UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

O Conceito de Função do Contexto Universitário ao Contexto Escolar

Outubro de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

O Conceito de Função do Contexto Universitário ao Contexto Escolar

Carla Renata Garcia Xavier da Silva

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro Pablo Durand Lazo (Orientador)
Prof. Dr. Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano (UTFPR)
Prof. Dr. André Vicente (UNIOESTE)

Cascavel, Outubro de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Garcia Xavier da Silva, CARLA RENATA
O Conceito de Função do Contexto Universitário ao Contexto Escolar / CARLA RENATA Garcia Xavier da Silva; orientador Pedro Pablo Durand Lazo. -- Cascavel, 2021.
66 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2021.

1. . I. Durand Lazo, Pedro Pablo, orient. II. Título.

Carla Renata Garcia Xavier da Silva

O Conceito de Função do Contexto Universitário ao Contexto Escolar

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientador - Prof. Dr.Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Prof. Dr.Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr.André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 15 de outubro de 2021

Agradecimentos

Aos meus pais, Jane e Gilmar, e ao meu irmão, Rafael, pelo incentivo e por estarem comigo em todas as etapas da minha vida.

Ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Pablo Durand Lazo, pela paciência e orientação do trabalho.

Aos professores do Programa PROFMAT, especialmente ao coordenador Professor André Vicente, pelos ensinamentos e por fazer todo o possível para a realização desse trabalho.

Aos meus colegas de turma pelas horas de estudo em grupo que foram essenciais para o aprendizado.

Resumo

O conceito de função é tratado de formas diversas dependendo do contexto. No entanto, muitas vezes a apresentação do conceito é vaga. Neste trabalho, trazemos uma discussão sobre o conceito de função e suas propriedades a fim de estabelecer um enunciado formal e preciso da definição de função. Investigamos as abordagens deste conceito nos contextos universitário e escolar com o objetivo de verificar se o conceito matemático corresponde à noção que se trabalha na escola. Para isso, analisamos textos universitários e livros didáticos do PNLD disponíveis na Internet e observamos que os abusos de linguagem e de notação podem distorcer este conceito. Como resultado, apresentamos a fundamentação metodológica do ensino deste conceito a partir das disciplinas oferecidas nos cursos de licenciatura.

Abstract

The concept of function is treated in different ways depending on the context. However, the presentation of the concept is often vague. In this work, we bring a discussion about the concept of function and its properties in order to estabilish a formal and precise statement of a function definition. We investigate the approaches of this concept in university and school contexts with the aim of verifying if the mathematical concept corresponds to the notion that is used at school. For this, we analyzed university texts and PNLD textbooks available on the internet and observed that language and notation abuses can distort this concept. As a result, we present the methodological foundations for teaching this concept from de subjects offered in undergraduate courses.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho é voltado para professores de matemática, tanto aqueles que lecionam no ensino básico quanto aqueles que lecionam nos cursos de licenciatura e fazem parte do processo de formação docente. Buscamos contribuir com o ensino do conceito de função trazendo reflexões pertinentes a respeito do tema.

No capítulo 1, trazemos uma breve revisão histórica do processo de desenvolvimento do conceito de função e depois apresentamos críticas de Mac Lane (1998) a respeito de algumas definições normalmente utilizadas. Encerramos este capítulo com a definição formal de função que seja mais precisa e com a utilização de uma linguagem clara e objetiva.

No capítulo 2, observamos de que forma o conceito é abordado no ensino superior. O foco é avaliar a linguagem utilizada e a clareza da definição apresentada. Esta etapa é importante para compreender de que forma se dá o processo de ensino-aprendizagem na escola, pois é na graduação que ocorre a formação inicial do professor.

No capítulo 3, observamos textos escolares, mais especificamente os livros didáticos. A análise terá o mesmo foco do capítulo anterior, porém agora avaliaremos obras que serão usadas diretamente no contexto escolar.

No capítulo 4, exploramos os desafios enfrentados por alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem de funções. Apresentamos algumas possibilidades do que poderia estar dificultando o aprendizado deste conceito por parte dos alunos com base nas observações realizadas nas etapas anteriores.

Capítulo 1

O Conceito de Função

Neste capítulo, faremos uma breve resenha histórica sobre o conceito de função a fim de entender o processo de desenvolvimento deste conceito.

Não pretendemos apresentar em detalhes todo o processo de desenvolvimento histórico do conceito de função. Nossa abordagem é no sentido de trazer elementos que contribuam para a compreensão das diferentes definições que já foram propostas ao longo do tempo.

Posteriormente, abordaremos de forma mais específica algumas das descrições que foram utilizadas ao longo do tempo para tentar definir este conceito trazendo a discussão que Mac Lane (1998) faz em relação as falhas dessas descrições. Por fim, apresentamos uma definição para o conceito de função.

1 Resenha Histórica do Conceito de Função

Patrick Perrin, em palestra proferida na faculdade de ciências de Reims, em 1999, afirmou que é possível distinguir cinco etapas na história da evolução do conceito de função: Tabela de valores numéricos; Representação geométrica e mecânica de uma função; função vista como expressão analítica; função vista como qualquer correspondência e a definição conjuntista.

Nesta Resenha Histórica seguiremos o esquema evolutivo proposto por Perrin.

1.1 Tabela de valores numéricos

O seguinte comentário feito por Bourbaki (1976) nos dá uma ideia de qual era a situação do conhecimento matemático das antigas culturas.

> Que existiese una matemática prehélenica muy desarrollada es algo que hoy dia no puede ser puesto en duda. No solamente as nociones (ya de por sí muy abstractas) de número entero y de medida de magnitudes son utilizadas corrientemente en los documentos más antiguos que nos han llegado de Egipto o de Caldea, sino que el álgebra babilónica, por la elegancia e seguridad de sus métodos, no podría ser considerada como una simple colección de problemas resueltos mediante una serie de tanteos empíricos. Y, si biem no se encuentra en los textos nada parecido a una "demostración" en el sentido formal de la palabra, hay motivo para pensar que el descubrimiento de tales procedimientos de resolución, cuya generalidad se transparenta a través de los casos numéricos particulares, no ha podido realizarse sin un mínimo de encadenamientos lógicos (quizá no enteremente concientes, sino más bien del tipo de aquellos en los que se apoya un algebrista moderno cuando realiza un cálculo antes de "poner como es debido" todos sus detalles)([232], p. 203 ss.) (BOURBAKI, 1976).

> Que existia uma matemática pré-helênica altamente desenvolvida é algo que não pode ser colocado em dúvida hoje. Não são apenas as noções (já muito abstratas) de números inteiros e medidas de magnitude comumente usadas nos documentos mais antigos que chegaram até nós do Egito ou da Caldéia, mas a álgebra babilônica, pela elegância e segurança de seus métodos, não poderia ser considerada como uma coleção simples de problemas resolvidos por uma série de testes empíricos. E, se nada que se assemelhe a uma "demonstração" no sentido formal da palavra se encontrar nos textos, há motivos para pensar que a descoberta de tais procedimentos de resolução, cuja generalidade é revelada por meio de casos numéricos particulares, não foi possível prescindir de um mínimo de ligações lógicas (talvez não totalmente conscientes, mas sim do tipo daquelas em que um algebrista moderno se baseia quando realiza um cálculo antes de "colocar corretamente" todos os seus detalhes) ([232], p. 203 e seguintes).(BOURBAKI, 1976, tradução nossa.)

Contrariamente do que poderia se pensar, o conhecimento matemático das antigas civilizações do Egito e da Mesopotâmia era muito desenvolvido tanto nas noções de alguns conceitos quanto nos métodos de adquisição de resultados que revelam que seu pensamento se movimentava já em um alto grau de abstração e generalidade e que seus procedimentos possuíam uma certa lógica interna ainda não consciente. Os resultados da aplicação de seus procedimentos de resolução gerais foram registrados como casos numéricos particulares em tabelas. Estas tabelas, de alguma forma, nos indicam a presença da noção ainda bastante vaga e intuitiva de correspondência.

> A Babylone, on utilisait déjà des tables de carrés, cubes, racines carrées et cubiques ; ainsi que des tables d'éphémérides (soleil, lune, planètes). Dans l'antiquité grecque les Pythagoriciens ont étudié les lois reliant les hauteurs des sons émis par des cordes et les longueurs de celles-ci. Les Alexandrins dressèrent les premières tables de corde (Hipparque, Menelaus, Ptolémée) ; seules celles de Ptolémée nous sont parvenues. (PERRIN, 1999)

> Na Babilônia, tabelas de quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas já eram usadas; bem como tabelas de efemérides (sol, lua, planetas).
> Na Grécia antiga, os pitagóricos estudavam as leis que relacionavam os tons dos sons emitidos pelas cordas a seus comprimentos. Os alexandrinos montaram as primeiras tabelas de corda (Hiparco, Menelau, Ptolomeu); apenas os de Ptolomeu sobreviveram. (PERRIN, 1999,tradução nossa.)

Como nos refere Perrin (1999), os Babilônios faziam uso de tabelas associadas a certas funções, mesmo que o termo e o conceito ainda não existissem. Este fato é comentado por Roque e Carvalho (2012) da seguinte maneira

> "as tabelas babilônicas e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratava justamente de registros de correspondências" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 264).

De acordo com Roque e Carvalho (2012), é essa ênfase na ideia de correspondência que fez com que muitos historiadores da Matemática enxergassem nas tabelas babilônicas e egípcias ou em tabelas usadas usadas na astronomia grega a noção de função. No entanto, os autores esclarecem que

> "obviamente, estes povos não propuseram uma noção de função para compreender suas tabelas e esta associação não parece ajudar a entender a natureza da Matemática que praticavam" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 264).

Outro ponto destacado pelos autores é que a ideia de variação, fundamental no conceito de função atual, também não pode ser observada nessas tabelas.

Os antigos gregos procuraram estabelecer as leis que relacionavam tons com os comprimentos das cordas. Para ilustrar a forma como isto era feito, Stewart (2007), nos descreve o método usado por Hiparco para derivar as primeiras tabelas trigonométricas:

Las primeras tablas triginométricas fueron derivadas por Hiparco en torno al 150 a.C. En lugar de la moderna función seno, él utilizaba una cantidad íntimamente relacionada, que desde el punto de vista geométrico era igualmente natural. Imaginemos un círculo con dos radios que forman un ángulo θ. Los puntos en donde estos radios cortan al círculo pueden unirse por una línea recta, llamada cuerda. También pueden considerarse como los puntos extremos de un arco de círculo. Hiparco hizo una tabla que relaciona arcos y longitudes de cuerda para un rango de ángulos. Si el círculo tiene radio 1, entonces la longitud del arco es igual a θ cuando este ángulo se mide en unidades conocidas como radianes. Un poco de geometría elemental muestra que la longitud de la cuerda en notación moderna es $2 \sin \theta/2$. Por ello, el cálculo de Hiparco está muy estrechamente relacionado con una tabla de senos, incluso si no estaba presentado de esta manera. (STEWART, 2007, p. 90)

As primeiras tabelas trigonométricas foram derivadas por Hiparcos por volta de 150 AC. Em vez da função seno moderna, ele usou uma quantidade intimamente relacionada, que era igualmente natural do ponto de vista geométrico. Vamos imaginar um círculo com dois raios que formam um ângulo θ. Os pontos onde esses raios cruzam o círculo podem ser unidos por uma linha reta, chamada de corda. Eles também podem ser considerados como os pontos extremos de um arco de círculo. Hipparchus fez uma tabela que relaciona arcos e comprimentos de cordas em uma variedade de ângulos. Se o círculo tiver raio 1, o comprimento do arco será igual a θ quando esse ângulo for medido em unidades conhecidas como radianos. Um pouco de geometria elementar mostra que o comprimento do acorde na notação moderna é $2 \sin \theta/2$. Assim, o cálculo de Hiparcos está intimamente relacionado com uma tabela de senos, mesmo que não tenha sido apresentado desta forma. (STEWART, 2007, p. 90, tradução nossa)

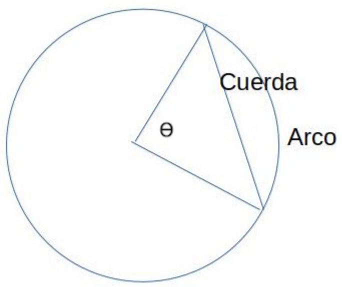


Figura 1.1: Arco e corda correspondentes ao ángulo θ (Stewart, 2007)

Les tables utilisées dans l'antiquité sont conçues comme des relations entre des ensembles finis de quantités constantes (il n'y a pas d'idée de quantité variable). Aucun symbolisme algébrique, excepté chez Diophante, aucune expression analytique n'ont été utilisés.
Seul le mouvement uniforme est envisagé (rectiligne ou circulaire). (PERRIN, 1999)

> As tabelas usadas na antiguidade são concebidas como relações entre conjuntos finitos de quantidades constantes (não há ideia de quantidade variável).
> Nenhum simbolismo algébrico, exceto em Diofanto, nenhuma expressão analítica foi usada.
> Apenas o movimento uniforme é considerado (retilíneo ou circular). (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Segundo Perrin (1999), as tabelas da antiguidade se caraterizavam por:

- exprimir relações entre conjuntos finitos de quantidades constantes (não há ideia de quantidade variável).
- não possuir nenhum simbolismo algébrico e também nenhuma expressão analítica foi usada.
- considerar apenas o movimento uniforme (retilíneo ou circular).

Finalmente, o autor nos relata a respeito da atividade dos indianos que construíram as primeiras tabelas de senos e dos árabes que aprimoram e diversificam as tabelas numéricas:

> Vers l'an 500, le mathématicien indien Aryabatha donna les premières tables de sinus.
> Plus tard les Arabes améliorèrent et diversifièrent les tables numériques. Nous leur devons l'introduction des autres lignes trigonométriques. (PERRIN, 1999)

> Por volta do ano 500, o matemático indiano Aryabatha deu as primeiras tabelas de senos.
> Posteriormente, os árabes aprimoraram e diversificaram as tabelas numéricas. Devemos a eles a introdução das outras linhas trigonométricas. (PERRIN, 1999, tradução nossa.)

1.2 Representação geométrica e mecânica de uma função

Esta etapa do desenvolvimento do conceito de função se dá quando se considera a matemática como instrumento de conhecimento dos fenômenos naturais. Trata-se das tentativas de quantificar qualidades ou formas tais como calor, luz, densidades, distância e outras. As "intensidades das formas" são relacionadas com suas "extensões". Assim, por exemplo, uma "qualidade uniforme" é aquela de igual intensidade em todas as suas partes. Desta forma é possível dizer que a primeira representação gráfica de uma "função" pode ser compreendida como grau de intensidade em uma linha vertical e extensão em uma linha horizontal. Os detalhes desta etapa da história do conceito são descritos por Perrin (1999) no texto citado a seguir.

> Au 14 e siècle, dans les écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris, on commence à considérer les mathématiques comme l'instrument de connaissance des phénomènes naturels. On cherche à quantifier certaines « qualités » ou « formes » telles que la chaleur, la lumière, la couleur, la densité, la distance, la vitesse en leur prêtant des « degrés d'intensité » pouvant varier continûment entre des limites données. Les « intensités des formes » sont considérées en relation avec leurs « extensions », par exemple : la quantité de matière, le temps... Les premiers concepts de cinématique apparaissent : vitesse instantanée, accélération. On peut citer : Roger Bacon, William Heytesbury, Richard Swineshead et Nicole Oresme. Nous leur devons la première représentation graphique d'une « fonction » : degré d'intensité sur une ligne verticale et extension sur une ligne horizontale ; le théorème de Merton (détermination de la vitesse moyenne d'un mouvement uniformément accéléré). Une classification des qualités en plusieurs sortes (uniforme, uniformément difforme, difformément difforme) apparaît chez Oresme. (PERRIN, 1999)

A figura 1.2 mostra a classificação das qualidades segundo Oresme.

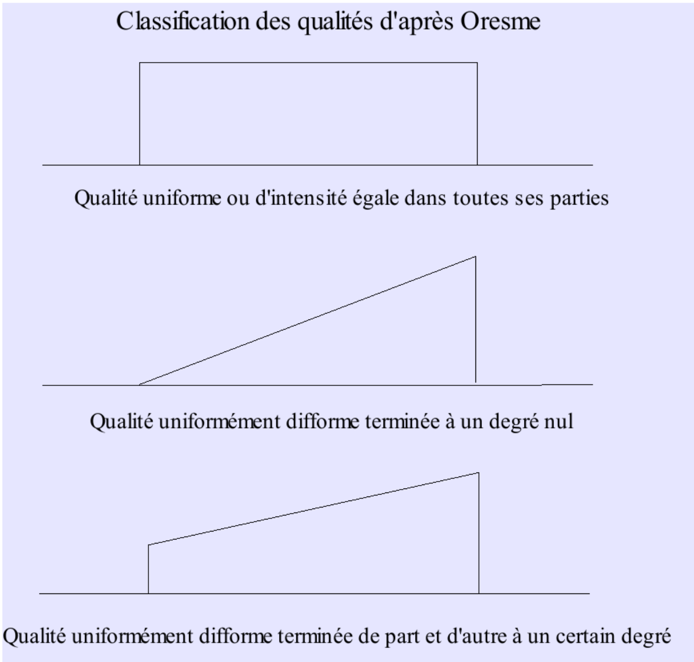


Figura 1.2: Classificação das qualidades de Oresme (Perrin, 1999)

> No século 14, nas escolas de filosofia natural de Oxford e Paris, começamos a considerar a matemática como o instrumento de conhecimento dos fenômenos naturais. Tentamos quantificar certas "qualidades"ou "formas", como calor, luz, cor, densidade, distância, velocidade, dando-lhes "graus de intensidade"que podem variar continuamente entre os limites dados. As "intensidades das formas"são consideradas em relação às suas "extensões", por exemplo: a quantidade de matéria, o tempo ... Surgem os primeiros conceitos de cinemática: velocidade instantânea, aceleração. Podemos citar: Roger Bacon, William Heytesbury, Richard Swineshead e Nicole Oresme. Devemos a eles a primeira representação gráfica de uma "função": grau de intensidade em uma linha vertical e extensão em uma linha horizontal; Teorema de Merton (determinação da velocidade média de um movimento uniformemente acelerado). Uma classificação de qualidades em vários tipos (uniforme, uniformemente deformado, deformado deformado) aparece em Oresme. (PERRIN, 1999, tradução nossa)

A teoria da latitude das formas teve grande renome na Europa do seculo XV e inícios do XVI. O desenvolvimento do simbolismo algébrico, os trabalhos de Kepler sobre trajetórias dos planeta e os estudos de Galileu acerca da mecânica, prepararam uma nova transformação do conceito de função ao colocar o estudo das propriedades das curvas no centro de atenção dos matemáticos. Como superação desta etapa a função adquire sua representação por fórmula.

> Cette théorie de la latitude des formes jouit d'une grande renommée en Europe au 15 e et au début du 16 e siècle. Deux événements vont ensuite préparer une nouvelle transformation du concept de fonction, à savoir sa représentation par une formule. Le premier est l'apparition chez différents algébristes du 16 e siècle de systèmes de notation qui finiront par déboucher sur l'algèbre littérale symbolique. Le second, initié par les travaux de Kepler sur les trajectoires des planètes et ceux de Galilée sur les principes de base de la mécanique, replace l'étude des propriétés des courbes au centre des préoccupations des mathématiciens.
> Dernière fonction à être introduite dans le langage ancien et par des considérations cinématiques : le logarithme par Néper en 1614. (PERRIN, 1999)

> Esta teoria da latitude das formas gozou de grande renome na Europa no século XV e no início do século XVI. Dois eventos irão então preparar uma nova transformação do conceito de função, ou seja, sua representação por uma fórmula. O primeiro é o aparecimento entre vários algebristas do século 16 de sistemas de notação que acabará por levar à álgebra simbólica literal. A segunda, iniciada pelo trabalho de Kepler sobre as trajetórias dos planetas e as de Galileu sobre os princípios básicos da mecânica, coloca o estudo das propriedades das curvas no centro das preocupações dos matemáticos. Última função a ser introduzida na linguagem antiga e por considerações cinemáticas: o logaritmo de Néper em 1614. (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Na Figura 1.3 podemos ver em detalhes a descrição do logaritmo de Neper.

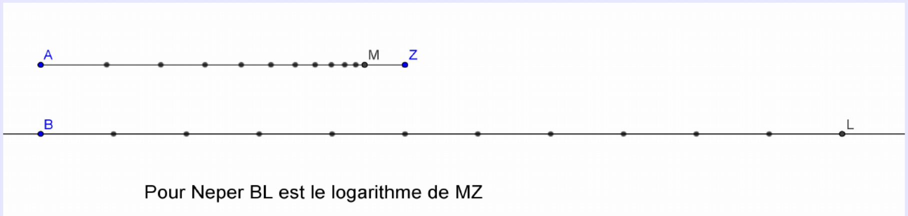
Le logarithme de Neper

En 1614, le baron écossais Jean Neper fait paraître un traité intitulé *Description de la merveilleuse règle des logarithmes* dans lequel il expose une définition générale des logarithmes et donne une table à 7 chiffres des logarithmes des sinus de 0° à 90° de minute en minute.

Sa définition repose sur une image cinématique :
Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne, qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse.

Voici une présentation simplifiée du modèle mécanique de Néper. M et L sont deux mobiles qui se déplacent suivant des trajectoires parallèles : le segment AZ et la demi-droite d'origine B.

M se déplace avec une vitesse proportionnelle à sa distance x au point Z tandis que L se déplace à une vitesse uniforme. Les mobiles partent au même instant avec la même vitesse initiale v. (A l'instant t = 0, M est en A et L est en B). Pour Néper BL est le logarithme de MZ. Il prendra pour calculer les logarithmes de sa table AZ = 10^7. Ce procédé permet de transformer une suite géométrique en une suite arithmétique.



Une traduction totalement anachronique en termes modernes donnerait : $x = MZ$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = -kx$ où k est une constante positive et par conséquent $y = BL$ vérifie $y = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$.

Figura 1.3: Logaritmo de Néper (Perri, 1999)

1.3 Função vista como expressão analítica

Até este momento ainda não existia a noção de variável. De acordo com Roque e Carvalho (2012), esta noção foi introduzida apenas no século XIX.

> A noção de variável só foi introduzida formalmente no século XIX, mas antes da formalização deste conceito,a noção de variação estava presente nas tentativas de matematização do movimento dos séculos XVI e XVII. O estudo da variação dos fenômenos naturais em relação ao tempo, por meio de leis matemáticas, se deve em grande parte ao desenvolvimento da física após Galileu (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 264).

As relações mencionadas, variação dos fenômenos naturais em relação ao tempo, eram analisadas a partir de proporções geométricas. Posteriormente, passou-se a associar cada movimento a uma curva que poderia ser representada por uma equação "indeterminada" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 264).

O problema apontado por Roque e Carvalho (2012), neste caso, é que nem toda curva respeita a restrição atual de que cada valor de x corresponde a um único valor de

y. O exemplo citado pelos autores é a equação de uma circunferência que apesar de ser uma equação em x e y não representa uma função.

Ao estudar curvas descritas por equações indeterminadas há uma ideia de que "uma equação em x e y é um modo de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas por meio dos valores da outra" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 265).

Descartes (1696 - 1650) trabalhava com equações indeterminadas, mas ele acreditava que somente as curvas de natureza algébrica é que poderiam ser expressas analiticamente. Roque e Carvalho (2012) afirmam que foi Leibniz (1646 – 1716) quem deu o passo fundamental para ampliação desta notação, pois ele expandiu o universo das curvas, incluindo também as transcendentes, que podiam ser representadas por séries infinitas.

A geometria analítica deu uma nova perspectiva ao desenvolvimento do conceito de função como destaca Perrin (1999) no texto da seguinte citação:

> La géométrie analytique de Descartes et Fermat permet une nouvelle façon de penser une relation fonctionnelle entre deux quantités variables sous la forme d'une équation entre des coordonnées x et y. Même si Descartes distingue deux types de courbes : les géométriques susceptibles d'être représentées par une équation algébrique $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme (exemple les coniques) et les mécaniques (exemple la roulette ou cycloïde). (PERRIN, 1999)

> A geometria analítica de Descartes e Fermat permite uma nova forma de pensar a relação funcional entre duas grandezas variáveis na forma de uma equação entre as coordenadas x e y. Mesmo que Descartes distinga dois tipos de curvas: as geométricas provavelmente representadas por uma equação algébrica $P(x, y) = 0$, onde P é um polinômio (por exemplo, as cônicas) e as mecânicas (por exemplo, a roleta ou ciclóide). (PERRIN, 1999, tradução nossa)

> Au milieu du 17 e siècle, la découverte du développement en série entière des fonctions par Mercator, Grégory et Newton élargit le champ des fonctions étudiées : Nous disons qu'une quantité est composée à partir de quantités, lorsque, par addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines de ces quantités, ou par n'importe quelle opération imaginable, on obtient l'autre quantité. (Grégory : Vera circuli et hyperbolae quadratura - 1667) (PERRIN, 1999)

> Em meados do século XVII, a descoberta do desenvolvimento em série inteira de funções por Mercator, Grégory e Newton ampliou o campo das funções estudadas: Dizemos que uma quantidade é composta de quantidades, quando, por adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raízes dessas quantidades, ou por qualquer operação imaginável, obtemos a outra quantidade. (Grégory: Vera circuli et hyperbolae quadratura - 1667) (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Ponte (1990) e Zuffi (2016) apontam também os trabalhos de Newton (1642 - 1727) como importantes para o delineamento do conceito de função na mesma época. De acordo com os autores, ele utilizava a palavra "fluentes" para se referir a este conceito.

Perrin (1999), na citação a seguir, destaca a forma como o cálculo infinitesimal influenciou de forma importante na evolução do conceito de função e descreve a proposta de Newton para representar fluentes (funções) mediante uma parametrização de curvas e dando uma definição delas. ***Chama-se fluentes as quantidades que aumentam gradual e indefinidamente e fluxões as velocidades onde os fluentes aumentam por o movimento que os produz***:

> Le calcul infinitésimal de Newton et de Leibniz va mettre la loi de variation de la relation fonctionnelle au centre de l'étude des propriétés des courbes. Isaac Newton propose une représentation cinématique (dans laquelle nous reconnaissons un paramétrage de la courbe) et considère les quantités comme produites par une augmentation continuelle à la manière de l'espace que décrit un corps en mouvement. Il appelle fluentes ces quantités qu'[il] considère comme augmentées graduellement et indéfiniment et fluxions les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit. (Newton : la méthode des fluxions et des suites infinies - 1736) (PERRIN, 1999)

> O cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz colocará a lei da variação da relação funcional no centro do estudo das propriedades das curvas. Isaac Newton propõe uma representação cinemática (na qual reconhecemos uma parametrização da curva) e considera as quantidades como produzidas por um aumento contínuo na forma do espaço descrito por um corpo em movimento. Ele chama de fluentes aquelas quantidades que [ele] considera aumentadas gradual e indefinidamente e fluxões as velocidades onde os fluentes são aumentadas pelo movimento que os produz. (Newton: o método das fluxões e sequências infinitas - 1736) (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Ainda de acordo com Perrin (1999), foi Leibniz o primeiro a usar o termo "função" e também o responsável por introduzir na terminologia os termos "constante", "variável" e "coordenada". Como se pode constatar na citação a seguir, Leibniz, usa a palavra função para designar qualquer segmento de reta cujo comprimento depende da posição do ponto atual da curva estudada. (vide Figura 1.4)

> Le mot « fonction » apparaît pour la première fois chez Leibniz mais pour désigner tout segment de droite dont la longueur dépend de la position du point courant de la courbe étudiée : J'appelle fonction un segment de droite déterminable exclusivement à partir de droites menées entre un point fixe et un point donné de la courbe et de sa courbure. Telles sont l'abscisse AB ou $A\beta$, l'ordonnée BC ou βC, la tangente CT ou $C\theta$, la normale CP ou $C\psi$, la sous-tangente BT ou $\beta\theta$, la sous normale BP ou $\beta\psi$, le segment coupé par la tangente AT ou $A\theta$, le segment coupé par la normale AP ou $A\psi$, le segment délimité par ces deux dernières PT ou $\psi\theta$, le rayon d'osculation c'est-à-dire le rayon de courbure et quantités d'autres. (Leibniz : nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione - 1694) (PERRIN, 1999)

A palavra "função"aparece pela primeira vez em Leibniz, mas para designar qualquer segmento de reta cujo comprimento depende da posição do ponto atual da curva estudada: Eu chamo uma função de segmento de reta determinável exclusivamente a partir de linhas conduzidas entre um ponto fixo e um determinado ponto da curva e sua curvatura. Tais são a abcissa AB ou $A\beta$, a ordenada BC ou βC, a tangente CT ou $C\theta$, a normal CP ou $C\psi$, a subtangente BT ou $\beta\theta$, a sub-normal BP ou $\beta\psi$, o segmento de corte por a tangente AT ou $A\theta$, o segmento cortado pelo normal AP ou $A\psi$, o segmento delimitado por estes dois últimos PT ou $\psi\theta$, o raio de osculação, ou seja, o raio de curvatura e as quantidades dos outros. (Leibniz: nova cálculos diferencialis aplicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex dados tangentium conditione - 1694) (PERRIN, 1999, tradução nossa)

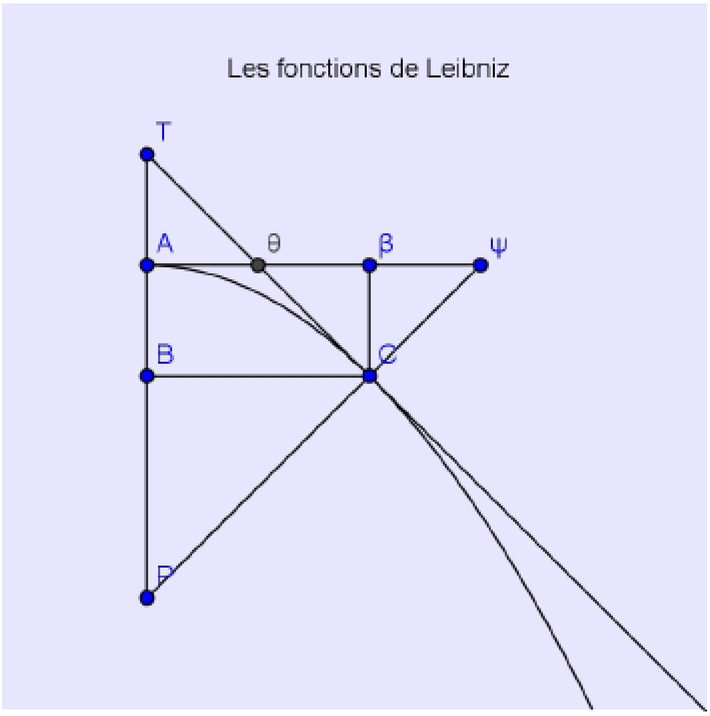


Figura 1.4: As funções de Leibniz (Perrin, 1999)

Leibniz introduit également l'usage généralisé des mots constante, variable, coordonnées, usage qui deviendra courant grâce au traité du Marquis de l'Hospital : Analyse des infiniments petits. (PERRIN, 1999)

Leibniz também introduz o uso generalizado das palavras constante, variável, coordenadas, uso que se tornará comum graças ao tratado do Marquês de l'Hospital: Análise do infinitamente pequeno. (PERRIN, 1999,tradução nossa)

É em um artigo de Jean Bernoulli de 1718 que se dá uma primeira definição explicita de função como expressão analítica: ***chama-se função de uma quantidade variável uma quantidade composta de qualquer forma dessa quantidade variável e de constantes***. A notação por ele proposta é ϕx.

> La première définition explicite d'une fonction comme expression analytique apparaît dans un article de Jean Bernoulli de 1718 : Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes. Il y propose la notation ϕx. (PERRIN, 1999)

> A primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica aparece em um artigo de Jean Bernoulli de 1718:
> Definição. Chamamos uma função de uma quantidade variável uma quantidade composta de qualquer forma dessa quantidade variável e de constantes. Ele propõe aí a notação ϕx. (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Roque e Carvalho (2012) explicam que "o uso de séries infinitas está na base da definição do século XVIII, quando passou a ser objeto central da análise". Desta forma, a função passou a ser definida como "***uma expressão analítica composta de um modo qualquer de quantidades constantes e variáveis***" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 296, grifo nosso).

Segundo Zuffi (2016), Bernoulli estudava funções bem-comportadas, pois seu trabalho pretendia contribuir com problemas que envolviam funções diferenciáveis, como é o caso do aprimoramento da utilização da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite.

Roque e Carvalho (2012) esclarecem que a definição analítica de Bernoulli indica uma tendência daquela época, na qual o cálculo infinitesimal abandonou suas referências geométricas e mecânicas e passou a ser formulado exclusivamente em linguagem algébrica. Eles afirmam que este movimento foi "levado adiante pelos analistas do século XVIII, sobretudo Euler, mas também Lagrange" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 301).

No trabalho de Sierpinska (1992), também é apresentada a definição dada por Euler (1707 -1783), discípulo de Bernoulli, que destacamos devido a sua importância pois expressa de forma explicita a caracterização de função que marca a época: ***Uma função*** de uma quantidade variável ***é uma expressão analítica***, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes.

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $\dfrac{az + b}{aa - zz}$; cz; etc; são funções de z (SIERPINSKA, 1992, p. 45 apud ZUFFI, 2016).

No caso de Euler, Boyer (1974 apud ZUFFI, 2016) revela que ele organizou o cálculo a partir da ampliação da ideia de "fluentes" de Newton para um ramo mais amplo da matemática, a Análise. O autor diz que foi a partir daí que o conceito de função se tornou essencial nesta área. No entanto, a definição de Euler não deixava claro o que significava "expressão analítica".

> La notation $f(x)$ est due à Euler (1740). L' Introductio in analysin infinitorum de Leonhard Euler est le premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de l'analyse. Euler donne au début de cet ouvrage une classification des fonctions d'après la forme de leur expression analytique : (PERRIN, 1999)

> A notação $f(x)$ é devida a Euler (1740). O Introductio in Analyzin Infinitorum de Leonhard Euler é o primeiro tratado em que o conceito de função é a base da análise. Euler dá no início deste trabalho uma classificação das funções de acordo com a forma de sua expressão analítica: (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Perrin (1999), no texto acima citado, nos informa também que devemos a Euler (1740) a notação $f(x)$ atualmente usada. Também foi Euler que nos deu uma classificação das funções segundo a forma da expressão analítica, conforme mostra a Figura 1.5 a seguir:

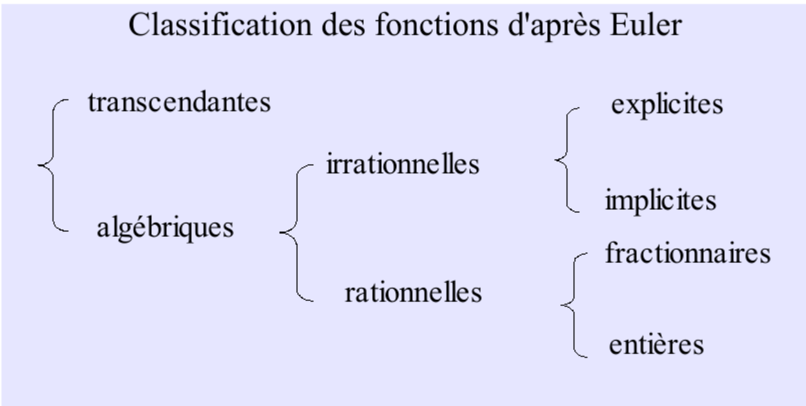


Figura 1.5: Classificação de funções segundo Euler (Perrin, 1999)

> Sa définition des fonctions transcendantes peut sembler naturelle : Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes. (Euler : Introductio in analysin infinitorum - 1748). (PERRIN, 1999)

> Sua definição de funções transcendentes pode parecer natural: As funções são divididas em algébrica e transcendente; os primeiros são formados apenas por operações algébricas, e os últimos assumem para sua formação operações transcendentes. (Euler: Introductio in analysin infinitorum - 1748). (PERRIN, 1999,tradução nossa)

Porém, deve-se observar que a classificação sugerida por Euler não é consistente como ilustram os contra-exemplos listados e comentados por Perrin (1999):

> Mais le contre-exemple i montre qu'il n'est pas toujours possible de déterminer la nature algébrique ou transcendante d'une fonction par simple lecture de l'expression analytique. Euler appelle fonctions continues celles qui sont définies par une seule expression analytique et fonctions mixtes celles qui nécessitent différentes expressions analytiques. Ceci sera critiqué par Cauchy en 1844 qui donnera un exemple de fonction mixte et continue au sens d'Euler (cf. contre- exemple ii). Euler pense (à tort) que toute fonction peut être transformée en une série infinie (cf. contre-exemple iii). Ainsi il ne restera aucun doute, que toute fonction de z ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme : $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}(+\&c)$, les exposans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ exprimant des nombres quelconques. (ibidem)Cette définition d'une fonction comme expression analytique dont la forme la plus générale serait une série entière est encore présente chez Lagrange, qui tente de prouver dans sa Théorie des fonctions analytiques que toute fonction peut être représentée par une série entière, sauf peut-être en des valeurs isolées où on utilise des puissances négatives ou fractionnaires. (PERRIN, 1999)

A Figura 1.6 contem os contra-exemplos que provam a inconsistência da classificação de funções proposta por Euler.

Quelques contre-exemples plus ou moins célèbres (1)

i) Fonction définie par une seule expression et qui est algébrique ou transcendante suivant les valeurs de x :

Pour $x \geq 0$ $\quad f(x) = \lim \dfrac{x^{n+1} + \mathrm{e}^x + 1 - e}{x^n + 1}$ quand n tend vers $+\infty$

(On a $f(x) = \mathrm{e}^x + 1 - e$ pour $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$ et $f(x) = x$ pour $x > 1$)

ii) Fonction mixte et continue au sens d'Euler :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{(Cauchy, 1844)}$$

iii) Fonction indéfiniment différentiable sur **R** et non analytique :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Cauchy, 1823)}$$

Figura 1.6: Alguns contra-exemplos notáveis (1) (Perrin, 1999)

> Mas o contra-exemplo i mostra que nem sempre é possível determinar a natureza algébrica ou transcendente de uma função simplesmente lendo a expressão analítica. Euler chama funções contínuas aquelas que são definidas por uma única expressão analítica e funções mistas aquelas que requerem diferentes expressões analíticas. Isso será criticado por Cauchy em 1844, que dará um exemplo de uma função mista e contínua no sentido de Euler (cf. o contra-exemplo ii). Euler pensa (erroneamente) que qualquer função pode ser transformada em uma série infinita (cf. o contra-exemplo iii). Assim, não haverá dúvida de que qualquer função de z não pode ser transformada em uma série infinita desta forma:$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta}(+\&c)$, os expoentes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$. expressando quaisquer números. (ibidem) Esta definição de função como uma expressão analítica cuja forma mais geral seria uma série inteira ainda está presente em Lagrange, que tenta provar em sua Teoria das funções analíticas que qualquer função pode ser representada por uma série inteira, exceto talvez em valores isolados onde potências negativas ou fracionárias são usadas. (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Indo mais além, a definição apresentada por Lagrange (1736 – 1813) já incorpora ao conceito a possibilidade de termos duas ou mais variáveis:

> Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que se consideram variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas. (SIERPINSKA, 1992, p.45 apud ZUFFI, 2016).

Na segunda metade do século XVIII, importantes publicações foram usadas como livros-texto para cursos de Matemática. Em 1788, Lagrange publicou *Mecanique Analytique*, no qual a Análise foi apresentada por postulados (BOYER, 1974 apud ZUFFI, 2016). Segundo Zuffi (2016), ele utilizou as notações $f'(x), f''(x), ..., f^n(x)$ para representar a primeira, segunda, ..., n-ésima derivada de uma função $f(x)$

Lagrange também publicou resultados sobre mecânica e teoria de equações, contribuiu com o "método da variação dos parâmetros" para resolver equações diferenciais lineares não-homogêneas, e com os "multiplicadores de Lagrange", para máximos e mínimos condicionados de uma função $f(x, y, z, w)$ (ZUFFI, 2016).

1.4 Função vista como qualquer correspondência

Como relata Perrin (1999), a solução geral da equação $\frac{1}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ das cordas vibrantes, $u(t, x) = f(x + vt) + g(x - vt)$, dependente de funções arbitrarias f e g, (vide

Figura 1.7), levou Euler a enunciar uma definição mais geral de função que destacamos em virtude que explicita a caracterização de função como qualquer correspondência o que signará a época: ***Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então é costume chamar essas quantidades de funções das últimas; esta denominação tem a maior extensão e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras***. De outro lado, Bernoulli, encontra soluções a esta equação na forma de séries trigonométricas. Isto planteou a questão de se as funções gerais no sentido Euler admitem ser representadas por séries trigonométricas.

> L'étude des solutions de l'équation aux cordes vibrantes va amener Euler à envisager en 1755 une définition plus générale des fonctions, car pour lui les fonctions arbitraires intervenant dans ces solutions peuvent correspondre à des courbes tracées à main libre : Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a 1'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. (Euler : Institutiones calculi differentialis - 1755) De son côté Daniel Bernoulli a trouvé des solutions de l'équation aux cordes vibrantes sous forme de séries trigonométriques. Ainsi surgit la nouvelle question qui allait faire progresser le concept de fonction au 19 e siècle : les fonctions arbitraires au sens d'Euler peuvent-elles être représentées par une série trigonométrique ? (PERRIN, 1999)

> O estudo das soluções da equação da corda vibrante levará Euler a considerar em 1755 uma definição mais geral de funções, pois para ele as funções arbitrárias que intervêm nessas soluções podem corresponder a curvas traçadas à mão livre: Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então é costume chamar essas quantidades de funções das últimas; esta denominação tem a maior extensão e contém em si todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. (Euler: Institutiones calculi diferencialis - 1755) Daniel Bernoulli, por sua vez, encontrou soluções para a equação das cordas vibrantes na forma de séries trigonométricas. Assim, surge a nova questão que faria avançar o conceito de função no século 19: podem funções arbitrárias no sentido de Euler ser representadas por uma série trigonométrica? (PERRIN, 1999, tradução nossa)

L'équation aux cordes vibrantes

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Sa solution générale est : $u(x,t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ où f et g sont des fonctions arbitraires d'une variable ; elle s'interprète comme la superposition de deux ondes arbitraires qui se propagent à la vitesse v, l'une dans le sens des x négatifs, l'autre dans les sens des x positifs.

Figura 1.7: Equação da corda vibrante (Perrin, 1999)

O esforço por estabelecer o rigor na fundamentação do cálculo diferencial leva a um enriquecimento do conceito de função em relação a suas propriedades tais como a continuidade e a derivabilidade. Na época, não se podia pensar que uma função continua poderia ser não derivável.

> Le concept allait aussi bénéficier de l'effort de rigueur mené par Gauss, Cauchy, Bolzano et Abel concernant les fondements du calcul différentiel : étude de la convergence des séries, définition de la continuité d'une fonction, de sa dérivée. Remarquons tout de même que, en ce début du 19siècle, les mathématiciens ne mettent pas en doute l'existence de la dérivée des fonctions continues (plus précisément ils pensent qu'une fonction continue admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite éventuellement infinie). (PERRIN, 1999)

> O conceito também se beneficiaria do esforço rigoroso liderado por Gauss, Cauchy, Bolzano e Abel sobre os fundamentos do cálculo diferencial: estudo da convergência das séries, definição da continuidade de uma função, de sua derivada. Note, no entanto, que, no início do século XIX, os matemáticos não questionam a existência da derivada das funções contínuas (mais precisamente, pensam que uma função contínua admite em todos os pontos uma derivada à esquerda e uma derivada à direita possivelmente infinita). (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Fourier e Dirichlet estabeleceriam uma clara distinção entre continuidade e derivabilidade.

> Il faudra les travaux de Fourier et de Dirichlet pour que ces deux notions soient clairement distinguées. Les conditions du théorème de Dirichlet sur la convergence de la série de Fourier d'une fonction mettent l'accent sur les points où la fonction n'est pas continue, n'est pas dérivable. (PERRIN, 1999)

> Será necessário o trabalho de Fourier e Dirichlet para que essas duas noções sejam claramente distinguidas. As condições do teorema de Dirichlet sobre a convergência da série de Fourier de uma função enfatizam os pontos onde a função não é contínua, não é diferenciável. (PERRIN, 1999, tradução nossa)

A presença de Fourier no cenário matemático, nos conta Stewart (2007), causou grande inquietação entre os matemáticos da época. As dúvidas, as ambiguidades e a falta de coerência surgiam da pretensão de querer estudar de vez os diferentes aspectos que componem o conceito de função.

> Antes de que se entrometiera Fourier, los matemáticos eran felices creyendo saber lo que era una función. Era una especie de proceso, f, que tomaba un número, x, y generaba otro número, $f(x)$. Qué números x tienen sentido depende de cuál es f. Si $f(x) = 1/x$, por ejemplo, entonces x tiene que ser diferente de cero. Si $f(x) = \sqrt{x}$ estamos trabajando con números reales, entonces x debe ser positivo. Pero cuando se les pedía una definición, los matemáticos solían ser algo vagos.
> Ahora entendemos que la fuente de sus dificultades era que estaban tratando de entender varios aspectos diferentes del concepto de función; no sólo que es una "regla" que asocia a un número x otro número $f(x)$, sino qué propiedades posee dicha regla: continuidad, diferenciabilidad, capacidad de ser representada por algún tipo de fórmula y demás. (STEWART, 2007, p. 194)

> Antes de Fourier se intrometer, os matemáticos ficavam felizes em pensar que sabiam o que era uma função. Era uma espécie de processo, f, que pegou um número, x, e gerou outro número, $f(x)$. Os números x que fazem sentido dependem do que f é. Se $f(x) = 1/x$, por exemplo, então x tem que ser diferente de zero. Se $f(x) = \sqrt{x}$ estamos trabalhando com números reais, então x deve ser positivo. Mas, quando questionados sobre uma definição, os matemáticos costumavam ser um tanto imprecisos. Agora entendemos que a fonte de suas dificuldades era que eles estavam tentando compreender vários aspectos diferentes do conceito de função; não só é uma "regra" que associa um número x a outro número $f(x)$, mas também quais propriedades esta regra tem: continuidade, diferenciabilidade, a capacidade de ser representada por algum tipo de fórmula, e assim por diante. (STEWART, 2007, p. 194, tradução nossa)

A definição de função como expressão analítica começou a mudar somente a partir dos trabalhos de Fourier. Roque e Carvalho (2012) revelam que, a princípio, a teoria de Fourier foi vista com desconfiança, porém ganhou destaque no século XIX. Foram os trabalhos de Fourier sobre a teoria da propagação de calor, publicados no início do século XIX, que deram um novo impulso à evolução do conceito de função. Roque e Carvalho (2012) afirmam que a partir deste momento, a definição de função como expressão analítica se modifica.

Segundo os autores, a noção de rigor se transformou neste contexto, se distanciando da abordagem da análise algebrizada, proposta pelos matemáticos do século XVIII, dando legitimidade aos métodos do cálculo infinitesimal. Um dos problemas que demandava uma nova noção de rigor referia-se ao conceito de número, que até então estava intrinsecamente relacionado à ideia de quantidade. Esta associação, a partir de certo momento, prejudicou o desenvolvimento da matemática. Roque e Carvalho (2012) mostram que para avançar, foi necessário adotar um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade.

Fourier afirmou que todas as funções de uma variável poderia ser expandidas em uma série de senóides. Apesar desse resultado estar errado, a observação de que algumas funções descontinuas podem ser representadas por uma soma de séries infinitas foi um avanço (RAMOS, 2013). A autora explica que, posteriormente, Dirichlet conseguiu dar uma demonstração satisfatória desse resultado, trazendo maior rigor matemático e também as condições restritivas.

Para continuar avançando havia que separar os diversos aspectos relativos ao conceito de função que, como menciona Stewart (2007), eram: ***o significado do termo, as maneiras de representar, as propriedades que possuía e quais representações garantiam uma determinada propriedade***.

> Poco a poco, los matemáticos del siglo XIX empezaron a separar las diferentes cuestiones conceptuales en esta difícil área. Una era el significado del término "función". Otra eran las diversas maneras de representar una función: una fórmula, una serie de potencias, una serie de Fourier o lo que sea. Una tercera era qué propiedades poseía la función. Una cuarta era qué representaciones garantizaban qué propiedades. Un único polinomio, por ejemplo, define una función continua. Pero parecía que una única serie de Fourier podía no hacerlo.(STEWART, 2007, p. 197)

> Aos poucos, os matemáticos do século XIX começaram a separar as diferentes questões conceituais dessa difícil área. Um era o significado do termo "função". Outra eram as várias maneiras de representar uma função: uma fórmula, uma série de potências, uma série de Fourier ou qualquer outra coisa. Um terceiro era quais propriedades a função possuía. Um quarto era quais representações garantiam quais propriedades. Um único polinômio, por exemplo, define uma função contínua. Mas parecia que uma única série de Fourier não poderia. (STEWART, 2007, p. 197, tradução nossa)

A Análise de Fourier se converte na prova pela que tem que passar as ideias acerca do conceito de função e é Dirichlet que em um artigo sobre séries de Fourier enuncia a definição moderna de função que destacamos por sua importância pois revela com clareza o fato de não ser necessária lei o fórmula alguma para a determinação de os valores funcionais: ***uma variável** y **é uma função de outra variável** x **se para cada valor de** x **(em um intervalo particular) há especificado um único valor de** y*. Se afirmava explicitamente que ***não era necessária "lei" ou fórmula particular, era suficiente que** y **seja determinado por uma sequência bem definida de operações matemáticas aplicadas a** x*.

> El análisis de Fourier se convirtió rápidamente en el test para las ideas sobre el concepto de función. Aquí los problemas cobraban su máximo relieve; aquí las distinciones técnicas esotéricas resultaban importantes. Y fue en un artículo sobre series de Fourier, en 1837, donde Dirichlet introdujo la definición moderna de una función. De hecho, él coincidia con Fourier: ***una variable** y **es una función de otra variable** x **si para cada valor de** x **(en un rango particular) hay especificado un único valor de** y*. El afirmaba explícitamente que ***no se requería ninguna "ley" o fórmula particular: basta con que** y **esté espcificado por uma secuencia bien definida de operaciones matemáticas aplicadas a** x*. (STEWART, 2007, p. 197)

> A análise de Fourier rapidamente se tornou o teste para ideias sobre o conceito de uma função. Aqui os problemas assumiram seu maior alívio; aqui as distinções técnicas esotéricas eram importantes. E foi em um artigo sobre a série de Fourier em 1837 que Dirichlet introduziu a definição moderna de uma função. Na verdade, ele coincidia com Fourier: ***uma variável** y **é uma função de outra variável** x **se para cada valor de** x **(em um intervalo particular) um único valor de** y **é especificado***. Ele afirmou explicitamente que ***nenhuma "lei" ou fórmula particular era necessária: basta que** y **seja especificado por uma sequência bem definida de operações matemáticas aplicadas a** x*. (STEWART, 2007, p. 197, tradução nossa, grifo nosso)

A definição geral dada por Dirichlet (1805 – 1859) foi amplamente aceita até meados do século XX.

Riemann, com a finalidade de representar funções com infinitos pontos de descontinuidade por séries de Fourier, desenvolve a teoria de integração. Estas séries teriam seus coeficientes integrais.

> En 1854 Riemann développe une théorie de l'intégration pour pouvoir représenter par des séries de Fourier (dont les coefficients sont des intégrales) des fonctions ayant une infinité de points de discontinuité. Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchesky, Dirichlet avait repris la définition la plus générale d'Euler d'une fonction. En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. (Fourier : Théorie analytique de la chaleur - 1821) (PERRIN, 1999)

> Em 1854 Riemann desenvolveu uma teoria da integração para poder representar por séries de Fourier (cujos coeficientes são integrais) funções com uma infinidade de pontos de descontinuidade. Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchesky, Dirichlet haviam adotado a definição mais geral de função de Euler. Em geral, a função $f(x)$ representa uma sequência de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrária. (Fourier: Teoria Analítica do Calor - 1821) (PERRIN, 1999, tradução nossa)

O desenvolvimento da noção de integral se relaciona com a evolução do conceito de função, como destaca Bourbaki (1976). O descobrimento por Fourier da possibilidade de expressar funções descontinuas por séries trigonométricas influenciou decisivamente no passagem da expressão analítica à correspondência qualquer na noção de função.

> El desarrollo de la noción moderna de integral está estrechamente relacionado con la evolución de la idea de función y con el estudio a fondo de las funciones numéricas de variables reales, que se ha venido realizando desde principios del siglo XIX. Sabemos que ***Euler concebía ya la noción de función de una forma bastante general, puesto que para él una curva "arbitraria" que es cortada en um único punto por toda paralela al eje*** Oy ***define una función*** $y = f(x)$(cf. p. 270), pero, como casi todos sus comtemporáneos, se niega a admitir que tales funciones puedan expresarse "analíticamente". Este punto de vista no se modifico demasiado hasta los trabajos de Fourier, pero el descubrimiento por este último de a posibilidad de expresar funciones discontinuas como suma de series trigonométricas iba ejercer una influencia sobre las generaciones siguientes. Es necesario añadir que las demostraciones de Fourier carecían de todo rigor, y que su dominio de validez no aparecia claramente, sin embargo, las fórmulas integrales
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos\ nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin\ nx dx \quad (n \geqslant 1)$$
>
> que proporcionan los coeficientes del desarrollo de φ en serie de Fourier, tenían un sentido intuitivo evidente desde el momento en que se suponía que φ era continua y monótona a trozos. (BOURBAKI, 1976, p. 29-30)

> O desenvolvimento da noção moderna de integral rdtá intimamente relacionado com a evolução da ideia de função e com o estudo aprofundado das funções numéricas das variáveis reais, realizado desde o inicio do século XIX. Sabemos que ***Euler já concebia a noção de função de uma forma bastante geral, pois para ele uma curva "arbitrária" cortada em um único ponto paralela ao eixo*** Oy ***define uma função*** $y = f(x)$ (cf. p. 270), mas, como quase todos os seus contemporâneos, ele se recusa a admitir que tais funções possam ser expressas "analiticamente". Esse ponto de vista não foi muito modificado até o trabalho de Fourier, mas a descoberta deste último da possibilidade de expressar funções descontínuas como a soma de séries trigonométricas iria exercer uma influência sobre as gerações subsequentes. É necessário acrescentar que as provas de Fourier careciam de todo o rigor, e que seu domínio de validade não aparecia claramente, porém, as fórmulas integrais.
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos\ nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin\ nx dx \quad (n \geqslant 1)$$
>
> dado pelos coeficientes de expansão de φ na série de Fourier, tinha um sentido intuitivo evidente a partir do momento em que φ era considerado contínuo e monótono por partes.(BOURBAKI, 1976, p. 29-30, tradução nossa)

Depois de Riemann, ganhou força a noção de função como qualquer correspondência entre elementos de dois conjuntos. O estudo da continuidade das funções foi acompanhado da construção de funções cada vez mais "patológicas" (vide Figura 1.8) usadas como contra-exemplos das provas de propriedades não validas.

> Après Riemann on peut dire que la notion de fonction comme correspondance arbitraire entre les éléments de deux ensembles est acquise. Il n'est alors plus possible de classer les fonctions d'après la forme de leur expression analytique, on le fera d'après certaines propriétés données : fonctions continues, discontinues, différentiables, intégrables ... etc ... L'approfondissement des notions de fonction et de continuité s'est accompagné de la construction de fonctions de plus en plus pathologiques, jouant le rôle de contre-exemples à des conjectures fausses (cf. contre-exemples iv à vi). (PERRIN, 1999)

> Depois de Riemann, podemos dizer que a noção de função como uma correspondência arbitraria entre os elementos de dois conjuntos é adquirida. Não é mais possível classificar as funções de acordo com a forma de sua expressão analítica, faremos isso de acordo com certas propriedades dadas: funções contínuas, descontínuas, diferenciáveis, integráveis ... etc ...
> O aprofundamento das noções de função e continuidade foi acompanhado pela construção de funções cada vez mais patológicas, desempenhando o papel de contraexemplos a falsas conjeturas (cf. contraexemplos iv a vi). (PERRIN, 1999, tradução nossa)

Quelques contre-exemples plus ou moins célèbres (2)

iv) Fonction non continue limite d'une suite de fonctions continues :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{(Abel, 1826)}$$

Abel fait remarquer que pour toutes les valeurs positives de x inférieures à π, on peut démontrer rigoureusement que $f(x) = x/2$ mais qu'on ne peut pas en conclure pour autant que $f(\pi) = \pi/2$ puisque $f(\pi) = 0$.

v) Fonction discontinue en tout point :

$f(x)$ = c si x est rationnel, $f(x)$ = d ($\neq$ c) si x est irrationnel (Dirichlet, 1829)

vi) Fonction continue sur un intervalle et dérivable en aucun point de cet intervalle :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(\pi b^n x) \quad \text{où } 0 < a < 1 \text{ et } b \text{ entier positif multiple de 4 (Weierstrass, 1872)}$$

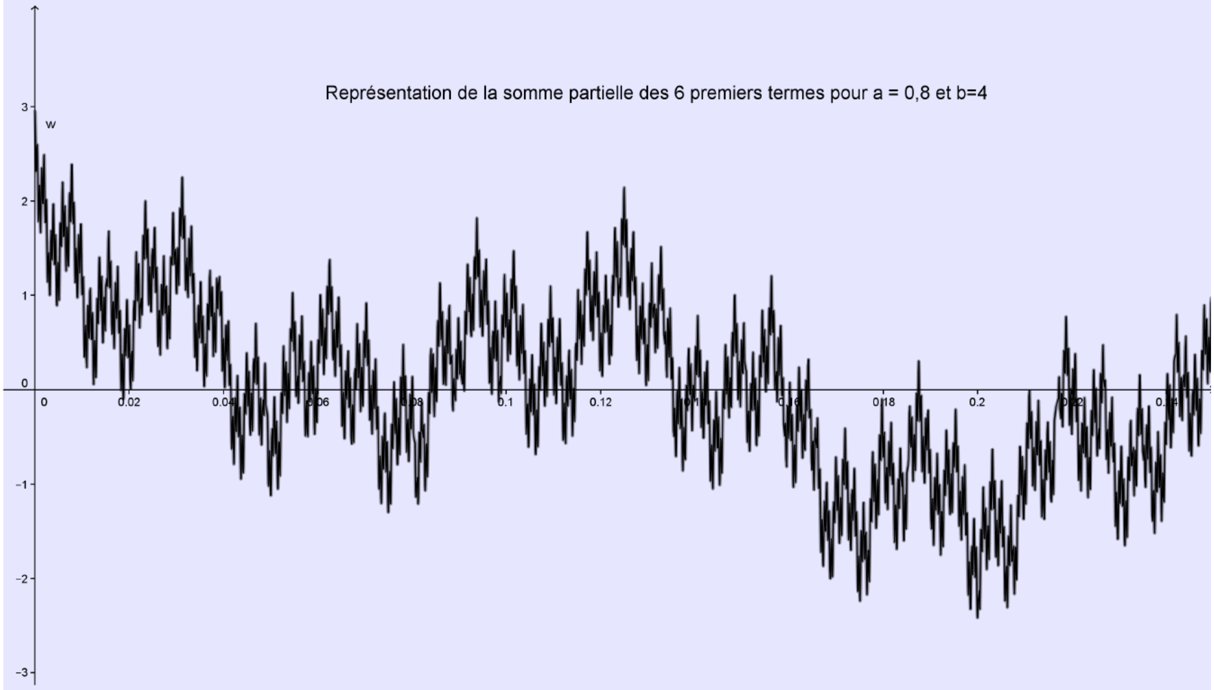


Figura 1.8: Alguns contra-exemplos notáveis (2) (Perrin, 1999)

Zuffi (2016) comenta que apesar de ter sido uma época de muito avanço no Cálculo, ainda permaneciam as confusões sobre seus princípios básicos. Desta forma, as discussões desse período influenciaram no desenvolvimento da "era do rigor", no século seguinte. O matemático a quem se atribui muito desse rigor, é Augustin Cauchy.

A definição de função, segundo Cauchy (1789 - 1857), era: "***Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis***" (SIERPINSKA, 1992, p.45 apud ZUFFI, 2016).

Babini (1974) afirma que a partir de Cauchy, os conceitos de função, de limite e de continuidade já foram apresentados praticamente da forma como utilizamos atualmente. O conceito de limite foi o ponto de partida da Análise e permitiu associar o conceito de função à noção de correspondência. Desta forma, a ideia de função como uma expressão formal, algébrica ou não, passou a ser considerada ultrapassada.

Nota-se similaridades nos trabalhos de Cauchy e Bolzano (1781 - 1848). Este último compreendeu que os números reais não são enumeráveis, ou seja, "que seu "infinito" é diferente daquele dos conjuntos de números naturais e inteiros". Diferentemente de Newton que se preocupava com curvas suaves e contínuas, Bolzano apresentou uma função contínua não diferenciável em nenhum ponto do intervalo em que se definia. Mais tarde, Weierstrass difundiu este conceito de exemplo "mau" comportado (ZUFFI, 2016). Fourier queria mostrar que uma função arbitrária definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ pode ser representada por:

> $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \operatorname{sen} n\pi x$, em que os coeficientes a_n e b_n são dados por integrais que envolvem a função f no intervalo $[-\pi, \pi]$. Mais precisamente:
>
> $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx$$
>
> (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 338)

Para mostrar que era verdade, seria necessário calcular os coeficientes das séries acima. No entanto, isso ainda era um problema, pois "até o momento, o cálculo integral era bem prático, pois, como as funções eram expressões analíticas, as integrais eram calculadas em exemplos específicos (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 338).

Quem resolveu esse problema foi Dirichlet (1805 – 1859). Em 1837, ele propôs a seguinte definição geral de função continua.

> Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se, a cada x corresponde um único y finito de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita função contínua de x neste intervalo. Para isto, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com a mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (DIRICHLET, 1837, p. 135-136 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 340).

Esta definição trata a função como uma relação mais geral entre duas variáveis e isso permitiu que Dirichlet enunciasse as condições para que seja possível representá-la por uma série de Fourier em um intervalo. Dentre elas, Roque e Carvalho (2012) destacam:

1. Ser bem definida, isto é, cada um dos valores da ordenada ser determinado univocamente pelo valor da abscissa;
2. Ter um número finito de descontinuidades no intervalo

(ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 340).

Ramos (2013) afirma que esta é a descrição mais moderna de definição de função continua que encontramos atualmente nos livros didáticos. No entanto, Zuffi(2016) diz que naquela época, os conceitos de "conjunto" e de "número real" ainda não estavam estabelecidos de forma precisa. Segundo Ponte (1990) foi Cantor (1845 – 1918) quem iniciou o desenvolvimento da Teoria de Conjuntos. A partir daí, a noção de função foi ampliada de forma a incluir toda correspondência arbitrária entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

De acordo com Zuffi (2016), também foi Cantor que conseguiu demonstrar, aquilo que já havia sido observado por Cauchy, de que os infinitos dos naturais e dos reais não eram os mesmos.

O matemático Peano (1858 -1932) deixou contribuições à noção de número, que, para Zuffi (2016), podem ter influenciado na elaboração final do conceito de função. Sua maior contribuição provavelmente foi os três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de aritmética: "o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de 'ser sucessor de', os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais". Além disso, ele também criou os símbolos matemáticos que utilizamos ainda hoje $\in$, $\cup$, $\cap$, $\subset$. E em 1911, Peano propôs reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA, 1992, p.48 apud ZUFFI 2016).

1.5 A definição conjuntista

Perrin (1999) relata ainda que entre o final do século XIX e início do século XX, os trabalhos de Cantor e Dedekind sobre a teoria dos conjuntos e os de Frege, Peano e Russell sobre a lógica formal permitiram a reformulação conjuntista da definição de função estendendo-lhe para além do domínio numérico.

De acordo com Perrin (1999), Peano reformulou a noção de função após considerá-la primitiva e, em 1911, a reduziu à de uma relação binária particular. Sua formulação final é:

> Uma função é uma relação u tal que se dois pares $y; x$ e $z; x$, com o mesmo segundo elemento, satisfazem a relação u, temos necessariamente, seja qual for x, y, z, $y = z$ (PEANO, 1911 apud PERRIN, 1999, tradução nossa).

Pode-se observar nesta definição que a notação usada para representar o par (x, y) é $y; x$. O conceito de conjunto influenciou definitivamente nas posteriores definições de função. A mais importante por sua maior formalidade, rigor e generalidade foi dada pelo grupo de matemáticos que publicaram sub o nome de Nícolas Bourbaki.

O grupo Bourbaki, em 1939, definiu função como "uma tripla ordenada $f = (X, Y, F)$ onde X e Y são conjuntos e F é um subconjunto de $X \times Y$, tal que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in F$ e, se $(x, y) \in F$ e $(x, y') \in F$ então $y = y'$".

No que diz respeito ao ensino de funções e sua consequência, Roque e Carvalho (2012) afirmam que:

> Desde então, a teoria de conjuntos passou a ser o enquadramento mais adequado para se obter um novo consenso sobre os fundamentos da análise e de toda a matemática. O Papel de Bourbaki foi importante na cristalização deste ponto de vista no ensino, que teve como consequência a redefinição de todas as noções básicas da Matemática na linguagem de conjuntos. Esta tendência mudou a concepção sobre número e função, noções que possuem, todavia, uma longa história prévia (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 299)

De todo este processo, fica evidente que o desenvolvimento do conceito de funções não se deu em um momento único. Esse desenvolvimento teve contribuições de vários matemáticos e se deu a partir de problemas concretos que estavam sendo estudados em cada época. Além disso, o processo aconteceu juntamente com o desenvolvimento da própria matemática.

2 A Definição de Função

2.1 Noções Intuitivas de Função

Aqui comentamos as observações que faz Mac Lane (1998) às noções intuitivas e informais que existem acerca de função.

Função como Fórmula

> Formula. A function is a formula in a letter x. When x is replaced by a number, the formula produces a number, the value of the function for the given argument x. (MAC LANE, 1998, p.126).

> Fórmula. Uma função é uma fórmula em uma letra x. Quando x é substituto por um número, a fórmula produz um número, o valor da função para o argumento x. (MAC LANE, 1998, p.126, tradução nossa).

Ao apresentar a noção de fórmula, Mac Lane (1998) argumenta que apesar de descrever bem funções matemáticas elementares, tais como funções polinomiais, racionais, algébricas, trigonométricas e exponencial, essa definição não é muito útil quando tratamos de dependência funcional de quantidades variáveis na física.

Ainda segundo o autor, essa ideia de fórmula precisaria ser especificada, pois deve incluir fórmulas algébricas ou "analíticas" e talvez fórmulas dadas por séries infinitas. No entanto, a partir dessa definição não parece ser possível englobar funções definidas por várias fórmulas diferentes em partes diferentes do domínio.

Assim, "o problema essencial permanece: Que tipos de fórmulas estão previstas? Todas as funções são dadas por fórmulas? As 'fórmulas' dependem do simbolismo, mas as funções dependem dos fatos". (MAC LANE, 1998, p.126, tradução nossa).

Função como Regra

> Rule. The variable y is a function of the variable x when there is given a rule which to each value of x produces the corresponding value of y. (MAC LANE, 1998, p.127)

> *Regra. A variável y é uma função da variável x quando é dada uma regra que para cada valor de x produz o valor correspondente de y.* (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Esta descrição, e suas variantes, há gerações intriga a os estudantes de cálculo. O autor acredita que isso se deve ao fato de que "tem uma generalidade agradável: qualquer 'regra' serve" (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Outro aspecto destacado por Mac Lane (1998) é que o uso de regras resolve o problema do caso de funções definidas por diferentes partes do domínio, pois "qualquer coleção de fórmulas alternativas é claramente uma regra"(MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

No entanto, esbarramos em um outro problema: essa não é uma definição formal. Ao utilizar palavras indefinidas como "corresponder" e "regra" a definição se torna vaga (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

O autor afirma que, "mesmo se alguém define uma regra como algo expresso em uma linguagem formal especificada, há problemas". Ele explica que "nas linguagens formais usuais, o conjunto de todas as expressões formais é enumerável, enquanto o conjunto de funções possíveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não é enumerável" (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Função como Grafo

> Graph. A function is a curve in the (x, y) plane, such that each vertical line $x = a$ meets the curve in at most one point with coordinates (a, b). When it does so meet, the number b is the value of the function at the argument a. For other arguments a, the function is undefined. (MAC LANE, 1998, p.127).

> *Grafo. Uma função é uma curva no plano (x, y), de modo que cada linha vertical $x = a$ encontre a curva no máximo em um ponto com as coordenadas $\langle a, b\rangle$. Quando isso ocorre, o número b é o valor da função no argumento a. Para outros argumentos a, a função é indefinida* (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Mac Lane (1998) afirma que esta descrição enfatiza o aspecto geométrico, mas faz sentido somente para funções de números reais que são suaves ou, pelo menos, contínuas. No entanto, não se encaixa bem com uma função que salta de 0 para 1 a medida que a variável muda de racional para irracional. Além disso, a noção indefinida de uma curva torna a aritmética dependente da geometria.

Função como Dependência

> Dependence. The variable quantity y is a function of the quantity x if and only if a determination of the value of x also fixes the value y, so that y depends on x. (MAC LANE, 1998, p.127).

> Dependência. A quantidade variável y é uma função da quantidade x se e somente se a determinação do valor de x também fixa o valor de y, logo y depende de x. (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Mac Lane(1998) observa que esta definição foi desenvolvida por um físico e também não é formal.

Função como Tabela de Valores

> Table of Values. A function is determined by a table of values, which opposite each entry for the first quantity x lists the corresponding numerical value for the second quantity y. (MAC LANE, 1998, p.127).

> *Uma função é determinada por uma tabela de valores, que oposta a cada entrada para a primeira quantidade x lista o valor numérico correspondente para a segunda quantidade y* (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Segundo o autor "esta é uma definição obstinada e sem sentido" que evidentemente foi inspirada em tabelas de funções trigonométricas ou logarítmicas.

O problema, neste caso, é que as tabelas reais são finitas, enquanto a maioria das funções pretendidas têm infinitos valores diferentes. Desta forma, seria necessário esclarecer o que significa uma tabela infinita,mas isso não fica evidente neste definição (MAC LANE, 1998, p.127, tradução nossa).

Função como Sintaxe

> Syntax. A function f on the set X to the set Y is a symbol f such that whenever the term x stands for an element of X, then the string of symbols $f(x)$ stands for an element of Y, the value of f at the argument x. (MAC LANE, 1998, p.127-128).

> Sintaxe.*Uma função f no conjunto X para o conjunto Y é um símbolo f, de modo que sempre que o termo x representar um elemento de X, a sequência de símbolos $f(x)$ representa um elemento de Y, o valor de f no argumento x* (MAC LANE, 1998, p.127-128, tradução nossa).

O autor esclarece que esta descrição não descreve funções, mas apenas o uso de símbolos para funções. Mac Lane (1998) afirma que trata-se de um "protesto mudo"contra a confusão de notações padrão, na qual $f(x)$ denota ambiguamente uma função de x e um valor dessa função. Como exemplo, ele explica que *seno* é uma função trigonométrica, enquanto que $sen(\theta)$ indica seu valor no ângulo θ.(MAC LANE, 1998, p.127-128, tradução nossa).

2.2 Definição Formal de Função

Para Mac Lane (1998), a variedade de descrições de "função" ilustra bem a tese, quanto a natureza da matemática, de que atividades e fatos humanos sobre fenômenos, juntos, indicam muitos exemplos de dependência de um item em relação a outro, o que nos leva a ideias úteis, porém informais, sobre dependência e função. Isto coloca o problema de produzir uma definição formal, indispensável para fazer afirmações matemáticas inequívocas sobre funções (MAC LANE, 1998, p.127-128, tradução nossa).

De fato, esta afirmação de Mac Lane (1998) faz sentido. A partir da resenha histórica que foi apresentada é possível compreender a necessidade de uma definição formal. Assim, fechamos este capítulo com nossa conclusão a respeito de qual seria a definição mais adequada para descrever o significado de função.

> 4. Functions as Sets of Pairs
> A formal definition of "function" must be stated in the context of some axiomatic system. There are at present two such definitions. One of these directly axiomatizes the notion of function in terms of the composition of functions (categories, in Chapter XI). The other operates in terms of axioms for sets, to be given in full in Chapter XI. These axioms assume that everything (in Mathematics) is a set, and are formulated in terms of one primitive notion, membership, written $x \in A$ for "x is a member of (i.e., an element of) the set A" (MAC LANE, 1998, p.127-128).

> 4. Funções como conjuntos de pares
> Uma definição formal de "função" deve ser declarada no contexto de algum sistema axiomático. Existem atualmente duas dessas definições. Um deles axiomatiza diretamente a noção de função em termos da composição de funções (categorias, no Capítulo XI). O outro opera em termos de axiomas para conjuntos, a serem dados integralmente no Capítulo XI. Esses axiomas assumem que tudo (em matemática) é um conjunto e são formulados em termos de uma noção primitiva, pertence ou ser membro, escrita $x \in A$ para "x é um membro de (ou seja, um elemento de) o conjunto A". (MAC LANE, 1998, p.127-128).

Segundo Mac Lane, pode-se dar uma definição formal de função de duas maneiras, cada uma dentro de um quadro axiomático: Categorias e Conjuntos. Como a Teoria das Categorias está fora do escopo deste trabalho, centraremos nossa atenção na definição no quadro axiomático da Teoria dos Conjuntos.

O mesmo Mc Lane nos proporciona uma definição formal de função como um conjunto de pares ordenados.

> Definition. A function f on the set X to the set Y is a set $S \subset X \times Y$ of ordered pairs which to each $x \in X$ contains exactly one ordered pair $\langle x, y \rangle$ with first component x. The second component of this pair is the value of the function f at the argument x, written $f(x)$. We call X the domain and Y the codomain of the function f.
>
> This provides a formal definition which, in plausible ways, does matchthe intent of the various preformal descriptions of a function. (MAC LANE, 1998, p.127-128).

> Definição. Uma função f no conjunto X para o conjunto Y é um conjunto $S \subset X \times Y$ de pares ordenados que para cada $x \in X$ contém exatamente um par ordenado $\langle x, y \rangle$ com o primeiro componente x. O segundo componente deste par é o valor da função f no argumento x, escrito $f(x)$. Chamamos X de domínio e Y de codomínio da função f.
>
> Isso fornece uma definição formal que, de maneiras plausíveis, corresponde à intenção das várias descrições pré-formais de uma função. (MAC LANE, 1998, p.127-128, tradução nossa).

Podemos observar nesta definição que não faz aluição alguma ao conceito de ***relação*** como outros autores. Isto não invalida a definição e, mais ainda, a torna mais, de alguma maneira, independente. Talvez, poderia haver-se usado um mesmo símbolo para aludir ao objeto da definição: f e S segundo a definição dada representam a função: $f \subset X \times Y$.

Recuperando o termo ***correspondência*** do plano do intuitivo, com a nova visão conjuntista, Bourbaki, define função como uma correspondência. Na definição dada por Bourbaki uma correspondência é uma terna ordenada de conjuntos (A, B, F) com $F \subset A \times B$. Uma correspondência é uma função se para todo x de A existe exatamente um elemento y de B tal que $(x, y) \in F$. A é o domínio da função, B o contradomínio e F o grafo da função.

É importante observar que grafo não é sinônimo de representação gráfica. A ideia de grafo vai além desta interpretação. Grafo é o conjunto de pares ordenados que verificam uma relação $\mathcal{R}$ entendida como uma propriedade característica do conjunto F, isto é, $\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow (x, y) \in F$. Assim, a definição conjuntista de função dada por Bourbaki é ***formal, rigorosa, plena de generalidade e abstração***.

A definição exata dada por Bourbaki (1970) é:

> DÉFINITION 9. — On dit qu'un graphe F est un graphe fonctionnel si, pour tout x, il existe au plus un objet correspondant à x par F (I, p. 40). On dit qu'une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si son graphe F est un graphe fonctionnel, et si son ensemblede départ A est égal à son ensemble de définition $pr_1\ F$. Autrement dit, une correspondance $f = (F, A, B)$ est une fonction si, pour tout x appartenant à l'ensemble de départ A de f, la relation $(x, y) \in F$ est fonctionnelle en y (I, p. 41); l'objet unique correspondant à x par f s'appelle la valeur de f pour l'élément x de A, et se désigne par $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$,ou F_x).
> Si f est une fonction, F son graphe et x un élément de l'ensemble de définition de f, la relation $y = f(x)$ est donc équivalente à $(x, y) \in F$ (I, p. 41, critère C46). (BOURBAKI, 1970, E II 13, § 3 n° 5).

Definição 9 .- Dizemos que um grafo F é um grafo funcional, se, para todos os x houver no máximo um objeto correspondente a x por F (I, p. 40) Dizemos que uma correspondência $f = (F, A, B)$, é uma função se o grafo F for um grafo funcional e, se o conjunto de partida A for igual ao conjunto de definição $pr_1\ F$[a] Em outras palavras, uma correspondência $f = (F, A, B)$ é uma função se, para todos os x pertencentes ao conjunto de partida de, a relação $(x, y) \in F$ é funcional em y. (I, p. 41); o objeto único correspondente a x por f é chamado de valor de f para o elemento x de A, e é denotado por $f(x)$ ou f_x (ou $F(x)$, ou F_x).
Se f é uma função, F é seu gráfico e x um elemento do conjunto de definição de f, a relação $y = f(x)$ é portanto equivalente a $(x, y) \in F$ (I, p. 41, critério C46). (BOURBAKI, 1970, E II 13, § 3 n° 5, tradução nossa)

[a] $pr_1\ F$ denota o conjunto $\{x \in A \mid \exists y \in B : (x, y) \in F\}$

Capítulo 2

Função no Contexto Universitário

Neste capítulo vamos discutir de que forma o conceito de função é abordado em textos universitários. Essa análise ajudará compreender de que forma o conceito é ensinado a futuros professores e qual a linguagem utilizada.

Nos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, de forma geral, os estudantes têm contato mais direto com o conceito de funções em quatro disciplinas: Pré-cálculo, Cálculo, Prática de Ensino e Análise.

A disciplina de pré-cálculo normalmente revisam o conceito de função e algumas de suas propriedades estudados regularmente no ensino médio, conhecimento necessário para compreensão da disciplina de cálculo. Já a disciplina de prática de ensino, tem como foco a didática, ou seja, são voltadas para a prática da docência e tentam aproximar o estudante dos recursos didáticos em geral e, particularmente, do livro didático. As disciplinas de Cálculo e Análise têm como objetivo estudar com maior profundidade e rigor este conceito.

Desta forma, é comum que se adote como referência livros didáticos do ensino médio nessas disciplinas. No capítulo seguinte analisaremos obras dedicadas ao ensino médio, então neste nos dedicaremos a obras direcionadas aos cursos superiores.

1 Textos de Bibliografia Básica

No livro de cálculo de Stewart (2013), há um capítulo dedicado exclusivamente para discutir "as ideias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los" (STEWART, 2013, p. 10).

A definição apresentada neste livro é:

> Uma função f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D, exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto E. (STEWART, 2013, p. 10).

Na sequência, o autor esclarece que os conjuntos D e E são, respetivamente, domínio e contradomínio. Além disso, afirma que existem quatro maneiras de representar uma função: verbalmente (descrevendo-a em palavras), numericamente (por meio de tabela de valores), visualmente (através de um gráfico) e algebricamente (utilizando-se uma fórmula explicita). Assim, percebe-se que o autor define a função como uma lei e que as fórmulas, gráficos, etc são apenas representações.

Neste livro observa-se ainda que a representação algébrica da função algumas vezes é indicada y outras vezes por $f(x)$ e esses dois termos também são utilizados para indicar o valor da função para algum x.

No começo do livro é apresentada uma motivação para o estudo do Cálculo, mas não há referências históricas sobre o tema. Este é um livro bastante utilizados nos cursos de graduação, especialmente licenciaturas. Outro livro de Cálculo é o da autoria de Flemming e Gonçalves (2006) que definem função da forma seguinte

> 2.1. Definição
> Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função $f : A \mapsto B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado de contradomínio ou campo de valores de f.
>
> Escrevemos $\begin{aligned} f : A &\mapsto B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$
>
> ou $\begin{aligned} A &\overset{f}{\mapsto} B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$
>
> (FLEMMING, GONÇALVES, 2006, p. 12)

Como pode observa-se para eles função é uma ***lei ou regra***. A seguir se enuncia a notação correspondente e a terminologia usada.

> 2.4. Definição
> Seja $f : A \mapsto B$.
> (i) Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de valor de valor da função f no ponto x ou de imagem de x por f.
> (ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado conjunto imagem de f e é denotado por $Im\ (f)$.
> (FLEMMING, GONÇALVES, 2006, p. 13)

> 2.8. Gráficos
> 2.8.1. Definição Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f. (FLEMMING, GONÇALVES, 2006, p. 14)

O livro de Guidorizzi (2001) é também um texto muito usado nos diferentes cursos de graduação de Ciências e Tecnologia. Aqui encontramos a seguinte definição de função:

> 2.1. Função de uma Variável Real a Valores Reais.
> Entendemos por uma função f uma terna
>
> $$(A, B, a \mapsto b)$$
>
> onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B. O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D_f, assim $A = D_f$. O conjunto B é o contradomínio de f. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ (leia : f de a); diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a.
> Uma função de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f : A \mapsto B$ (leia : f de A em B).
> Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f : A \mapsto B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.
> Seja $f : A \mapsto B$ uma função. O conjunto
>
> $$G(f) = \{(x, f(x))|x \in A\}$$
>
> denomina-se gráfico de f; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema de ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f. (GUIDORIZZI, 2001, p.26)

A definição de função dada pelo autor como uma ***terna*** se aproxima um pouco à definição de correspondência dada por Bourbaki. Observe-se que se a terceira componente, $a \mapsto b$, que é a "regra de correspondência", define o grafo $F \subset A \times B$. Após definir função de forma geral, restringe o conceito as funções reais de variável real. Isto pode responder ao fato da orientação do livro a ser usado por alunos da disciplina de Cálculo. Também, a definição de gráfico está dada só no contexto das funções de reais de variável real.

Outro texto bastante usado nos cursos de graduação é o de Leithold (1994). Encontramos neste texto a seguintes definições relativas ao conceito de função:

> Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, onde o número y é único para um valor específico de x. (LEITHOLD, 1994)

Nesta definição preliminar de função se faz uso do termo "correspondência". O termo tal como é incorporado à definição possui um carácter intuitivo pois, sem definição prévia do termo, só agrega informalidades a esta definição. O autor é consciente deste fato e até poderia justificar-se pela intenção de dar primeiro uma noção intuitiva de função, pois em seguida anuncia uma definição formal do conceito.

> Daremos agora a definição formal de uma função. O conceito de função torna-se mais preciso se ela for definida como um conjunto de pares ordenados, ao invés de usarmos uma regra ou correspondência.
>
> 1.4.1 DEFINIÇÃO Uma ***função*** é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado de ***domínio*** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a ***imagem*** da função. (LEITHOLD, 1994)

Deve observar-se que esta definição é restrita às funções reais de variável real. Note-se que, com esta definição de domínio como conjunto de "valores admissíveis", a função $[2, 3] \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 1/x$ teria por domínio $\mathbb{R} - \{0\}$ e não $[2, 3]$. Em todo caso, quando não é mencionado previamente qual é o domínio podemos considerar o domínio como sendo o conjunto de todos os valores admissíveis. Por exemplo, quando, por abuso de linguagem se diz, "seja a função $y = 1/x$, podemos considerar $\mathbb{R} - \{0\}$ como o domínio". Esta inconsistência é frequente quando não se consideram para definir uma função os conjuntos A e B e se tratam como algo que não formam parte do objeto. Pelo menos neste quadro conceitual, uma ***função*** é sempre uma ***função de um conjunto*** A ***em um conjunto*** B.

> 1.4.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função, então o ***gráfico*** de f será o conjunto dos pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ para os quais (x, y) é um par ordenado de f (LEITHOLD, 1994)

Segundo o autor o "gráfico" de uma função f é definido como sendo o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in f\}$, mas segundo a definição este é o próprio f. Salvo o uso do termo ***pontos*** de R^2 para dar um carácter geométrico ao objeto, os conjuntos são essencialmente os mesmos. Isto, para ficar suficientemente claro, precisa de algumas precisões, tais como o que deve entender-se por pontos (x, y) e por pares (x, y).

2 Textos de Bibliografia Complementar

Existem outras formas de descrever uma função no contexto universitário. Vamos apresentar as definições e reflexões de Herstein (1975), Dieudonne (1960), Queysanne (1971), Lima (2004) e Medeiros (2005).

Herstein (1975), anuncia o conceito de função da seguinte forma:

> 1. Mappings. We are about to introduce the concept of a mapping of one set into another. Without exaggeration this is probably the single most important and universal notion that runs through all of mathematics. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> 1. Mapeamentos. Estamos prestes a introduzir o conceito de mapeamento de um conjunto em outro. Sem exageros, esta é provavelmente a noção mais importante e universal que permeia todas as matemáticas. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa.).

O autor observa que já se tem um anterior contato com o conceito quando em estudos prévios foi pedido para se representar graficamente alguma relação descrita por uma igualdade (p.e. $y = x^2$). Quando realizamos esta atividade se está estudando um mapeamento particular que leva um número real em outro.

> It is hardly a new thing to any of us, for we have been considering mappings from the very earliest days of our mathematical training. When we were asked to plot the relation $y = x^2$ we were simply being asked to study the particular mapping which takes every real number onto its square. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Isso dificilmente é uma coisa nova para qualquer um de nós, pois temos considerado os mapeamentos desde os primeiros dias de nosso treinamento matemático. Quando fomos solicitados a representar graficamente a relação $y = x^2$, estávamos simplesmente sendo solicitados a estudar o mapeamento particular que leva cada número real em seu quadrado. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa).

De modo pouco formal o autor fala da função como “regra” que associa um elemento de um conjunto com um único elemento de outro conjunto. Em seguida, adverte que é necessário dar uma definição formal e precisa. Porém, indica que o propósito da definição é falar e pensar da forma anteriormente estabelecida.

> Loosely speaking, a mapping from one set, S, into another, T, is a "rule"(whatever that may mean) that associates with each element in S a unique element t in T. We shall define a mapping some what more formally and precisely but the purpose of the definition is to allow us to think and speak in the above terms. We should think of them as rules or devices or mechanisms that transport us from one set to another. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Falando livremente, um mapeamento de um conjunto, S, para outro, T, é uma "regra"(o que quer que isso signifique) que associa a cada elemento em S um elemento único em T. Devemos definir um mapeamento de modo um pouco mais formal e preciso mas o propósito da definição é permitir-nos pensar e falar nos termos acima. Devemos pensar neles como regras, dispositivos ou mecanismos que nos transportam de um conjunto para outro. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa).

Com o objetivo de motivar a definição a enunciar, descreve, num caso particular, considerando a função definida pelo “gráfico”, o processo mediante o qual se determinam as coordenadas de seus pontos.

> Let us motivate a little the definition that we will make. The point of view we take is to consider the mapping to be defined by its "graph."We illustrate this with the familiar example $y = x^2$ defined on the real numbers S and taking its values also in S. For this set S, $S \times S$, the set of all pairs (a, b) can be viewed as the plane, the pair (a, b) corresponding to the point whose coordinate s are a and b, respectively . In this plane we single out all those points whose coordinate s are of the form (x, x^2) and call this set of points the graph of $y = x^2$ (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Vamos motivar um pouco a definição que faremos. O ponto de vista que adotamos é considerar o mapeamento como definido por seu "gráfico". Ilustramos isso com o exemplo familiar $y = x^2$ definido nos números reais S e tomando seus valores também em S. Para este conjunto S, $S \times S$, o conjunto de todos os pares (a, b) pode ser visto como o plano, o par (a, b) correspondendo ao ponto cujas coordenadas são a e b, respectivamente. Neste plano, destacamos todos os pontos cujas coordenadas s têm a forma (x, x^2) e chamamos esse conjunto de pontos de gráfico de $y = x^2$ (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa).

> To find the "value"of the function or mapping at the point $x = a$, we look at the point in the graph whose first coordinate is a and read off the second coordinate as the value of the function at $x = a$. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Para encontrar o “valor” da função ou mapeamento no ponto $x = a$, olhamos para o ponto no gráfico cuja primeira coordenada é a e lemos a segunda coordenada como o valor da função em $x = a$. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa).

Aqui o enunciado de sua anunciada definição formal:

> This is, no more or less, the approach we take in the general setting to define a mapping from one set into another.
>
> DEFINITION If S and T are nonempty sets, then a mapping from S to T is a subset, M, of $S \times T$ such that for every $s \in S$ there is a unique $t \in T$ such that the ordered pair (s, t) is in M. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Essa é, nem mais nem menos, a abordagem que adotamos no cenário geral para definir um mapeamento de um conjunto para outro.
>
> DEFINIÇÃO Se S e T são conjuntos não vazios, então um mapeamento de S em T é um subconjunto, M, de $S \times T$ tal que para cada $s \in S$ há um único $t \in T$ tal que o par ordenado (s, t) está em M. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11, a tradução é nossa).

Na definição formal de função enunciada por Herstein temos que ***dados os conjuntos*** S ***e*** T não vazios, $M \subset S \times T$ é uma ***função de*** S ***em*** T se para cada $s \in S$ há um único $t \in T$ tal que o par ordenado $(s, t) \in M$. Isto nos diz que formalmente, uma ***função*** é uma ***função de um conjunto em um conjunto*** e, portanto não é possível definir de forma precisa o conceito se previamente não se determinam os conjuntos S e T. Finalmente, observa que a definição dada tem por objetivo tornar o conceito preciso para nós, que quase nunca será assim usado e é preferível pensar em função como regra.

> This definition serves to make the concept of a mapping precise for us but we shall almost never use it in this form. Instead we do prefer to think of a mapping as a rule which associates with any element s in S some element t in T, the rule being, associate (or map) $s \in S$ with $t \in T$ if and only if $(s, t) \in M$. We shall say that t is the image of s under the mapping. (HERSTEIN, 1975, p. 10-11).

> Essa definição serve para tornar o conceito de um mapeamento preciso para nós, mas quase nunca o usaremos dessa forma. Em vez disso, preferimos pensar em um mapeamento como uma regra que associa a qualquer elemento s em S a algum elemento t em T, sendo a regra, associar (ou mapear) $s \in S$ com $t \in T$ se e somente se $(s, t) \in M$.
> Diremos que t é a imagem de s pelo o mapeamento. (HERSTEIN, 1975, p. 11-12, a tradução é nossa).

Dieudonne (1960), como em quase todos os livros escritos em inglês, usa o termo "mapeamento"[1] para se referir à função.

> 4. MAPPINGS. Let X, Y be two sets, $R(x, y)$ a relation between $x \in X$ and $y \in Y$; R is said to be functional in y, if, for every $x \in X$, there is one and only one $y \in Y$ such that $R(x, y)$ is true. The graph of such a relation is called a functional graph in $X \times Y$; such a subset F of $X \times Y$ is therefore characterized by the fact that, for each $x \in X$, there is one and only one $y \in Y$ such that $(x, y) \in F$; this element y is called the value of F at x, and written $F(x)$. ***A functional graph in*** $X \times Y$ ***in also called a mapping of*** X ***into*** Y***, or a function defined in*** X***, taking its values in*** Y. (DIEUDONNE,1960, p.5, grifo nosso).

> 4. MAPEAMENTOS. Sejam X, Y dois conjuntos e $R(x, y)$ uma relação entre $x \in X$ e $y \in Y$; diz-se que R é funcional em y,se, para cada $x \in X$, houver um e apenas um, $y \in Y$, de modo que $R(x, y)$ é verdadeiro. O gráfico dessa relação é chamado de grafo funcional em $X \times Y$; esse subconjunto F de $X \times Y$ é, portanto, caracterizado pelo fato de que, para cada $x \in X$, há um e apenas um $y \in Y$ de modo que $(x, y) \in F$; esse elemento y é chamado de valor de F em x e é representado por $F(x)$. ***Um gráfico funcional em*** $X \times Y$ ***também é chamado de mapeamento de*** X ***em*** Y ***ou uma função definida em*** X***, tomando seus valores em*** Y. (DIEUDONNE,1960, p.5, tradução nossa, grifo nosso).

[1]Na versão espanhola do livro usa o termo "aplicação"

Assim, ***um gráfico funcional em $X \times Y$ também é chamado de mapeamento de X em Y ou uma função definida em X, tomando seus valores em Y***

> It is customary, in the language, to talk of a mapping and a functional graph as if they were two different kinds of objects in one-to-one correspondence, and to speak therefore of "the graph of a mapping," but this is a mere psychological distinction (corresponding to whether one looks at F either "geometrically" or "analytically"). (DIEUDONNE,1960, p.5).

> É costume, na linguagem, falar de um mapeamento e de um gráfico funcional como se fossem dois tipos diferentes de objetos em correspondência um a um e, portanto, falar de "o gráfico de um mapeamento ", mas esta é uma mera distinção psicológica (correspondendo a se alguém olha para F "geometricamente" ou "analiticamente"). (DIEUDONNE,1960, p.5, tradução nossa).

O autor observa o fato de que é habitual se referir à mapeamento e a gráfico funcional como se fossem objetos diferentes. Estas denominações correspondem ao mesmo objeto e só expressam dois pontos de vista distintos, seja em um caso o analítico ou seja, no outro caso, o geométrico. Portanto, a expressão "gráfico do mapeamento" seria uma expressão redundante.

> In any case, it is fundamental, in modern mathematics, to get used to considering a mapping as a single object, just as a point or a number, and to make a clear distinction between the mapping F and any one of its values $F(x)$; the first is an element of $\mathcal{P}(X \times Y)$, the second an element of Y, and one has $F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$. The subsets of $X \times Y$ which have the property of being functional graphs form a subset of $\mathcal{P}(X \times Y)$, called the set of mappings of X into Y, and written Y^X or $\mathcal{F}(X, Y)$. (DIEUDONNE,1960, p.5).

> Em qualquer caso, é fundamental, na matemática moderna, habituar-se a considerar um mapeamento como um único objeto, apenas como um ponto ou um número, e fazer uma distinção clara entre o mapeamento F e qualquer um de seus valores $F(x)$; o primeiro é um elemento de $\mathcal{P}(X \times Y)$, o segundo é um elemento de Y e um tem $F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$. Os subconjuntos de $X \times Y$ que têm a propriedade de serem gráficos funcionais formam um subconjunto de $\mathcal{P}(X \times Y)$, chamado de conjunto de mapeamentos de X em Y, e escrito Y^X ou $\mathcal{F}(X, Y)$. (DIEUDONNE,1960, p.5, tradução nossa).

Finalmente observa que é fundamental considerar uma função como um objeto único e que deve se fazer uma distinção clara entre a função F e o valor que F assume em x, $F(x)$, pois $F \in \mathcal{P}(X \times Y)$, em tanto que $F(x) \in Y$.

Já Queysanne (1971) utiliza o termo "aplicação":

Dado dois conjuntos A e B, uma aplicação f de A em B é uma correspondência entre um elemento de A e um elemento de B, funcional para este elemento de B. Em outras palavras: Qualquer que seja x elemento de A, a aplicação f faz corresponder a x um único elemento y de B. Dizemos que f aplica A em B ou f é um aplicação de A em B. (QUEYSANNE, 1971, p.37, tradução nossa).

O autor explica que a palavra função é sinônimo da palavra aplicação, mas que frequentemente, sem que isto seja regra, utilizamos o termo "função" quando o contradomínio é um conjunto numérico.

Segundo Queysanne, ***uma função é uma correspondência***. Previamente define o termo correspondência como uma terna ordenada de conjuntos (A, B, G) onde $G \subset A \times B$.

10. Correspondance entre éléments d'un ensemble A et éléments d'un ensemble B

a) Soit R une relation entre x élément de A et y élément de B, soit G son graphe; on appelle correspondance entre A et B le triplet (A, B, G). A est l'ensemble de départ, B l'ensemble d'arrivée, G le graphe de la correspondance. (QUEYSANNE, 1964, p.29).

10. Correspondência entre elementos de um conjunto A e elementos de um conjunto B

a) Seja R uma relação entre x elemento de A e y elemento de B, seja G seu gráfico; chamamos uma correspondência entre A e B a terna ordenada (A, B, G). A é o conjunto inicial, B o conjunto final, G o gráfico da correspondência. (QUEYSANNE, 1964, p.29).

Devemos observar que a definição dada por Queysanne esta dentro da forma boubakiana de definir função.

Temos também as definições dadas por dois prestigiosos professores, Elon Lages Lima e Luiz Adauto Medeiros.

§3 Funções

Uma função $f : A \mapsto B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).
Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$. $[\cdots]$
O gráfico de uma função $f : A \mapsto B$ è $[\cdots]$:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\, y = f(x)\}$$

(LIMA, 2004, pp.13-14).

> Define-se (conforme Dirichlet (1887)) como função $f : X \mapsto Y$, um objeto constituído por dois conjuntos - X o domínio da função, Y o conjunto contradomínio da função - e uma regra geral que a cada $x \in X$ associa um único $y \in Y$. Denota-se uma função f por
>
> $$f : X \mapsto Y;\ y = f(x) \ \text{ ou } \ x \mapsto f(x)$$
>
> (MEDEIROS, 2005, p.18)

Não é difícil deduzir que ambas definições se enquadram, de forma implícita, no conceito bourbakiano de função pois consideram as funções como objetos compostas por três conjuntos: domínio, contradomínio e gráfico que é determinado por a "regra de correspondência".

Com esses exemplos já conseguimos perceber uma grande variedade de termos (função, mapeamento, aplicação, correspondência, relação, etc) o que pode causar confusão se não for bem esclarecido o que está sendo dito.

Além disso, em alguns momentos gráficos, expressões algébricas e tabelas são tomadas como sinônimos de função e outras vezes apenas como formas de representá-la.

Outro ponto importante a ser destacado refere-se ao abuso de linguagem. Em muitos casos y e $f(x)$ são utilizados para representar coisas diferentes. Assim, por exemplo, frequentemente encontramos a expressão "seja a função $f(x)$", confundindo dois objetos diferentes, a função f e o valor desta em x. Note-se que f, estritamente falando, é (A, B, F) com $F \in \mathcal{P}(A \times B)$ entanto que $f(x) \in B$.

Capítulo 3

Função no Contexto Escolar

Neste capítulo, falaremos brevemente sobre a importância dos livros didáticos utilizados na escola, sobre as obras do Programa Nacional do Livro e do Material Didático e sobre o processo de seleção dessas obras. Posteriormente, analisaremos como o conceito de função é abordado nas obras selecionadas. Por fim, comparamos o resultado desta análise com a da análise de outros livros didáticos.

1 Livros Didáticos e PNLD

Segundo Schubring (2003), os livros já existiam mesmo antes de ser possível imprimi-los. Isso nos mostra que já existia a noção de livro-texto e que isso já era considerado importante independente de ser possível ou não que cada aluno tivesse o seu exemplar.

O livro didático destina-se a dois leitores: ao professor e ao aluno. Ramos (2013) diz que Lima (2001) "nos aponta que o livro didático é na maioria dos casos a única fonte de referência com que o professor de matemática conta para organizar suas aulas e até mesmo para firmar seus conhecimentos" .

Desta forma, é possível perceber a importância que tem o livro didático e as consequências do seu uso no ensino de matemática, o que justifica o interesse em analisar essas obras na tentativa de compreender as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem deste conceito.

No Brasil, temos o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) que, de acordo com o Ministério da Educação, tem como foco:

Avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (MEC, 2021)

A distribuição acontece a cada três anos e é realizada de forma alternada entre os níveis de ensino Infantil, Fundamental e Médio (disponível também para a Educação de Jovens e Adultos – EJA) de todo o Brasil. (MEC, 2021)

Cabe às escolas e aos professores selecionarem as obras que melhor atendem às necessidades do professor e que também estejam alinhadas às expectativas e ao nível de entendimento dos alunos.

Neste ano não serão entregues apenas livros didáticos. Além das obras pedagógicas, para cada nível de ensino, os editais trazem, obrigatoriamente, a inclusão de itens como: Materiais com metodologia de projetos; Materiais digitais; Materiais de formação; Materiais destinados à gestão escolar, entre outros.

De acordo com o Edital n° 03/2019 do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), a organização e distribuição das escolhas será feita em duas fases, que deverão se encerrar em 2021. Na primeira fase ocorrerá a escolha do Objeto 1 que consiste nos Projetos Integradores e no Projeto de Vida. Na segunda fase, deverão ser escolhidos os Objetos 2, 3, 4 e 5: O Objeto 2 são os livros didáticos por área de conhecimento; O Objeto 3 consiste nas obras de formação para professores e gestores; O objeto 4 trata dos recursos digitais e o Objeto 5 de obras literárias (FNDE, 2019).

As obras que serão impressas em formato de livro para uso direto dos estudantes são os Objetos 1 e 2.

No que se refere ao Objeto 1, os livros de Projeto de Vida têm como objetivo estimular o jovem a desenvolver o autoconhecimento, a compreender sua relação com os outros e o mundo, assim como pensar no futuro. Já os livros de Projetos Integradores trabalham, de modo integrado, os componentes curriculares de cada área do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais. (FNDE, 2019)

Já o Objeto 2, ou seja, os livros didáticos aos quais já estamos habituados, não serão apenas um único livro por área. De acordo com o item 2.3.1.4.1 do edital:

> O conjunto dos seis volumes do livro do estudante deve abordar, de maneira equânime, todas as competências gerais, específicas e habilidades de cada área do conhecimento (com exceção de língua inglesa na área de linguagens e suas tecnologias). Ao se abordar as habilidades e as competências específicas, deve ser explicitada a devida articulação delas com as competências gerais, os temas contemporâneos e as culturas juvenis, conforme indicado pela BNCC (FNDE, 2019, p. 5)

Além disso, o item 2.3.1.4.2 do edital prevê que os volumes não podem ser sequenciais:

> Os volumes não devem ser sequenciais, considerando o crescente em termos de complexidade pedagógica. Cada volume deve ser autocontido no que se refere à progressão das abordagens das habilidades e das competências específicas, assim como da articulação com as competências gerais, com os temas contemporâneos e com as culturas juvenis, conforme indicado pela BNCC. (FNDE, 2019, p. 5)

Neste capítulo vamos analisar as obras escolhidas pelos professores de matemática do Instituto Federal do Paraná campus Foz do Iguaçu. Essa escolha foi realizada coletivamente entre todos os docentes a partir das obras como um todo. Aqui analisaremos apenas a apresentação do conceito de função com maior detalhe.

Na fase 1 da escolha dos Projetos de Vida e Projetos Integradores, cada professor deu sua sugestão e todos se mostraram interessados pelas mesmas obras. Sendo assim, optou -se por indicar os livros da editora moderna como primeira opção e os livros da editora FTD como segunda. De forma geral observamos que as obras não apresentam o conteúdo com tanta profundidade, o que não vimos como um problema pois essas obras não substituem os livros didáticos, trata-se apenas de um complemento. No entanto, não é possível fazer análise dessas obras , pois elas não formalizam o conceito de função. O conceito é utilizado em algumas atividades propostas de forma implícita, mas em nenhum momento é apresentada uma definição ou mencionado o termo "função". Por isso, serão analisados apenas os Livros Didáticos.

Na Fase 2, consideramos que a nova formulação dos livros em volumes por conteúdo e não mais por série podem contribuir para o trabalho com os livros didáticos no IFPR Foz do Iguaçu, visto que nossas ementas são organizadas de maneira diferente para cada curso e os cursos de ensino médio têm 4 anos, não apenas 3 como nas escolas estaduais. Após discussão sobre as vantagens e desvantagens de cada uma das obras enviadas para análise as escolhas do grupo foram a Coleção Prisma da Editora FTD como primeira opção e a Coleção Ser Protagonista da Editora SM como segunda opção.

Cabe ressaltar que os docentes podem indicar primeira e segunda opção para cada objeto e nem sempre é enviado para a escola a obra indicada como primeira opção.

1.1 Coleção Prisma – Editora FTD

Como mencionado anteriormente, cada coleção de livro didático é dividido em 6 volumes. Na coleção prisma dois volumes são dedicados ao tema "função", são eles "Conjunto e Funções – Volume 1" e "Funções e Progressões – Volume 2". No volume 1 é onde é apresentado e formalizado o conceito de função, então é este que iremos analisar.

O livro segue uma linha de raciocínio primeiro definindo conjuntos, dando enfoque apenas para conjuntos numéricos. Também aborda a relação de inclusão entre conjuntos, bem como as propriedades e as operações de união, interseção e diferença de conjuntos. Posteriormente, apresenta os conjuntos de Números Naturais, Números Inteiros, Números Racionais, Números Irracionais e de Números Reais.

Na sequência o livro traz o exemplo de uma corrida de táxi para introduzir o conceito de função. Os autores discutem a noção da ideia de função a partir desse exemplo, tratando função como uma dependência. Neste caso particular, o preço depende da distância percorrida. Em seguida, os autores ampliam e formalizam o conceito, determinando função como a relação que associa elementos de dois conjuntos.

A definição de função apresentada no livro é:

> Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma relação que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B. (BONJORNO, 2020, p. 64).

Apesar de serem apresentadas algumas situações cotidianas que ajudam a compreender de forma intuitiva o que seria uma função, o conceito em si é apresentado de forma muito direta.

No início podemos perceber o uso predominante de tabelas, mas em alguns momentos também são utilizados diagramas para a representação por conjuntos. Após esclarecer os conceitos de domínio, contra-domínio e imagem, inicia-se uma abordagem gráfica.

Outro ponto interessante é que apesar de serem apresentados vários conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$), nos exemplos que envolvem diagramas de conjuntos numéricos sempre utilizam somente números inteiros. Em contrapartida, ao tratar do gráfico de funções, sempre são traçadas linhas contínuas. Ainda que haja intervalos de descontinuidade, não há exemplos de funções com domínios discretos.

Em relação aos exercícios, muitos são essencialmente numéricos, análise de crescimento e decrescimento ou de construção gráfica, solicitando que seja determinado o valor da função em determinado ponto, determinar domínio e imagem ou que se faça um esboço do gráfico de funções afim. Os exemplos relacionados com o cotidiano também existem, e são apresentados alguns exercícios neste sentido.

Ao final de cada capítulo sempre há alguma referência para a História da Matemática. No capítulo 2, onde é apresentado o conceito de função, os autores se propõem a explicar como surgiram os gráficos. No entanto, ao ler esta seção, resumida em apenas uma página, pode-se verificar que não há de fato referência histórica sobre o tema. O texto apenas diz que os gráficos podem ser muito úteis e informa quais matemáticos teriam contribuído para o desenvolvimento desta forma de representação. Em nenhum momento é relatado processo de desenvolvimento do conceito de função ou em que momento deste processo os gráficos passaram a ser utilizados.

No que diz respeito a linguagem utilizada percebemos também uma possível dificuldade para os estudantes. Em muitos caos ela se torna confusa, pois $f(x)$ em alguns momentos é utilizada para representar a expressão matemática que estabelece a correspondência entre os conjuntos e em outros momentos é usada como o valor da função para um x determinado. Além disso, é mencionada como sendo a própria função e outras vezes como sendo apenas a “lei de formação” da função.

1.2 Ser Protagonista – Editora SM

Esta coleção, das autoras Katia Smole e Maria Diniz, como as outras, possui 6 volumes. Somente o volume "Números e Álgebra"aborda o conceito de função de forma mais direta. Nesta coleção, a linha de raciocínio é parecida com a da editora FTD. No entanto, após a abordagem de relações, as autoras também falam sobre plano cartesiano, simetria e coordenadas no plano cartesiano.

A definição de função é dada da seguinte forma:

> Função é uma maneira de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, x e y, se relacionam de tal forma que:
>
> - x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado;
> - os valores que y assume dependem dos valores de x.
>
> (SMOLE; DINIZ, 2020, p. 50)

Antes de qualquer exemplo ou maiores explicações, já é definido o conceito de gráfico de função como sendo “conjunto dos pontos (x, y), em que x assume os valores para os quais a função faz sentido e y é o valor associado a x"(SMOLE; DINIZ, 2020, p. 50).

A partir daí, são apresentados exemplos de expressões analíticas associadas a um gráfico correspondente.

Podemos notar, primeiramente, que a definição não é precisa, pois em nenhum momento é esclarecido, por exemplo, que cada x deve estar relacionado a um único y. Além disso, há uma grande perda da generalidade que o conceito possui quando é restrita a "grandezas".

Além disso, os apontamentos indicados outra coleção também podem ser verificados aqui. Não há referência à História da Matemática. A linguagem parece mais mecânica, menos compreensível para o estudante. Além disso, percebe-se que a própria diagramação é menos atrativa, predominando tons de cinza e poucas associadas ao que está sendo dito. As imagens são praticamente todas apenas de gráficos.

Ainda em relação à linguagem, também percebe-se a confusão em relação à $f(x)$ que nesta obra também é utilizada ora para representar a expressão matemática que estatele a correspondência entre os conjuntos, ora como o valor da função para um determinado x. Neste caso, porém, não temos referência à Lei de Formação.

Em relação aos exercícios, também predominam exercícios mais numéricos, mas também tem situações-problema. Apresar do grande foco inicial em gráficos, quase não há exercícios pedindo para construir gráficos, o foco é apenas da leitura dos mesmos.

Quando pensamos nos conjuntos, apesar de ter um capítulo inteiro dedicado a este tema e usar a palavra "conjunto" na definição de função, em nenhum momento aparece a representação de uma função através do uso de diagramas, as autoras vão diretamente para a expressão matemática que define a função associada ao respectivo gráfico.

1.3 Outras Obras

Embora já seja possível verificar algumas semelhanças em as duas obras escolhidas, é interessante observar outras obras para que seja possível verificar se existe de fato um padrão.

Na análise de Pires e Souza (2005) que avaliaram 5 livros didáticos baseando-se em três componente básicos recomendados por Lima (2001). São eles: a conceituação (apresentação do conceito), a aplicação (exercícios propostos) e a manipulação (principalmente algébrica, mas não exclusivamente). Essa análise foi apresentada por Ramos (2013) e tem os seguintes resultados:

Em relação à conceituação: dos cinco livros analisados, quatro abordam o conceito de função de forma direta, com pouca referência à História da Matemática que poderia ajudar a compreender a escolha didática e epistemológica da definição do conceito abordada pelos autores.

No que diz respeito à aplicação: os exercícios são essencialmente numéricos e/ou sobre a construção de gráficos, mas há também algumas situações contextualizadas que permitem compreender de fato o significado do conceito.

Quanto à manipulação: dos cinco livros analisados, apenas um apresenta a definição de Leibniz, enquanto que três abordam a definição de Bernoulli e todos utilizam a definição de Dirichlet a partir de exemplos apenas numéricos o que ainda permanece nos exercícios resolvidos e propostos; A definição de Bernoulli "é utilizada para iniciar, motivar e dar significado ao estudo do conteúdo (em situações contextualizadas) e logo depois ela é "abandonada" nos estudos subsequentes " (PIRES E SOUZA, 2015 apud RAMOS, 2013).

Em relação à linguagem utilizada, como não há menção observamos outros três livros: DANTE (2013), PAIVA (2017) e IEZZI, G. et al.(2015).

Nos três livros pudemos perceber que também tratam $f(x)$ como a expressão matemática que estatele a correspondência entre os conjuntos e como o valor da função para um determinado x, causando assim uma confusão.

Capítulo 4

Função: da licenciatura à escola

O conhecimento da história dos conceitos matemáticos pode contribuir para a elaboração da linguagem matemática e para uma compreensão mais profunda desses conceitos. De acordo com Zuffi (2016), ideia de função, em particular, tendo percorrido um longo período histórico desde suas primeiras noções intuitivas até sua elaboração mais recente que ocorreu apenas no século XX, possui uma grande riqueza histórica a ser explorada, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática. No entanto, pudemos observar que tanto nos textos universitários quando nos livros didáticos escolares há pouca ou nenhuma referência histórica.

Além de contribuir para a compreensão, a história do processo de desenvolvimento do conceito de função ajuda a desmistificar a ideia de grandes gênios. A história apresenta idas e vindas, tentativas e erros, de grandes matemáticos. Isso mostra aos alunos que o erro faz parte do processo de aprendizagem e também pode trazer contribuições importantes.

É evidente que nem sempre será possível abordar todo o processo histórico com todas as definições apresentadas ao longo do tempo em sala de aula. Além disso, Zuffi (2016) afirma que nem mesmo todas as motivações poderiam ser tratadas no ensino médio de forma aprofundada por envolver conceitos complexos para serem abordados no ensino médio, mas que a partir do conhecimento da história os professores terão autonomia para fazer uma análise crítica dos modos pelos quais essas ideias poderão desenvolvidas com seus alunos.

A autora também cita uma pesquisa que ela própria realizou em 1999 na qual observou-se que "há uma diversidade de conceituações para as funções, apresentadas pelos professores do Ensino Médio, que variam com o contexto em que são propostas". No entanto, ela afirma que nem sempre os professores são conscientes dessas diferenças.

Essa informação de fato faz sentido, uma vez os livros didáticos são as principais referências utilizadas pelos professores na preparação das aulas e em nossa análise dos livros didáticos escolares foi observado que cada um traz definições e abordagens distintas.

Além disso, a criação da matemática não se deu em um momento único, não foi um ato, mas sim um processo de construção complexo, que foi influenciado por fatores socioculturais, conforme os problemas que as sociedades de cada época propuseram como relevantes, juntamente com a comunidade científica. Da mesma forma, Zuffi (2016) acredita que na sala de aula, a elaboração das ideias matemáticas devem partir de problemas levantados pelos alunos e pelo professor e, portanto, as abordagens ainda seriam distintas, o que não é um problema, mas poderia minimizar as confusões uma vez que o conceito seria apresentado a partir de algo que faz sentido para o aluno.

Também podemos observar um “salto” entre teoria e prática/aplicação. Os livros iniciam com definições formais, linguagem de conjuntos, linguagem algébrica e repentinamente trazem exercícios com situações-problema em que toda essa linguagem não aparece.

Outro ponto de destaque é em relação a terminologia. No estudo de funções aparecem diversos termos, tais como: elemento, conjunto, domínio, contradomínio, imagem, zero da função, valor da função, etc, o que também pode dificultar a compreensão se não for bem esclarecido.

Também existe uma grande variedade de símbolos que são utilizados: desde os símbolos da Teoria de Conjuntos, incluindo os símbolos que representam os próprios conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ até o uso de letras para representar variáveis e o próprio símbolo $f(x)$.

Em relação aos símbolos, não apenas a grande variedade confunde os estudantes, como também os abusos de linguagem em que o mesmo símbolo representa coisas diferentes.

De acordo com Booth (1984 apud MATOS, 2008) os alunos se confundem ao utilizar símbolos. O autor afirma que os estudantes têm dificuldade para interpretar o significa do das letras, bem como para compreender notações e convenções.

Em relação ao uso de letras, pode-se observar que no contexto apresentado elas representam objetos matemáticos e não sons. Estes símbolos deixam de ser letras, pois perdem seu papel fonético. Assim, passam a ser utilizadas para representar objetos segundo conveniência ou gosto.

Diante dessas considerações, conclui-se que:

(1) Para que os estudantes compreendam um conceito matemático, é necessário que esse conceito seja construído com ele ao longo das aulas;

(2) A linguagem deve ser clara e objetiva, pois os abusos de linguagem dificultam a compreensão dos conceitos e

(3) Nos cursos de formação de professores essas questões devem ser consideradas ou reforçadas, pois ainda não os tem conduzido a uma adequada reflexão sobre o uso que fazem da linguagem matemática.

Desta forma, sugerimos ao professor de matemática:

- Decidir qual a definição de função que, dentro das caraterísticas exigidas pela própria matemática, deve-se adotar como marco teórico da atividade pedagógica.
- Delinear um roteiro que permita realizar a transposição didática correspondente.
- Programar sequências de atividades que reproduzam de alguma forma o desenvolvimento histórico do conceito de modo que o conceito formal não seja apresentado pronto ao estudante e sim seja construido com ele.

Este programa pode se constituir um ***projeto de aplicação pratica*** das ideias desenvolvidas neste trabalho e que em futuro muito próximo deveremos realizar.

Considerações Finais

Neste trabalho, tentamos demonstrar, a partir do caso particular do conceito de funções, como a linguagem é importante para a compreensão da matemática. Buscamos evidenciar que o quanto a falta de clareza das definições e notações utilizadas podem afetar negativamente o processo de ensino-aprendizagem.

Nota-se que o conhecimento matemático se alterna entre o intuitivo informal e o lógico formal. As noções iniciais são fundamentalmente intuitivas informais enquanto que as atuais são mais lógico formais. Esta alternância entre a intuição e o rigor que acontece na história como processo social pode guiar o fazer pedagógico.

Assim, o conhecimento da evolução histórica do conceito pode contribuir com o processo de construção do conhecimento individual de cada aluno, tanto na escola como na universidade. Traçando um paralelo com a relação entre a ontogenia, que analisa o desenvolvimento de um indivíduo, e a filogenia, que estuda a história evolutiva da espécie, a história da matemática se revelaria mais útil na perspetiva metodológica que a mera referencia bibliográfica de celebres matemáticos.

Ao se desenvolver individualmente no útero da mãe, o bebê vai adquirindo, de forma sintética, as características evolutivas da nossa espécie. De forma análoga, no processo de aprendizagem de um conceito matemático, os estudantes poderiam seguir a linha evolutiva deste conceito e adquirir uma sólida base intuitiva que permitam ter acesso as formas gerais, formais, rigorosas e abstratas de sus atuais definições.

Apesar de tratarmos aqui deste caso particular, a fim de facilitar nossa análise, podemos ampliar os resultados deste estudo para os conteúdos de matemática trabalhados na escola de forma geral uma vez que definições e o uso de símbolos está sempre presenta na disciplina.

Esperamos ter provocado reflexões acerca dos desafios enfrentados pelos docentes no processo e ensino-aprendizagem de matemática e também que as discussões realizadas assim como a resenha histórica apresentada possam ser utilizadas como referência por professores que tenham acesso a este trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] BABINI, J. **História de la ideas modernas en matemática - Serie Matemática Monografia No.4. 2da. Edición**. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos: Washington, D.C., 1974.

[2] BONJORNO, J. R. et al. **Conjunto e Funções**. 1. ed. São Paulo : Editora FTD, 2020.

[3] BOURBAKI, N. **Eléments de Mathématique Livre I Théorie des Ensembles**. DIFUSSION C.C.L.S: Paris, 1970.

[4] BOURBAKI, N. **Elementos de historia de las matemáticas**. Alianza Editorial S. A. : Madrid, 1976.

[5] DIEUDONNE, J. **Fundamentos de Análisis Moderno**. Reverté : Espanha, 1966.

[6] DIEUDONNE, J. **Foundation of Modern Analysis**. Academic Press: New York and London, 1960.

[7] EDITAL PNLD 2019. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**, 2021. Disponível em: `https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/consultas-editais/editais/edital-pnld-2021/EDITAL_PNLD_2021_CONSOLIDADO_13__RETIFICACAO_07.04.2021.pdf`. Acesso em: Mar/2021.

[8] FLEMMING, D.M. and GONÇALVES, M.B. **Cálculo A : Funções,limite, derivadas e integração**, 6a. Edição Revista e Ampliada. PEARSON Prentice Hall : São Paulo, 2006.

[9] GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. Volume 2, 5a. Edição. LTC Editora : Rio de Janeiro, 2001.

[10] HERSTEIN, I. N. **Topics in Algebra**. 2nd edition. University of Chicago JOHN WILEY & SONS : New York • Chichester • Brisbane • Toronto • Singapore, 1975.

[11] LEITHOLD, L. **O cáculo com Geometria Analítica**. 3a. Ed. Editora HARBRA ltda. : São Paulo, 1994.

[12] LIMA, E.L. **Curso de análise** v.1. 11 ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides): Rio de Janeiro, 2004.

[13] MAC LANE, S. **Mathematics Form and Function**. Sringer-Verlag New York Inc: USA, 1986.

[14] MEDEIROS, L.A. et all. **Lições de Análise Matemática**. Universidade Federal de Rio de Janeiro, Instituto de Matemática: Rio de Janeiro, 2005.

[15] PERRIN, P. **Evolution du concept de fonction**. résumé d'une conférence donnée en 1999 à la faculté des sciences de Reims dans le cadre d'un enseignement d'histoire des sciences destiné à des étudiants de DEUG.
Disponível em
`http://perso.numericable.fr/patrperrin/hmca/content/fonction.pdf`

[16] PNLD. **Ministério da Educação**, 2021. Disponível em:
`http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld`.
Acesso em: Mar/2021.

[17] PONTE, J. P. **O Conceito de Função no Currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 1990.
Disponível em:
`https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473?locale=en` .
Acesso em: fev/2021.

[18] QUEYSANNE, M. **Algèbre**. Collection U, Série Mathématiques dirigée par André Revuz. Armand Colin: Paris, 1964.

[19] QUEYSANNE, M. **Álgebra Básica**. Primera Edición. Vicens Vives: Barcelona, 1971.

[20] RAMOS, M. A. R.**O Conceito de Função: de Leibniz a Riemann**. X Seminário Nacional de História da Matemática, 2013.
Disponível em:
`https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/61`.
Acesso em: fev/2021.

[21] ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[22] SCHUBRING, Gert.**Análise histórica do livro didático de matemática: notas de aula**. Tradução: Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003

[23] SOMOLE, K., DINIZ, M.. **Números e Álgebra**. 1. ed. São Paulo : Editora SM, 2020.

[24] STEWART, I. **Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años**. Crítica: 2007
Disponível em: `http://www.librosmaravillosos.com`

[25] ZUFFI, E. M. **Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função**. Hipátia, 2016.
Disponível em:
`https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/436/75`.
Acesso em: fev/2021.