrar o estado inicial (I).	**TAV4**: Se $F = I$ **+** (T), então $I = F$ **+** $(-T)$, com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.	Estado inicial, estado final, inversão e transformação.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
Ao somar o estado final (F) e a transformação (T) ou a transformação (T) e o estado final (F).	**TAV5**: Se $F \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, então $F + T = T + F$.	Comutatividade em relação à adição.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11.
Ao realizar somas sucessivas de $f(x)$ ou subtrações sucessivas de $f(x)$.	**TAV6:** Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x') = f(x) \pm f(x')$, com $x \in \mathbb{N}$.	Adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade e variável.	A1, A2, A3, A4, A7, A8 e A10.

Ao considerar que as somas sucessivas de $f(x)$ é igual a razão (k) multiplicada por $f(x)$.	**TAV7:** Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x) + \cdots + f(x) = k \cdot f(x)$, com $x \in \mathbb{N}$ e k sendo a razão.	Adição de funções lineares, variável, correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, regularidade.	A1, A2, A4 e A6.
Aplicar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	**TAV8:** $F = I$ **+** $(\pm T)$, com F, $I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$.	Estado inicial, estado final e transformação.	A1, A2, A8 e A10.
Aplicar o estado final (F) ao estado inicial (I) para encontrar a transformação (T).	**TAV9**: Se $F = I + (-T)$, então $\|T\| = I - F$ com $F, I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F < I$	Diferença, estado inicial, estado final e transformação.	A1, A2, A5, A8, A10 e A11.
Ao dividir $f(x)$ por (x) para determinar (a) taxa de proporcionalidade.	**TAV10**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável.	A2, A4, A5 A6, A8, A10 e A11.
Aplicar o estado inicial (I) ao estado final (F) para encontrar a transformação (T).	**TAV11**: Se $F = I + T$, então $\|T\| = F - I$, com $F,\ I \in \mathbb{N}$ e $T \in \mathbb{Z}$, sendo $F > I$.	Diferença, estado inicial, estado final e transformação.	A1, A8 e A10.
Ao considerar que se (x) é menor que (x'), então $f(x)$ é menor que $f(x')$.	**TAV12**: Seja f uma relação de proporcionalidade, tal que $x < x'$, então $f(x) < f(x')$, com $x, x' \in \mathbb{N}$.	Comparação, correspondência, proporcionalidade, variável.	A1 e A3
Ao somar $f(x)$ com c para obter $f(x')$.	**TAV13:** Se f é uma relação funcional então $f(x') = f(x) + c$ com $x', x, c \in \mathbb{N}$ e $x' > 1$.	Constante, correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e regularidade.	A5.
Ao multiplicar a taxa por x e o resultado somar com b para determinar $f(x)$.	**TAV14:** Se f é uma relação funcional então $f(x) = a \cdot x + b$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$.	Constante, correspondência, dependência, variável, proporcionalidade, regularidade e taxa.	A5.
Ao dividir $f(x)$ por (a) para determinar (x).	**TAV15**: Seja f uma relação de proporcionalidade, $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{N}^*$, sendo a a taxa.	Correspondência, dependência, variável, proporcionalidade e taxa.	A11.
Ao multiplicar um número qualquer (x') por $f(x)$ para obter $f(x')$.	**TAF1**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x' \cdot f(x)$, com $x, x' \in \mathbb{N}$ e $x > 1$.	Correspondência e dependência.	A4 e A11.
Ao multiplicar um número qualquer (x') por $f(x)$ para obter $f(x')$.	**TAF2**: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x \cdot f(x)$, com $x, x' \in \mathbb{N}$.	Correspondência e dependência.	A2 e A12.

Quadro 39: Invariantes operatórios mobilizados nos problemas mistos
Fonte: Autora.

Nos esquemas dos alunos, foram identificados quinze teoremas em ação verdadeiros e dois teoremas em ação falsos. Associados a eles, identificamos dezesseis conceitos em ação, a saber: adição de funções lineares, correspondência, comparação, comutatividade em relação à adição, comutatividade em relação à multiplicação, dependência, estado inicial, estado final, inversão, diferença, proporcionalidade, razão, regularidade, variável, taxa, transformação.

O mesmo teorema em ação apareceu em diferentes problemas mistos, às vezes mobilizado pelo mesmo aluno, outras vezes mobilizado por diferentes alunos. Por exemplo, o TAV6 relacionado a sequência aditiva recursiva foi mobilizado pelos alunos A3 e A4 no problema misto 1, novamente pelo aluno A3 no problema misto 4, e, ainda, foi mobilizado pelos alunos A2, A8 e A10 no problema misto 2, e pelo aluno A1 no problema misto 3. Com isso, inferimos que o mesmo teorema em ação pode ser utilizado em diferentes esquemas e subclasses de problemas.

A maioria dos indícios de teoremas em ação mobilizados pelos alunos é composta pelas propriedades isomórficas da função linear, também conhecidas como propriedades das relações de proporcionalidade, mencionadas por Vergnaud (1983, 1996*a*, 2007), Gitirana *et al.* (2014) e Lima *et al.* (2016). Segundo Gitirana *et al*. (2014), o aluno mobiliza um teorema em ação ao resolver o problema usando a propriedade isomórfica da função linear, mesmo sem conhecê-la do ponto de vista matemático.

Dentre os conhecimentos implícitos manifestados pelos alunos no decorrer da resolução dos problemas mistos, atribui-se atenção especial aos teoremas em ação falsos ligados às situações de proporção, sendo eles: TAF1 e TAF2. Afinal, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, é preciso ofertar aos alunos situações que possibilitem a desestabilização desses conhecimentos falsos, de modo a auxiliar na compreensão do conceito em questão ao longo do processo escolar.

O TAF1, manifestado durante a resolução do problema misto pertencente à subclasse *proporção simples quarta proporcional e transformação de medidas*, consiste na multiplicação de um número qualquer (x') por $f(x)$ para obter $f(x')$, com $x,\ x' \in \mathbb{N}$ e $x > 1$. O TAF2 também foi manifestado durante a resolução do problema misto pertencente à subclasse *proporção simples quarta proporcional e transformação de medidas*, e consiste na multiplicação de um número qualquer (x) por $f(x)$ para obter $f(x')$. Uma possibilidade de desestabilização dos TAF1 e TAF2 é mostrar aos alunos que, para resolverem problemas dessa subclasse, precisa-se encontrar a razão entre grandezas de mesma natureza ou encontrar a taxa, pois responder um problema sem estabelecer as relações envolvidas no enunciado pode produzir esquemas não pertinentes e resultados absurdos.

No que se refere aos conceitos em ação, as situações-problema envolvendo a proporcionalidade favoreceu a manifestação dos conceitos em ação de *correspondência, dependência, regularidade* e *variável.* O conceito de *generalização*, também considerada como uma ideia-base de função, não foi identificada explicitamente nos esquemas dos alunos, pois os problemas mistos não foram elaborados de modo que essa ideia fosse manifestada. Em outras palavras, é necessária uma questão específica que contribua com a manifestação dessa *ideia.*

Observa-se que a mobilização da ideia da *proporcionalidade* e ideias-base de função varia de acordo com a subclasse de problema e com o esquema utilizado pelo aluno com vista a resolver o problema. As situações-problema envolvendo uma relação de proporção simples um para muitos permite mais facilmente a manifestação das ideias-base de função, pois a estrutura do problema $f(x) = ax,$ sendo a taxa, é dada explicitamente (ou quase), conforme mencionado por Silva (2021). Já as situações-problema envolvendo as relações de proporção simples do tipo partição e quarta proporcional não contêm a taxa de proporcionalidade explícita no enunciado do problema, e os problemas envolvendo a relação de proporção simples do tipo cota contém a taxa, mas a operação recomentada é a divisão, o que pode dificultar a manifestação das ideias-base de função.

Na próxima página, apresentamos os possíveis invariantes operatórios mobilizados por cada aluno durante a resolução dos quatro problemas mistos (Quadro 40).

Alunos	Teoremas em ação	Conceitos em ação
A1	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7, TAV8, TAV9,TAV10, TAV11 e TAV12.	Comparação, comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A2	TAV1, TAV2, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7, TAV8, TAV9, TAV10 e TAF2.	Comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A3	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7, TAV11 e TAV12.	Comparação, comutatividade, correspondência, dependência, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A4	TAV1, TAV2, TAV4, TAV5, TAV6, TAV7, TAV10 e TAF1.	Comutatividade, correspondência, dependência, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A5	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV9, TAV10, TAV13 e TAV14.	Comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A6	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV7 e TAV10.	Comutatividade, correspondência, dependência, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A7	TAV2, TAV4, TAV5 e TAV6.	Comparação, comutatividade, correspondência, dependência, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, transformação e variável.
A8	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6, TAV8, TAV9, TAV10 e TAV11.	Comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A9	-	-
A10	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV6, TAV8, TAV9, TAV10 e TAV11.	Comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, regularidade, taxa, transformação e variável.
A11	TAV1, TAV2, TAV3, TAV4, TAV5, TAV9, TAV10, TAV11, TAV15 e TAF1.	Comutatividade, correspondência, dependência, diferença, estado inicial, estado final, inversão, proporcionalidade, razão, taxa, transformação e variável.
A12	TAF2.	Correspondência, dependência e variável.

Quadro 40: Invariantes operatórios mobilizados por aluno
Fonte: Autora.

Observa-se, nesse Quadro 40, que a Aluna A9 não mobilizou nenhum invariante operatório, pois não compreendeu as relações estabelecidas entre os dados do enunciado do problema.

Ainda, no Quadro 40 nota-se que as ideias-base de função - *correspondência, dependência, variável e regularidade* e a ideia de *proporcionalidade* são mobilizadas implicitamente pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Portanto, primeiro os alunos desenvolvem os conhecimentos implícitos de função que poderão se tornar explícitos por meio de diferentes situações propostas aos alunos ao longo dos anos escolares. Para que isso ocorra, destacamos a importância da classificação dos problemas mistos para que os professores possam ter ciência dos diferentes tipos de situações associadas ao conceito de função a serem propostas aos alunos durante a escolarização, pois o desenvolvimento de um conceito leva muitos anos.

Defendemos a importância de os professores conhecerem os indicativos de invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos dos anos iniciais em situações envolvendo a *proporção simples e transformação de medidas*, de modo a potencializar o pensamento funcional ao longo do processo escolar e, com isso, favorecer que a formação do conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental seja mais eficaz. Corroborando com isso, Eves (2004, p. 661) menciona que “[...] é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática”.

Segundo Vergnaud (1996*a*), as situações são a porta de entrada para construção de um conceito, seguido dos invariantes operatórios. Deste modo, esperamos que a classificação dos problemas mistos pertencentes à classe *proporção simples e transformação de medias,* e os indicativos de invariantes operatórios associados ao conceito de função apresentados como resultados dessa pesquisa possam servir de base aos professores do Ensino Fundamental, aos pesquisadores e a toda comunidade de Educadores Matemáticos interessados pelo tema, bem como para o mapeamento do campo conceitual das funções.

Para pesquisas futuras, sugere-se que situações envolvendo a classe de *proporção simples e transformação de medidas* sejam resolvidas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio com a finalidade de identificar os possíveis invariantes operatórios associados ao conceito de função; também a elaboração de situações que favoreçam a desestabilização dos conhecimentos falsos aqui identificados, além da realização de uma engenharia didática que permita observar o desenvolvimento do conceito de função pelos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALVARENGA, Karly Barbosa; ANDRADE, Iris Danúbia; SANTOS, Ricardo de Jesus. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. **Amazônia**: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 12, n. 24, p. 39-52, jul. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/2571>

ARAUJO, Nathália Kelly Santos. **Análise das dificuldades na resolução de problemas matemáticos por alunos do 5º ano do ensino fundamental.** 2015. 139 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2015. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/5174/1/NATALIA_KELI_SANTOS_ARAUJO.pdf

BERNARDINO, Fabricia *et al.*; Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (org.). **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade:** reflexões acerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.51-70.

BECK, Vinicius Carvalho. **Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado). 2018, 133 f. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande, 2018.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif; PUGA, Leila Zardo. **Função:** Diagnosticando registros de representação semiótica. REREMAT, Florianópolis, p. 5-16, 2006.

BOGDAN, Roberto; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos.Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. cap. 1 e 2, p. 48-52.

BRAGA, Ciro. **Função:** a alma do ensino da Matemática. São Paulo: Anablume, 2006, p. 172.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. MEC, Brasília, 2018.

CALADO, Tamires Vieira. **INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.** 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

CALADO, Tamires Vieira; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius, REZENDE, Veridiana. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria**. v. 13, n. 2, p. 25-50, novembro, 2020.

CAMPITELI, Heliana Cioccia; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. 2ª edição. Lisboa: Gradiva, 1998. p. 295.

CERON, Camila Garbelini da Silva. **O pensamento funcional nos anos iniciais em aulas de matemática na perspectiva do ensino híbrido.** 2019, 219 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

CHEVALLARD, Yves. Quel est l'âge du capitaine? **Bulletin de l'APMEP**, n° 323, 1980, p. 235-243. Disponível em: https://publimath.univirem.fr/numerisation/AAA/AAA80016/AAA80016.pdf

CIANI, Andréia Büttner; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; BERNS, Mauricio. A Construção do conceito de Função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Wellington. (orgs) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática**. Curitiba: CRV, 2019. p. 29-50.

DANTE, Luiz Roberto. **Ápis Matemática** – 4º ano. 3ª ed., São Paulo: Editora Ática, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FERRAZ, Sara Rodrigues**. Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo:** um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2016. 217 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara (org). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 155 –196.

GITIRANA, Verônica *et al*. **Repensando multiplicação e adição:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1ª edição. São Paulo: PROEM, 2014.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI,Carlos. **Coleção Fundamentos da Matemática Elementar**. Vol. 3. 7ª Edição. São Paulo: Atual, 1997.

LAUTERT, Sintria Labres; SPINILLO, Alina Galvão. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. **Psicologia:** Teoria e Pesquisa. v.18, n.3, p. 237-246, set-dez. 2002.

LESH, Richael; POST, Thomas.; BEHR, Merling. Proportinal reasoning. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Reston: VA Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 93-118. Tradução de Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes e Revisão da tradução, Fátima Álvares, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11 edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016, p. 250.

MAGINA, Sandra *et al*. **Repensando Adição e Subtração:** Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, Sandra *et al*. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **Zetetike** – Cempem – FE – Unicamp – v. 18 n. 34 – jul/dez – 2010, p. 15-49.

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera; SANTOS, Aparecido. A estrutura multiplicativa a luz da teoria dos campos conceituais: uma visão com foco na aprendizagem In: Castro Filho *et al.* (org.). **Matemática, Cultura e Tecnologia**: perspectivas internacionais. Curitiba: CRV, 2016, p. 66-82.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; PORTO, Rozimeire Soares de Oliveira. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **VII Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, 2018.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; LOPES, Tânia Maria Rodrigues; OLIVEIRA. João Luzeilton de. Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE. **Revista Thema**. v. 14, n.4, 2017, p. 100-113.

MERINO, Eduardo; CAÑADAS, María; MOLINA, Marta. Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. **Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia.** v. 2, n. 1, 2013, p. 24-40.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2019.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 7, n. 1, 2002, p.7-29.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Construindo o conceito de Funções. In: RAMOS, Antoneli da Silva; REJANI, Fernanda Campanha (org). **Teoria e práticas de Funções**. Maringá: Centro Universitário de Maringá. Núcleo de Educação a Distância, 2014, p. 10 - 59.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; REZENDE, Veridiana. A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática. **Psicologia e Epistomologia Genéticas.** São Paulo, v.6, n.1, 2014, p. 41-63.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

OLIVEIRA, Tamiles da Silva; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; SILVA, Adriana Costa Santos da. As resoluções de estudantes em situações de proporção simples. **Com a Palavra, o Professor.** Vitória da Conquista (BA), v.3, n. 7, setembro-dezembro, 2018.

PAVAN, Luciane Regina **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado) – Programa De Pós-

Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2010.

PIRES, Rogério Fernando. O Conceito de Função: uma análise histórico epistemológica. In: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016, p. 1-12.

QUEIROZ, Paulo César Galvão. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.** 2008. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

RICCO, Graciela. Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. **Educational Studies in Mathematics**, Vol.13, número 3, 1982, p. 289-327.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RODRIGUES, Carla Larissa Halum; REZENDE, Veridiana. Problemas mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: contribuições da teoria dos campos conceituais. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 15, Londrina, 2019. **Anais** ... Londrina, 2019.

RODRIGUES, Carla Larissa Broza Halum; REZENDE, Veridiana. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. **Amazônia:** Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 17, n. 39, p. 271-287, dez. 2021.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema função:** uma investigação das Praxeologias. 2006. 384 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; CAZORLA, Irene Mauricio; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Desempenho de Estudantes em Diferentes Situações no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 18, n. 38, set./dez. 2007, p. 137-152.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro Dos Santos. **Estruturas Aditivas**: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? 2010. 338 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

SANTOMAURO, Beatriz. Como corrigir os erros dos alunos com o objetivo de ajudá-los a avançar. **Nova Escola.** Edição 231, abril, 2010. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1479/como-corrigir-os-erros-dos-alunos-com-o-objetivo-de-ajuda-los-a-avancar

SANTOS, Noéli Ferreira dos. **A metodologia de Resolução de Problemas e o aplicativo Winplot para a construção do conceito de Função por alunos do Ensino Médio.** 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática, Universitário Franciscano, Santa Maria - RS, 2013.

SILVA, Alexandre de Paula. **Conceito Função: as atividades introdutórias propostas no material de Matemática do Ensino Fundamental da rede pública estadual de São**

Paulo. 2008. 93 f. Dissertação (Mestrado profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA. Del Castanhel Peron da. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função.** 2021. 555 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2021.

TEIXEIRA, Antonio César Nascimento. **A introdução do raciocínio funcional no 5º ano do ensino fundamental: uma proposta de intervenção.** 2016.149 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, BA, 2016.

TEIXEIRA, Antonio César Nascimento; MAGINA, Sandra.; MERLINI, Vera. Introdução do raciocínio funcional para estudantes do 5º ano do ensino fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2016, p. 1-10.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Construindo o conceito de Função**. 5ª edição. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

TRINDADE, José Analio de Oliveira. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. 1996. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

TRINDADE, José Analio de Oliveira; MORETTI, Méricles Thadeu. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação. **Revista Zetétiké**, CEPEM-FE/UNICAMP, n.13/14, jan/dez. 2000, p.29-50.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structure. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Academic Press Inc, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro.** Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, Gérard. **A Teoria dos Campos Conceituais**. In: BRUN, Jean (org.). Didáctica das Matemáticas. Maria José Figueiredo (Tradução), Lisboa: Instituto Piaget, 1996*a*, p.155 – 191.

VERGNAUD, Gérard. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, n. 4, 1996*b*. p. 9-19.

VERGNAUD, Gérard. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, 1998, p. 167-181.

VERGNAUD, Gérard. Forma operatoria y forma predicaiva del conocimiento. In: Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática, 1, Tandil: Argentina, Unicen, 2007. **Anais** ... Tandil: Argentina, Unicen, 2007.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: UFPR, 2009*a*, p. 322.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009*b*. p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. Piaget e Vygotsky em Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais. In: GROSSI, Esther Pillar. (org.) **Coleção Campos Conceituais.** Porto Alegre: GEEMPA. 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

Título do Projeto: **TEOREMA EM AÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma investigação a partir de problemas mistos.**

Pesquisador responsável e colaboradora: **Carla Larissa Halum Rodrigues** (responsável) e **Prof. Drª Veridiana Rezende**.

Convidamos seu filho ou filha a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **proporcionar a alunos do 5º ano do Ensino Fundamental a aprendizagem de conceitos matemáticos que envolvem o campo conceitual aditivo e multiplicativo por meio de diferentes situações-problema**, para isso será realizado um trabalho em sala de aula que consiste em propor aos alunos atividades em diferentes contextos, sendo que a pesquisadora coletará os dados para esta pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e áudios de possíveis entrevistas durante as suas resoluções.

Durante a execução do projeto a professora/pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, mas a partir de diferentes situações-problema. Existe o risco de seu filho não entender que naquele momento que a professora é uma pesquisadora e ficarem questionando-a demasiadamente. Neste caso, a professora/pesquisadora deverá ter cautela em suas contribuições na resolução das atividades para que isso não venha intervir no resultado da pesquisa. A pesquisa pode provocar no seu filho um desconforto pelo tempo exigido ou por eventuais comentários entre os colegas, porém neste caso caberá aos pesquisadores contornar eventuais ocorrências não permitindo momentos de constrangimento a qualquer um dos participantes.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para seu filho. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, seu filho se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes dos participantes estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes dos participantes constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Esperamos que a pesquisa realizada proporcione aprendizagens para seu filho(a) respeito de diferentes conceitos matemáticos que envolvem o campo conceitual aditivo e multiplicativo, bem como, que os resultados da pesquisa sejam disseminados servindo de respaldo para pesquisas futuras e que os mesmos sejam considerados para as ações dos professores em sala de aula.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo de diferentes metodologias na sala de aula. Por isso, frisamos a importância da participação do seu filho nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Este documento será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com você o responsável pelo seu filho(a) e a outra deverá ser entregue para a professora/pesquisadora. Destacamos que seu filho(a) não pagará nem receberá para participar deste estudo, bem como será mantido a confidencialidade dele e os dados serão utilizados só para fins científicos.

Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento durante a pesquisa. Também, poderá contactar o comitê de ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná pelo telefone 3220-3272.

Declaro estar ciente do exposto e **autorizo .... (nome do estudante)** a participar desta pesquisa.

Nome do responsável:____

Assinatura do responsável:____

Eu, **Carla Larissa Halum Rodrigues**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável

_____________________________, ____ de ________________ de __________

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

unioeste

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: **TEOREMAS EM AÇÃO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma investigação a partir de problemas mistos.**

Pesquisador responsável e colaboradora**: Carla Larissa Halum Rodrigues** (responsável) e **Prof. Drª Veridiana Rezende**.

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem como objetivo **a aprendizagem de conceitos matemáticos que envolvem os campo conceituais aditivo, multiplicativo e da função por meio de diferentes situações-problema,** para isto será realizado um trabalho que consiste em propor diferentes problemas, sendo que a pesquisadora coletará os dados para essa pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e das entrevistas durante as resoluções que acontecerão online e serão gravadas.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do projeto a professora/pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, mas a partir de diferentes situações-problema. Existe o risco de vocês não entenderem que naquele momento que a professora é uma pesquisadora e ficarem questionando-a muito. Neste caso, a professora/pesquisadora deverá ter cautela em suas contribuições na resolução das atividades para que isso não venha intervir no resultado da pesquisa. A pesquisa pode provocar um desconforto pelo tempo exigido.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para você. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, você se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes de vocês estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes de vocês constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Esperamos que a pesquisa realizada proporcione aprendizagens para vocês a respeito de ideias que **envolvem os campos conceituais aditivo, multiplicativo e da função,** e os resultados da pesquisa sejam espalhados servindo de respaldo para pesquisas futuras e que eles sejam considerados para as ações dos professores em sala de aula.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo de diferentes maneiras de ensinar na sala de aula. Por isto, frisamos a importância da participação de vocês nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone.

Declaro estar ciente do exposto e desejo participar do projeto **TEOREMAS EM AÇÂO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO 5ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma investigação a partir de problemas mistos.**

Nome do estudante:____

Nome do responsável:____

Assinatura do responsável:_______________________________________

Eu, **Carla Larissa Halum Rodrigues**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

______________________, ____ de ________________ de __________

APÊNDICE C – INSTRUMENTO DE PESQUISA DO ESTUDO PILOTO

Situação-problema 1

Para o tratamento de uma doença, o médico receitou a Pedro 32 comprimidos de um medicamento e pediu a ele para que tomasse 3 comprimidos por dia. Após quatro dias tomando o medicamento, quantos comprimidos faltam para Pedro tomar?

Resolução

Resposta:____

Situação-problema 2

Para a Páscoa, Carlos comprou 8 bombons e ganhou 3 caixas de bombons. Cada caixa tinha 15 bombons. Quantos bombons Carlos ficou?

Resolução

Resposta:____

Situação-problema 3

Ana comprou 12 bolas de basquete iguais para doar a uma escola. Para pagar a loja, ela entregou R$ 600,00 e recebeu R$ 24,00 de troco. Quanto custou cada bola de basquete?

Resolução

Resposta:____

Situação-problema 4

A mamãe de Lucas é confeiteira e trabalha fazendo bolos. Ela já tinha 24 ovos e precisou comprar mais 48 ovos para fazer 12 bolos. Quantos ovos ela precisou para fazer cada bolo?

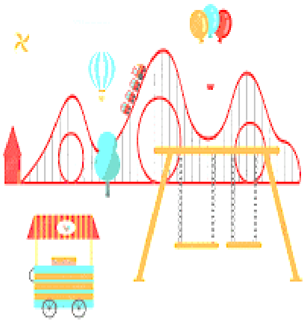
Resolução

Resposta:____

Situação-problema 5

Mariana tem R$ 50,00 para gastar no parque de diversões. Ela quer comprar alguns ingressos para os brinquedos. Cada ingresso custa R$ 5,00. Se Mariana recebeu 15 reais de troco, quantos ingressos ela comprou?

Resolução



Resposta:____

Situação-problema 6

Carlos quer comprar um celular que custa R$ 540,00. Ele já possui R$ 60,00, e decidiu economizar R$ 80,00 por mês. Em quantos meses Carlos terá o valor para comprar o celular?

Resolução

Resposta:____

Situação-problema 7

A piscina de Camila está com 400 litros de água e ela quer encher a piscina até atingir a capacidade máxima. A torneira enche a piscina em 20 litros de água a cada 5 minutos. Quantos litros de água terá a piscina em 30 minutos de enchimento?

Resolução

Resposta:____

Situação-problema 8

Marcelo comprou 10 figurinhas e gastou R$ 20,00. No outro dia, ele comprou 16 figurinhas e pagou com uma nota de R$ 50,00. Quanto Marcelo recebeu de troco?

Resolução

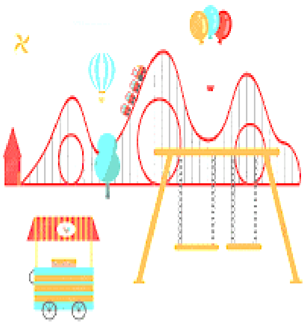
Resposta:____

APÊNDICE D – INSTRUMENTO DE PESQUISA DO ESTUDO PRINCIPAL

<u>Problema misto 1</u>

Mariana tinha alguns ingressos para brinquedos de um parque de diversões para distribuir aos seus amigos. Cada um de seus 7 amigos recebeu 3 ingressos, e ainda restaram 4 ingressos para Mariana. Quantos ingressos ela tinha antes da distribuição?

Resolução



Resposta:____

<u>Problema misto 2</u>

A piscina de Camila está com 400 litros de água e ela pretende enchê-la com uma torneira cuja vazão é de 20 litros de água a cada 5 minutos. Quantos litros de água terá a piscina após abrir a torneira por 15 minutos?

Resolução

Resposta:____

Problema misto 3

Pedro comprou 4 bolas de basquete iguais para doar a uma escola. Para pagar a loja, ele entregou R$ 200,00 e recebeu R$ 16,00 de troco. Quantos reais Pedro pagou em cada bola de basquete?

Resolução

Resposta:____

Problema misto 4

Carlos quer comprar um celular que custa R$ 540,00. Ele já possui R$ 60,00, e decidiu economizar R$ 80,00 por mês. Em quantos meses Carlos terá o valor necessário para comprar o celular?

Resolução

Resposta:____

APÊNDICE E – MODELO PARA RESOLUÇÃO

Campo Mourão, _________ de ___________________ de 2021.

Escola:____

Nome:____ Idade:_____________

Problema misto 1

Resolução:

R:____

Problema misto 2

Resolução

R:____

Problema misto 3

Resolução:

R:____

Problema misto 4

Resolução:

R:____

APÊNDICE F – RESOLUÇÃO DOS ALUNOS

Problema misto 1

A1

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha 25 ingressos.

A2

$3 \times 7 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha 25 ingressos

A3

3+3+3+3+3+3+3
3 6 9 12 15 18 21
21+4=25

R: mariana tinha 25 ingressos

A4

+6 +9 +12 +15 +18 +21

$3 \times 7 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha antes da distribuição 25 ingressos

A5

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha antes 25 ingressos

A6

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha 25 ingressos

A7

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: 25

A8

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Mariana tinha 25 ingressos

A9

$7 + 3 + 4 = 14$

R: Mariana tinha 14 ingressos antes de distribuir

A10

$25 \div 7$: $25 - 21 = 04$, quociente 3 $\quad 21 + 4 = 25$ $\quad 3 \times 7 = 21$

R: 25 ingressos

A11

$7 \times 3 = 21$ $\quad 21 + 4 = 25$

R: Ela tinha 25 ingressos

A12

$7 + 3 = 10$

R: Restaram 10 ingressos

Problema misto 2

20 × 3 = 60

400 + 60 = 460

R: Após abrir a torneira a piscina terá 460 litros de água.

A2

20 × 5 = 100

15 | 5
−15 | 3
00

20 + 20 + 20 = 60

R: terá 460 litros de água

A3

20x3=60

R: ela terá 60 litros de água em 15 minutos

A4

20 × 15 = 100 + 200 = 300

R: 300 litros de água.

A5

20 × 3 = 60

R: terá 60 litros de água

A6

20 × 3 = 60

R: Ela terá 60 litros

A7

20 + 20 + 20 = 60

R: 60 litros

A8

20 × 3 = 60

60 + 400 = 460

R: Ela terá 460 litros na piscina, após abrir a torneira durante 15 minutos.

A9

400 + 20 + 5 + 15 = 440

R: A piscina terá 440 litros de água.

A10

400 + 60 = 460

20 + 20 + 20 = 60

R: 460 litros

A11

20 × 5 = 100

100 × 15 = 500 + 1000 = 1.500

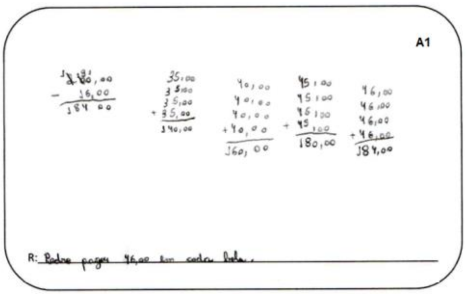
R: Em 15 minutos vai encher 1500 litros

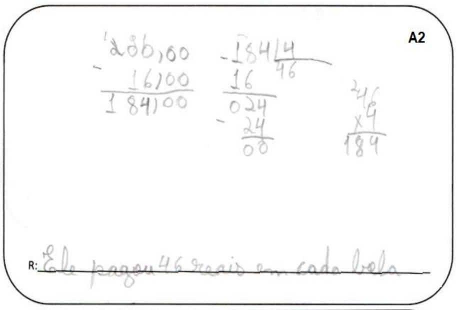
A12

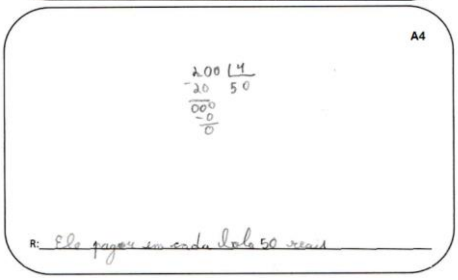
20 × 5 = 100

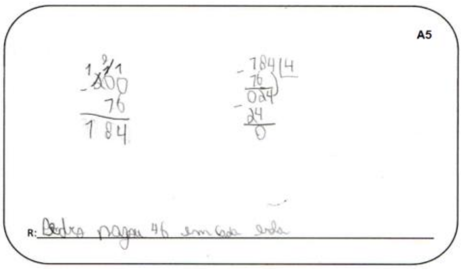
R: na torneira cujo enche 100 litros

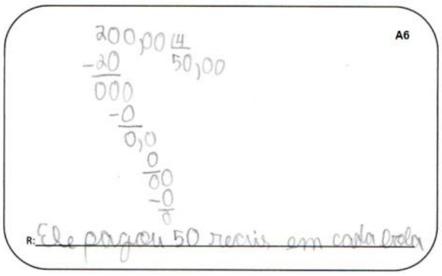
Problema misto 3

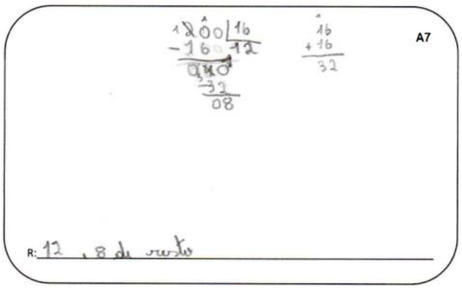


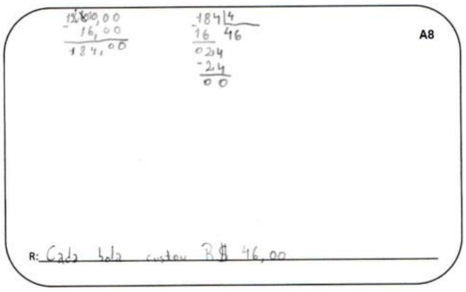


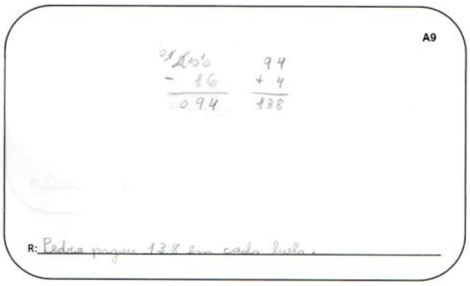


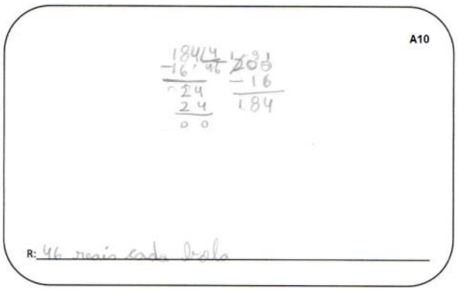


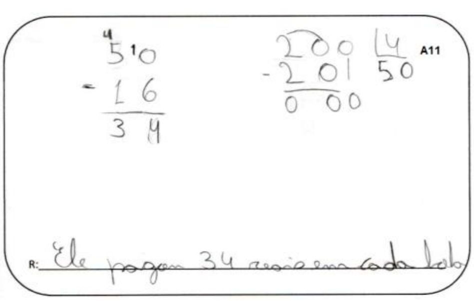


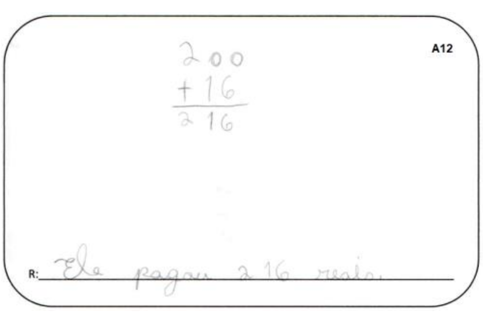




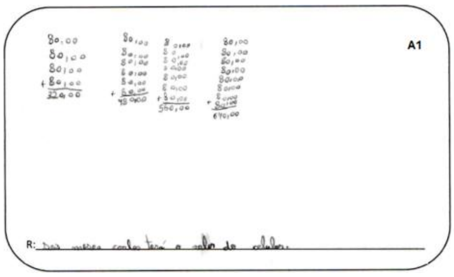


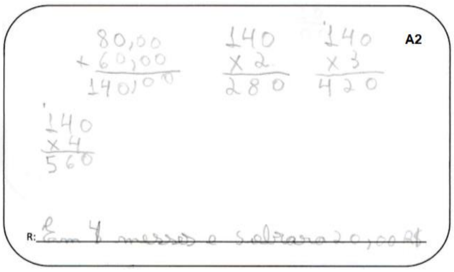


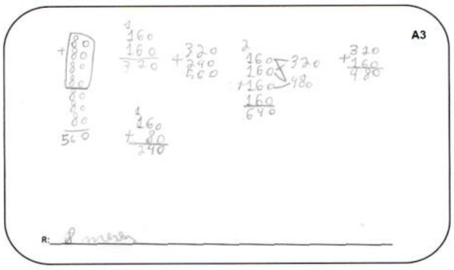


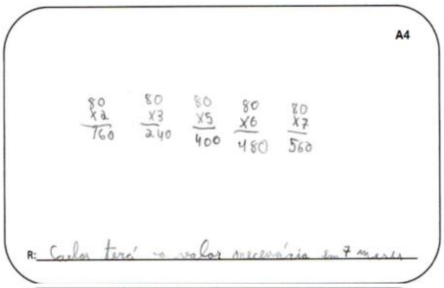


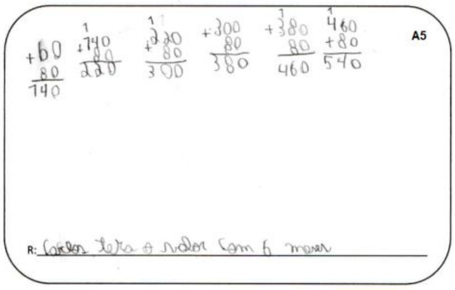
Problema misto 4

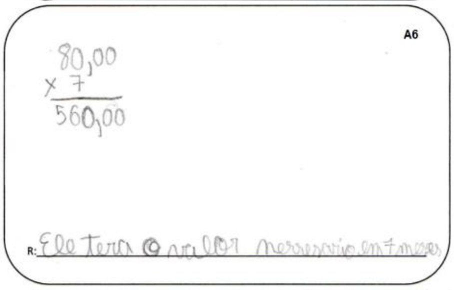


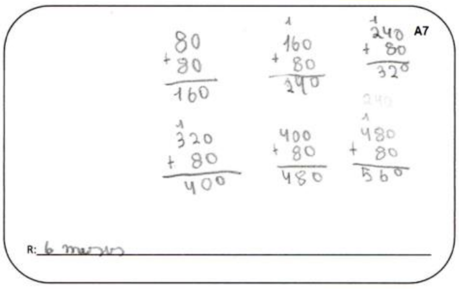


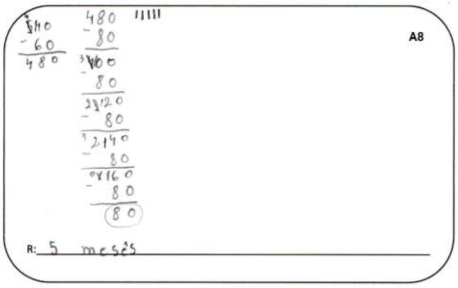


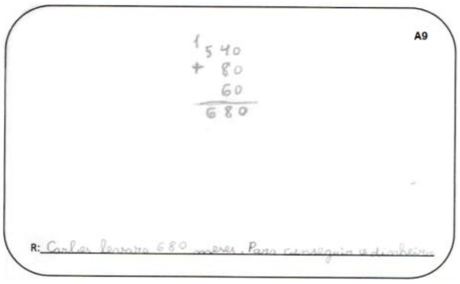


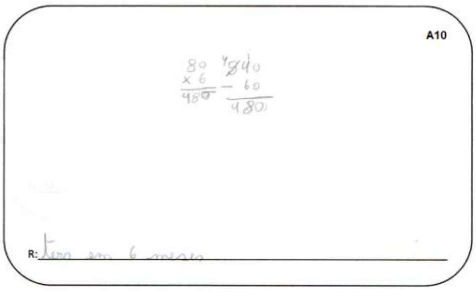


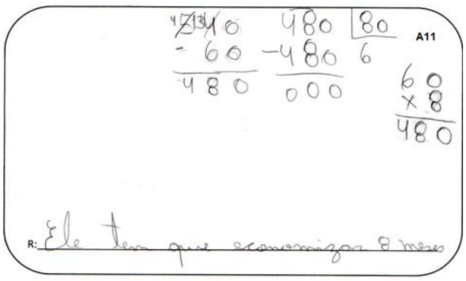


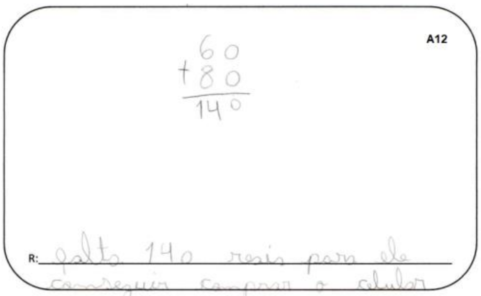












APÊNDICE G – TRANSCRIÇÃO DO DIÁLOGO FINAL

Aluno 1 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A1: Eu peguei os 7 amigos, cada um recebeu 3, daí eu fiz 7 × 3, deu 21. Eu aumentei mais 4 e deu 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A1: Fui somando de mais. O que está certo é 80 × 6.
Pesquisadora: Ok!
A1: Fiz 4 vezes 80, mas daí eu fiz por mais, daí o segundo eu fiz × 5.
Pesquisadora: Mas não está na folha.
A1: Eu fiz de cabeça, peguei a do 4 e somei 80.
Pesquisadora: Entendi.
A1: Eu fiz 8 vezes que é maior e vezes 7, daí eu fiz a vezes 6.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A1: Eu fiz 20 × 3 que deu 60 e daí eu coloquei 400 litros de água mais 60, que daí coloquei 460.
Pesquisadora: Ok, vamos para o último problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A1: Fiz a conta 200 – 16, que deu 184. Daí eu fiz 35 × 4 que deu 140, 40 × 4 que deu 160, 45 × 4 que deu 180, daí eu achei o resultado 46 × 4 que deu 184.
Pesquisadora: Muito bem! Obrigada, pela colaboração na pesquisa, guarda a tarefa na pasta. Durante a semana passo buscar a pasta, mas mandarei mensagem antes para sua mãe.
A1: Tá.
Pesquisadora: Tchau!
A2: Tchau!

Aluno 2 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A2: Bom! Pensei dessa forma se ela tinha 7 amigos e cada um recebeu 3 eu fiz 7 × 3 que deu 21, aí sobrou 4 para ela, aí eu fiz 21 + 4 que deu 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A2: Aqui eu fiz 80 + 60 que deu 140, daí eu fui fazendo de vezes para chegar no valor mais perto que ele queria para comprar o celular, 2 × 140 que deu 280, 3 × 140 que deu 420 e 4 × 140 que deu 560, o mais perto que achei. Deu 4 meses e sobraram 20 reais.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A2: Fiz 200 - 16 que deu 184, aí eu fiz 184 ÷ 4 que deu 46. Daí eu fiz a prova real da conta de dividir também de deu 184.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A2: Esse aqui eu fiquei meio em dúvida. Fiz 20 × 5 que deu 100, 15 ÷ 5 deu 3, daí eu fiz de mais aqui, podia ser 3 × 20, que deu 60, aí da 460.
Pesquisadora: Como você chegou no 460?
A2: Por causa do 400 que já estava.
Pesquisadora: Obrigada, pela colaboração na pesquisa! Durante esta semana eu passo buscar a pasta, mas te aviso antes.
A2: Tá.
Pesquisadora: Tchau!
A2: Tchau!

Aluno 3 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A3: Eu fui somando de 3 + 3 + 3 + 3 até chegar em 7 amigos, que deu 21. Então se cada amigo tinha 3 que deu 21 e daí restaram 4 ingressos dá 25 ingressos.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A3: Eu fiz 20 × 3, pois se 5 minutos era 20 litros, 10 minutos será 40 litros e 15 minutos será 60 litros.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A3: Sete meses para mim. Eu fui pensando 80 + 80 + 80 +...
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A3: Eu fiz 4 × 54, porque se eu fizesse 4 × 50 só daria 200. Espera aí..., ele pagou 50 ou 54 em cada bola de basquete ... é, foi 50 cada bola.
Pesquisadora: Obrigada, terminamos! Durante esta semana eu passo buscar a pasta.
A3: Pensei que viria hoje, minha mãe disse para meu pai entregar porque ela saiu.
Pesquisadora: Hoje não consigo ir, mas eu aviso quando estiver indo, avise sua mãe.
A3: Aham!
Pesquisadora: Tchau!
A3: Tchau!

Aluno 4 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A4: Eu fiz 7 × 3 que deu 21, daí eu somei mais 4 ingressos que sobraram da Mariana, daí antes da distribuição ela tinha 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A4: Fui multiplicando por 80 até dar o total de dinheiro que precisava ter para comprar o celular.
Pesquisadora: Vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A4: Ele tinha 200 reais aí eu dividi pelo 4, que é o tanto de bolas que ele comprou, com isso, cada bola deu 50 reais.
Pesquisadora: Ok! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A4: Se eu multiplicasse 15 × 20 aí dá o tanto de água que a piscina tem em 15 minutos.
Pesquisadora: Obrigada, pela colaboração na pesquisa! Durante a semana passo buscar a pasta, mas eu mando mensagem antes. Tchau!
A2: Tá, bom! Tchau!

Aluno 5 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto1**?
A5: Eu fiz 3 × 7 né vinte e um, daí eu coloquei 21 + 4 e dá 25 ingressos.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver **o problema misto 2**?
A5: Eu fiz 3 × 20 que dá 60.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver **o problema misto 3**?
A5: Eu fiz 200 – 16 que dá 184 e dividi 184 por 4 que dá 46 cada bola. Eu paguei 30 na minha bola de basquete, essa tá muito caro.
Pesquisadora: Rsrsr, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A5: Eu fiz tudo de mais, primeiro, daí eu juntei 60 + 80, 140, daí 140 + 80, 220, 220 + 80, 300, 380 + 80, 380, 380 + 80, 460, 460 + 80, 540.
Pesquisadora: E como você chegou em 6 meses.
A5: Eu fui contando cada conta que eu fiz.
Pesquisadora: Obrigada! Amanhã passo buscar a pasta, mas eu mando mensagem antes.
A5: Já acabou.
Pesquisadora: Já. Rsrsr, tchau!
A5: Tchau!

Aluno 6 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A6: Porque se tem 7 amigos e ela deu 3 ingressos para cada um, se eu fizer 7 × 3 dá 21 mais os 4 ingressos que chego ao número 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A6: Para mim, é mais fácil eu ficar contanto o quanto precisa para chegar no resultado daí eu consegui chegar no 50, porque na tabuada do 4 o número que dá isso é o 5, daí eu só completei com um zero depois.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo problema! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A6: Na 3 eu fui vendo na tabuada qual chegava mais perto e deu a tabuada do 7.
Pesquisadora: E, o **problema misto 4**, como você pensou para resolver?
A6: Se a cada 5 minutos enche 20 litros em 15 minutos é só somar 5 + 5 + 5 que vai dar o resultado e fazer 20 × 3 que vai dar 60.
Pesquisadora: Daqui a pouco eu passo buscar a pasta. Sua mãe já assinou os papéis?
A6: Não, mas ela já assina.
Pesquisadora: Então, tá bom! Muito obrigada, tchau!
A6: Tchau!

Aluna 7 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A7: Fiz 7 × 3 dá 1, 2, 3, ... 21, daí eu juntei com aqueles 4, que tinha lá e deu 25
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A7: Peguei o 200 e dividi por 16 que foi o troco e deu 20 reais então acho que ele pagou 20 reais em cada bola.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A7: Eu somei 3 vezes o 20 que deu 60 litros.
Pesquisadora: Vamos para o último **problema!** Como você fez para resolvê-lo?
A7: Eu fui fazendo 80 + 80 que dá 160, daí 160 + 80 que dá 240 e fui fazendo até dar um valor próximo aquele lá, que precisa para comprar o celular.
Pesquisadora: E como você chegou em 6 meses.
A7: Contando cada conta.
Pesquisadora: Então tá bom, obrigada! Essa semana eu passo buscar a pasta.
A7: Mas não pode ser final de semana que a gente sai.
Pesquisadora: Eu aviso antes, tchau!
A7: Tchau!

Aluna 8 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A8: Como Mariana tinha 7 amigos e cada um deles recebeu três ingressos eu só fiz 7 × 3 que o resultado é 21, daí 21 + 4 que são os ingressos que tinha restado para ela, daí o resultado é 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 2** ?
A8: A primeira continha que eu fiz eu acabei errando, depois eu fiz várias continhas para ver se batia o resultado, como eu tinha errado o resultado não batia. Na subtração o resultado deu 84 mas é 184, daí eu dividi 184 por 4 que deu 46.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A8: Fiz várias contas de menos e o resultado deu 5 meses.
Pesquisadora: Vamos para o último problema! Como você pensou para resolvê-lo?
A8: Como a cada 5 minutos saia 20 litros da torneira e ela deixou 15 minutos a torneira ligada então 3 × 5 da 15, então 3 × 20 o resultado daria 60, que é só somar com o que já estava na piscina que dava 460.
Pesquisadora: Obrigada, pela colaboração na pesquisa! Esta semana passo buscar a pasta, mas eu mando mensagem antes. Tchau!
A8: De nada! Tchau!

Aluna 9 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A9: Eu pensei de mais, 7 + 3 depois aquele valor mais 4, que deu 14.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A9: Eu fiz 200 + 16, depois eu subtraí o 4.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A9: Eu fiz 400 com 20 com 5 com mais 15 que deu 440.
Pesquisadora: E, como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A9: Eu fiz 540 + 80 + 60, que deu 680 meses.
Pesquisadora: Tá bom! Muito Obrigada! Amanhã eu passo buscar a pasta, mas eu mando mensagem antes. Tchau!
A8: Tchau!

Aluna 10 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A10: Conhecei fazendo uma de vezes que no caso foi 7 × 3, deu 21, depois eu fiz uma de mais que foi, 21 + 4, que deu 25, depois eu fiz uma de dividir, 25 e na chave 7, como no 7 não tem 25 eu coloquei 21, que é mais próximo e deu 3 e o resto 4.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A10: A primeira que eu fiz foi de menos, que é 540 – 60 que dá 480. Depois, fiz uma de vezes 80 × 6, que também deu 480.
Pesquisadora: Ok! E, como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A10: Na terceira eu fiz duas de mais 20 + 20 + 20 que dá 60 e 400 + 60 que dá 460.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A10: No quarto problema eu fiz uma de menos e uma de dividir. A de menos foi 200 – 16 que dá 184 e a de dividir eu fiz 184 dividido por 4 que deu 46.
Pesquisadora: Muito bem! Amanhã eu passo buscar a pasta perto das 18 horas, mas eu mando mensagem antes.
A10: Tá bom, daí minha mãe já está aqui.
Pesquisadora: Obrigada! Tchau! Tchau!
A10: Obrigada eu! Tchau!

Aluna 11 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A11: Eu fiz uma conta de vezes, daí 7x3 vai dar 21, daí eu coloquei 21 mais 4 e deu 25.
Pesquisadora: Ok, vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A11: Primeira conta eu fiz de vezes 20 x 5 e deu 100, daí eu peguei o 100 e fiz vezes o 15, daí deu 1.500 litros.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A11: Eu fiz 200 dividido por 4, que deu 50, daí eu peguei o 50 -16 que deu 34.
Pesquisadora: Ok, vamos para o último problema! Como você pensou para resolver **o problema misto 4**?
A11: Primeiro eu fiz 540 – 60 deu 480, peguei 480 e dividi por 80 daí deu 6 então ele vai ter que economizar 6 meses.
Pesquisadora: Amanhã eu passo buscar a pasta, mas eu aviso antes.
A11: Tá, mas como vou saber se eu acertei?
Pesquisadora: Quando eu for buscar a pasta eu te falo, tá?
A11: Tá bom!
Pesquisadora: Obrigada, tchau!
A11: Tchau!

Aluna 12 e pesquisadora

Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 1**?
A12: Eu fiz de mais, 7 + 3 que dá 10.
Pesquisadora: Ok! Como você pensou para resolver o **problema misto 2**?
A12: Eu fiz de vezes, 20 × 5 que dá 100.
Pesquisadora: Vamos para o próximo! Como você pensou para resolver o **problema misto 3**?
A12: Eu pensei de mais 60 + 80 que dá 140.
Pesquisadora: Como você pensou para resolver o **problema misto 4**?
A12: Eu pensei de mais, 200 + 16 que deu 2016.
Pesquisadora: Tá bom! Guarda as folhas na pasta. Provavelmente vou amanhã buscar a pasta, mas eu aviso antes.
A12: Aham.
Pesquisadora: Obrigada, tchau!
A12: Tchau!