unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

DAIANE GOMES PRIOR CARA

UMA ANÁLISE SOBRE A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR ALUNOS DO 5º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CASCAVEL
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO/ PPGECEM
ÁREA DE CONCETRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ANÁLISE SOBRE A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR ALUNOS DO 5º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

DAIANE GOMES PRIOR CARA

CASCAVEL – PR

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ANÁLISE SOBRE A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR ALUNOS DO 5º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

DAIANE GOMES PRIOR CARA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Dulcyene Maria Ribeiro

CASCAVEL – PR

2020

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Cara, Daiane Gomes Prior
Uma análise sobre a elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5° e 9° ano do ensino fundamental / Daiane Gomes Prior Cara; orientadora Dulcyene Maria Ribeiro. -- Cascavel, 2020.
185 p.

Dissertação (Mestrado Acadêmico Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2020.

1. Educação Matemática. 2. Ensino Fundamental. 3. Operação e Algoritmos da Divisão. 4. Análise da Produção Escrita. I. Ribeiro, Dulcyene Maria, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DAIANE GOMES PRIOR CARA

UMA ANÁLISE SOBRE A ELABORAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO POR ALUNOS DO 5º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Nível de Mestrado e Doutorado, área de Concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste.

Dulcyene Maria Ribeiro

Professora Dr.ª Dulcyene Maria Ribeiro
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
Orientadora

Professora Dr.ª Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Membro Convidado

Veridiana Rezende

Professora Dr.ª Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
Membro Efetivo da Instituição

Andréia Büttner Ciani

Professora Dr.ª Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste)
Membro Efetivo da Instituição

Cascavel, 2020.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado à minha família.

Meu porto seguro em meio às tribulações!

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pelo dom da vida e do entendimento.

Ao meu esposo e meu filho, pelo carinho, companheirismo e compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus pais, pela educação que me proporcionaram em meio às dificuldades.

À Prof.ª Dr.ª Tânia Stella Bassoi (*in memoriam*) que acreditou em meu potencial orientando-me inicialmente nesse trabalho e por fomentar em mim, desde a graduação em Matemática, o prazer de ser uma educadora matemática.

À Prof.ª Dr.ª Dulcyene Maria Ribeiro por ter se tornado minha orientadora, propiciando meu gradual amadurecimento no decurso da construção da dissertação.

A todos os professores do *PPGECEM*, por sua paciência e dedicação de educadores, em nossos encontros, para processo de construção do conhecimento.

Aos colegas do grupo de estudos e pesquisas do qual participo, pela disponibilidade para a leitura deste trabalho e pelas contribuições visando a melhoria do mesmo.

Aos meus colegas de mestrado, pelo convívio e amizade.

Às professoras que participaram das bancas examinadoras de qualificação e defesa da dissertação Prof.ª Dr.ª Andréia Büttner Ciani, Prof.ª Dr.ª Mariana Moran e Prof.ª Dr.ª Veridiana Rezende pela disponibilidade para a leitura deste trabalho e pelas valiosas e pertinentes contribuições para o resultado desta pesquisa.

Às diretoras, as professoras e alunos das escolas, pela colaboração na obtenção dos dados para a realização desta pesquisa.

Finalmente, mas não menos importante à Fundação Araucária pelo auxílio financeiro durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Muito Obrigada!

O melhor lugar é onde estamos. O melhor momento da vida é o presente. A melhor companhia é a nossa consciência tranquila. E a maior fortuna que alguém pode ter é a paz!

Autor desconhecido

CARA, Daiane. Gomes. Prior. **Uma análise sobre a elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5º e 9º ano do ensino fundamental**. 2020. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

RESUMO

Durante o Ensino Fundamental I, os alunos são apresentados à operação de divisão e aos algoritmos relacionados a ela. No entanto, alunos do Ensino Fundamental II, ou mesmo do Ensino Médio, apresentam dificuldades para a realização de cálculos que envolvem divisão, seja na interpretação dos enunciados dos problemas ou no registro de suas resoluções, por meio de algoritmos ou não. Diante disso, este trabalho propõe-se a investigar o que se revela quanto à elaboração de enunciados, e sobre a resolução, de problemas que envolvem a operação de divisão, por alunos de 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. Os questionamentos norteadores da pesquisa foram sintetizados da seguinte forma: i) Quais as características dos problemas de divisão elaborados por alunos de 5º e de 9º anos? ii) Quais as formas mobilizadas, os algoritmos e como esses são empregados por alunos de 5º e de 9º anos, para a resolução de problemas de divisão? Materiais constituídos por enunciados de problemas, envolvendo a operação de divisão, elaborados e resolvidos por alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental, constituem a fonte de dados desse trabalho. A análise interpretativa da produção escrita dos alunos possibilitou estabelecer agrupamentos. Para isso, buscou-se identificar nos enunciados elaborados os tipos de problemas produzidos, se continham as informações necessárias para serem resolvidos, bem como as linguagens materna, simbólica e numérica mobilizadas. E nas resoluções, identificou-se a utilização, ou não, de algoritmos, quais são eles e, a maneira como os alunos empregaram os algoritmos, identificando as dificuldades, os erros e as potencialidades na sua utilização. Como resultados, identificou-se que não houve variação expressiva em relação às características dos problemas elaborados pelos alunos do 5º e do 9º ano, sendo que a maioria dos alunos elaboraram problemas classificados como de partição e fizeram uso de números naturais. No entanto, houve o emprego de números fracionários e decimais e nos enunciados elaborados pelos alunos do 9º ano houve a incorporação de conceitos aprendidos no Ensino Fundamental II, como cálculo da área do triângulo e fatoração. Com relação às resoluções, os alunos do 5º ano necessitaram de cálculos auxiliares, apresentaram o resto como resposta, forçaram os procedimentos para encontrar resto zero e em alguns casos demonstraram não saber usar o algoritmo da divisão. Identificou-se também, que alunos de ambos os anos escolares exibiram, em sua maioria, uma resposta final ao enunciado proposto, além de fazerem uso de um único algoritmo, o algoritmo da divisão pelo processo longo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Operação e Algoritmos da Divisão; Análise da Produção Escrita.

CARA, Daiane Gomes Prior. **An analysis on the elaboration and resolution of division problems by students** of the **5th and 9th grade of elementary school**. 2020. 189 s. Dissertation (Master in Science Education and Mathematics Education) - Graduate Program in Science Education and Mathematics Education, State University of Western Paraná - UNIOESTE, Cascavel, 2020.

ABSTRACT

During Elementary School I, students are introduced to the division operation and the algorithms related to it. However, elementary school II students, or even high school, present difficulties in performing calculations that involve division, either in the interpretation of the statements of the problems or in the recording of their resolutions, through algorithms or not. Therefore, this paper aims to investigate what is revealed regarding the elaboration of utterances, and about the resolution, of problems involving the division operation, by students of 5th and 9th years of elementary school. The research-guide questions were summarized as follows: i) What are the characteristics of division problems elaborated by 5th and 9th grade students? ii) What forms are mobilized, algorithms and how are these employed by 5th and 9th graders, to solve division problems? Materials consisting of statements of problems, involving the operation of division, elaborated and solved by students of the 5th and 9th grade of elementary school, constitute the source of data of this work. The interpretative analysis of the written production of the students made it possible to establish groupings. For this, we sought to identify in the statements elaborated the types of problems produced, if they contained the information necessary to be solved, as well as the maternal, symbolic and numerical languages mobilized. And in the resolutions, it was identified the use, or not, of algorithms, what they are and, the way students used the algorithms, identifying the difficulties, errors and potentialities in their use. As results, it was identified that there was no significant variation in relation to the characteristics of the problems elaborated by the students of the 5th and 9th grade, and most of the students elaborated problems classified as partition and made use of natural numbers. However, there was the use of fractional and decimal numbers and in the statements elaborated by the 9th grade students there was the incorporation of concepts learned in Elementary School II, such as calculation of the triangle area and factoring. Regarding the resolutions, the 5th grade students needed auxiliary calculations, presented the rest as an answer, forced the procedures to find zero rest and in some cases demonstrated not knowing how to use the division algorithm. It was also identified that students from both school years exhibited, for the most part, a final response to the proposed utterance, in addition to making use of a single algorithm, the algorithm of division by the long process.

Keywords: Mathematics Education; Elementary School; Operation and Algorithm Division; Written Production Analysis.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAAE – Certificado de Apresentação para Apreciação Ética

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEP – Comitê de Ética em Pesquisa

DE – Dupla Elaboradora

DR – Dupla Resolvedora

EJA – Educação de Jovens e Adultos

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PIBID – Programa de Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PSS – Processo Seletivo Simplificado

TA – Termo de Assentimento

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Sumário

INTRODUÇÃO

Durante o curso de graduação em Matemática, com a participação em estágios supervisionados, no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e atuando como professora do Processo Seletivo Simplificado (PSS) na rede pública do estado do Paraná, a autora desta pesquisa teve a oportunidade de trabalhar com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II.

Ao trabalhar conteúdos que envolviam de alguma maneira a operação divisão, foi possível notar que os alunos apresentavam dificuldades na interpretação dos enunciados e também ao registrarem em seus cadernos as respectivas resoluções, seja em forma de desenhos, aplicação de algoritmos ou na resposta escrita por extenso em língua materna.

Também foi percebido que geralmente os problemas são apresentados aos alunos já prontos apenas para serem resolvidos, sem que seja solicitado que os alunos elaborem enunciados de problema. Será que os alunos seriam capazes de elaborar enunciados claros e possíveis de serem resolvidos?

Dessa forma surgiu o interesse em compreender mais sobre: i) Como os alunos elaboram e como resolvem problemas de divisão? ii) Como compreendem um problema de divisão escrito por outro aluno? iii) Quais os registros utilizados para a resolução dos problemas de divisão? Estas foram as inquietações que culminaram no trabalho monográfico intitulado: A elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5º ano.

No momento da escrita da monografia no ano de 2014, a escolha pela turma do 5º ano do Ensino Fundamental I se deu pelo fato de ser o último ano desta etapa de escolarização, sendo assim, os alunos já teriam trabalhado com os conceitos envolvidos na operação de divisão e o algoritmo, ou algoritmos, para a resolução de problemas envolvendo esta operação.

Os resultados obtidos com a finalização da monografia revelaram que além da dificuldade em utilizar o algoritmo da divisão, os alunos apresentaram também dificuldades em escrever e interpretar os enunciados dos problemas, possivelmente por não serem incentivados, em sala de aula, a elaborarem enunciados de problemas.

De acordo com Molinari (2010), a operação de divisão

> [...] impõe alguns obstáculos às crianças mais velhas, no nível fundamental de escolaridade, por requerer algumas competências relativas à coordenação de ações, tornando-se, assim, uma operação complexa. Essa complexidade deve-se às características da operação: requer o uso de regras operatórias; seu cálculo é efetuado na direção contrária à das outras operações aritméticas, o que acarreta a dificuldade no domínio do algoritmo; envolve outras operações, como adição, multiplicação e subtração; pode gerar resto; o quociente pode gerar um número decimal, além de demandar relações entre as partes que a compõem (dividendo, divisor, quociente e resto) (MOLINARI, 2010, p. 32).

As características e a coordenação de ações tornam a operação de divisão uma operação complexa mesmo para crianças mais velhas, como destacada por Molinari (2010). É essa complexidade que faz com que mesmo no final do Ensino Fundamental, muitas vezes, os alunos ainda não consigam realizar essa operação matemática? Essa e outras inquietações ainda permaneceram após o término da monografia e levaram à proposição desta pesquisa, que busca revelar as características quanto à elaboração de enunciados e sobre as formas de resolução de problemas que envolvem a operação de divisão apresentadas por alunos de 5º e 9º anos do Ensino Fundamental.

De modo mais específico, as inquietações podem ser sintetizadas da seguinte forma: i) Quais as características dos problemas de divisão elaborados pelos alunos de 5º e 9º anos? ii) Quais as formas mobilizadas, os algoritmos e como esses são empregados por alunos de 5º e de 9º anos, para a resolução de problemas de divisão?

Nesse trabalho, buscou-se responder a essas questões, por meio de uma pesquisa de cunho qualitativo, caracterizada como diagnóstica, descritiva e interpretativa. Quanto à construção de dados, pode-se afirmar que se trata de uma pesquisa de campo. Optou-se em utilizar os dados coletados para a pesquisa de monografia, que se referem a uma turma do 5º ano etapa final do Ensino Fundamental I e também em construir novos dados, tomando como sujeitos alunos de uma turma de 9º ano, etapa final do Ensino Fundamental II, guiados pela seguinte interrogação: O que se revela da elaboração e resolução de problemas de divisão realizados por alunos de 5º e 9º ano do Ensino Fundamental?

Em pesquisas já desenvolvidas relacionadas à operação de divisão como Soppelsa (2016), Oliveira (2015), Molinari (2010), Nunes *et al.* (2009), Nehring (1996; 2001), Saiz (2001) entre outras, pode-se observar que estas discutem sobre problemas elaborados pelos pesquisadores e resolvidos por alunos, porém com abordagens voltadas a analisar as respostas dadas aos problemas previamente preparados. Nesses trabalhos o foco não está na formulação de problemas pelos alunos.

As orientações do Referencial Curricular do Paraná (2018), preconizam que os professores devem incentivar seus alunos a elaborarem enunciados de problemas (sejam eles de divisão ou não). Mas elaborar problemas não é uma tarefa simples. Segundo Spinillo,

> [...] formular problemas requer que o aluno organize o que sabe, de modo a elaborar um texto em forma de enunciado para comunicar o que deseja. Isso requer um controle sobre o texto e sobre as ideias matemáticas, sendo tal atividade um exemplo da aproximação entre Matemática e língua materna (SPINILLO *et al.,* 2017, p. 931).

Ao se tratar de língua materna, é possível afirmar que "[...] a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica" (DUVAL, 2011, p. 76), uma vez que, por meio dela é possível dizer ou escrever qualquer coisa e compreender o que está escrito ou que o outro quer dizer. "[...] no entanto, os professores devem estar cientes que, mesmo para adultos, não é fácil escrever um problema de maneira que realmente expresse o que o autor pensou e que seja compreendido da mesma forma por todos os leitores" (JURADO, 2015, p. 240, tradução nossa). Desse modo, a elaboração de problemas é importante para verificação do conhecimento que os alunos possuem e como conseguem comunicar o que sabem de forma oral ou escrita.

Segundo Jurado (2015, p. 235, tradução nossa) "[...] trabalhos nesta área, até mesmo a nível internacional, não são tão abundantes quanto os trabalhos referentes a resolução de problemas". Assim considerando que a formulação de problemas pelos próprios estudantes é um aspecto que tem sido pouco explorado na literatura e que é importante que o aluno seja estimulado a elaborar problemas, justifica-se ter sido solicitado nesta pesquisa que os alunos elaborassem os enunciados de problemas.

Assim, neste trabalho objetiva-se investigar o que se revela quanto à elaboração de enunciados e sobre a resolução de problemas que envolvem a operação de divisão por alunos de 5º e 9º anos do Ensino Fundamental.

De posse dos materiais constituídos por enunciados de problemas envolvendo a operação de divisão elaborados e resolvidos por alunos do 5º e do 9º do Ensino Fundamental, os dados foram organizados em forma de quadros, nos quais buscou-se identificar as convergências ou divergências, para que pudessem ser agrupados e posteriormente analisados. O processo de organização, interpretação, inferência e análise é de inspiração na análise de conteúdo de Bardin (2016) e na análise da produção escrita de Santos e Teixeira (2018) e Buriasco, Ferreira e Ciani (2009).

Uma análise interpretativa da produção escrita dos alunos, possibilita a obtenção de diversas informações, entre elas identificar como os alunos lidam com questões de matemática e quais conhecimentos matemáticos demonstram saber. É preciso ter sempre em mente que com a análise da produção escrita é possível dizer algo sobre o que o estudante fez, e não do que não fez, como nos alerta Santos (2008).

Nesse trabalho buscou-se identificar nos enunciados elaborados os tipos de problemas produzidos, se continham as informações necessárias para serem resolvidos, bem como as linguagens materna, simbólica e numérica mobilizadas e, nas resoluções, a utilização ou não de algoritmos e quais são eles e, a maneira como os alunos empregam os algoritmos, identificando as formas, as dificuldades e as potencialidades na sua utilização.

Além desta introdução, o trabalho foi organizado em cinco capítulos:

No capítulo 1 “Divisão: definições e algoritmos” discute-se sobre os significados da operação divisão e sobre os algoritmos. Apresenta-se o desenvolvimento dos algoritmos da divisão ao longo da história e como a divisão, o uso de algoritmos e a resolução de problemas são tratados nos documentos oficiais e nos trabalhos acadêmicos.

O capítulo 2 “Referencial teórico” contempla a fundamentação teórica e metodológica utilizada para o desenvolvimento desta pesquisa, apresentada na seguinte ordem: A elaboração e resolução de problemas matemáticos; A análise da produção escrita em matemática; O campo conceitual multiplicativo.

No capítulo 3 “Procedimentos metodológicos de produção, organização e análise dos dados” apresenta-se a natureza da pesquisa e o delineamento metodológico; os aspectos éticos da pesquisa; a caracterização do ambiente escolar; a construção e a organização dos dados e a indicação dos agrupamentos construídos durante as análises.

O capítulo 4 “Apresentação e discussão dos resultados” contempla os agrupamentos estabelecidos durante o processo de análise dos dados, a apresentação dos resultados das análises, juntamente com a discussão dos mesmos com a literatura.

No capítulo 5 “Considerações finais” apresenta-se as conclusões da pesquisa com relação aos dados coletados, sugestões para pesquisas futuras, bem como as contribuições de seu desenvolvimento para a pesquisa, e principalmente para professores e futuros professores.

CAPÍTULO 1

DIVISÃO: DEFINIÇÕES E ALGORITMOS

Considerando existir diversos significados para a palavra divisão, primeiramente apresenta-se os significados atribuídos de um modo geral. Segundo Houaiss (2001) divisão significa separação; classificação; partilha; discórdia; setor; unidade militar.

Estes significados de divisão estão relacionados a objetos e modos de agir diferentes. A palavra partilha por exemplo, indica uma forma de divisão, na qual alguma coisa é partilhada com uma ou mais pessoas. De modo análogo, a palavra separação também indica uma forma de divisão em que coisas ou pessoas são separadas, em grupos, em caixas, em partes, etc., as quais podem ou não serem iguais. Por outro lado, a palavra discórdia, mesmo se remetendo à negatividade, ainda está relacionada a divisão, no caso de uma divisão que não agrade a ambos os envolvidos.

No entanto, qual o conceito de dividir? O que é a operação de divisão? Como se ensina a operação de divisão na escola?

Molinari (2010) escreve que para Correa, Nunes e Bryant (1998), "[...] a divisão, enquanto operação, não é o mesmo que partilha, apesar de esta constituir o esquema de ação que a origina: [...] quando partilham, as crianças não têm qualquer preocupação a não ser a igualdade das partes" (MOLINARI, 2010, p. 33). No entanto, o conceito de divisão "[...] envolve a compreensão das relações entre os três valores, representados pelo dividendo, pelo divisor e pelo quociente" (CORREA; NUNES; BRYANT, 1998, p. 321 *apud* MOLINARI, 2010, p. 33).

Centurión (1994, p. 191, grifos da autora) define a divisão como "[...] dados dois números inteiros, chama-se **divisão exata** entre estes números a operação que nos fornece um terceiro número, que indica quantas vezes o primeiro contém o segundo".

Por outro lado, Saiz (2001), apresenta outras denominações ou expressões relacionadas com a divisão: "[...] divisão exata, divisão com ou sem resto, quociente inteiro, quociente aproximado por falta ou por excesso, quociente dado como uma aproximação, etc." (SAIZ, 2001, p. 159). A autora afirma que é possível definir a divisão nos decimais, ou nos racionais como diferentes divisões unificadas por um só nome: divisão.

Para Centurión (1994, p. 192) "[...] a divisão está ligada a duas ideias: a ideia de repartir em partes iguais e a ideia de medir, ou seja, a de verificar 'quantos cabem'".

Dessa forma, de acordo com Centurión (1994) tem-se:

- Divisão por partição (ideia de repartir), na qual tem-se a quantidade total que será distribuída em um determinado número de partes e deve-se calcular o valor de cada parte.
- Divisão por quotição (ideia de medir), neste tipo de divisão tem-se a quantidade total a ser dividida e o valor de cada cota, necessitando-se calcular a quantidade de cotas.

Para Oliveira (2015),

> [...] problemas de partição são aqueles nos quais são dados um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo deve ser distribuído. O resultado é o valor de cada parte. Já os problemas de quotição, consistem em problemas que são dados o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividir o mesmo. O resultado consiste no número de partes obtidas (OLIVEIRA, 2015, p. 39).

Os problemas seguintes são exemplos que utilizam essas duas ideias de divisão:

Problema partitivo: O colégio da cidade realizará uma excursão para as Cataratas do Iguaçu levando 185 alunos, em 5 ônibus alugados. Sabendo que os alunos serão distribuídos em quantidades iguais, quantos alunos irão em cada ônibus?

Problema quotitivo: O colégio da cidade realizará uma excursão para as Cataratas do Iguaçu levando 185 alunos. Os ônibus disponíveis têm 37 lugares cada um. Quantos ônibus deverão ser alugados?

Caraça (1951), define as operações adição, multiplicação e potenciação e afirma que tendo o resultado dessas operações e um dos dados é possível obter o outro dado. Assim, para o autor resolver este problema é encontrar a operação inversa dessas operações, respectivamente, a subtração, divisão e radiciação. Para a multiplicação "a inversão consiste em – dado o produto e um dos factores, determinar o outro. Deveria também haver duas inversas, mas que se fundem numa só – divisão

– em virtude da propriedade comutativa do produto" (CARAÇA, 1951, p. 20). Assim, $a : b = c \leftarrow b.c = a$, com $b \neq 0$.

Depois de chamar a de dividendo, b de divisor e c de quociente, define divisão da seguinte forma: "A divisão é, portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, cociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo" (CARAÇA, 1951, p. 22). E considerando que nem sempre o dividendo é múltiplo do divisor, define o resto r, com $r < b$. Assim, $a = b.c + r$, sendo, a o dividendo, b o divisor, c o quociente e r o resto.

Mas o que em Caraça (1951) é a definição de divisão, em outros materiais é definido como o algoritmo euclidiano ou da divisão euclidiana (HEFEZ, 2015; SILVA, 2014).

Segundo Hefez (2015), o algoritmo da divisão define-se de modo que na divisão de dois números naturais *b* dividido por *a*, existe um quociente *q* e um resto *r* que se pode escrever da seguinte forma: $b = a.q + r$, sendo *b* o dividendo e *a* o divisor.

De acordo com Silva (2014, p. 30) "[...] a divisão de dois números inteiros pode ser realizada, mesmo quando um destes números não é múltiplo do outro" por meio do uso do Algoritmo de Euclides, o qual é definido de acordo com Silva (2014) da seguinte forma: Dados $m \in Z^*$ (*m* é um número inteiro diferente de zero) e $n \in Z$. Existem dois únicos inteiros *q* e *r* tais que $n = m \,.\, q + r$, com $0 \leq r < m$.

De modo geral, o ensino das operações matemáticas e o ensino dos algoritmos tem sido tratado como se fossem a mesma coisa. Segundo Saiz (2001, p. 162) "[...] em geral, o ensino das operações matemáticas está baseado na comunicação de um procedimento de cálculo associado posteriormente a um pequeno universo de problemas que, supõe-se, 'darão conta' do significado de conceito". Dessa forma, pode-se considerar os algoritmos como sendo "procedimentos de cálculos", os quais muitas vezes acabam sendo confundidos com a própria operação, como se dividir se remetesse a operar um algoritmo. Mas o que é um algoritmo?

Vergnaud (2014) considera que

> [...] <u>um algoritmo é uma regra (ou uma conjunção de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, de conduzir à sua solução, se dele existe uma, ou, em caso de insucesso, de mostrar que não há uma solução</u> (VERGNAUD, 2014, p. 309, grifos do autor).

O autor admite que essa é uma definição ingênua e que um algoritmo é uma noção que os matemáticos inventaram o qual permite esclarecer elos entre o conhecimento e ação. Além disso, a regra que leva à solução é composta por etapas as quais precisam ser finitas, do contrário tal regra não seria um algoritmo.

É passível de se perguntar se todo problema necessita da utilização de um algoritmo para a sua resolução? Considerando tal como Saiz (2001) que o ensino das operações matemáticas está baseado no ensino de algoritmos, pode-se afirmar que o que há nas salas de aulas de matemática quase sempre é o ensino de procedimentos em detrimento ao ensino de ideias, do significado dos conceitos, do reconhecimento de situações de divisão, em que a aprendizagem de algoritmos elimina a busca pela compreensão.

De modo geral,

> [...] o ensino de conhecimentos tais como algoritmos, propriedades ou definições são facilmente organizáveis na sala de aula; são identificáveis, podem ser descritos e sua aquisição é verificável de maneira simples. Assim, para avaliar se os alunos "sabem dividir" é suficiente formular-lhes várias contas e verificar seus resultados (SAIZ, 2001, p. 162).

Nesse último trecho, Saiz apresenta o porquê pelo qual o ensino de divisão tem se dado por meio do ensino do algoritmo. E a resposta é porque é possível de ser avaliado. Assim não se ensina sobre as ideias de divisão, não se estabelece relação entre o que é a operação e o que significa cada elemento do algoritmo usualmente praticado. Fia-se que o ensino das operações, baseado na comunicação de um procedimento de cálculo e, associado à resolução de alguns poucos problemas, serão suficientes para dar conta do significado do conceito (SAIZ, 2001).

Nesta seção, buscou-se caracterizar o que é divisão e o que são os procedimentos relativos a ela, os algoritmos. Com a intenção de mostrar que os algoritmos são variados, apresenta-se a seguir um estudo sobre os algoritmos da divisão. E para finalizar a seção, discute-se como a divisão, o uso de algoritmos e a resolução de problemas são tratados nos documentos oficiais.

1.1 Desenvolvimento do algoritmo da divisão ao longo da história

Ao longo da história da humanidade diferentes povos contribuíram para o desenvolvimento da matemática. Segundo Boyer (1974), evidenciou-se a necessidade do saber matemático ao realizar divisões de terras, contagens do tempo, dos animais e do período entre uma lua e outra, o que influenciava nas plantações. Posteriormente, com sociedades mais organizadas os saberes matemáticos foram usados para cálculos no comércio, contabilizar impostos, construir moradias cada vez mais modernas e para o desenvolvimento da astronomia e das navegações marítimas.

Essas necessidades levaram à utilização de diversos modos de contar, que passaram de ranhuras em tábuas de argila e em ossos, pela utilização de dedos, de nós em cordas, até chegar a instrumentos como o ábaco (EVES, 2004). O desenvolvimento dos sistemas de numeração também contribuiu com a contagem e seu registro, possibilitando o surgimento dos algoritmos.

Segundo Ifrah (1998), o termo algoritmo surgiu da tradução latina do nome do "sábio matemático" Mohammed Ibn al-Khowarizmi. "Latinizado, o nome de al-Khowarizmi transformou-se, de fato, sucessivamente em *Alchoarismi*, depois em *Algorismi*, *Algorismus*, *Algorismo* e por fim *Algoritmo*" (IFRAH, 1998, p. 298).

Os hindus foram responsáveis pela criação de muitos algoritmos. Segundo Eves (2004, p. 254) "[...] esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde transportados para a Europa Ocidental, onde se modificaram até chegar à sua forma atual". Com a tradução de textos hindus na Europa, o uso do sistema de numeração indo-arábico foi sendo pouco a pouco utilizado e sua divulgação foi ganhando força com a publicação de textos conhecidos como *Aritméticas*.

> [...] com o advento da invenção da imprensa, foi publicada na Itália a primeira obra sobre aritmética, a *Aritmética de Treviso,* porém de autor desconhecido. A obra trata da aritmética comercial, que expõe conhecimentos relevantes ao exercício dos negócios, principalmente em Treviso e Veneza. Por ser escrita em dialeto usual, foi muito importante para eliminar o controle das classes dominantes em relação às transações comerciais da época (TYCHANOWICZ, 2017, p. 41).

Considerada o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental a *Aritmética de Treviso*, foi publicada em 1478 na cidade de Treviso.

> [...] Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os "algoritmos" iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas (EVES, 2004, p. 299).

A *Aritmética de Treviso* era usada nas escolas de cálculo, as quais atendiam jovens de 12 e 16 anos, filhos de funcionários públicos e mercadores. Esta obra contempla um estudo dos números hindus e também sobre as operações, dentre elas, a operação de divisão (TYCHANOWICZ, 2017).

Com a expansão do comércio europeu, o uso dos novos métodos de cálculo também se expandiu. Mesmo assim, segundo Lorensatti (2012), a utilização do ábaco ainda continuou por muitos séculos entre os comerciantes, financistas, banqueiros e funcionários europeus. Entre esses novos métodos de cálculo estão os algoritmos.

Desde as civilizações mais remotas até os tempos atuais, tem-se registros dos algoritmos. A medida em que o homem evoluía, frente aos novos saberes adquiridos, os algoritmos foram sendo transformados, objetivando atender de maneira mais eficiente e menos “trabalhosa” as necessidades de cada civilização.

Apresenta-se na sequência, alguns dos algoritmos da divisão utilizados ao longo da história em diversas partes do mundo, a saber: método da divisão no Egito, o método utilizado na Mesopotâmia, o método hindu e também, os utilizados em escolas brasileiras atualmente, sendo eles, algoritmo das subtrações sucessivas, algoritmo de estimativas, algoritmo da divisão usual pelo processo longo e também pelo processo curto.

1.1.1 Método da divisão no Egito

Uma das características do sistema de numeração egípcio era o caráter aditivo, dessa forma, as multiplicações e divisões eram realizadas por meio de duplicações sucessivas, ou seja, “[...] todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2” (EVES, 2004, p. 72). Para facilitar a compreensão de como o método funciona, tem-se primeiramente um exemplo de uma multiplicação e na sequência um de divisão.

Como exemplo de multiplicação, considere o produto de 26 por 33, ilustrado em (EVES, 2004, p. 72) “Como 26 = 16 + 8 + 2 basta somarmos os múltiplos correspondentes de 33”, como mostra a Tabela 1:

1	33
2	66

4	132
8	264
16	528

Tabela 1: Ilustração do processo de duplicações sucessivas para multiplicação.
Fonte: Adaptado do Eves (2004, p. 72).

Ao somar os múltiplos adequados de 33, ou seja, os valores indicados nas linhas em destaque, tem-se o valor 858 que corresponde à multiplicação de 26 por 33 (26 x 33).

Para dividir 563 por 15, primeiramente dobra-se sucessivamente o divisor 15 até que o próximo dobro ultrapasse o valor do dividendo 563. A Tabela 2 ilustra esse procedimento:

1	15
2	30
4	60
8	120
16	240
32	480
64	960

Tabela 2: Ilustração do processo de duplicações sucessivas para divisão.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Ao decompor o número 563, de acordo com os valores das duplicações apresentados na coluna da direita da tabela, tem-se:

563 = 480 + 83 (o 83 deve ser decomposto seguindo os valores da tabela)

563 = 480 + 60 + 23 (o 23 deve ser decomposto seguindo os valores da tabela)

563 = 480 + 60 + 15 + 8

Observando as linhas destacadas na tabela 2, tomando-se os números correspondentes ao 480, 60 e 15, que são 32, 4 e 1, verifica-se que a soma desses números 32 + 4 + 1 = 37 o qual é o quociente da divisão e que o resto é 8.

O modo como os egípcios realizavam divisão, realizando sucessivas duplicações do divisor "[...] não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois" (EVES, 2004, p. 73). Pode-se dizer que boa parte dos algoritmos de multiplicação e divisão usados atualmente utilizam-se de tabelas de multiplicação.

1.1.2 Método da divisão na Mesopotâmia

Durante centenas de anos, a região do Oriente Médio, onde atualmente estão localizados o Iraque, a Síria e a Turquia, era denominada Mesopotâmia. Essa região, localizada próxima aos rios Tigre e Eufrates, tornou-se referência na história por suas civilizações que apresentaram grandes avanços para a humanidade.

De acordo com Ifrah (1998), o registro mais antigo que se tem de uma prática de divisão feita pelos povos que viveram na Mesopotâmia foram encontrados durante escavações na antiga cidade de Shuruppak, atualmente denominada Fara, no Iraque. Esses povos registravam seus feitos em placas de barro mole com o auxílio de cunhas. Em seguida as placas eram cozidas em forno e secadas. Esses registros são denominados escrita cuneiforme.

O autor também descreve que as operações aritméticas dos mesopotâmicos eram feitas tendo como subsídios as tábuas, as quais eram de multiplicação, de quadrados e cubos e de inversos multiplicativos. Usando o sistema sexagesimal (base 60) por eles desenvolvido, os mesopotâmicos consultavam as tábuas buscando encontrar o inverso multiplicativo para assim poderem efetuar divisões.

Este procedimento é similar a maneira como se efetua a divisão de frações, quando se inverte a segunda fração e a multiplica pela primeira. Assim, para dividir um número por outro eles procuravam na tábua o recíproco do divisor e multiplicavam pelo dividendo[1]. O exemplo seguinte relata o modo como os mesopotâmicos realizavam a operação de divisão. Para $32 \div 4$.

Primeiro determina-se o inverso multiplicativo de 4, ou seja $1 \div 4$ que equivale a 0,25. Para a multiplicação eram usados os números sem acompanhar a vírgula, ou seja 25. Dessa forma, $32 \times 25 = 800$, agora considerando a casa decimal do 0,25, tem-se que a resposta é 8,00 ou simplesmente 8.

1.1.3 Métodos de divisão hindu utilizados na Europa

[1] Destaca-se aqui que as palavras divisor e dividendo não eram os termos utilizados na época. Optou-se em utilizá-los para melhor compreensão dos leitores sobre o procedimento.

Até o final da Idade Média, ainda prevaleciam o uso das tábuas multiplicativas e do ábaco para a realização das operações aritméticas. Nessa época, a instrução na Europa ainda era muito precária e pouco contato havia sido estabelecido com os árabes, os quais já compartilhavam do conhecimento dos hindus sobre o sistema de numeração e os algoritmos por eles utilizados para a realização das operações matemáticas, segundo Ifrah (1998).

Um dos grandes difusores das técnicas desenvolvidas pelos hindus e utilizadas pelos árabes para o desenvolvimento das operações aritméticas foi Gerbert d'Aurillac (946-1003), monge francês, que se tornou sacerdote e posteriormente papa da igreja católica, denominado "Silvestre II".

> [...] o único papa matemático, considerado um dos homens mais heruditos (*sic*) de seu tempo. Seu interesse pelos números era tão grande que foi até a Espanha, que era dominada pelos árabes muçulmanos, para aprender o novo sistema criado pelos hindus. Assim, o sistema hindu chegava à Europa (TYCHANOWICZ, 2017, p. 37).

Segundo Albuquerque, Pereira e Alves (2018, s/p) "[...] o ábaco de Gerbert foi construído com base em uma tábua ou prancha com marcações em colunas, nas quais representavam-se agrupamentos de elementos em potências de base 10". Tais agrupamentos eram representados por meio de fichas, as quais eram confeccionadas com os materiais disponíveis na época, como por exemplo metais, pedras e chifres de boi.

> A grande contribuição de Gerbert foi de, no lugar de colocar traços ou marcas, tantas quantas fossem necessárias, em cada coluna, construir fichas de chifre de boi e nelas marcar a numeração hindu-arábica que trouxera da Espanha. Assim, numa coluna onde deveria haver, por exemplo, nove traços, colocavam uma só ficha com a representação do número nove (FERREIRA, 2008, p.46).

Surgia assim o método Gerbert para a realização da operação de divisão com o auxílio do ábaco. Este método está ilustrado por meio do exemplo apresentado por Albuquerque, Pereira e Alves (2018), no qual é realizada a divisão 345 dividido por 3, como mostra a Figura 1:

$\bar{C}$	$\bar{D}$	$\bar{I}$	C	X	I	Observações (espaço adaptado para melhor compreensão do leitor)
						Divisor
			3	4	5	Dividendo
			1			Resultado da divisão de 3 por 3
				1		Resultado da divisão de 4 por 4, obtendo uma dezena de resto que será agrupada nas unidades.
					5	Divisão de 15 unidades por 3.
			1	1	5	Denominação: 3 x 100 + 3 x 10 + 3 x 5 = 345
			1		5	Soma das denominações ou resultados.

Figura 1: Exemplo de como utilizar o método Gerbert para a realização de divisões.
Fonte: Albuquerque, Pereira e Alves (2018, s/p).

Também foi atribuído a Gerbert a criação de um algoritmo com o qual era possível efetuar as divisões sem o uso do ábaco. A Figura 2 ilustra o desenvolvimento deste algoritmo por meio da divisão de 900 por 8:

$$
\begin{array}{l}
10 - 2)\,900\,(90 + 18 + 3 + 1 + \tfrac{1}{2} = 112\tfrac{1}{2} \\
\qquad \underline{900 - 180} \\
\qquad\qquad 180 \\
\qquad\qquad \underline{180 - 36} \\
\qquad\qquad\qquad 36 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{30 - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 6 + 6 = 12 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{10 - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2 + 2 = 4,\ \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Figura 2: Ilustração do algoritmo Gerbert para divisões fora do ábaco.
Fonte: Smith (1925, p. 134).

Apesar de uma ilustração própria, pode-se dizer que esse algoritmo se aproxima do método da divisão por estimativas, praticado atualmente.

Por volta do século XII Baskara II (1115-1185), matemático hindu, escreveu a obra *Siromani Siddhanta*. A obra continha um tratado sobre Aritmética denominado *Lilavati*, o qual foi escrito em versos poéticos (TYCHANOWICZ, 2017). Nela encontra-se descrito o procedimento para realizar a divisão de 1620 por 12 em forma de prosa:

> [...] esse número, pelo qual o divisor a ser multiplicado iguala-se ao último dígito do dividendo (e assim por diante) é o quociente da divisão, ou se possível, o primeiro a resumir tanto o divisor quanto o dividendo a um número comum, ao proceder-se à divisão (NOGUEIRA, 2015, s/p *apud* TYCHANOWICZ, 2017, p. 40).

Ainda segundo Nogueira (2015), o *Lilavati* descreve também outro procedimento para realizar divisões, o qual, posteriormente, foi apresentado por Fibonacci (1170-1250) intitulado *per repiego*, no qual operava-se o dividendo pelos fatores do divisor.

> [...] Leonardo de Pisa, conhecido por Fibonacci, apresentou em 1202 um tratado sobre aritmética, o qual se chamava *"Liber abaci".* Filho de um mercador, Fibonacci teve a oportunidade de estudar com um professor muçulmano para conhecer os procedimentos de cálculo hindus e, assim, pode contribuir para o início da popularização do cálculo escrito sem o uso do ábaco (TYCHANOWICZ, 2017, p.40).

O método *per repiego*, será exemplificado por meio da divisão entre 2835 por 21. Divide-se o divisor 2835 pelos fatores de 21, ou seja, por 3 e por 7. Deste modo, primeiramente divide-se 2835 por 3 encontrando o resto 945 e na sequência, 945 por 7, obtendo assim o valor 135, que é o quociente da divisão.

Os hindus foram um dos povos que mais contribuíram para o desenvolvimento do sistema de numeração utilizado em praticamente todas as nações e, consequentemente, das operações aritméticas. Suas criações foram sendo aprimoradas ao longo dos séculos até chegarmos aos métodos utilizados na atualidade.

Também foi utilizado o Método do Galeão, conhecido como *método da galera* ou *método das riscas*. Para Eves (2004), certamente tratava-se de um método desenvolvido pelos povos hindus e que fora o mais usado antes de 1600. A fim de melhor exemplificar o método Galeão, segue-se o exemplo apresentado por Eves (2004, p. 324) para a divisão de 9413 por 37 como mostra o Quadro 1.

1) Escreva o divisor 37, abaixo do dividendo. Obtenha de maneira habitual o primeiro algarismo do quociente, no caso o 2 e escreva-o à direita do dividendo.	9413 | 2 37
2) Calcule mentalmente 2 x 3 = 6 e 9 – 6 = 3. Risque o 9 e o 3 e escreva 3 acima do 9. Calcule mentalmente 2 x 7 = 14 e 34 – 14 = 20. Risque 7, 3 e 4 e escreva 2 acima do 3 e 0 acima do 4.	2 ~~30~~ ~~94~~13 | 2 ~~37~~
3) Escreva o divisor 37 uma casa à direita e diagonalmente. O dividendo resultante após o passo 2 é 2013. Obtenha o	1 ~~25~~

próximo algarismo do quociente, 5. Calcule mentalmente 5 x 3 = 15 e 20 – 15 = 5. Risque 3, 2 e 0 e escreva 5 acima do 0. Calcule mentalmente 5 x 7 = 35 e 51 – 35 = 16. Risque 7, 5 e 1 e escreva 1 acima do 5 e 6 acima do 1.	~~30~~6 ~~941~~3 | 25 ~~377~~ ~~3~~
4) Novamente, escreva o divisor 37 uma casa à direita e diagonalmente. O dividendo resultante após o passo 3 é 163. Obtenha o próximo algarismo do quociente, 4. Calcule mentalmente 4 x 3 = 12 e 16 – 12 = 4. Risque 3, 1 e 6 e escreva 4 acima do 6. Calcule mentalmente 4 x 7 = 28 e 43 – 28 = 15. Risque 7, 4 e 3 e escreva 1 acima do 4 e 5 acima do 3.	~~1~~1 ~~254~~ ~~306~~5 ~~9413~~ | 254 — 1 ~~3777~~ 5 ~~33~~
5) Logo o quociente é 254 e o resto é 15.	

Quadro 1: Desenvolvimento do método Galeão.
Fonte: Adaptado de Eves (2004, p. 324).

Segundo Eves (2004),

> [...] o nome *galera* refere-se a uma embarcação com cuja forma achava-se que o aspecto final do processo se parecia. Com efeito, olhando-se o trabalho a partir do fundo da página o quociente se parece com um gurupés, e olhando a partir do lado esquerdo ele se parece com um mastro (EVES, 2004, p. 324).

A Figura 3 ilustra o método e a forma de embarcação mencionada:

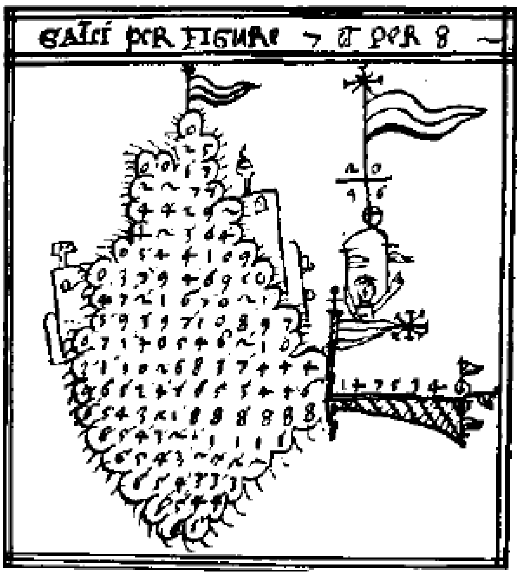


Figura 3: Ilustração do método Galeão.
Fonte: Boyer (1974, p. 159).

Ainda segundo Eves (2004), após adquirir prática em utilizar o método, ele se torna mais simples do que representa ser à primeira vista e se moldava ao ábaco de areia utilizado na época, em que o processo de riscar consiste em apagar ou substituir os números pelos convenientes.

1.1.4 Algoritmo da divisão – processo curto e longo

Os métodos da divisão denominados processo curto e processo longo, utilizados nas escolas brasileiras atualmente podem ser encontrados em livros de meados de 1800, como por exemplo na obra de Thomas Palmer intitulada *Arithmetic, oral and written, practically applied,* que foi publicada nos Estados Unidos da América em 1854, citada em Tychanowicz (2017).

Essa obra

> [...] expõe um manual para professores que se divide em duas partes. A primeira, *Oral Arithmetic,* apresenta lições pequenas, consideradas muito simples e que deveriam ser repetidas pelos alunos até que decorassem. A segunda parte, intitulada *Written Arithmetics*, consistia numa pergunta que, ora era respondida pelo aluno, ora trazia a resposta. O próprio nome do livro, *Arithmetic, oral and written*, indica que uma parte das lições ali expostas é dedicada ao treino oral, isto é, devem ser decoradas (TYCHANOWICZ, 2017, p. 48).

Nela apresenta-se processos tratando das quatro operações. A seção IV é contemplada exclusivamente pela operação de divisão, apresentando os processos em dois tipos: i) quando o divisor não excede o 12 (empregando o processo chamado curto) e ii) quando o divisor exceder o 12 (empregando o processo chamado longo).

A Figura 4 ilustra a divisão de 63543 por 4 usando-se o processo curto apresentado no livro *Arithmetic, oral and written, practically applied*.

Short Division ; that is, where the divisor does not exceed 12.

4. Divide 63543 by 4.

Divisor, 4)63543 Dividend.
Quotient, 15885 " 3 undivided remainder.
Divisor, 4

Proof, 63543

Figura 4: Ilustração do método da divisão - processo curto.
Fonte: Palmer (1854, p.168).

Quando o divisor fosse maior que 12, era então empregado o processo longo para a realização da divisão, para o qual é apresentado três métodos. A Figura 5 ilustra o método *a:*

a. The Long Method.

Dividend,	64235	(24 Divisor.
1st partial product,	48000	2000
		600 Partial Quotients.
1st remainder,	16235	70
2d partial product,	14400	6
2d remainder,	1835	$2676\frac{11}{24}$ Total Quotient.
3d partial product,	1680	24 Divisor.
3d remainder,	155	64235 Proof 1, viz. divisor × quot. [+remainder.
4th partial product,	144	
Undivided rem'r,	11	
Proof 2,	64235	Sum of products and last remainder.

Figura 5: Ilustração do processo longo, método *a*.
Fonte: Palmer (1854, p. 169).

A Figura 6 ilustra o método *b*, o qual omite algumas partes consideradas "desnecessárias" do procedimento:

b. Contracted Method, by omitting unnecessary ciphers.

Dividend,	64235	(24 Divisor.
1st partial product,	48	$2676\frac{11}{24}$ Quotient.
1st remainder,	162	64235 Proof 1, viz., divisor × quo- [tient + remainder.
2d partial product,	144	
2d remainder,	183	
3d partial product,	168	
3d remainder,	155	
4th partial product,	144	
Undivided remainder,	11	
Proof 2,	64235	Sum of products and last remainder.

15

Figura 6: Ilustração do processo longo, método b.
Fonte: Palmer (1854, p. 169).

A Figura 7 ilustra o método *c*, o qual omite algumas partes consideradas “desnecessárias” do procedimento.

c. Abridged Method, by performing the Subtraction mentally.

	Dividend,	64235(24 Divisor.
Partial dividends formed of remainders and one figure from general dividend,	162	2676$\frac{11}{24}$ Quotient.
	183	
	155	64235 Proof.
	11 undivided remainder.	

Figura 7: Ilustração do processo longo, método c.
Fonte: Palmer (1854, p. 170).

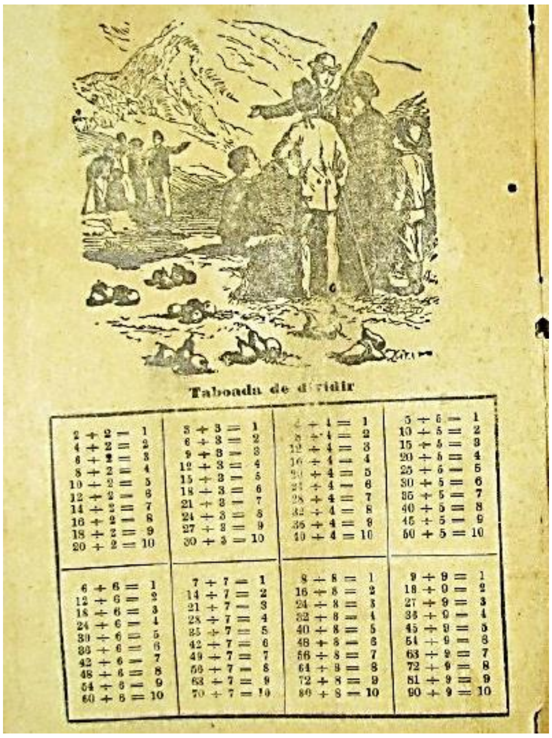
Ao final da seção sobre divisão de inteiros, o autor apresenta um exemplo de como usar uma tabela de multiplicações em que um fator é o divisor, mas indica ao final do texto que “[...] ajudas desse tipo devem ser usadas raramente” (TYCHANOWICZ, 2017, p. 50).

No Brasil, em 1879 houve a publicação da primeira edição[2] da obra intitulada Aritmética Elementar Ilustrada escrita por Antonio Trajano, destinada ao ensino primário brasileiro, considerada pela forma como foi escrita um dos primeiros livros didáticos do Brasil (TYCHANOWICZ, 2017).

Esta obra apresenta uma seção denominada “Operações Fundamentais”, segundo Trajano (s/a, p. 33, grifos do autor) “as operações fundamentais da Arithmetica são quatro, que se denominam **Sommar**, **Diminuir**, **Multiplicar** e **Dividir**. Chamam-se fundamentais, porque servem de base para effectuar todas as outras operações dos cálculos”.

O capítulo que contempla o ensino da operação de divisão inicia-se com uma figura seguida de uma tabuada contendo as multiplicações do número 1 ao 9, como mostra a Figura 8.

[2] Nesse trabalho é utilizada a 76ª edição, a qual não é datada.

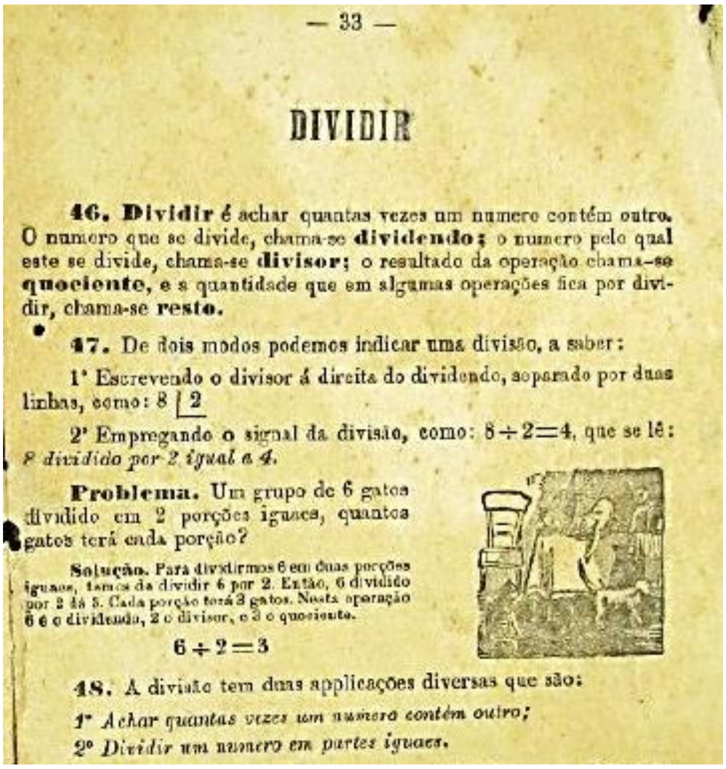


Taboada de dividir

2 ÷ 2 = 1	3 ÷ 3 = 1	4 ÷ 4 = 1	5 ÷ 5 = 1
4 ÷ 2 = 2	6 ÷ 3 = 2	8 ÷ 4 = 2	10 ÷ 5 = 2
6 ÷ 2 = 3	9 ÷ 3 = 3	12 ÷ 4 = 3	15 ÷ 5 = 3
8 ÷ 2 = 4	12 ÷ 3 = 4	16 ÷ 4 = 4	20 ÷ 5 = 4
10 ÷ 2 = 5	15 ÷ 3 = 5	20 ÷ 4 = 5	25 ÷ 5 = 5
12 ÷ 2 = 6	18 ÷ 3 = 6	24 ÷ 4 = 6	30 ÷ 5 = 6
14 ÷ 2 = 7	21 ÷ 3 = 7	28 ÷ 4 = 7	35 ÷ 5 = 7
16 ÷ 2 = 8	24 ÷ 3 = 8	32 ÷ 4 = 8	40 ÷ 5 = 8
18 ÷ 2 = 9	27 ÷ 3 = 9	36 ÷ 4 = 9	45 ÷ 5 = 9
20 ÷ 2 = 10	30 ÷ 3 = 10	40 ÷ 4 = 10	50 ÷ 5 = 10
6 ÷ 6 = 1	7 ÷ 7 = 1	8 ÷ 8 = 1	9 ÷ 9 = 1
12 ÷ 6 = 2	14 ÷ 7 = 2	16 ÷ 8 = 2	18 ÷ 9 = 2
18 ÷ 6 = 3	21 ÷ 7 = 3	24 ÷ 8 = 3	27 ÷ 9 = 3
24 ÷ 6 = 4	28 ÷ 7 = 4	32 ÷ 8 = 4	36 ÷ 9 = 4
30 ÷ 6 = 5	35 ÷ 7 = 5	40 ÷ 8 = 5	45 ÷ 9 = 5
36 ÷ 6 = 6	42 ÷ 7 = 6	48 ÷ 8 = 6	54 ÷ 9 = 6
42 ÷ 6 = 7	49 ÷ 7 = 7	56 ÷ 8 = 7	63 ÷ 9 = 7
48 ÷ 6 = 8	56 ÷ 7 = 8	64 ÷ 8 = 8	72 ÷ 9 = 8
54 ÷ 6 = 9	63 ÷ 7 = 9	72 ÷ 8 = 9	81 ÷ 9 = 9
60 ÷ 6 = 10	70 ÷ 7 = 10	80 ÷ 8 = 10	90 ÷ 9 = 10

Figura 8: Ilustração da página de abertura do capítulo sobre divisão.
Fonte: Trajano (s/a, p. 32).

Na sequência apresenta a definição de divisão e alguns exemplos de como aplicá-la. Como mostra a Figura 9 a seguir.



— 33 —

DIVIDIR

46. **Dividir** é achar quantas vezes um numero contém outro. O numero que se divide, chama-se **dividendo**; o numero pelo qual este se divide, chama-se **divisor**; o resultado da operação chama-se **quociente**, e a quantidade que em algumas operações fica por dividir, chama-se **resto**.

47. De dois modos podemos indicar uma divisão, a saber:

1º Escrevendo o divisor á direita do dividendo, separado por duas linhas, como: 8 |2

2º Empregando o signal da divisão, como: 8 ÷ 2 = 4, que se lê: *8 dividido por 2 igual a 4.*

Problema. Um grupo de 6 gatos dividido em 2 porções iguaes, quantos gatos terá cada porção?

Solução. Para dividirmos 6 em duas porções iguaes, temos de dividir 6 por 2. Então, 6 dividido por 2 dá 3. Cada porção terá 3 gatos. Nesta operação 6 é o dividendo, 2 o divisor, e 3 o quociente.

6 ÷ 2 = 3

48. A divisão tem duas applicações diversas que são:

1º *Achar quantas vezes um numero contém outro;*

2º *Dividir um numero em partes iguaes.*

Figura 9: Ilustração da página contendo a definição sobre divisão.
Fonte: Trajano (s/a, p. 33).

Na Figura 9, percebe-se o uso de dois símbolos para representar a operação de divisão, são eles: i) duas linhas formando um ângulo de 90º graus que se denomina “chave” e ii) o símbolo usado atualmente (÷). Apresenta, também, como a divisão era considerada: “A divisão tem duas aplicações diversas que são: 1ª - Achar quantas vezes um número contém outro; 2ª Dividir um número em partes iguaes” (TRAJANO, s/a, p. 33), ao que se associa atualmente às ideias de cotição e de partição, respectivamente.

Nas páginas seguintes, o livro traz exemplos do uso do algoritmo da divisão. Nota-se que o “método breve” era usado em operações cujo divisor é um número de apenas um algarismo, já o “método longo” era utilizado para divisões com divisores de dois ou mais algarismos como ilustra a Figura 10.

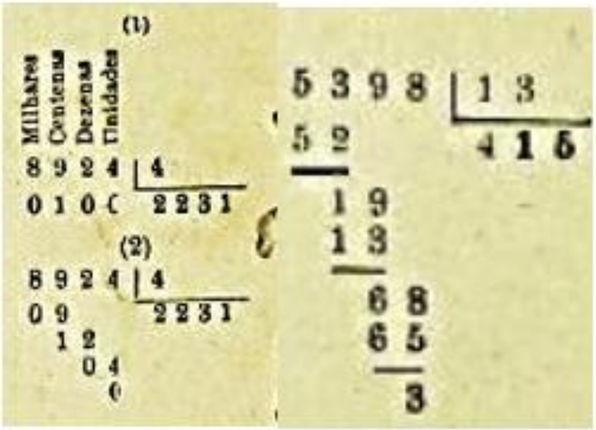
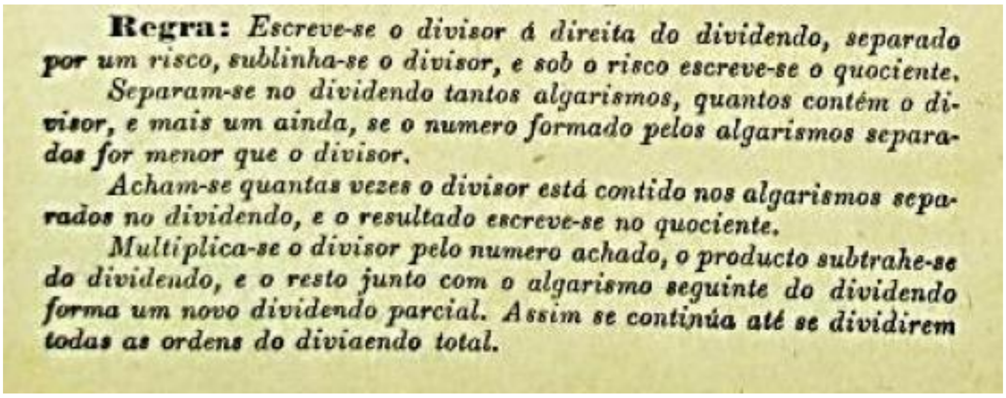


Figura 10: Ilustração dos processos curto e longo.
Fonte: Trajano (s/a, p. 34 e 36).

Depois dos exemplos o autor apresenta uma “regra” de como deve ser montada e resolvida uma operação de divisão com o passo-a-passo de como utilizar o algoritmo, como mostra a Figura 11.



Regra: *Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separado por um risco, sublinha-se o divisor, e sob o risco escreve-se o quociente.*

Separam-se no dividendo tantos algarismos, quantos contém o divisor, e mais um ainda, se o numero formado pelos algarismos separados for menor que o divisor.

Acham-se quantas vezes o divisor está contido nos algarismos separados no dividendo, e o resultado escreve-se no quociente.

Multiplica-se o divisor pelo numero achado, o producto subtrahe-se do dividendo, e o resto junto com o algarismo seguinte do dividendo forma um novo dividendo parcial. Assim se continúa até se dividirem todas as ordens do dividendo total.

Figura 11: Ilustração da regra de como utilizar o algoritmo da divisão.
Fonte: Trajano (s/a, p. 36).

Atualmente essas regras ficam nas comunicações orais dos professores ao ensinarem o uso dos algoritmos e quase nunca registrados nos livros didáticos.

Esses recortes mostram fragmentos de como ocorreu o desenvolvimento das operações aritméticas e dos algoritmos, mais precisamente relacionados à operação de divisão ao longo da história.

1.2 Algoritmos da divisão utilizados atualmente

O panorama apresentado na sessão anterior sobre os processos algorítmicos utilizados em outros tempos, revelam que alguns desses processos ou parte deles ainda permanecessem nas características dos algoritmos utilizados na atualidade.

Na seção seguinte apresenta-se os algoritmos utilizados atualmente nas escolas brasileiras, os quais são rotineiramente descritos em livros didáticos e pesquisas acadêmicas.

1.2.1 Algoritmo das subtrações sucessivas

Este método consiste em retirar repetidas parcelas de mesmo valor (esse valor refere-se ao divisor) do dividendo até que o resto seja zero ou um número menor que o divisor.

A Figura 12 a seguir, ilustra o desenvolvimento do processo do algoritmo das subtrações sucessivas, pelo qual se efetua a divisão de 48 por 6.

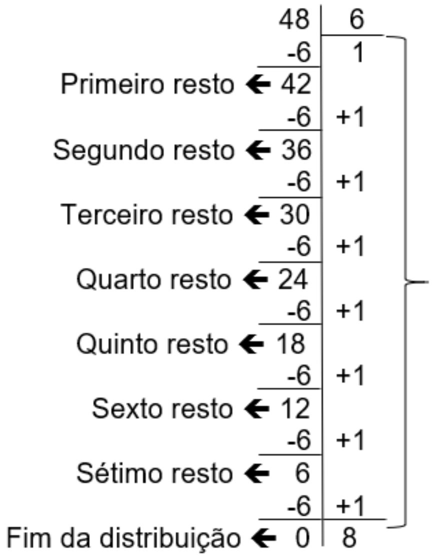


Figura 12: Ilustração do desenvolvimento do método das subtrações sucessivas.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Segundo Centurión (1994, p.194) “[...] ao iniciar o aprendizado do algoritmo da divisão pelo processo das subtrações sucessivas, a tendência da criança é ir colocando um, depois mais um, mais um, etc. Com o tempo a pergunta que se deve fazer é “Cabem dez?”, “E cem?”, “E mil?””.

A medida em que a criança vai se habituando a usar este método, ela conseguirá resolver os problemas com mais rapidez e ao mesmo tempo estará desenvolvendo o raciocínio lógico, facilitando a obtenção do resultado final ou aproximado mentalmente. Esse procedimento se aproxima do método das estimativas destacado a seguir.

1.2.2 Algoritmo de estimativas

Este processo para a resolução de divisões também é conhecido como método americano, “[...] consiste em descobrir quantas vezes o divisor cabe no dividendo fazendo estimativas” (DANTE, 2009, p. 58).

No início desse capítulo, foi tratado das ideias de divisão, entre elas a de medida. “O entendimento da divisão através da ideia de medida é essencial à compreensão do algoritmo americano, que consiste em sucessivas estimativas” (CARDOSO, 2005, p. 33).

Por exemplo, para efetuar a divisão de 636 por 12, usando o algoritmo de estimativas, é preciso descobrir quantas vezes o 12 **cabe** no 636. Veja na Figura 13 a seguir o desenvolvimento do processo.

636	12
- 240	20
396	20
- 240	10
156	+ 3
- 120	53
36	
- 36	
0	

Figura 13: Ilustração do desenvolvimento do método das estimativas.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Descrição dos passos do algoritmo de estimativas segundo Dante (2009):

Passo 1: Dispor os números 636 e 12 na forma de coluna.

Passo 2: Estima-se 20 vezes e faz-se 20 x 12 = 240 e 636 – 240 = 396.

Passo 3: Estima-se 20 vezes e faz-se 20 x 12 = 240 e 396 – 240 = 156.

Passo 4: Estima-se 10 vezes e faz-se 10 x 12 = 120 e 156 – 120 = 36.

Passo 5: estima-se 3 vezes e faz-se 3 x 12 = 36 e 36 – 36 = 0.

Passo 6: Soma-se os valores estimados 20 + 20 + 10 + 3 = 53.

Logo o 12 cabe 53 vezes em 636 e o resto é zero.

Os valores usados para as estimativas poderiam ser diferentes, mas realizando os cálculos corretamente, o resultado será o mesmo.

1.2.3 Algoritmo da divisão usual – processo longo e curto

Na sequência estão dois exemplos de como o processo longo e o processo curto são apresentados nos livros didáticos e ensinado nas escolas atualmente.

Exemplo 1: Algoritmo da divisão pelo processo longo. Este processo caracteriza-se pela apresentação dos cálculos que estão sendo realizados. Cada vez que se multiplica um número do quociente pelo divisor tem-se um valor correspondente que deverá ser subtraído do dividendo, seguindo a ordem da esquerda para a direita.

Considere a seguinte situação: dividir 1485 livros igualmente em 9 prateleiras. Usando o algoritmo usual, encontra-se o quociente da divisão 1485 ÷ 9 como mostra a Figura 14:

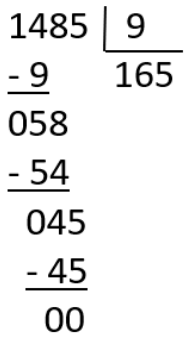


Figura 14: Ilustração do método da divisão usual - processo longo.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Descrição dos passos:

Passo 1: 1 unidade de milhar dividida em 9 partes não pode dar 1000 (ou unidade de milhar) para o quociente, deve-se então transformá-la em centenas;

Passo 2: 14 centenas divididas por 9 é igual a 1 centena e sobraram 5 centenas no resto, as quais são transformadas em dezenas;

Então 50 dezenas mais as 8 dezenas já existentes totalizam 58 dezenas;

Passo 3: 58 dezenas divididas por 9 é igual a 6 dezenas e sobram 4 dezenas no resto, as quais transformam-se em unidades;

Então as 40 unidades mais as 5 unidades, totalizam 45 unidades;

Passo 4: 45 unidades divididas por 9 é igual a 5 unidades, sobrando resto 0.

Logo tem-se que 1485 dividido por 9 é igual a 165.

Exemplo 2: Algoritmo da divisão pelo processo curto. Este processo caracteriza-se pela ocultação dos cálculos que estão sendo realizados. Cada vez que se multiplica um número do quociente pelo divisor tem-se um valor correspondente que deverá ser subtraído do dividendo mentalmente, apresentando apenas o resto de cada subtração, seguindo a ordem da esquerda para a direita, como se vê na Figura 15.

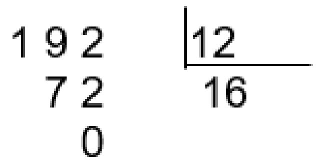


Figura 15:Ilustração do método da divisão usual - processo curto.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Descrição dos passos:

Passo 1: 1 centena dividida em 12 partes não pode dar uma centena para o quociente, deve-se então transformá-la em dezenas;

Passo 2: 19 centenas dividida por 12 é igual a 1 dezena e sobraram 7 dezenas no resto, as quais devem ser transformadas em unidades;

Tem-se então 70 unidades, mais as 2 unidades já existentes, totalizando 72 unidades;

Passo 3: 72 unidades divididas por 12 é igual a 6 unidades, sobrando resto 0.

Logo tem-se que 192 ÷ 12 = 16.

Pelo exposto, percebe-se que os métodos utilizados para o cálculo da divisão aritmética conhecidos como algoritmo da divisão processo curto e longo, apesar de serem ensinados nas aulas de matemática atualmente, já são usados no Brasil há mais de um século para a resolução de divisões aritméticas.

1.3 A compreensão de divisão nos documentos oficiais

Ao se tratar sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, é importante buscar respaldo nos documentos oficiais que os regulam. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> [...] o ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita freqüência (sic) em relação à sua aprendizagem (BRASIL, 1997, p. 15).

Nesse documento, e em outros, se defende que a Matemática tem muitas aplicações no mundo do trabalho, servindo de instrumento para outras áreas de conhecimento e possibilitando resolver problemas da vida cotidiana.

Ainda segundo o PCN (1997, p. 19), “[...] a atividade matemática escolar não é ‘olhar para coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”. Assim, “[...] interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno” (BRASIL, 1997, p. 15).

Dentre os objetivos do ensino da Matemática no Ensino Fundamental destacam-se:

> - resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> - comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas; (BRASIL, 1997, p. 37).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo aprovado em 2017, organiza os conhecimentos matemáticos em cinco unidades temáticas, sendo elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental.

Na unidade temática Números, na qual a operação de divisão está inserida como conteúdo de ensino, com relação aos anos iniciais do Ensino Fundamental, tem-se como expectativa que

> [...] os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p. 268).

Em relação aos anos finais do Ensino Fundamental espera-se que os alunos “[...] resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos” (BRASIL, 2017, p. 269).

Particularmente no que se refere ao 5º ano do Ensino Fundamental I, a BNCC apresenta que o aluno nesta faixa de escolaridade deve ter como habilidade "[...] resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero)" (BRASIL, 2017, p. 295). E também "[...] resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar" (BRASIL, 2017, p. 295). Para isso, deve utilizar estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Em relação ao 9º ano do Ensino Fundamental, as habilidades dos alunos desta faixa etária devem ser "[...] resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações" (BRASIL, 2017, p. 317).

Entre os documentos oficiais do estado do Paraná que regem a Educação Básica, tem-se o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações. Este documento, adotado como "referencial curricular único" tem como objetivo "[...] estabelecer direitos de aprendizagens a todos os estudantes do estado em uma perspectiva de equidade, ou seja, de garantir as condições necessárias para que essas aprendizagens se efetivem" (PARANÁ, 2018, p. 5).

Este documento traz as orientações a serem seguidas pelos professores de escolas públicas e privadas, do 1º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental. Para a organização curricular no ensino da disciplina de Matemática, o documento o divide em quatro unidades temáticas, sendo elas, i) números e álgebra; ii) Geometrias; iii) Grandezas e Medidas e iv) tratamento da informação.

Considerando-se a unidade temática denominada números e álgebra, que abrange o tema desta pesquisa, no 5º ano do Ensino Fundamental, além das habilidades apresentadas pela BNCC, em relação à operação de divisão o aluno deve:

> - Construir estratégias pessoais de cálculo, com registro, para resolver problemas envolvendo multiplicação (por um ou mais fatores) e divisão com um ou mais algarismos no divisor.
> - Conhecer diferentes algoritmos para realizar operações de divisão (processo por subtrações sucessivas, por estimativa e processo longo) para que possa escolher o método que julgar mais favorável.
> - Resolver operação de multiplicação (envolvendo um número racional por um multiplicador natural) e divisão (envolvendo um número racional com divisor natural e diferente de zero) de modo contextualizado.
> - Elaborar e resolver problemas envolvendo mais do que uma operação (números naturais e racionais), incluindo multiplicação e divisão.

> • Resolver problemas de caráter investigativo (envolvendo multiplicações e divisões), criando estratégias diferenciadas e registros das respostas e processos desenvolvidos (PARANÁ, 2018, p. 852).

Para o 9º ano do Ensino Fundamental, o Referencial Curricular do Paraná, apresenta apenas as habilidades já tratadas na BNCC.

Assim, as descrições dos documentos supracitados mostram que, entre as habilidades esperadas para os alunos do Ensino Fundamental I e II com relação à operação de divisão, destacam-se a elaboração de enunciados de problemas de divisão, o uso de mais que uma operação na elaboração dos enunciados e a resolução de problemas utilizando procedimentos, estratégias e algoritmos variados.

Buscou-se nesse trabalho identificar como os alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental elaboram enunciados de problemas de divisão e como os resolvem.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresenta-se as principais ideias do referencial teórico e metodológico utilizado nesta pesquisa, com discussão sobre definições e conceitos que os compõem. Sendo eles: a elaboração e resolução de problemas matemáticos, a análise da produção escrita em matemática e o campo conceitual multiplicativo.

2.1 A elaboração e resolução de problemas matemáticos

A resolução de problemas tem se mostrado bem aceita na área de ensino de conteúdos matemáticos e, também no desenvolvimento de pesquisas acadêmicas, seja como metodologia de ensino que busca a construção de conceitos ou simplesmente como ferramenta para aplicação de teorias. Autores como Andrade (1998); Onuchic (1999); Alevatto, Onuchic (2009); Onuchic, Alevatto (2011) dentre outros, destacam que o uso da resolução de problemas nas aulas de Matemática pode potencializar os processos de ensino e aprendizagem de modo a fortalecer a construção de conceitos matemáticos pelos estudantes.

Para Onuchic e Alevatto (2011)

> [...] a razão mais importante para esse tipo de ensino-aprendizagem é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática [...]e de que o ensino pode ser feito por meio da resolução de problemas (ONUCHIC; ALEVATTO, 2011, p. 80).

Se sobre resolução de problemas há uma literatura variada, já sobre a elaboração de enunciados de problemas matemáticos pelos alunos, encontrou-se pouco material na literatura, uma vez que não tem sido uma prática utilizada pelos professores em sala de aula. Assim, tem-se pouco respaldo na literatura, apesar de se considerar como uma importante forma de ensino e aprendizagem.

Para Dante (2010, p. 18 - 22) a elaboração e resolução de problemas tem como objetivos:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;

- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas;
- Liberar a criatividade do aluno.

Dentre os objetivos apresentados, considera-se pertinente destacar a "criatividade do aluno", uma vez que, no ensino de Matemática, uma forma para que a criatividade ocorra nas aulas de Matemática é por meio da elaboração e resolução de problemas. Estas práticas isoladas não garantem o desenvolvimento da criatividade, mas tendem a aumentar consideravelmente a possibilidade de que ela se manifeste.

Assim,

> [...] parece bastante razoável trabalhar com a formulação e resolução de problemas a fim de fazer emergir e desenvolver características criativas nas crianças. É claro que não há uma maneira de ensinar as crianças "como devem pensar" produtivamente diante de um problema. O mais importante é oferecer a elas "oportunidade para pensar" e discutir as várias maneiras empregadas nesse processo" (DANTE, 2010, p. 23).

Segundo Jurado (2015, p. 240, tradução nossa) a elaboração de problemas oferece oportunidades para revisar e melhorar aspectos como redação e ortografia. Logo, "[...] nós professores podem contribuir muito para o desenvolvimento das potencialidades criativas de nossos alunos, se desde as primeiras séries da educação inicial e primária os estimularmos a criar problemas, a refletir sobre eles e a resolvê-los".

Por outro lado, tem-se na literatura uma diversidade de pesquisas desenvolvidas sobre a definição e os tipos de problema, como Krulik e Rudnick (1980); Butts (1997); Ponte, Brocardo e Oliveira (2006); Lorensatti (2009); Dante (2010); Onuchic e Alevatto (2011); Ponte *et al.* (2015).

Onuchic e Alevatto (2011, p. 81, grifos das autoras) definem um problema como sendo "[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer", para o qual ainda não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 23) “[...] um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido”.

Krulik e Rudnick (1980) consideram que, um problema é uma situação, quantitativa ou não, que enfrenta um indivíduo ou grupo de indivíduos, que exige resolução e para o qual não há caminho conhecido para a resposta. Para estes autores, existem três tipos de problemas: como uma pergunta, que é uma situação que pode ser resolvida apelando-se para a memória; como um exercício, uma situação que envolve exercício e prática para reforçar as habilidades ou algoritmos previamente aprendidos e um problema reconhecido como uma situação, que requer uma reflexão e síntese do conhecimento prévio para resolver.

Dante (2010) define que *situação-problema* ou problema-processo “[...] é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução”. Para ele, “[...] *exercício* como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas” (DANTE, 2010, p. 48, grifos do autor).

De acordo com Lorensatti (2009, p. 94) “[...] o exercício é entendido como um mecanismo utilizado para soluções rotineiras de uma situação, em que há repetições de procedimentos e estratégias já consolidadas; é muito utilizado para praticar algoritmos”.

Ponte *et al.* (2015), denominam problemas e exercícios como sendo “tarefas”. Para eles

> [...] as tarefas podem ser apresentadas com diferentes propósitos, por exemplo, para promover a aprendizagem dos alunos, para os levar a aplicar conhecimentos que eles já adquiriram, ou para avaliar se eles dominam ou não certos conhecimentos. [...] para um aluno, uma tarefa pode ser um problema ou um exercício conforme aquilo que ele já sabe. Deste modo, tanto um problema como um exercício podem remeter para um contexto ou uma “história” supostamente da realidade [...] ou remeter para um contexto puramente matemático [...]. O que distingue exercício de problema é essencialmente o facto de o aluno dispor ou não de um método de resolução imediato (PONTE *et al.*, 2015, p. 119).

É importante ressaltar a distinção entre problema e exercício, de modo que "[...] se uma situação não proporciona desafios, ela deixa de ser um problema e servirá para exercitar habilidades já adquiridas" (LORENSATTI, 2009, p. 94).

Dessa forma, tem-se que

> [...] o que é problema para um indivíduo pode ser um exercício para o outro. Se a tarefa proposta é um problema ou um exercício, nessas concepções, dependerá dos conhecimentos prévios dos indivíduos a quem for proposta a tarefa, bem como dos objetivos de quem a propõe (LORENSATTI, 2009, p. 94).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 23) ainda destacam que "[...] pode haver exercícios mais difíceis, requerendo a aplicação mais ou menos engenhosa de vários métodos e também existem problemas mais simples ao lado de outros mais complicados".

Ainda segundo os autores

> [...] os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambigüidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Autores como Butts (1997), Dante (2010), Onuchic e Alevatto (2011) apontam a existência de vários tipos de problemas matemáticos.

Para Onuchic e Alevatto (2011)

> [...] podem ser encontrados muitos conceitos de *problema* adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias (ONUCHIC; ALEVATTO, 2011, p. 81).

Considerando que apesar de serem de diferentes tipos, são todos problemas, apresentam-se a seguir algumas classificações.

De acordo com Butts (1997, p. 33), os problemas podem ser classificados como:

- Exercícios de reconhecimento;
- Exercícios algorítmicos;

- Problemas de aplicação;
- Problemas de pesquisa aberta;
- Situações-problema.

Já Dante (2010, p. 24-28) apresenta a seguinte classificação:

- Exercícios de reconhecimento;
- Exercícios de algoritmos;
- Problemas-padrão;
- Problemas-processo ou heurísticos;
- Problemas de aplicação;
- Problemas de quebra-cabeça.

A seguir descreve-se e exemplifica-se os tipos de problemas de acordo com as definições apresentadas por Butts (1997) e Dante (2010).

Problemas do tipo **"exercícios de reconhecimento"** – são exercícios que normalmente pedem ao resolvedor "[...] para reconhecer ou recordar um fato específico, uma definição ou enunciado de um teorema" (BUTTS, 1997, p. 33).

Tem-se como exemplos deste tipo de problema:

1) Qual é o sucessor de 203?
2) Uma unidade de milhar equivale a quantas centenas?
3) Dados os números 1, 2, 7, 10, 18, 23, 57, 305 e 500, quais são ímpares?

Problemas do tipo **"exercícios de algoritmos"** ou **"exercícios algorítmicos"** – são exercícios que seguem uma sequência de passos para a sua resolução, objetivando "[...] treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores" (DANTE, 2010, p. 24). Ou seja, "[...] trata-se de exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, frequentemente um algoritmo numérico" (BUTTS, 1997, p. 34).

Para exemplificar:

1) Calcule o valor de [18 + 2 – (2 x 3)] ÷ 2.
2) Efetue:
    a) 128 x 6 =?
    b) 240 ÷ 12 =?

Problemas do tipo **"padrão"** – são problemas que envolvem a aplicação de algoritmos já aprendidos anteriormente, não exigindo o uso de estratégias para a sua resolução. Nesse tipo de problema, "[...] a solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo" (DANTE, 2010, p. 25).

Os problemas do tipo padrão são divididos em dois grupos:

"**Problemas-padrão simples**" – são os problemas que envolvem uma única operação para a resolução.

Exemplos:

1) Divida igualmente 24 bombons entre 4 crianças.

"**Problemas-padrão compostos**" – são os problemas que envolvem duas ou mais operações para serem resolvidos.

Exemplos:

1) Felipe, Vitor e Amanda possuem juntos 84 bolinhas de gude. Sabendo que Vitor tem 36 bolinhas de gude e que os outros dois possuem quantidades iguais. Determine a quantidade de bolinhas de gude de cada um.

Problemas do tipo **"heurístico ou problemas processo"** – são problemas nos quais as operações não estão contidas explicitamente nos enunciados, ou seja, "[...] não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos" (DANTE, 2010, p. 25). Butts (1997) denomina este tipo de problema como sendo **"problemas de pesquisa aberta"**.

Exemplo:

1) Em um grupo de estudos estavam presentes 5 alunos. Se cada aluno cumprimentar todos os outros com um aperto de mãos. Quantos cumprimentos serão ao todo?

Este tipo de problema exige que o aluno pense criativamente, desenvolvendo planos de ação, criando suas estratégias próprias, as quais deverão ser colocadas em prática e testadas para verificação da validação do resultado.

Problemas do tipo **"situações-problema"** – "[...] neste subconjunto não estão incluídos problemas propriamente ditos, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação, cuja solução irá melhorá-la" (BUTTS, 1997, p. 36).

Para exemplificar:

1) Esboce um estacionamento de ônibus:
    a) Qual à medida que cada vaga deverá ter?

b) Que valor deverá ser cobrado por ônibus, por hora, visando-se obter um lucro de 20%?

Problemas do tipo **"aplicação"** – "[...] são aqueles que retratam situações do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. São também chamados de *situações-problema contextualizadas*" (DANTE, 2010, p. 27, grifos do autor).

Este tipo de problema necessita pesquisa e levantamento de dados, os quais serão organizados em tabelas, gráficos, realizando operações, etc. visando matematizar uma situação real de interesse do aluno.

Para exemplificar:

1) A diretora de uma escola precisa fazer o relatório anual de gastos com a merenda escolar. Para isso ela precisa obter os seguintes dados:
   a) Quantos alunos comem a merenda na escola por dia? E por mês?
   b) Quantos quilos de alimentos a escola recebe (arroz, feijão, macarrão, cebola, sal, etc.) por mês?
   c) Qual é o preço de cada um dos alimentos citados no item b)?
   d) Qual a quantidade de gás gasta para preparar a merenda?
   e) Qual o salário mensal da merendeira?

Por outro lado, Butts (1997, p. 34) classifica os **"problemas de aplicação"** como sendo aqueles que envolvem algoritmos aplicativos, assim "[...] os problemas tradicionais caem nesta categoria, exigindo sua resolução: (a) formulação do problema simbolicamente e depois (b) manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos".

Problemas do tipo **"quebra-cabeça"** – em geral são problemas que envolvem a matemática recreativa, envolvendo e desafiando os alunos a buscarem a resolução. Na maioria das vezes, a resolução deste tipo de problema envolve algum "truque" ou "golpe de sorte" os quais devem ser percebidos pelos alunos para chegarem à resposta final

Para exemplificar:

1) Forme 9 quadradinhos com 24 lápis como mostra a figura abaixo. Como fazer para tirar apenas 4 lápis e deixar 5 quadradinhos?

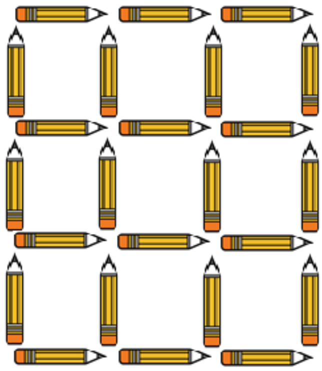


Figura 16: Ilustração para auxiliar na resolução do exemplo 1.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Considerando-se o panorama acima apresentado e de acordo com Butts (1997), grande parte dos exercícios apresentados em livros didáticos são aqueles classificados como “exercícios algorítmicos”, “exercícios de reconhecimento” e “problemas de aplicação”, de modo que: [...] o traço característico desses problemas é que seu enunciado contém uma estratégia para resolvê-los. O obstáculo a vencer, então, é traduzir a palavra escrita para uma forma matemática apropriada. (BUTTS, 1997, p. 35). Assim, o que sobra como tarefa aos alunos é encontrar os algoritmos adequados a serem aplicados.

No panorama acima apresentado, mostrou-se algumas das diferentes definições existentes para os tipos de problemas matemáticos. É importante ressaltar que as pesquisas apontam que a resolução de problemas tem tido ênfase dentre as ações e atividades de ensino, fato que não ocorre ao se considerar a elaboração dos enunciados de problemas.

2.2 A análise da produção escrita em matemática

Independentemente da disciplina a qual esteja ministrando, um dos caminhos possíveis a ser trilhado pelos professores com a finalidade de compreender o modo de pensar de seus alunos é a análise da produção escrita.

> Toda produção escrita dos estudantes, seja ela obtida por meio de trabalhos, provas ou qualquer outro instrumento que possibilite o registro de suas idéias, é importante, pois, ao analisar e interpretar, por exemplo, a produção escrita dos estudantes na resolução de um problema, o professor pode perceber que, por meio dessa resolução, seja ela considerada totalmente correta, parcialmente correta ou incorreta, é possível obter informações sobre o que eles sabem do conteúdo envolvido, ter pistas do que podem vir a saber

> futuramente, além de também ter pistas de como ele, o professor, pode auxiliá-los em suas aprendizagens (SANTOS, 2008, p. 20).

Nas aulas de matemática, a partir do momento em que o professor analisa a produção escrita desenvolvida pelos alunos, essa prática contribui “[...]para que o professor busque entender as respostas dadas e o porquê das estratégias escolhidas. Com essa atitude investigativa, o professor pode (re)conhecer que conhecimentos os alunos já possuem e quais ainda estão em construção” (NAGY-SILVA; BURIASCO, 2005, p. 504).

Pesquisas já desenvolvidas como de Nagy-Silva e Buriasco (2005); Santos (2008); Santos (2014); Santos e Buriasco (2015); Santos e Buriasco (2016) sobre a produção escrita de alunos evidenciam que, a partir de uma análise interpretativa da produção escrita, pode-se compreender como os alunos lidam com questões de matemática, mostrando por meio do registro escrito quais conhecimentos matemáticos demonstram saber.

A análise interpretativa da produção escrita dos alunos possibilita a obtenção de diversas informações, entretanto, ressalta-se que essas informações representam apenas uma amostra possível quanto à aprendizagem dos alunos. Logo, “[...] não se pode afirmar que um estudante não sabe determinado conteúdo pelo fato de não se ter obtido uma informação sobre ele em sua produção escrita. Somente pode-se dizer algo a respeito do que o estudante fez, e não do que deixou de fazer” (SANTOS, 2008, p. 23).

É importante destacar que

> [...] a produção escrita do estudante pode refletir, de um lado, a sua aprendizagem e, de outro, a atuação do professor. [...] por mais que as informações obtidas sejam meras impressões, aliadas à observação constante dos estudantes durante as atividades, à interpretação dessas observações e à reflexão, elas podem fornecer um ‘retrato’ do processo de ensino e de aprendizagem (SANTOS, 2008, p. 23).

Dessa forma, Santos (2008, p. 23) destaca que o professor, durante o processo de formação dos alunos, pode obter diversos ‘retratos’ os quais possibilitam questionamentos como “[...] qual Matemática os estudantes estão aprendendo, que entendimento estão tendo do que é trabalhado em sala de aula, quais dificuldades estão apresentando, o que pode ser feito para que estas sejam superadas por eles”.

Em relação à interpretação da produção escrita dos alunos, é importante ressaltar que, “[...] quando não for possível entender o que o estudante quis expressar em sua produção escrita, um diálogo com ele durante o trabalho em sala de aula pode ser muito útil” (SANTOS, 2008, p. 23). Isso possibilita, a obtenção de esclarecimentos sobre as estratégias utilizadas e os registros apresentados no decorrer do desenvolvimento da atividade, transformando a sala de aula em um espaço dinâmico de construção do conhecimento e não apenas de transmissão do mesmo.

Logo,

> Analisando a produção escrita dos estudantes, interpretando as informações presentes nessa produção, os professores podem também identificar possíveis dificuldades, analisar os erros encontrados e obter indícios do que pode ter levado esses estudantes a errarem e, a partir de tais informações e de conversas com eles, planejar novas ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos envolvidos (SANTOS, 2008, p. 23).

A análise da produção escrita pode ser desenvolvida a partir de qualquer atividade realizada, desde que a mesma possibilite o registro escrito das estratégias utilizadas e também dos resultados obtidos. Ela também pode ser utilizada como processo avaliativo, sendo caracterizada como

> [...] um conjunto de ações frente à produção escrita dos alunos que possibilita ao professor obter informações para conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos, planejar e executar intervenções de modo a auxiliá-los [...]. Nesse sentido, a análise da produção escrita não tem como objetivo a atribuição de uma nota ou de um conceito. O objetivo é obter informações que possibilitem uma tomada de consciência do ocorrido nos processos de ensino e de aprendizagem e uma tomada de decisão de modo a auxiliar tanto professor quanto alunos a organizar e orientar suas ações. (SANTOS, 2014, p. 22).

Assim, a análise da produção escrita, permite olhar para os dados de acordo com as seguintes etapas: “[...] ‘leitura vertical’, ‘leitura horizontal’, ‘inferência’ e ‘interpretação” (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 8).

A leitura vertical refere-se

> [...] a uma leitura de todos os registros de um mesmo aluno, e possibilita ao professor conhecer quais estratégias e procedimentos de resolução ele utiliza para resolver determinada tarefa, quais dificuldades apresenta em relação aos conteúdos matemáticos trabalhados. Ela também contribui para que o professor encontre similaridades na produção escrita do estudante e construa um perfil de seu modo de lidar com tarefas de matemática e com os conteúdos matemáticos (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 8).

Já a leitura horizontal, refere-se

> [...] a leitura da produção de todos os estudantes em uma mesma tarefa, possibilita a percepção de semelhanças e diferenças entre esses registros, auxiliando na identificação, por exemplo, de estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados, de erros e acertos mais frequentes. Auxilia também o professor a construir um perfil dos alunos como um todo acerca do modo como lidam com as tarefas que lhes são propostas (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 9).

Assim, tanto a leitura horizontal quanto a vertical, possibilitam ao professor decidir sobre quais estratégias utilizar para o desenvolvimento das aulas, uma vez que, ambas as leituras permitem "[...] obter um panorama a respeito de erros e acertos mais frequentes, além de um perfil da turma no que diz respeito ao modo como lidam com as tarefas propostas, entre outros aspectos" (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 9).

Com a inferência,

> [...] o professor pode ir além do observável no registro do aluno, tentando complementar informações já obtidas [...]. Ela pode auxiliar o professor, por exemplo, na identificação do que conduziu o aluno a determinada produção, ou seja, do processo que o levou a isso, da compreensão que fez do enunciado da tarefa, do conteúdo matemático, etc. (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 9).

E com a interpretação, "[...] o professor busca atribuir significados ao registro escrito analisado". Assim, essa ação da análise da produção escrita requer que "[...] professor seja capaz de interpretar os pensamentos dos alunos expressos por meio dos registros realizados, da maneira como são capazes de expressá-los (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 9).

Essas ações, advindas da análise da produção escrita, não excluem outras, que podem ser incorporadas durante a realização de tarefas pelos alunos, enquanto em atividade com os conteúdos matemáticos. Um exemplo seriam os questionamentos, que o professor pode se colocar, a partir das produções escritas apresentadas por seus alunos, a partir de um enunciado de problema. O professor pode interrogar se

> As dificuldades de 'interpretação' estão relacionadas à linguagem utilizada no enunciado, ao conteúdo matemático envolvido, a ambos, ou a outros aspectos? Como saber se o enunciado da questão é suficientemente claro para que o aluno a resolva? O enunciado da questão pode servir de contexto para se produzir significado a partir dele? As informações presentes no

> enunciado da questão fazem parte do conjunto de circunstâncias que tornam a questão acessível aos alunos? (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 79).

Pode-se então concluir que ao analisar a produção escrita dos alunos, levantar hipóteses, ir além do que é perceptível nessa produção, de modo a tentar compreender os elementos encontrados, o professor "[...] pode ter indícios de possíveis dificuldades dos alunos, do motivo de errarem, dos entendimentos que estão tendo acerca do que é trabalhado em sala de aula, do que sabem e do que podem vir a saber futuramente (SANTOS; TEIXEIRA, 2018, p. 10).

Dessa forma, considera-se que a análise da produção escrita seja uma alternativa para que o professor possa refletir sobre sua prática em sala de aula, suas escolhas didáticas e também para a reorganização do processo da construção do conhecimento no âmbito escolar.

Considerando que a análise da produção escrita pode ser desenvolvida a partir de qualquer atividade, desde que esta possibilite o registro escrito das estratégias utilizadas e dos resultados obtidos, utiliza-se nesse trabalho as ações propostas na análise da produção escrita, leitura horizontal e vertical, inferência e interpretação, bem como a análise da produção escrita como uma prática de investigação do conhecimento dos alunos, tal como indicado por Buriasco, Ferreira e Ciani (2009).

Empregou-se a análise da produção escrita nos de modo a identificar se os enunciados elaborados estavam claros, se continham as informações necessárias para que o problema fosse resolvido, que tipo de variáveis estavam envolvidas, etc. E nas resoluções apresentadas, a análise da produção escrita proporcionou a identificação da utilização ou não de algoritmos, quais as maneiras como foram empregados, visando identificar as formas, as dificuldades e as potencialidades na utilização dos mesmos.

2.3 O campo conceitual multiplicativo

A Teoria dos Campos Conceituais – TCC foi proposta pelo psicólogo, pesquisador e professor Gérard Vergnaud. De acordo com o autor, "[...] a teoria dos campos conceptuais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas" (VEERGNAUD, 1996, p. 155). Tendo como finalidade principal “[...] fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e adolescentes, entendendo por “conhecimentos” tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1996, p.155).

Esta teoria não é específica da matemática, mas sua elaboração se iniciou com o propósito de explicar os processos de conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra (VERGNAUD, 1996).

O Campo Conceitual Multiplicativo é formado por problemas que envolvem uma (ou várias) multiplicação, divisão ou a combinação entre ambas as operações (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2010).

Segundo Vergnaud (2014) e Gitirana *et al.* (2014) os problemas de estruturas multiplicativas, são categorizados da seguinte forma:

i) Comparação multiplicativa;
ii) Isomorfismo de medidas ou proporção simples;
iii) Produto de medidas ou produto cartesiano;
iv) Função bilinear;
v) Proporcionalidade múltipla;

Em cada uma destas categorias estão inclusas diversas subclasses. A seguir descreve-se sobre cada uma destas categorias, listando-se suas principais características e exemplificando-as.

Antes de se iniciar a descrição das categorias, precisa-se esclarecer o que se considera ser uma relação, pois as categorias são formadas por relações binárias, ternárias e quaternárias. Segundo Vergnaud (2014, p. 23) “[...] a noção de relação é uma noção absolutamente geral. O conhecimento consiste, em grande parte, em estabelecer relações e organizá-las em sistemas. Há relações entre objetos no espaço, entre quantidades físicas, entre fenômenos biológicos, sociais, psicológicos”.

Ao analisar problemas do campo conceitual multiplicativo, Vergnaud (2014) estabeleceu as relações entre os elementos presentes nas situações, as quais eram relações binariárias (dois elementos), relações ternárias (três elementos) e relações quaternárias (quatro elementos).

No Quadro 2 apresenta-se alguns exemplos de relações, nos quais os elementos relacionados aparecem em destaque.

Relação Binária	Relação Ternária	Relação Quaternária

➢ O **livro** está sobre a **mesa**. ➢ **Lucas** tem a mesma idade que **Vitor.** ➢ **y** é igual a **2z** (y = 2z)	➢ **Quatro** multiplicado por **três** é igual a **doze** (4 x 3 = 12) ➢ **Santa Catarina** é o estado localizado entre o **Rio Grande do Sul** e o **Paraná**. ➢ **Luiza** é irmã de **Flávia** e **Isabella**.	➢ **Dezoito** sobre **seis** equivale a **nove** sobre **três** ($\frac{18}{6} = \frac{9}{3}$) ➢ **Curitiba** é para o **Paraná** o mesmo que **Florianópolis** é para **Santa Catarina**. ➢ O **preço de 4 bolas** está para o **preço de 1 bola** assim como **4 bolas** estão para **1 bola**.

Quadro 2*:* Exemplos de relações de naturezas distintas.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base em Vergnaud (2014).

Vergnaud (2014) representa essas relações por um esquema relacional ou esquema sagital, o qual permite a utilização de códigos para a representação das relações entre os elementos. A Figura 17 ilustra os códigos do esquema relacional.

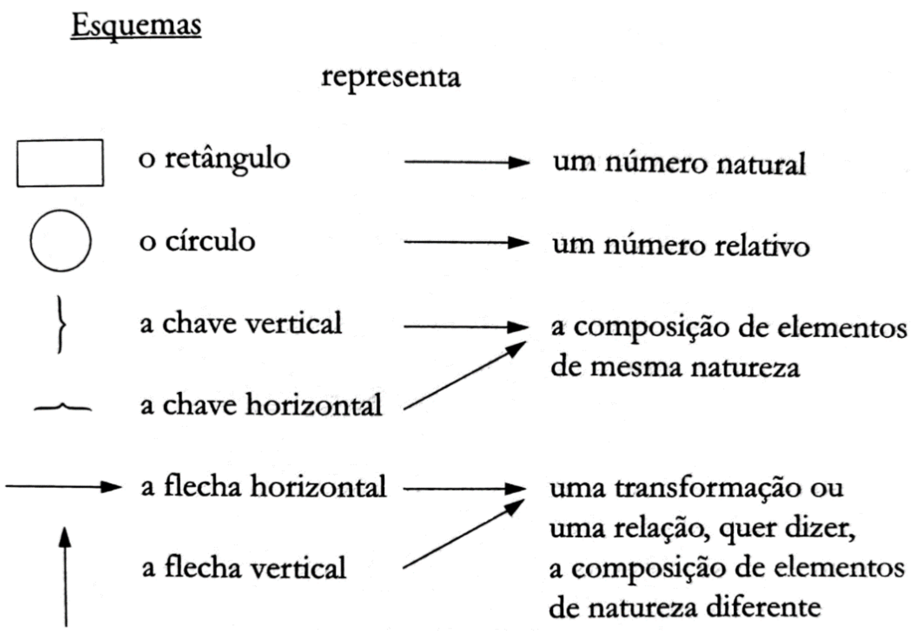


Figura 17: Códigos do esquema relacional.
Fonte: Vergnaud (2014, p. 201).

Como apresentado anteriormente, são cinco as categorias dos problemas das estruturas multiplicativas. Com base em estudos relacionados à classificação dos problemas de relações multiplicativas (VERGNAUD, 2014; GITIRANA *et al.,* 2014), apresenta-se exemplos relacionados as categorias e também o esquema relacional proposto para descrever cada categoria.

A primeira categoria de problemas das estruturas multiplicativas é a “comparação multiplicativa”, a qual é considerada o tipo de problema que os alunos dominam mais facilmente (GITIRANA *et al.*, 2014).

A comparação multiplicativa

> [...] são situações bem próximas às aditivas, em que somente duas grandezas de mesma natureza são comparadas de forma multiplicativa por um escalar (uma razão ou relação) – sendo uma o referente (R) e outra o referido (r). assim como na adição, o estudante ainda está diante de uma operação ternária, que envolve três números ou grandezas (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 45).

Esta categoria pode ser dividida em três classes, sendo elas i) “comparação multiplicativa com referido desconhecido – vezes maior”; ii) “comparação multiplicativa com referente desconhecido – vezes maior”; e iii) “comparação multiplicativa com relação desconhecida – vezes mais” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 46-51).

Para a resolução de problemas destas três classes é necessário o uso da operação de multiplicação, como o ilustra o exemplo a seguir: “Uma loja do Shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto a mesma sandália custa na loja do Shopping?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 46).

Problemas como este do exemplo podem ser tratados por meio de um diagrama, o qual facilita a compreensão e o cálculo relacional. A Figura 18 ilustra este diagrama:

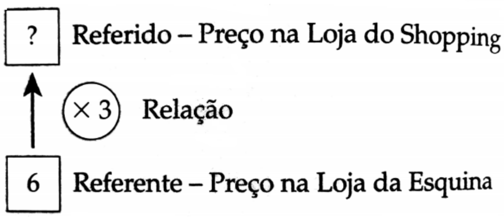


Figura 18: Ilustração do diagrama para o cálculo do preço da sandália no Shopping.
Fonte: Gitirana *et al.* (2014, p. 46).

As três classes apresentadas anteriormente também podem ser descritas para a operação de divisão. Neste caso, altera-se a expressão “vezes mais” ou “vezes maior” para “vezes menor”.

O exemplo a seguir ilustra esta subclasse: “Mário ganhou 18 bolas e Rosa ganhou 6 bolas. A quantidade de bolas que Rosa ganhou é quantas vezes menor que a de Mário?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 53).

O diagrama para este cálculo é apresentado na Figura 19:

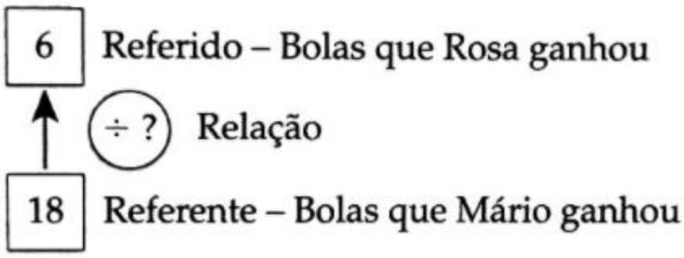


Figura 19: Ilustração do diagrama para o cálculo da quantidade de bolas.
Fonte: Gitirana *et al.*, (2014, p. 53).

Neste caso realizou-se uma comparação entre a quantidade de bolas que Rosa ganhou com a quantidade que Mário ganhou, “[...] sendo o referido menor que o referente” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 53).

Pode-se concluir que a categoria “comparação multiplicativa” apresenta seis subclasses, considerando três para a operação de multiplicação (vezes mais ou vezes maior) e três para a operação de divisão (vezes menor).

A segunda categoria denominada “isomorfismo de medida ou proporção simples”, trata-se de uma proporção direta simples ou proporção direta, em que duas variáveis dependem uma da outra simultaneamente, ou seja, “é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas, de outro tipo” (VERGNAUD, 2014, p. 239). Por exemplo, metros de tecido e o preço pago, distância percorrida e consumo de combustível, garrafas de vinho e o valor unitário, etc.

Na resolução de um problema como, por exemplo: “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGANUD, 2014, p. 239) o autor explica que há uma correspondência entre os pacotes e os iogurtes, traduzindo assim o isomorfismo de dois tipos de medidas diferentes.

pacotes	iogurtes
1	4
3	x

Nesta situação é possível utilizar um operador sem dimensão, ou seja, um escalar ou então aplicar uma função, assim as duas formas são equivalentes, porém distintas, como ilustra a Figura 20.

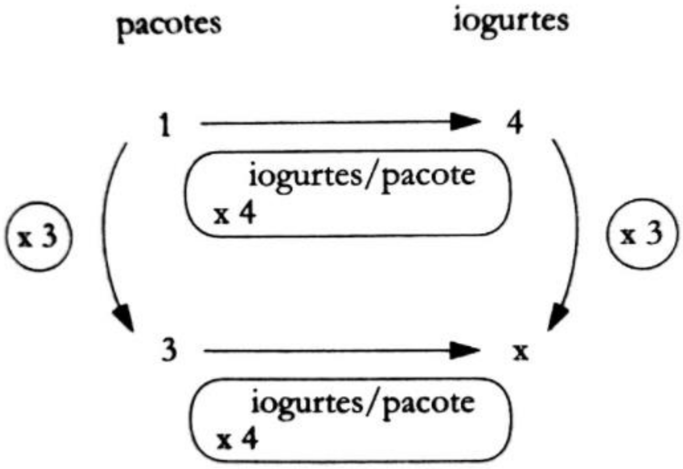


Figura 20: Ilustração da análise horizontal e vertical do exemplo iogurtes/pacotes.
Fonte: Vergnaud (2014, p. 243).

Quando se opera verticalmente, está-se operando com escalares, permitindo passar de uma linha para a outra com o operador x 3 (sem dimensão). Ao operar-se horizontalmente, se estabelece uma relação funcional por meio do operador x 4 a qual expressa a relação de uma unidade de medida com outra de natureza distinta.

No exemplo anterior utilizou-se a multiplicação. Mas com relação ao operador de cada situação, ainda é possível tomar-se o operador inverso, logo é possível também utilizar-se a divisão. Por exemplo: “Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custará cada garrafa?” (VERGNAUD, 2014, p. 239).

Neste exemplo é necessário encontrar o valor unitário de cada garrafa, ou seja, dividir R$ 12,00 por 3 para encontrar o valor de x em reais, podendo ser representada por uma relação vertical como ilustra a Figura 21

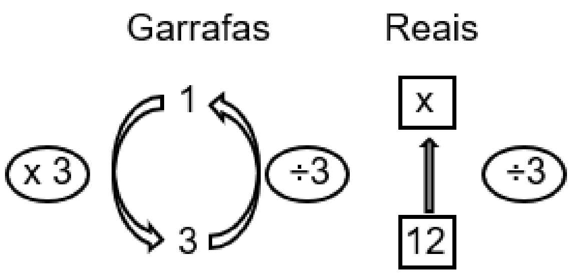


Figura 21: Ilustração para a resolução do exemplo das garrafas de vinho.
Fonte: VERGNAUD (2014, p. 242).

A análise do esquema ilustrado na Figura 21 mostrou que:

> O operador ÷ 3 é um operador sem dimensão [...] que apenas reproduz na coluna da direita o que se passa na coluna da esquerda, e que exprime a passagem de 3 garrafas para 1 garrafa. O operador ÷ 3 é, desse modo, o operador inverso do operador x 3 que se faz passar de 1 garrafa para 3 garrafas (VERGNAUD, 2014, p. 242).

De acordo com Gitirana *et al.* (2014) a categoria "isomorfismo de medidas ou proporção simples" se divide em quatro classes, como mostra o Quadro 3.

Classe	Esquema relacional	Descrição da classe
Multiplicação – um para muitos	1 α β x	"[...] a quantidade que se relaciona à unidade é dada (o valor da unidade) e se deseja saber o valor correspondente à segunda grandeza de mesma espécie" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 56).
Partição ou Distribuição	1 x β γ	"[...] quando o valor correspondente a certa quantidade é conhecido e o que se busca é o valor correspondente à unidade" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 58).
Cota	1 α x γ	"[...] quando se tem o valor correspondente à unidade, uma quantidade dada e se deseja saber quanto corresponde à dada quantidade, ou ainda quantas cotas, ou grupos, se pode obter com a quantidade dada (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 61).
Quarta proporcional	δ α β x	"[...] quando o valor da unidade, ou taxa, não aparece nem tampouco é solicitada, [...] o problema torna-se mais fácil – ou difícil – dependendo de os dois valores de uma mesma grandeza serem múltiplos um do outro (ou não serem)" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 65).

Quadro 3: Classes de problemas pertencentes a categoria isomorfismo de medidas.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nas informações de Gitirana *et al.* (2014).

Os problemas classificados de acordo com o Quadro 3 podem ser resolvidos da seguinte forma: i) multiplicação – um para muitos: por meio de uma operação de multiplicação; ii) partição ou distribuição, e iii) cota: por meio de uma operação de divisão; iv) quarta proporcional: para resolver problemas desta subclasse, é necessária uma combinação entre a operação de multiplicação e a de divisão.

Dessa forma, a categoria "isomorfismo de medida ou proporção simples" apresenta quatro classes, sendo elas: "um para muitos"; "partição"; "cota" e "quarta proporcional".

A terceira categoria, denominada "produto cartesiano ou produto de medidas" trata-se de uma relação ternária, em que "[...] uma nova grandeza é obtida como produto de duas (ou mais) outras, como é o caso da área, do volume, das combinações – sem que uma das grandezas dependa da outra" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 73).

O exemplo a seguir, ilustra a categoria produto de medidas para o caso de grandezas contínuas: "A sala de aula da Escola Divertida tem um formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula?" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 73). Neste exemplo tem-se duas grandezas contínuas de mesma natureza que resultam em uma nova grandeza, no caso a área, também denominada grandeza-produto. Este exemplo pode ser resolvido por meio da seguinte tabela de dupla entrada:

	1	5	extensão
1			
3			
lar		?	
gu		área	
ra			

Para os problemas que envolvem grandezas discretas, além da tabela de dupla entrada, ainda pode-se representar os problemas da categoria produto cartesiano pelo diagrama de árvore, pois trata-se de problemas de "combinação" ou de "contagem", os quais "[...] apresentam um produto cartesiano entre grandezas discretas, formando as possíveis combinações que podem ser contadas” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 76), como no exemplo a seguir:

“Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinha ou copinho. Tem 4 sabores diferentes: menta, baunilha, chocolate e morango. Maria quer um sorvete de uma bola, quantas maneiras diferentes ela tem para escolher?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 76). Para se resolver este problema, o aluno pode utilizar tanto a tabela de dupla entrada quanto o diagrama de árvore, como ilustra a Figura 22.

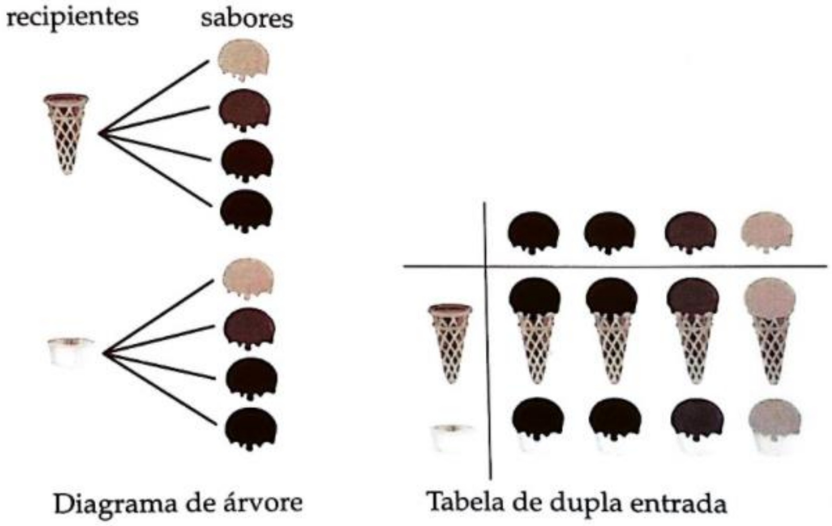


Figura 22 : Ilustração do diagrama de árvore e da tabela de dupla entrada.
Fonte: Gitirana *et al.*, (2014, p. 77).

De acordo com Gitirana *et al.* (2014), a categoria produto de medidas contém quatro classes, sendo elas: i) produto cartesiano contínua x contínua – área; ii) produto cartesiano combinação – com todo desconhecido; iii) produto cartesiano combinação – com parte desconhecida; iv) produto cartesiano combinação – com total desconhecido e número de escolhas implícito (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 73-79).

A quarta categoria de problemas é denominada “função bilinear ou proporção dupla”. São problemas que “[...] envolvem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), em que uma delas é proporcional a duas outras, separadamente” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 81). Estes problemas também são conhecidos como “regra de três composta”.

O exemplo a seguir ilustra essa categoria: “Um parque de diversão cobra R$ 4,00 para cada criança brincar em qualquer brinquedo durante 1 hora. Dona Lulu levou seus 3 filhos para brincar no parque durante 2 horas. Quanto ela pagou?” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 81). Este exemplo pode ser representado por uma tabela de dupla entrada, como ilustra a Figura 23:

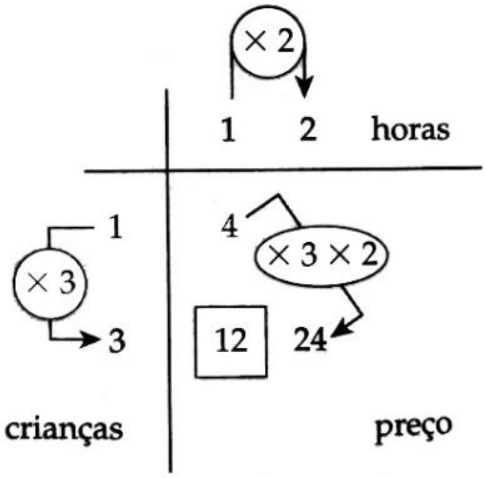


Figura 23: Ilustração da tabela de dupla entrada para a resolução do exemplo descrito anteriormente.
Fonte: Gitirana *et al.* (2014, p. 84).

Os problemas da categoria “função bilinear” podem ser divididos em duas classes, sendo elas: “um para muitos” e “muitos para muitos” (SOUZA; MAGINA, 2017, p. 800).

A classe “um para muitos” ilustrou-se no exemplo anterior. Para a classe “muitos para muitos” tem-se o seguinte exemplo: “Um grupo de 5 pessoas consomem, em média, 20 litros de água em 2 dias. Considerando a mesma média, qual o consumo de 15 pessoas em 4 dias? (SOUZA; MAGINA, 2017, p. 801).

A quinta categoria das estruturas multiplicativas denomina-se “proporcionalidade múltipla” ou “concatenação de proporções” “[...] Diferentemente das funções bilineares, nesse caso, ao alterar-se o valor de qualquer das grandezas envolvidas alteram-se todas elas” (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 86).

O exemplo a seguir ilustra essa categoria: “Para fazer um biscoito D. Maria usa 2 xicaras de farinha para cada ovo e três colheres de açúcar para cada xicara de farinha. Se D. Maria usar 2 ovos, quantas colheres de açúcar ela precisará usar para fez a massa desse biscoito?” (SOUZA; MAGINA, 2017, p. 801).

Para representar esta situação tem-se:

ovos	xicara de farinha	colheres de açúcar
1	2	
	1	3
2		x

O exemplo pode ser resolvido por meio de duas “regras de três simples” ou proporções simples, primeiro determina-se quantas colheres de açúcar D. Maria usaria para duas xícaras de farinha realizando-se a proporção simples entre as colunas xícara de farinha e colheres de açúcar. Em seguida determina-se quantas colheres de açúcar ela usaria para dois ovos realizando-se a proporção simples entre as colunas ovos e colheres de açúcar.

A categoria “proporcionalidade múltipla” apresenta duas classes, sendo elas: “um para muitos” e “muitos para muitos” (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 523). A classe “um para muitos” exemplificou-se com o exemplo anterior (D. Maria fazendo biscoitos), para a classe “muitos para muitos” tem-se o seguinte exemplo: “Um grupo de 50 pessoas vai passar 28 dias de férias no campo. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 4Kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?” (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014, p. 523).

A Figura 24 ilustra as categorias acima apresentadas com suas respectivas classes:

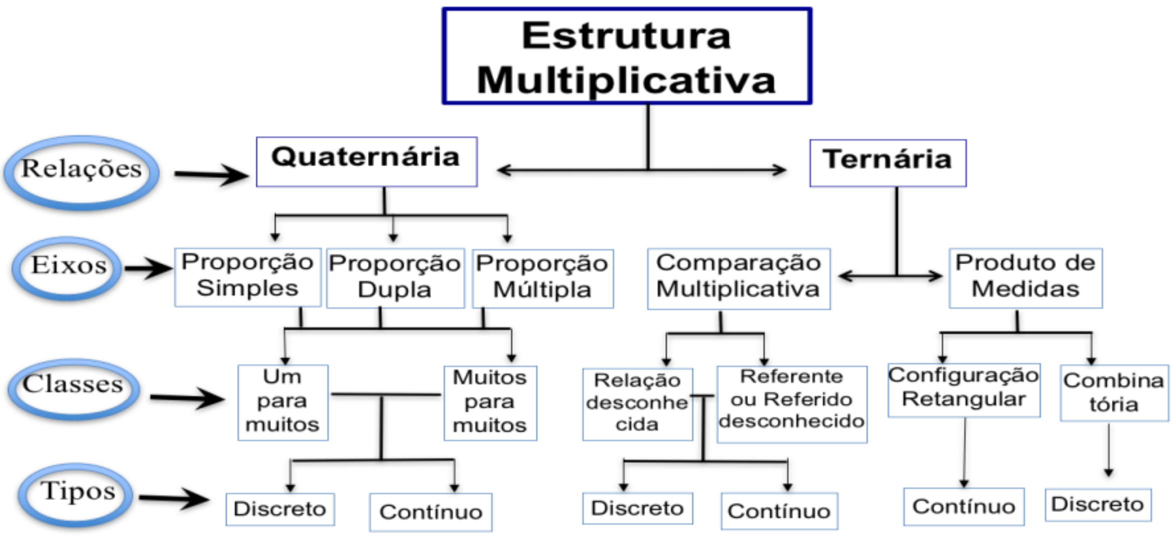


Figura 24: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.

Fonte: Souza e Magina (2017, p. 800).

Nesta sessão realizou-se um estudo acerca do Campo Conceitual Multiplicativo. Destacou-se a existência de cinco categorias de problemas do campo multiplicativo, as quais subdividem-se em dezoito classes, dentre as quais seis pertencem à categoria “comparação multiplicativa”; quatro pertencem à categoria “isomorfismo de medidas ou proporção simples”; quatro pertencem à categoria “produto de medidas ou produto cartesiano”, duas pertencem à categoria “função bilinear” e duas pertencem à categoria “proporcionalidade múltipla”.

Considera-se importante destacar o fato que, dentre as cinco categorias referentes ao campo conceitual multiplicativo apresentadas, anteriormente, apenas duas admitem a operação de divisão, sendo elas a “comparação multiplicativa” e o “isomorfismo de medidas ou proporção simples”.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE PRODUÇÃO, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A dissertação é um estudo teórico "[...] de natureza reflexiva, requer sistematização, ordenação e interpretação dos dados. Por ser um estudo formal, exige metodologia própria do trabalho científico" (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 239).

Assim, apresenta-se neste capítulo a descrição dos procedimentos desenvolvidos durante a realização desta pesquisa: a natureza da pesquisa e o delineamento metodológico; os aspectos éticos da pesquisa; a caracterização do ambiente escolar, onde foram produzidos os dados da pesquisa; a obtenção e a organização dos dados.

3.1 A natureza da pesquisa e o delineamento metodológico

Esta pesquisa é de caráter qualitativo. Segundo Taquette e Borges (2019, p. 80) a pesquisa qualitativa "[...] oferece a possibilidade de produção de conhecimentos mais aprofundado sobre fenômenos humanos, contribuindo para o entendimento da sua dimensão subjetiva".

De acordo com os objetivos da investigação, pode-se caracterizá-la como descritiva já que tem por objetivo descrever as características de um fenômeno ou de uma população fundamentada nas análises dos dados coletados, mas também explicativa, já que nesse tipo de investigação "[...] o pesquisador procura explicitar as causas dos problemas ou fenômenos, isto é, busca o porquê das coisas" (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 70). No caso deste trabalho, busca-se descrever e explicitar o que se mostra da elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa

> [...] é considerada *descritiva* quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema. Geralmente esse tipo de investigação utiliza a observação sistemática (não etnográfica) ou a aplicação de questionários padronizados, a partir de categorias previamente definida (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 70).

Para Bicudo e Costa (2019), a descrição está no cerne das pesquisas qualitativas, mas mesmo rigorosa, a descrição deve apenas descrever. No entanto, para dar conta de uma investigação é preciso ir além da descrição. É preciso buscar a “[...] interpretação e compreensão dos significados atribuídos pelos envolvidos (os sujeitos que experienciam o fenômeno)” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 65).

Quanto ao processo de obtenção dos dados, podemos classificar esse trabalho como uma pesquisa de campo, já que nas palavras de Fiorentini e Lorenzato (2007) é a modalidade de pesquisa em que a obtenção dos dados se dá no local em que o problema ou fenômeno acontece, e essa obtenção pode ser por amostragem, entrevista, observação participante, aplicação de questionários, entre outros. Nesse trabalho a obtenção dos dados se deu por meio de uma atividade realizada pelos alunos que previa a elaboração e a resolução de problemas envolvendo a divisão. A produção dos alunos, ou seja, os problemas elaborados e as resoluções deles, constituíram a fonte dos dados dessa pesquisa.

A investigação qualitativa frequentemente produz uma elevada quantidade de dados (BICUDO; COSTA, 2019). Isso exige organização, sistematização e cuidado para que as inferências produzidas não fiquem prejudicadas, devendo o rigor pautar o tratamento e a interpretação dos dados. Depois da organização, tratamento e interpretação inicial dos dados, na busca pelo o que esses dados revelam, foram estabelecidos agrupamentos. Estes não foram estabelecidos previamente, mas constituídos no processo de investigação, tomando a análise de conteúdo de Bardin (2016) como inspiração. Para o tratamento e a interpretação dos dados e para a produção de inferências considerou-se a análise da produção escrita, conforme estudos de Santos e Teixeira (2018) e Buriasco, Ferreira e Ciani (2009).

Nos itens que se seguem, estão expostos detalhadamente os procedimentos adotados nessa investigação.

3.2 Aspectos éticos da pesquisa

A coleta de dados em sala de aula foi realizada após a aprovação do projeto de pesquisa e do roteiro para a entrevista pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Unioeste, campus de Cascavel no dia

18 de setembro de 2019, com número de Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) 19028919.5.0000.0107.

Para que o projeto pudesse ser submetido ao CEP, a diretora do estabelecimento de ensino onde a pesquisa foi realizada, assinou o termo de concordância da instituição coparticipante, declarando estar de acordo com a condução da pesquisa na turma escolhida, o modelo deste termo está apresentado em anexo nesta pesquisa (ANEXO A).

A folha de rosto do projeto, contendo a autorização para execução da pesquisa assinada pelo responsável da instituição proponente, os modelos da declaração do uso de banco de dados não públicos e a declaração de pesquisa não iniciada se encontram em anexo nesta pesquisa (ANEXOS B, C e D).

Além do consentimento da instituição coparticipante e da aprovação do CEP, para que a pesquisa pudesse ser realizada, foi necessário que os responsáveis dos estudantes que participaram da mesma, assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), autorizando a participação dos estudantes na pesquisa. Cada responsável ficou com uma cópia assinada e o modelo desse termo está apresentado em anexo nesta pesquisa (ANEXOS E e F).

Os estudantes por sua vez, assinaram o Termo de Assentimento (TA), concordando com sua participação na pesquisa, após terem as informações esclarecidas pelo próprio termo e pela pesquisadora. Cada estudante ficou com uma cópia assinada e o modelo desse termo está apresentado em anexo nesta pesquisa (ANEXOS G e H).

As cópias assinadas pelos responsáveis e pelos estudantes estão arquivadas com a pesquisadora, juntamente com os demais documentos descritos anteriormente. Destaca-se que os termos são informativos e explicam de forma sucinta e objetiva a pesquisa para que os responsáveis e os estudantes participantes tivessem conhecimento sobre a pesquisa.

3.3 Caracterização do ambiente escolar, construção e organização dos dados

3.3.1 Sobre o local da obtenção de dados

Esta pesquisa foi realizada no município de Vera Cruz do Oeste, no qual atualmente residem aproximadamente 8.521 habitantes[3] e está localizado na região Oeste do estado do Paraná. Optou-se por realizar a pesquisa nessa cidade pelo fato de a pesquisadora residir nesse local, tendo mais acessibilidade às escolas e aos alunos.

No município existem três escolas municipais e dois colégios estaduais, distribuídos da seguinte maneira: uma escola municipal no bairro Jardim América, uma escola municipal e um colégio estadual no centro da cidade e uma escola municipal e um colégio estadual no bairro Jardim Bandeirantes.

A obtenção de dados da primeira etapa da pesquisa, no ano de 2014, foi realizada na escola municipal do bairro Jardim Bandeirantes. Dispondo de prédio próprio, a escola atende alunos de pré-escolar até o 5º ano do Ensino Fundamental, tanto no período matutino quanto no vespertino, não havendo atendimento a alunos no período noturno.

Posteriormente, no ano de 2019, foi realizada a produção de dados referentes à segunda etapa da pesquisa e nesse momento os dados foram coletados no colégio estadual situado também no bairro Jardim Bandeirantes. Este colégio dispõe de prédio próprio atendendo apenas alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental no período matutino, alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II ao 3º ano do Ensino Médio no período vespertino e alunos do Ensino Médio e da Educação de Jovens e Adultos (EJA) no período noturno. Os participantes da pesquisa foram alunos do 9º do Ensino Fundamental II do período vespertino.

A escolha destas turmas se deu pelo fato de o 5º ano ser a etapa final do Ensino Fundamental I e o 9º ano ser a etapa final do Ensino Fundamental II.

3.3.2 Construção dos dados

Os dados para a realização desta pesquisa foram obtidos em dois momentos, a saber: i) no ano de 2014, momento em que a pesquisadora ainda estava cursando a graduação e desenvolveu sua pesquisa de monografia e ii) no ano de 2019, no qual

---

[3] Dados obtidos no site <http://www.ipardes.gov.br/perfil_municipal/MontaPerfil.php?codlocal=171&btOk=ok> Acesso em: 04 de set. 2019.

a pesquisadora desenvolveu o projeto de pesquisa para a proposta de dissertação de mestrado em Educação Matemática.

Para a obtenção dos dados da pesquisa de monografia foram necessários quatro encontros. No primeiro encontro, realizou-se uma reunião com a diretora da escola, na qual explicou-se sobre o projeto de pesquisa, os passos necessários para a coleta de dados e solicitou-se autorização para que a pesquisa pudesse ser desenvolvida em uma turma do 5º ano da escola em questão. Com a permissão concedida, agendou-se um horário para conversar com a professora da turma, pois era necessário que ela também autorizasse o desenvolvimento da pesquisa na sala de aula que conduzida.

O segundo encontro foi com a professora da turma, momento no qual foi explicado a ela os objetivos da pesquisa e como seria o desenvolvimento da atividade a ser realizada. Após a professora conceder a autorização para o uso de algumas de suas aulas para o desenvolvimento da pesquisa, foi marcada a data e horário para ir à sala de aula.

No terceiro encontro, utilizando duas horas aula de 50 minutos cada, realizou-se a atividade de elaboração e resolução dos problemas com os alunos. Esse encontro foi iniciado perguntando-se aos alunos “o que é divisão?” eles disseram que era “repartir alguma coisa com alguém”. Depois perguntou-se “o que é um problema?” eles responderam que era “algo difícil de resolver”. Finalmente, perguntou-se “o que é um problema de divisão?” alguns alunos responderam que era “uma historinha com uma continha de dividir”.

Após esses questionamentos solicitou-se aos alunos que se organizassem em duplas. Estavam presentes 22 alunos, formando 11 duplas as quais foram escolhidas por eles mesmos.

Cada dupla recebeu uma folha sulfite em branco para que pudessem fazer em um lado da folha seus registros escritos. Explicou-se que cada dupla deveria elaborar um problema de divisão, da forma como eles quisessem, utilizando seus conhecimentos prévios, sem que houvesse intervenção por parte da professora da turma ou mesmo da pesquisadora.

Conforme as duplas foram concluindo a elaboração, recolheu-se as folhas e distribuiu-se de forma aleatória, para que outra dupla resolvesse o problema proposto. Foi explicado que eles deveriam registrar todos os procedimentos que julgassem necessários para a resolução do problema no outro lado da folha (cálculos auxiliares, desenhos, etc.). À medida em que iam terminando a resolução, as duplas foram entregando as folhas e voltando para seus lugares de modo que a professora pudesse seguir com a aula. Ao final da atividade, agendou-se a data para a realização do próximo encontro e foi solicitada uma sala de aula vazia, que pudesse ser utilizada para o atendimento das duplas individualmente.

No quarto e último encontro, utilizou-se uma hora aula de 50 minutos, para a realização da entrevista semiestruturada com os alunos, na sala de aula vazia solicitada no dia anterior, de modo que cada dupla pudesse explicar suas opiniões com relação a resolução do problema por eles elaborado sem que houvesse constrangimento ou interrupções no momento das explicações.

Durante a entrevista, a pesquisadora registrou as respostas dos alunos em forma de diário de campo, para que pudesse ter mais elementos, além dos apresentados nas elaborações e resoluções para a análise dos dados.

Para o segundo momento de obtenção de dados, no ano de 2019, foram necessários quatro encontros.

O primeiro encontro ocorreu com a diretora do colégio para explicação sobre o projeto de pesquisa, os objetivos e as atividades a serem realizadas nas dependências escolar e solicitou-se permissão para a realização em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Concedida a permissão, agendou-se uma data para retornar ao colégio e conversar com a professora de matemática da turma, em seu horário de hora atividade.

No segundo encontro, reunião com a professora da turma, explicou-se sobre a pesquisa e a forma como a mesma deveria ser conduzida e solicitou-se autorização para realizar a pesquisa em sua aula. Com o seu consentimento, agendou-se a data para que ocorresse a coleta de dados e professora e pesquisadora dirigiram-se até a sala de aula para entregar aos alunos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE para que seus respectivos responsáveis o conhecessem e o assinassem e também o Termo de Assentimento - TA para que cada aluno participante da pesquisa o assinasse.

Na data marcada, retornou-se à escola para o terceiro encontro, e o desenvolvimento da atividade, porém, havia chovido e muitos alunos não estavam presentes, então foi decidido com a professora da turma a marcação de nova data.

Neste dia solicitou-se junto a secretaria da escola uma sala vazia, o mais próximo possível da sala de aula do 9º ano, para que pudesse realizar a entrevista com cada dupla em um ambiente mais tranquilo.

No quarto encontro, desta vez um dia ensolarado, realizou-se em duas horas aula de 50 minutos cada, a atividade de elaboração e resolução de problemas com os alunos. Os métodos para a segunda coleta de dados seguiram os mesmos passos da primeira, com exceção das perguntas “o que é divisão?”, “o que é um problema?” e “o que é um problema de divisão?”, que foi julgada não serem necessárias de serem perguntadas, levando em conta o grau de escolaridade desses alunos.

Assim, os alunos foram organizados em duplas, as quais foram escolhidas por eles mesmos. No momento da realização da atividade estavam presentes 21 alunos, porém, um deles optou em não participar da pesquisa, o que permitiu a formação de 10 duplas. Cada dupla recebeu uma folha em branco, na qual deveriam registrar o enunciado do problema de divisão por eles elaborado. Enquanto iam discutindo sobre a elaboração do enunciado e realizando o registro escrito, passou-se dupla por dupla orientando-os a registrar a forma de identificação correspondente a cada uma (D1, D2, D3, ...) para que pudesse chamá-los no momento da entrevista.

A medida em que iam terminando o registro da elaboração, as duplas foram entregando a folha com o registro escrito. Após todas as duplas entregarem sua folha, escolheu-se aleatoriamente outra dupla para que resolvessem o problema. Solicitou-se aos alunos para que resolvessem o problema no lado oposto da folha e que registrassem todas as informações (cálculos auxiliares, desenhos, etc.) que julgassem necessárias para a resolução do problema. A atividade de elaboração do enunciado e resolução do problema de divisão durou cerca de 40 minutos (pouco menos de uma hora aula de 50 minutos) para ser realizada. Após todos terminarem, orientou-se que cada dupla, à medida que fosse sendo chamada se dirigissem para a sala vazia ao lado, a qual foi organizada de modo que as duplas ficaram sentadas de frente para a pesquisadora, para que pudessem ficar mais à vontade no momento das perguntas da entrevista.

Em seguida retornou-se à sala de aula para chamar a primeira dupla, para que fossem até a sala ao lado para iniciar a entrevista. A escolha de uma sala vazia para a realização da entrevista se deu pelo fato de que deste modo cada dupla poderia explicar suas opiniões com relação ao enunciado por eles elaborado, sobre a resolução feita pela dupla de colegas e também sobre o enunciado do problema elaborado pela outra dupla e por eles resolvido sem que houvesse constrangimento ou interrupções no momento das explicações.

As perguntas norteadoras no momento da entrevista foram:

O que vocês consideraram para a elaboração da situação-problema?

O que vocês acharam da resolução de seus colegas para a situação-problema que vocês elaboraram?

Considerando a situação-problema que resolveram, o que vocês acharam do enunciado elaborado?

Antes de iniciar as perguntas da entrevista, foi entregue para a dupla a folha que correspondia ao enunciado do problema de divisão por eles elaborado, após conferirem que se tratava do registro feito por eles iniciou-se com a primeira e a segunda perguntas, deixando que eles se expressassem da forma como consideravam ser mais adequada e realizou-se a transcrição no diário de campo da pesquisadora, de acordo com as respostas dadas pelas duplas.

Antes de fazer a terceira pergunta, entregou-se à dupla a folha correspondente à resolução feita por eles do problema de divisão elaborado por outra dupla, para conferirem que se tratava da resolução feitas por eles. Na sequência, a pesquisadora fez-se a terceira pergunta, transcrevendo a resposta em seu diário de campo.

Esse processo se repetiu da mesma forma durante a entrevista de todas as 10 duplas. Em todo esse processo procurou-se ser o mais imparcial possível, não fazendo interrupções durante as explicações e registrando de forma objetiva as respostas dadas pelos alunos para cada pergunta.

Ao final das entrevistas, organizou-se a sala de acordo com a forma que estava anteriormente e retornou-se à sala onde estavam a professora da turma juntamente com os alunos. A pesquisadora agradeceu a todos (alunos e a professora da turma) pela participação neste processo, colocando-se a disposição para responder às possíveis dúvidas que pudessem surgir referente à pesquisa.

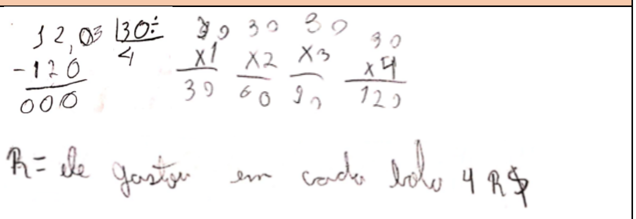
E antes de ir embora, agradeceu-se também à diretora do colégio, por permitir que a pesquisa fosse realizada no âmbito escolar por ela dirigido, colocando-se à disposição para responder qualquer dúvida referente à pesquisa.

3.3.3 Organização dos dados

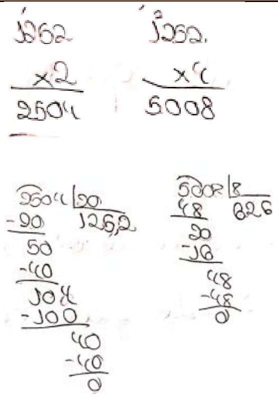
As produções dos alunos, constituída pelos problemas e pelas resoluções elaboradas e as anotações do diário de campo que continham as informações do momento da entrevista com as duplas de alunos, são os materiais obtidos no trabalho de campo. Assim, foram realizadas leituras e exploração do material buscando a melhor maneira de organizar os dados. Foi um movimento de idas e vindas, organização e reorganização, em que o conteúdo do material obtido, passou por uma leitura atenta, reiterativa e cheia de perguntas, movimento que Minayo (2012) costuma chamar de “impregnação” ou “saturação”. Para além do momento de organização há o processo de tipificação do material recolhido no campo, que é considerado “[...] mais denso e intenso que o exercício de ordenação, mas tem a mesma finalidade: apropriação da riqueza de informações do campo, tentando, na medida do possível, não “contaminá-lo” por meio de uma interpretação precipitada” (MINAYO, 2012, p. 624). São esses processos que estão descritos na sequência.

Primeiramente as duplas foram nomeadas por DE1, DE2, DE3... e DR1, DR2, DR3..., de modo que, por exemplo, DE1 seja a referência para a dupla elaboradora 1, DE2 para dupla elaboradora 2 e assim sucessivamente. Já DR1 é a referência para a dupla resolvedora 1, DR2 para a dupla resolvedora 2 e assim por diante. Dessa forma pode-se distinguir quando se trata da dupla elaboradora (DE) ou da dupla resolvedora (DR) e ao mesmo tempo preservar a identidade dos alunos.

Na sequência, elaborou-se um quadro para as produções dos alunos do 5º ano e um quadro para as produções dos alunos do 9º ano, nos quais descreve-se as seguintes colunas: i) o enunciado elaborado, o qual foi copiado fielmente do documento original; ii) o número da dupla elaboradora (DE); iii) o número da dupla resolvedora (DR) e iv) a imagem da resolução do enunciado elaborado, como ilustram os Quadros 4 e 5.

Enunciado elaborado	DE	DR	Imagem da resolução
Tiago comprou 30 bolas. Ele gastou em tudo R$ 120 Reais quantos custou cada bola?	DE2	DR4	

Quadro 4: Trecho do quadro das produções dos alunos do 5º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Enunciado elaborado	DE	DR	Imagem da resolução
Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?	DE1	DR7	

Quadro 5:Trecho do quadro das produções dos alunos do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

No Quadro 4 toma-se como exemplo o problema elaborado pela dupla DE2 e resolvido pela dupla DR4 do 5º ano e no Quadro 5 utiliza-se como exemplo o problema elaborado pela dupla DE1 e resolvido pela dupla DR7 do 9º ano.

Em uma nova leitura das produções dos alunos, foram acrescentadas duas novas colunas, as quais contemplam: v) a descrição da entrevista da dupla que elaborou o problema, considerando a elaboração e a resolução apresentada pela dupla que o resolveu e vi) a descrição da entrevista da dupla que resolveu o problema de divisão. As descrições sobre a elaboração e a resolução dos problemas foram feitas de acordo com o diário de campo escrito pela pesquisadora no momento da realização das entrevistas. Os Quadros 6 e 7 trazem essa descrição, considerando as duplas citadas como exemplo nos Quadros 4 e 5 apresentados anteriormente.

DE	DR	Descrição da dupla que elaborou em relação a elaboração e em relação a resolução feita	Descrição da dupla que resolveu o problema
DE2	DR4	Sobre a elaboração a dupla relatou que a ideia era “fazer duas contas, uma de dividir e outra de vezes, primeiro a de dividir e depois a de vezes para tirar a prova real” para encontrar o valor de cada bola e ter certeza de que o resultado estaria correto, disseram também que haviam feito o cálculo para ver se o resultado seria possível (não queriam que fosse um número com vírgula). Em relação à resolução afirmaram que os colegas compreenderam o	A dupla resolvedora afirmou ter compreendido o enunciado, que todas as informações necessárias “os números” estavam presentes e usaram a operação de divisão para saber quanto custou cada bola, disseram também que sentiram a necessidade de fazer a tabuada do 30 como auxílio na resolução (cálculos adicionais apresentados junto com a resposta do problema).

		enunciado, não concordaram com a resolução, levando em conta o fato de não terem tirado a "prova real", mas admitiram que a resposta estava correta.	

Quadro 6: Trecho da descrição da entrevista realizada com as duplas do 5º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

DE	DR	Descrição da dupla que elaborou em relação a elaboração e em relação a resolução feita	Descrição da dupla que resolveu o problema
DE1	DR7	A dupla que elaborou objetivou levar os colegas a terem mais dificuldade em resolver, levando em conta os valores altos por eles usados no enunciado e a necessidade de realizar mais de um cálculo para chegar ao resultado final. Em relação à resolução, afirmaram que os colegas compreenderam o enunciado e resolveram de forma correta a situação proposta.	A dupla que resolveu relatou ter muita dificuldade na interpretação do enunciado, que faltou deixar mais claro o que estava sendo proposto, que poderia ter sido algo mais simples, que foi desnecessário o uso de tantos números e a necessidade de tantos cálculos (de vezes e de dividir) para chegar ao resultado final.

Quadro 7: Trecho da descrição da entrevista realizada com as duplas do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Posteriormente, acrescentou-se mais duas colunas em cada quadro, a saber, o que contém as produções dos alunos do 5º ano e o quadro que contém as produções dos alunos do 9º ano. Essas novas colunas contemplam as considerações da pesquisadora e foram sintetizadas da seguinte forma: vii) "Interpretação da elaboração e da resolução" na qual tem-se a delimitação do que foi analisado na elaboração e resolução dos problemas; viii) "Inferência sobre a elaboração e a resolução", nesta coluna apresenta-se a delimitação do que se considerou que ainda poderia ser tratado a respeito das elaborações e resoluções dos problemas de divisão, buscando pelo "o que mais" poderia ser explorado.

Na coluna "interpretação da elaboração e da resolução" levou-se em conta a estrutura apresentada nos registros dos alunos, tanto na elaboração quanto na resolução dos problemas. Quanto à elaboração analisou-se se era ou não um problema de divisão e de qual tipo, o emprego da língua materna e da linguagem simbólica utilizada para descrever o enunciado, a linguagem numérica para descrever os valores, os tipos de variáveis envolvidas. Enfim, se os enunciados estavam claros e se continham as informações necessárias para que o problema fosse resolvido. Com relação às resoluções, analisou-se, por exemplo, se houve a utilização ou não, bem como a forma como os algoritmos foram empregados, o uso de cálculos auxiliares e a apresentação de uma resposta formal escrita por extenso em língua materna.

Já na coluna “inferência sobre a elaboração e a resolução”, considerou-se o que ainda poderia ser tratado a respeito da elaboração e da resolução dos problemas de divisão, destacando-se os elementos que estavam além dos registros escritos. Essa coluna tem um caráter mais intuitivo, com as inferências da pesquisadora, como por exemplo a indicação de como seria uma pergunta melhor formulada para determinado enunciado, a indicação de o porquê determinados símbolos terem sido registrados no momento da resolução do problema, a dupla interpretação gerada em alguns enunciados considerando a forma como os mesmos foram escritos, entre outros aspectos. Os Quadros 8 e 9 trazem um exemplo de como foram elaboradas as considerações nas duas colunas em questão:

DE	**DR**	**Interpretação da elaboração e da resolução**	**Inferência sobre a elaboração e a resolução**
DE2	DR4	Na elaboração notou-se o uso de números indicando os valores a serem usados na divisão, o uso do cifrão (R$) e da palavra reais fazendo referência à moeda nacional utilizada. Há também a falta da vírgula e dos zeros na representação do dinheiro e falta de pontuação ao final da frase. Na resolução há o uso do símbolo da divisão (÷) ao lado do número 30 dentro da chave, o uso de cálculos auxiliares para a resolução da divisão e a presença do (R) indicando a resposta para a pergunta do problema. A forma de indicação da unidade monetária na resposta indica que o símbolo R$ foi usado no lugar da palavra reais.	Acredita-se que o uso do símbolo de divisão na chave seja um equívoco, pois ao que indica a resolução de outras duplas, o símbolo na chave deveria ser de multiplicação, indicando que quociente multiplicado (x) pelo divisor daria o dividendo. A apresentação desse x, do uso de contas auxiliares e da resposta final, pode ser devido ao professor pedir que os alunos façam dessa forma.

Quadro 8: Trecho das considerações realizadas pela pesquisadora acerca das produções do 5º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

DE	DR	Interpretação da elaboração e da resolução	Inferência sobre a elaboração e a resolução

DE1	DR7	Inicialmente trata-se de duas multiplicações (uma por 2 e outra por 4). Na sequência, era necessário realizar uma divisão (por 20), a fim de saber quantos carrinhos teria em cada caixa e finalmente dividir o valor pago pelos carrinhos (por 8) para saber quanto pagaria pelos carrinhos em 8 parcelas. Este problema foi escrito de forma clara, notando-se apenas o uso da letra D em maiúsculo no meio do texto sem se tratar de início de frase. Na resolução percebemos que a dupla resolvedora compreendeu a proposta do problema, realizando as multiplicações e divisões necessárias para chegar ao resultado final. No entanto, não perceberam ou, pelo menos não discutiram, o fato de a divisão do número de carrinhos pelas caixas ser 125,2 que é um número não inteiro, o que na prática não é possível. No registro da resolução percebemos também o uso da letra (R) indicando a resposta final do problema.	A pergunta final poderia ser escrita de forma mais adequada, uma sugestão seria “se ele parcelar em 8 vezes, quanto pagará em cada parcela?” Apesar das contas estarem corretas, as duplas resolvedoras e elaboradoras não discutiram o fato de a divisão do número de carrinhos pelas caixas não ser inteiro, já que o resultado da divisão de 2504 por 20, deu 125,2. Como se trata de objetos, o número de carrinhos em cada caixa deve ser inteiro.

Quadro 9: Trecho das considerações realizadas pela pesquisadora acerca das produções do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os quadros completos contendo todos os trechos citados nos quadros acima mencionados, bem como as das demais duplas encontram-se no Apêndice desta pesquisa (APÊNDICES A e B).

A organização dos dados por meio de quadros, permitiu que as informações encontradas ao longo do processo de análise de cada problema ficassem descritas lado a lado, possibilitando a comparação entre os dados de forma mais clara, permitindo assim a procura por similaridades, as quais possibilitaram estabelecer agrupamentos.

Após todo o processo de leitura, descrição, interpretação e inferências sobre as produções dos alunos, iniciou-se a fase dos agrupamentos, em que se buscou agrupar as convergências ou divergências encontradas nos enunciados elaborados, nas resoluções apresentadas e na forma como ocorreram os registros escritos.

Visando facilitar a compreensão sobre qual momento está sendo descrito, foram elaborados agrupamentos separados para os enunciados elaborados e para as resoluções apresentadas. Essa separação foi feita para o material referente ao 5º ano e ao 9º ano. É preciso ainda ressaltar que os agrupamentos construídos levaram em conta os dados apresentados, emergiram dos dados. Em decorrência disso, por mais que se busque convergências entre os dados apresentados pelos dois grupos de alunos, os agrupamentos construídos para cada um deles não são os mesmos.

Os agrupamentos construídos com relação aos enunciados dos problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano estão no Quadro 10, bem como as duplas que os compuseram.

Agrupamentos		Número da DE
A pergunta final do enunciado não depende de um cálculo para ser respondida		DE11
A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão		DE10
Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado		DE5
Enunciados que envolvem proporcionalidade – partição		DE1, DE3, DE4, DE6, DE7, DE9, DE10 e DE11
Não apresentar um problema de divisão		DE8
Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro		DE1, DE3, DE9 e DE11
Tipos de enunciados de problemas elaborados	Problemas-padrão simples	DE2, DE3, DE5, DE7, DE8, DE9, DE10 e DE11
	Problemas-padrão compostos	DE1, DE4 e DE6
Usar palavras para fazer referência à operação de divisão		DE3, DE4, DE7, DE8, DE9 DE10 e DE11

Quadro 10: Agrupamentos referente aos enunciados elaborados pelos alunos do 5º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os agrupamentos construídos com relação as resoluções dos problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano estão no Quadro 11, bem como a indicação das duplas que os compõem.

Agrupamentos	Número da DR
Apresentar uma resposta final	DR1, DR2, DR3, DR4, DR6, DR7, DR8, DR9, DR10 e DR11
Não obter a parte não inteira do quociente nas grandezas contínuas	DR2 e DR10
Não saber operar com o algoritmo da divisão	DR1, DR9 e DR11
Saber usar o algoritmo, mas apresentar erros ao desenvolver os cálculos	DR5, DR6, DR10 e DR11
Usar cálculos auxiliares na resolução do enunciado proposto	DR4, DR6, DR10 e DR11

Usar o algoritmo da divisão em qualquer situação, sem estimativas	DR8
Usar o resto da divisão como resposta ao enunciado proposto	DR7 e DR10
Usar os símbolos “x” ou “÷” na chave	DR3, DR4, DR9 e DR11

Quadro 11: Agrupamento referente às resoluções feitas pelos alunos do 5º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os agrupamentos construídos com relação aos enunciados dos problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano estão descritos no Quadro 12, bem como indicadas as duplas que os compõem.

Agrupamentos		**Número da DE**
A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão		DE9
Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado		DE2, DE6 e DE9
Enunciados que envolvem proporcionalidade – partição		DE1, DE3, DE4, DE5, DE6, DE7 e DE9
Enunciados que revelam conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º ano	Envolver cálculo de área do triângulo	DE8
	Envolver fatoração	DE10
Não apresentar um problema de divisão		DE2
Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro		DE1
Tipos de enunciados de problemas elaborados	Problemas-padrão simples	DE3, DE4 e DE7
	Problemas-padrão compostos	DE1, DE2, DE5, DE6, DE8, DE9 e DE10
Usar palavras para fazer referência à operação de divisão		DE1, DE3, DE4, DE5, DE6 e DE7

Quadro 12: Agrupamentos referente aos enunciados elaborados pelos alunos do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os agrupamentos construídos com relação às resoluções dos problemas de divisão, apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano, estão descritos no Quadro 13, bem como indicadas as duplas que os compõem.

Agrupamentos	**Número da DR**
Apresentar uma resposta final	DR1, DR3, DR4, DR5, DR6, DR7, DR8, DR9, e DR10
Dupla interpretação do enunciado	DR10

Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro	DR7 e DR10

Quadro 13: Agrupamentos referente às resoluções feitas pelos alunos do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Após a construção dos agrupamentos com base nos dados coletados, os quais foram apresentados nos Quadros 10, 11, 12 e 13, realizou-se uma comparação entre os agrupamentos encontrados nos registros dos alunos do 5º ano com os agrupamentos do 9º ano, buscando identificar os que eram semelhantes aos dois anos de escolaridade.

Os agrupamentos de itens encontrados nas elaborações dos enunciados de problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos tanto do 5º quanto do 9º ano estão descritos no Quadro 14, bem como indicadas as duplas que compõem cada um deles.

<table>
<tr><th colspan="2">Agrupamentos</th><th>Número da DE do 5º ano</th><th>Número da DE do 9º ano</th></tr>
<tr><td colspan="2">A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão</td><td>DE10</td><td>DE9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado</td><td>DE5</td><td>DE2, DE6 e DE9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enunciados que envolvem proporcionalidade – partição</td><td>DE1, DE3, DE4, DE6, DE7, DE9, DE10 e DE11</td><td>DE1, DE3, DE4, DE5, DE6, DE7 e DE9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não apresentar um problema de divisão</td><td>DE8</td><td>DE2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro</td><td>DE1, DE3, DE9 e DE11</td><td>DE1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipos de enunciados de problemas elaborados</td><td>Problemas-padrão simples</td><td>DE2, DE3, DE5, DE7, DE8, DE9, DE10 e DE11</td><td>DE3, DE4 e DE7</td></tr>
<tr><td>Problemas-padrão compostos</td><td>DE1, DE4 e DE6</td><td>DE1, DE2, DE5, DE6, DE8, DE9 e DE10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Usar palavras para fazer referência à operação de divisão</td><td>DE3, DE4, DE7, DE8, DE9 DE10 e DE11</td><td>DE1, DE3, DE4, DE5, DE6, e DE7</td></tr>
</table>

Quadro 14: Agrupamentos referentes às elaborações do 5º e do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

O agrupamento de itens presente nas resoluções de problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 5º e do 9º ano está descrito no Quadro 15, bem como as duplas que o compõe.

Agrupamentos	**Número da DR do 5º ano**	**Número da DR do 9º ano**
Apresentar uma resposta final	DR1, DR2, DR3, DR4, DR6, DR7, DR8, DR9, DR10 e DR11	DR1, DR3, DR5, DR6, DR7, DR8, DR9 e DE10

Quadro 15: Agrupamentos referentes às resoluções do 5º e do 9º ano.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os agrupamentos apresentados sintetizam os dados da pesquisa, ou seja, a produção desenvolvida pelas duplas de alunos em ambos os anos escolares. Na sequência estão descritos cada um desses agrupamentos que foram analisados e interpretados à luz da interrogação da pesquisa.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para a realização da análise dos dados, foram consideradas as produções registradas pelas duplas elaboradoras e resolvedoras nos dois momentos de coleta de dados e os diários de campo escritos pela pesquisadora no decorrer do desenvolvimento de ambas as atividades. Com o intuito de facilitar o entendimento sobre os agrupamentos construídos com base na produção escrita dos alunos, criou-se os Organogramas I e II.

O Organograma I descreve os agrupamentos relacionados aos enunciados elaborados e está apresentado da seguinte forma: i) todos os agrupamentos construídos com relação aos enunciados dos problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano; ii) todos os agrupamentos construídos com relação aos enunciados dos problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano; iii) agrupamentos identificados tanto nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano; iv) agrupamentos referentes apenas às elaborações dos enunciados de problemas de divisão apresentados pelas duplas de alunos do 5º ano e v) agrupamentos referentes apenas às elaborações dos enunciados de problemas de divisão apresentados pelas duplas de alunos do 9º ano.

O Organograma II descreve os agrupamentos relacionados às resoluções dos problemas e está apresentado da seguinte forma: i) todos os agrupamentos construídos com relação às resoluções dos problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano; ii) todos os agrupamentos construídos com relação às resoluções dos problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano; iii) agrupamento identificado tanto nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano; iv) agrupamentos referentes apenas às resoluções dos problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano e v) agrupamentos referentes apenas às resoluções dos problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano.

Organograma I

Agrupamentos quanto aos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano

- A pergunta final do enunciado não depende de um cálculo para ser respondida;
- A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão;
- Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado;
- Enunciados que envolvem proporção simples – partição;
- Não apresentar um problema de divisão;
- Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro;
- Tipos de enunciados de problemas elaborados:
  - ❖ Problemas-padrão simples;
  - ❖ Problemas-padrão compostos;
- Usar palavras para fazer referência à operação de divisão.

Agrupamentos quanto aos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano

- A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão;
- Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado;
- Enunciados que envolvem proporção simples – partição;
- Enunciados que revelam conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º ano:
  - ❖ Envolver cálculo de área do triângulo;
  - ❖ Envolver fatoração;
- Não apresentar um problema de divisão;
- Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro;
- Tipos de enunciados de problemas elaborados:
  - ❖ Problemas-padrão simples;
  - ❖ Problemas-padrão compostos;
- Usar palavras para fazer referência à operação de divisão.

Agrupamentos identificados tanto nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano

- A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão;
- Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado;
- Enunciados que envolvem proporção simples - partição;
- Não apresentar um problema de divisão;
- Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro;
- Tipos de enunciados de problemas elaborados:
  - ❖ Problemas-padrão simples;
  - ❖ Problemas-padrão compostos;
- Usar palavras para fazer referência à operação de divisão.

Agrupamento identificado exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano

- A pergunta final do enunciado não depende de um cálculo para ser respondida.

Agrupamentos identificados exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano

- Enunciados que revelam conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º ano:
  - ❖ Envolver cálculo de área do triângulo;
  - ❖ Envolver fatoração.

Organograma II

Agrupamentos quanto às resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano

- Apresentar uma resposta final;
- Não obter a parte não inteira do quociente nas grandezas contínuas;
- Não saber operar com o algoritmo da divisão;
- Saber usar o algoritmo, mas apresentar erros ao desenvolver os cálculos;
- Usar cálculos auxiliares na resolução do enunciado proposto;
- Usar o algoritmo da divisão em qualquer situação, sem estimativas;
- Usar o resto da divisão como resposta ao enunciado proposto;
- Usar os símbolos “x” ou “÷” na chave.

Agrupamentos quanto às resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano

- Apresentar uma resposta final;
- Dupla interpretação do enunciado;
- Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro.

Agrupamento identificado tanto nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano

- Apresentar uma resposta final.

Agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano

- Não obter a parte não inteira do quociente nas grandezas contínuas;
- Não saber operar com o algoritmo da divisão;
- Saber usar o algoritmo, mas apresentar erros ao desenvolver os cálculos;
- Usar cálculos auxiliares na resolução do enunciado proposto;
- Usar o algoritmo da divisão em qualquer situação, sem estimativas;
- Usar o resto da divisão como resposta ao enunciado proposto;
- Usar os símbolos “x” ou “÷” na chave.

Agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano

- Dupla interpretação do enunciado;
- Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro.

Assim, diante do exposto, serão apresentados cada um dos agrupamentos identificados nas produções dos alunos, explicando e exemplificando cada um deles.

4.1 Agrupamento das produções quanto aos enunciados elaborados

Nesta seção discute-se sobre os agrupamentos construídos durante as análises das produções dos alunos, registradas pelas duplas de alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental ao realizarem as elaborações dos enunciados de problemas de divisão. Discute-se primeiro os agrupamentos identificados tanto nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano, na sequência, os agrupamentos identificados exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano e ao final, os agrupamentos identificados exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano, descrevendo e exemplificando cada um deles.

4.1.1 Agrupamentos identificados tanto nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano

Nesta subseção discute-se os agrupamentos identificados tanto nas produções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I quanto nas produções das duplas do 9º ano do Ensino Fundamental II.

- **A pergunta final do enunciado se refere ao resto da divisão**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas elaborados, nos quais a pergunta final do problema se refere ao resto da divisão e não ao quociente, como costuma-se ver rotineiramente.

Este fato ocorreu com duas (02) das vinte e uma (21) duplas participantes mais especificamente com a dupla DE10 do 5º ano e com a dupla DE9 do 9º ano, como ilustra o Quadro 16.

DE/ano	Imagem do enunciado elaborado

DE10/5º ano	Sofia Comprou 455 balas, para distribuir entre 96 Crianças. Quantas balas Sobraram?
DE9/9º ano	Em uma fruteira há 10 maçã, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 19 melancias 2 melões, 5 morangos, 34 cajus, 21 Kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?

Quadro 16: Enunciados elaborados nos quais a pergunta final refere-se ao resto da divisão.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

O enunciado elaborado pela dupla DE10 do 5º ano foi finalizado com a seguinte interrogação: “Quantas balas sobraram?”. Esta pergunta refere-se ao valor a ser encontrado após concluir a divisão de 455 balas entre 95 crianças em quantidades iguais.

Já o enunciado elaborado pela dupla DE9 do 9º ano, apresenta três perguntas a serem respondidas com relação aos dados apresentados no problema. Dessa forma, esse enunciado está inserido nesta categoria pelo fato de uma das perguntas ser “e quantas sobrou?”, referindo-se as frutas que não foram comidas nem por João e nem por sua irmã.

Segundo Cruz e Teles (2020, p. 12) “[...] o resto em uma divisão gera muita dificuldade por parte dos alunos, e o correto tratamento dado ao mesmo depende dos conhecimentos utilizados”.

Isto pode contribuir para o fato de que enunciados que buscam saber sobre o resto encontrado após ser realizada a operação de divisão, não são os mais encontrados nos problemas usados em salas de aula, uma vez que, em geral, busca-se obter o valor do quociente ao resolver problemas envolvendo a operação de divisão.

- **Apresentar números não inteiros no enunciado do problema elaborado**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas, nos quais foram inseridos números não inteiros no momento da elaboração (decimais, fracionários).

Dentre as onze (11) duplas elaboradoras do 5º ano, apenas a dupla DE5 utilizou números não inteiros na elaboração e das dez (10) duplas elaboradoras do 9º ano, três (03) apresentaram enunciados de problemas que envolviam números fracionários e também números decimais, são elas DE2, DE6 e DE9. Os enunciados estão ilustrados no Quadro 17.

Dupla/ano	**Imagem do enunciado elaborado**
DE5/5º ano	Mateus comprou 23 melos e pagou R$30,94. quanto pagaria se tivesse comprado um?
DE2/9º ano	Sabrino foi na fera e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. sendo que cada laranja custo 50 centavos os melão 75 os limão 25 e os cenouras 40 quanto foi o total que ele pagou!
DE6/9º ano	Sophia participou de uma gincana no qual venceu doze brincadeiras Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu???
DE9/9º ano	Em uma fruteira há 10 maça, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 19 melancias 2 melões, 5 morangos, 34 cajus, 21 Kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?

Quadro 17: Enunciados elaborados envolvendo números não inteiros.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

A dupla elaboradora DE5 do 5º ano, utilizou o número R$30,94 para representar o valor a ser pago pelos 23 melões que haviam sido comprados. Logo, para a resolução do problema proposto, a dupla resolvedora deveria realizar a operação de divisão de modo a encontrar o valor pago por cada melão, ou seja, um valor aproximado de R$1,34 reais, que seria também um número decimal.

A dupla DE2 do 9º ano elaborou um enunciado que também envolvia números não inteiros, ao escreverem “cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e as cenouras 40”, eles registraram o valor monetário de cada fruta e legume, embora com registros diferentes. O trecho pode ser reescrito da seguinte forma: “cada laranja custa R$0,50 centavos, cada melão R$0,75 centavos, cada limão R$0,25 centavos e cada cenoura R$0,40 centavos”. Dessa forma, os valores referentes ao custo trata-se de números decimais.

Já as duplas DE6 e DE9 do 9º ano utilizaram em seus enunciados números fracionários, ao descreverem a quantidade de balas com que Sophia ficou após participar de uma gincana e trocar os pontos por balas e, também, para descrever a quantidade de frutas que João comeu.

Segundo Almouloud (2016), o que pode variar nas situações de ensino e de aprendizagem é designado por variável, e estas podem ser escolhidas pelo professor para estarem nos problemas ou situações a serem propostas aos alunos, como por exemplo, a natureza dos números: inteira, decimal, racional. No caso dos dados dessa pesquisa a variável numérica foi escolhida pelas duplas de alunos que elaboraram os enunciados apresentados.

De acordo com Almouloud (2016)

> Uma **variável didática é uma variável cognitiva** que pode ser modificada pelo professor, e que afeta a hierarquia das estratégias de resolução (pelo custo, validade, complexidade). Dito de outra forma, uma **variável didática** de um problema ou situação é uma variável cujos **valores podem ser alterados pelo professor** e cujas modificações podem provocar sensivelmente o comportamento dos alunos em termos de aprendizagem, assim como provocar procedimentos ou tipos de resposta distintos (ALMOULOUD, 2016, p. 121, grifos do autor).

A escolha dos números não inteiros, decimais para representar as unidades monetárias e fracionários para indicar as partes das frutas ou das balas que cada um recebeu, fez com que os problemas elaborados pelos alunos ganhassem um nível de dificuldade maior em relação aos problemas elaborados com números naturais apenas.

Pode-se dizer que foi atingido o que se espera de alunos desde o 5º ano que é resolver operação de divisão envolvendo um número racional com divisor natural e diferente de zero, de modo contextualizado (BRASIL, 2017; PARANÁ, 2018). E no caso dos problemas elaborados por alunos do 9º ano, vai-se além, envolvendo operações em que o divisor também é racional.

- **Enunciados que envolvem proporção simples - partição**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão, que segundo Gitirana *et al*. (2014, p. 60) são classificados como sendo do tipo proporção simples, pertencendo à subclasse partição, no qual “[...] a divisão está articulada ao significado de distribuir ou de partilhar”.

Dentre as onze (11) duplas do 5º ano, dez (10) elaboraram enunciados deste tipo, são elas: DE1, DE2, DE3, DE4, DE5, DE6, DE7, DE9, DE10 e DE11. Dentre as dez duplas do 9º ano, sete delas elaboraram enunciados que pertencem a esta classe de problemas: DE1, DE3, DE4, DE5, DE6, DE7 e DE9. Todos os enunciados estão ilustrados no Quadro 18.

Dupla/ano	Imagem do enunciado elaborado
DE1/5º ano	Luciana comprou 4.308 lapis e 40 borracha e quer colocar esse lapis e borrachar dentro de 23 estojos grande?
DE2/5º ano	Tiago comprou 30 balas Ele gastou ~~em~~ tudo 11/20 Reais quantos custou cada bala?
DE3/5º ano	e) Andreia Tinha 424 balas e Teve que dividir com 6 irmão. Quantas cada irmão vai ter?
DE4/5º ano	Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 sobrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada.
DE5/5º ano	Mateus comprou 23 melão e pagou R$3054. quanto pagaria se tivesse comprado um?
DE6/5º ano	gabriela comprou 5 frutas 5 maça e 5 perar para 10 Queriança quantas deu para cada Quiança

DE7/5º ano	Paula comprou 1510 lapis e prestação dividido po 12. Ele conseguira?
DE9/5º ano	Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 netos. Quantas caixas cada neto recebeu
DE10/5º ano	Sofio Comprou 455 balas, para distribuir entre 96 Crianças. Quantas balas Sobrarom?
DE11/5º ano	Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir?
DE1/9º ano	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?
DE3/9º ano	João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?
DE4/9º ano	Julia tinha R$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para Cada?
DE5/9º ano	Maria tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de maria. E eles irão junta essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber?
DE6/9º ano	Sophia participou de uma gincana na qual venceu doze brincadeiras Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu???

DE7/9º ano	Maria comprou um pacote de bombons, neste pacote continha 65 bombons, sua intenção era dividir estes bombons com suas 5 amigas. Quantos bombons cada amiga ganhou?
DE9/9º ano	Em uma fruteira há 10 maça, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 19 melancias 2 melões, 5 morangos, 34 cajus, 21 kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?

Quadro 18: Enunciados elaborados envolvendo proporcionalidade - partição.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Em todos esses enunciados, tanto do 5º quanto do 9º ano, são dados um conjunto maior e o número de partes em que o conjunto maior deve ser distribuído e busca-se identificar o valor de cada parte.

Segundo Gitirana *et al.* (2014, p.58). “[...] esta classe de problema de proporção simples é denominada de “partição” (ou de distribuição)”, ou seja, “[...] quando o valor correspondente a certa quantidade é conhecido e o que se busca é o valor correspondente à unidade”.

Os problemas de divisão do tipo “partição” têm sido bem explorados, como é possível ver em estudos como os de Soppelsa (2016); Oliveira (2015); Gitirana *et al*. (2014); Lautert e Spinillo (2002).

> [...] a literatura mostra que problemas de partição são mais fáceis [...]. Uma das explicações para isto é que a noção inicial que a criança tem sobre a divisão, derivada das experiências sociais, é a de repartir um todo em partes iguais até que este todo se esgote. As noções sobre a divisão decorrem da idéia (*sic*) de distribuir, como evidenciam inúmeros estudos [...]. A ação de compartilhar baseia-se na idéia (*sic*) de distribuir quantidades iguais entre cada receptor a partir da correspondência um-a-um para cada conjunto, até que se esgotem os elementos a serem distribuídos ou que reste um número insuficiente de elementos para continuar a distribuição (no caso de haver resto). Importante ressaltar que esta idéia (*sic*) corresponde ao princípio envolvido nos problemas de partição (LAUTERT e SPINILLO, 2002, p. 238-239).

Soppelsa (2016, p. 5), considera que “[...] o modelo partitivo seja mais natural para o aluno, uma vez que se utiliza com grande frequência desse modelo em suas ações práticas de divisão”, como para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, exemplificado no texto da BNCC. Nesse documento espera-se que no 5º ano os alunos sejam capazes de resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas (BRASIL, 2017).

Esse foi sem dúvidas o agrupamento que mais teve similaridades, foram dezessete (17) produções identificadas durante a análise dos dados, corroborando com o que afirmam as pesquisas mencionadas acima.

- **Não apresentar um problema de divisão**

Neste agrupamento destaca-se o fato de que no momento da coleta de dados a pesquisadora solicitou que as duplas de alunos elaborassem um problema que envolvesse a operação de divisão.

No entanto, durante as análises das produções das duplas de alunos, identificou-se que duas (02) das onze (11) duplas do 5º ano, mais especificamente as duplas DE7 e DE8 e uma (01) dupla DE2 do 9º ano, não contemplaram a proposta da pesquisadora. Tais duplas apresentaram os seguintes problemas como mostra o Quadro 19.

Dupla/ano	Imagem do enunciado elaborado
DE8/5º ano	Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos Quantos carilho Orlando ficou?
DE2/9º ano	Sabrino foi na fera e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. Sendo que cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e os cenouras 40 quanto foi o total que ele pagou ?

Quadro 19: Imagem dos enunciados que não se tratam de um problema de divisão.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

No momento das entrevistas, nenhuma das duas duplas resolvedoras, a saber, DR7 do 5º ano e DR6 do 9º ano relataram que o enunciado do problema que haviam resolvido, não se tratava de um problema de divisão.

Destaca-se que a dupla DR7 do 5º ano não realizou a operação como estava descrita no enunciado do problema. A dupla apenas identificou os valores numéricos e aplicou o algoritmo da divisão.

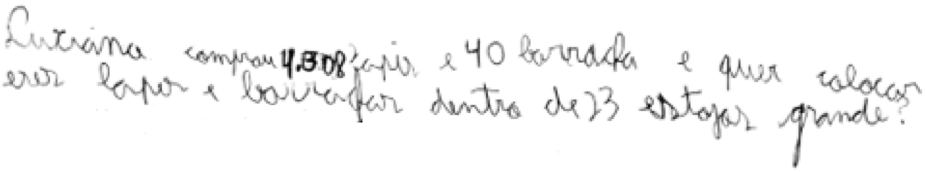
Segundo Gitirana *et al.* (2014, p.119) “[...] em diversas ocasiões, as resoluções adotadas pelos estudantes são fortemente marcadas pela linguagem presente no enunciado do problema – o que pode provocar erros”. Dessa forma compreende-se que possivelmente a dupla resolvedora DR7 do 5º ano, ao ler o enunciado do problema e identificar a palavras que faziam referência à operação de divisão “dividiu”, executou o algoritmo, sem de fato notar que o que estava sendo tratado na questão, seria resolvido por outra operação.

Por outro lado, a dupla DR6 do 9º ano, executou corretamente todos os cálculos que foram solicitados no enunciado do problema elaborado pelos colegas, que envolvia multiplicações e adições, e não a operação de divisão como solicitado pela pesquisadora.

- **Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos, nos quais não foram considerados no momento da elaboração, que determinados objetos não podem ser repartidos sem perderem suas características, permanecendo íntegros, como é o caso de lápis e carrinhos, por exemplo. As quantidades usadas nos enunciados, após uma divisão exata não fornece uma quantidade inteira.

Esse aspecto foi identificado nos enunciados elaborados pelas duplas DE1, DE3, DE9 e DE11 do 5º ano e também pela dupla DE1 do 9º ano, como mostra o Quadro 20.

Dupla/ano	Imagem do enunciado elaborado
DE1/5º ano	 Luxiana comprou 4.308 lapis e 40 barracha e quer colocar eses lapis e barrachas dentro de 23 estojos grande?

DE3/5º ano	e) Lindreia Tinha 424 balas e Tive que dividir com 6 irmaõ. Quontas cada irmaõ vai Ter?
DE9/5º ano	Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 netos. Quantas caixas cada neto recebeu
DE11/5º ano	Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir?
DE1/9º ano	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?

Quadro 20: Imagem dos enunciados nos quais não foi considerada a divisão de grandezas discretas.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Os enunciados elaborados pelas duplas DE1, DE3, DE9 e DE11 do 5º ano, apresentaram números que ao serem divididos não resultam em resto zero, por exemplo, 4308 lápis e 40 borrachas em 23 estojos ou 28 balas entre 20 crianças, apresentam como resto um número menor que o dividendo, não sendo possível realizar uma nova distribuição dos objetos (balas, lápis, borrachas) em parte iguais. Ao efetuar a divisão 40 dividido por 23 por exemplo, em cada estojo teria uma borracha e sobrariam 17 borrachas, as quais não podem ser "cortadas" e distribuídas, pois, estariam perdendo suas propriedades particulares.

Da mesma forma, o enunciado elaborado pela dupla DE1 do 9º ano. O enunciado elaborado pela dupla DE1 considera que Joãozinho tem 1252 carrinhos em sua coleção e ao dobrar esse número como ele deseja, obterá 2504 carrinhos. Entretanto, ao colocarem a pergunta "Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa?" a dupla não se deu conta que ao dividir 2504 por 20, sobraria resto 4. De modo que esses 4 carrinhos restantes não podem ser divididos, pois deixariam de ser carrinhos inteiros e passariam a ser partes de um carrinho em cada caixa.

É importante destacar que as quatro duplas de 5º ano que resolveram as situações que compõem esse agrupamento erraram nos cálculos efetuados ou no emprego do algoritmo, mas não dividiram o resto que encontraram. Já a dupla do 9º ano, ao resolver a situação proposta, continuou com a divisão do resto até obter resto zero, desconsiderando que se tratava de grandeza discreta. Essa situação será discutida no agrupamento relativo às resoluções.

- **Tipos de enunciados de problemas elaborados**

Este agrupamento contempla os enunciados apresentados para os quais, em sua resolução é necessária a aplicação de algoritmos já aprendidos anteriormente, não exigindo qualquer tipo de estratégia em suas resoluções, ou seja, "[...] a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo" (DANTE, 2010, p. 25). São os problemas que Butts (1997, p. 34) classifica como **"problemas de aplicação"**, que incluem os problemas que para serem resolvidos requerem a formulação do problema simbolicamente e depois a manipulação dos símbolos por meio de algoritmos diversos.

Ainda de acordo com Dante (2010, p. 25) "[...] o objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos por meio dos algoritmos das quatro operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existente entre essas operações e seu emprego nas situações do dia a dia".

Dessa forma, esse tipo de problema não tem como finalidade desafiar ou instigar a curiosidade dos alunos, por se tratar de problemas de simples resolução.

Os enunciados do tipo problemas-padrão podem ser divididos em duas categorias: i) problemas-padrão simples, ii) problemas-padrão composto, os quais são listados a seguir.

❖ **Problemas-padrão – simples**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos de ambos os anos, nos quais era necessário realizar apenas uma operação para a resolução do problema proposto.

Dentre as onze (11) duplas do 5º ano, nove (09) elaboraram enunciados deste tipo, são elas: DE2, DE3, DE5, DE7, DE8, DE9, DE10 e DE11. Dentre as dez (10) duplas do 9º ano, três (03) delas elaboraram enunciados que pertencem a esta classe de problemas: DE3, DE4 e DE7. Todos os enunciados estão ilustrados no Quadro 21.

Dupla/ano	Imagem do enunciado elaborado
DE2/5º ano	Tiago comprou 30 balas Ele gastou ~~[illegible]~~ tudo R$/20 Reais quantos centavos cada bala?
DE3/5º ano	c) Andreia Tinha 424 balas e Tive que dividir com 6 irmaõ. Quantas cada irmaõ vai Tir?
DE5/5º ano	Mateus comprou 23 melos e Pag[illegible] R$3054. quanto pagaria se tivesse comprado um?
DE7/5º ano	Paula comprou 1510 lapis e prestação dividio po 12. Ele conseguira?
DE8/5º ano	Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos Quantos carilho Orlando ficou?
DE9/5º ano	Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 netos. Quantas caixas cada neto recebeu
DE10/5º ano	Sofia Comprou 455 balas, para distribuir entre 96 Crianças. Quantas balas Sobraram?
DE11/5º ano	Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir?
DE3/9º ano	João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?

DE4/9º ano	Julia tinha R$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada?
DE7/9º ano	Maria comprou um pacote de bombons, neste pacote continha 65 bombons, sua intenção era dividir estes bombons com suas 5 amigas. Quantos bombons cada amiga ganhou?

Quadro 21: Enunciados elaborados do tipo problemas-padrão – simples.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Com relação à quantidade de operações envolvidas em problemas-padrão simples, pode-se considerar que “[...] se a solução do problema envolve apenas uma operação, ele é mais simples do que aqueles que requerem duas ou mais operações” (DANTE, 2010, p. 55). Dessa forma, é necessário que o aluno apenas retire do enunciado as informações necessárias para o desenvolvimento de um único algoritmo, podendo assim obter o resultado final de forma consideravelmente mecânica.

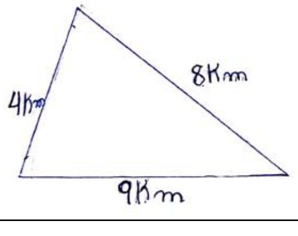
- ❖ **Problemas-padrão – compostos**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos de ambos os anos, nos quais eram necessárias duas ou mais operações para a resolução, independentemente de serem operações de divisão ou não.

Dentre as onze (11) duplas do 5º ano, três (03) descreveram enunciados os quais envolviam mais de uma operação para a resolução, são elas DE1, DE4 e DE6. Já no 9º ano, dentre as dez (10) duplas elaboradoras, sete (07) apresentaram em seus enunciados a necessidade da realização de mais que uma operação para resolver o problema proposto, são elas DE1, DE2, DE5, DE6, DE8, DE9 e DE10.

No Quadro 22 estão ilustrados os enunciados dos problemas elaborados pelas duplas de alunos do 5º e do 9º ano.

Dupla/ano	Imagem do enunciado elaborado
DE1/5º ano	Luciana comprou 4.308 lapis e 40 borracha e quer colocar eses lapis e borrachas dentro de 23 estojos grande?

DE4/5º ano	Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seus 5 filhos, 7 sobrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada.
DE6/5º ano	Gabriela comprou 5 frutas 5 maçã e 5 peras para 10 crianças quantas deu para cada criança
DE1/9º ano	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?
DE2/9º ano	Sabrina foi na feira e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. Sendo que cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e os cenouras 40 quanto foi o total que ele pagou!
DE5/9º ano	Mario tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de mario. E eles irão juntar essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber?
DE6/9º ano	Sophia participou de uma gincana na qual venceu doze brincadeiras Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu???
DE8/9º ano	Descubra a área do sítio de Edmilson. 

DE9/9º ano	Em uma fruteira há 10 maça, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 19 melancias 2 melões, 5 morangos, 34 cajus, 21 kiwi e 1 abacaxi. João comeu $\frac{1}{2}$ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?
DE10/9º ano	Fatore o número 729, cinco vezes pelo mesmo número (primo), até chegar nele mesmo (o número que está dividindo)

Quadro 22: Imagem dos enunciados que envolvem duas ou mais operações para a resolução.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Todos os enunciados apresentados no Quadro 22, foram elaborados visando a necessidade da aplicação de mais que uma operação para a sua resolução. Mas houve variação na quantidade e no tipo de operações envolvidas.

O enunciado elaborado pela dupla DE4 do 5º ano por exemplo, descreve a necessidade de realizar duas operações:

- Somar a quantidade de pessoas, (filhos, sobrinhos e afilhados);
- Dividir a quantidade de brinquedos entre as pessoas.

Já o enunciado elaborado pela dupla DE1 do 9º ano, envolve a realização de quatro operações:

- Duplicar a quantidade de carrinhos;
- Descobrir quanto pagará pelos carrinhos novos;
- Dividir o novo total de carrinhos em 20 caixas;
- Descobrir qual o valor a ser pago em cada uma das 8 parcelas.

Embora estejam classificados na mesma categoria, o tipo e a quantidade de operações necessárias para resolver os respectivos problemas não foram os mesmos.

Dos três (03) enunciados do 5º ano classificados nesse agrupamento, dois (02) envolviam uma adição e na sequência uma divisão (DE4 e DE6). O outro envolveu duas divisões (DE1). Então foram no máximo duas operações envolvidas em cada caso, sendo elas adição e divisão.

Já no 9º ano, dos dez (10) enunciados produzidos, em sete (07) eram necessários mais que uma operação. Mas a adição apareceu em apenas um deles.

Nos demais foram operações envolvendo multiplicação e divisão. No enunciado elaborado pela dupla DE1, duas multiplicações e duas divisões; no da dupla DE2, quatro multiplicações e uma soma e não teve divisão; nos problemas elaborados pelas duplas DE5, DE6 e DE8, uma multiplicação e uma divisão; a dupla DE9, envolveu no seu enunciado uma multiplicação, uma adição e duas divisões e a dupla DE10, 6 divisões (fatoração por 3).

Esse agrupamento mostrou que os alunos tanto do 5º quanto do 9º ano do Ensino Fundamental alcançaram os objetivos apresentados no Referencial Curricular do Paraná (2018), o qual descreve como orientações que os alunos sejam capazes de elaborar e resolver problemas que envolvam mais que uma operação, destacando a multiplicação e a divisão e, também, que utilizem números naturais e racionais.

É importante destacar, que mesmo sendo a minoria das duplas do 5º ano que propuseram problemas que necessitavam da realização de mais que uma operação para serem resolvidos, os objetivos destacados no documento paranaense estão sendo alcançados. Evidentemente isso ficou explicitado de modo mais expressivo nas produções das duplas de 9º ano, mas já é um indício de que os alunos estão se apropriando das habilidades matemáticas estabelecidas para esse ano escolar.

Destaca-se também o fato de que os enunciados elaborados utilizando a fatoração e o cálculo de área do triângulo, apesar de diferiram dos demais enunciados apresentados, ainda assim estão contemplados na categoria apresentada por Butts (1997, p. 34) denominada "**problemas de aplicação**", por se tratar de problemas que requerem a formulação do problema simbolicamente e também pela manipulação de símbolos por meio de algoritmos diversos.

- **Usar palavras para fazer referência à operação de divisão**

Ao analisar os enunciados dos problemas de divisão elaborados pelas duplas de alunos do 5º e do 9º ano, buscou-se identificar palavras que faziam referência à operação a ser executada para a resolução do problema elaborado.

Como de antemão foi solicitado que os alunos elaborassem problemas de divisão, as palavras mais utilizadas nos problemas que remetiam a essa operação foram dividir, dividiu e distribuir. No Quadro 23 estão listadas as palavras e as duplas que as usaram, seja no 5º ou no 9º ano.

Palavra usada	Dupla do 5º ano	Dupla do 9º ano
Distribuir	DE10, DE11	DE5
Dividir, Dividiu e Dividio	DE3, DE4, DE7, DE8, DE9	DE1, DE3, DE4, DE6, DE7

Quadro 23: Palavras usadas pelas duplas para fazer referência à operação de divisão.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

A análise do Quadro 23 mostrou que sete (07) das onze (11) duplas do 5º ano e seis (06) das dez (10) duplas do 9º ano utilizaram em seus enunciados palavras que faziam referência à necessidade do uso da operação de divisão para a resolução dos problemas, ou seja, deixaram explicita a operação a ser utilizada para a resolução do problema, como mostra o Quadro 24.

Palavra usada	Enunciado elaborado pelo 5º ano	Enunciado elaborado pelo 9º ano
Distribuir	Sofia comprou 455 balas, para distribuir entre 96 crianças. Quantas balas sobraram? (enunciado elaborado pela dupla DE10).	Mario tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de Mario. E eles irão juntar essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber? (enunciado elaborado pela dupla DE5).
	Maria tem 28 balas, para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir? (enunciado elaborado pela dupla DE11).	
Dividir e Dividiu	Andreia tinha 424 balas e teve que dividir com 6 irmão. Quantas cada irmão vai ter? (enunciado elaborado pela dupla DE3).	Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x? (enunciado elaborado pela dupla DE1).
	Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 subrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada. (enunciado elaborado pela dupla DE4).	João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou? (enunciado elaborado pela dupla DE3).
	Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos. Quatos carilho Orlando ficou? (enunciado elaborado pela dupla DE8).	Julia tinha R$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada? (enunciado elaborado pela dupla DE4).
	Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 neto. Quantas caixas cada neto recebeu (enunciado elaborado pela dupla DE9).	Sophia participou de uma gincana na qual venceu doze brincadeiras Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou dom $\frac{1}{3}$ das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu??? (enunciado elaborado pela dupla DE6).
	Paulo comprou 1510 lapis e prestação dividio po 12. Ele consegira? (enunciado elaborado pela dupla DE7).	Julia tinha R$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada? (enunciado elaborado pela dupla DE7).

Quadro 24: Enunciados[4] com palavras que fazem referência ao uso da operação de divisão.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

O problema elaborado pela dupla DE8 do 5º ano "Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos. Quatos carilho Orlando ficou?", apesar de constar nesse quadro por apresentar a palavra "dividiu" não é um problema de divisão como mencionado em agrupamento já discutido. De qualquer forma é significativo o número de enunciados apresentados tanto pelos alunos do 5º, quanto do 9º ano, em que se explicita tratar-se de um problema de divisão.

De acordo com Nehring (2001)

> [...] tudo o que consideramos geralmente como organização de um texto resulta da interação entre dois níveis de descrições: um relativo ao conhecimento e outro relativo a estratégias que são fundamentais [...]. Duval (1995:326) chama, respectivamente, estes dois níveis de descrições de ***conteúdo cognitivo do texto e organização redacional*** (NEHRING, 2001, p.57, grifos da autora).

Assim,

> [...] as formas diferentes de dizer algo no texto ligam-se intrinsecamente às variações redacionais, possíveis de serem realizadas, considerando-o como algo em transformação. Estas variações dependem das situações e dos objetos aos quais a semântica e o conteúdo cognitivo se referem (NEHRING, 2001, p. 60).

Pode-se dizer, que as duplas de alunos, utilizaram palavras que faziam referência à operação de divisão para facilitar a interpretação do enunciado pela dupla que resolveria o problema, ou simplesmente por considerarem que para que o enunciado estivesse completo fosse necessário a descrição do valor do divisor, valor do dividendo e a palavra de referência indicando ser uma divisão. Problemas com todos esses elementos são os mais comuns em sala de aula.

4.1.2 Agrupamento identificado exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano

[4] Os enunciados foram copiados fielmente do documento original.

Nesta subseção discute-se o agrupamento que se refere ao enunciado elaborado pela dupla de alunos do 5º ano que não apareceu nas produções dos alunos do 9º ano.

- **A pergunta final do enunciado não depende de um cálculo para ser respondida**

Neste agrupamento, destaca-se que a pergunta final descrita no enunciado do problema de divisão busca saber se a resolução seria possível, não havendo necessidade de apresentar um cálculo numérico para responder a mesma.

Dentre as onze (11) duplas do 5º ano, este fato ocorreu uma única vez, com a dupla DE11, a qual no momento da elaboração do enunciado, descreveu como pergunta final do problema “Ela vai conseguir?” como ilustra a Figura 25.

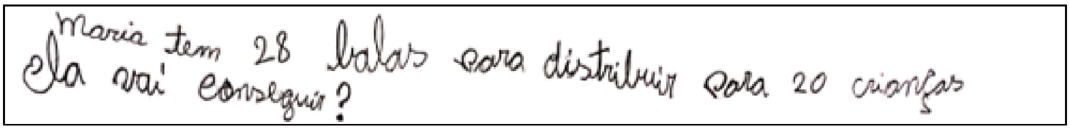


Figura 25: Enunciado do problema elaborado pela dupla DE11.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Neste enunciado, considerando os valores apresentados pela dupla elaboradora, identifica-se que Maria conseguiria dividir 28 balas entre 20 crianças, uma vez que 28 é maior que 20, logo, cada criança receberia 1 bala e ainda sobrariam 8 balas, não sendo necessária a realização de operações para responder à pergunta proposta no enunciado.

4.1.3 Agrupamentos identificados exclusivamente nos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano

Nesta subseção discute-se os agrupamentos que se referem aos enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 9º ano que não apareceram nas produções dos alunos do 5º ano.

- **Enunciados que revelam conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º ano**

Este agrupamento contempla os enunciados de problemas de divisão elaborados nos quais as duplas de alunos do 9º ano buscaram incorporar conhecimentos adquiridos nos últimos quatro anos da sua vida escolar. Das dez duplas elaboradoras do 9º ano, duas delas elaboraram enunciados que mostram essas incorporações como cálculo de área de triângulo e fatoração.

- **Envolver cálculo de área do triângulo**

O enunciado do problema de divisão elaborado pela dupla DE8 apresenta um triângulo representando "o sítio de Edmilson", no qual a dupla resolvedora deveria encontrar a área do mesmo, como mostra a Figura 26.

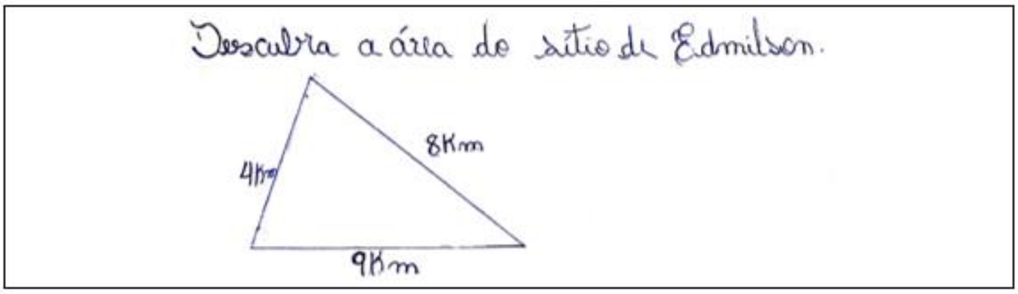


Figura 26: Enunciado do problema elaborado pela dupla DE8.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

A dupla elaboradora relatou no momento da entrevista que o objetivo era que os colegas ao calcularem a área do triângulo usassem a fórmula ($\frac{bxh}{2}$), em que b é a base e h a altura do triângulo. Para a dupla elaboradora, como esse cálculo envolve dividir valores, estariam propondo um problema de divisão. Porém, o desenho proposto, que se tratava de um triângulo qualquer, não ajudou para este tipo de resolução, usando apenas essa fórmula. Neste caso, era necessário que a dupla resolvedora DR5, encontrasse primeiro a altura relativa a um dos lados do triângulo, para que assim pudesse usar a fórmula e chegar a fazer a divisão. Vale ressaltar que os alunos não mencionaram que seria possível resolver o problema usando a fórmula de Heron ou inscrevendo uma circunferência no triângulo.

O enunciado deste problema também mostra, que a dupla elaboradora usou mais de um tipo de registro de representação para descrever o enunciado, são eles: o registro em linguagem materna, o registro figural e o registro numérico.

Segundo Gitirana *et al*. (2014, p.113) “[...] o aluno deve ser sempre estimulado a usar simultaneamente, de forma combinada ou alternativa, diferentes sistemas de representação em sala de aula”, principalmente pelo fato de que os objetos matemáticos não são algo palpáveis e visíveis como ocorre em outras áreas do conhecimento.

Tomando como exemplo o número “1”. Não é possível ver o número 1 “andando por aí” como vê-se um carro ou uma bicicleta, o que se vê são as diferentes formas de representação do mesmo, como a forma numérica (1), em linguagem materna (um) dependendo do idioma usado pelo país em questão, em forma de representação pictórica (◊), etc. Assim, o uso de diferentes tipos de representação é essencial tanto no ensino, quanto para a aprendizagem de matemática.

❖ **Envolver fatoração**

Este agrupamento contempla o enunciado elaborado pela dupla DE10, a qual colocou como situação a ser resolvida pela dupla de colegas uma fatoração, como mostra a Figura 27 a seguir.

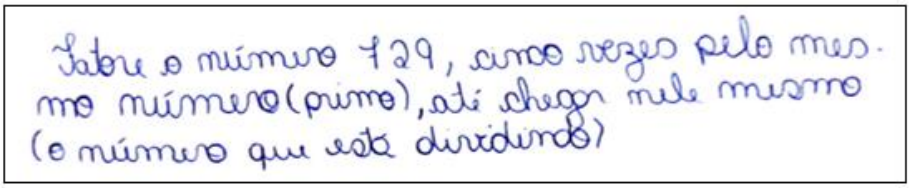

Fatore o número 729, cinco vezes pelo mesmo número (primo), até chegar nele mesmo (o número que está dividindo)

Figura 27: Enunciado do problema elaborado pela dupla DE10.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

É possível perceber que, mesmo não estando explícita a necessidade do uso da operação de divisão neste enunciado, ela estava envolvida e mais que uma vez. Considerando que fatorar é escrever um número como uma multiplicação de números naturais na qual todos os fatores são primos, era necessário dividir o 729 cinco vezes, como indicado no enunciado, pelo número procurado. Nesse caso, além de buscar o quociente das divisões, que se transformava em dividendo da divisão seguinte, foi necessário também encontrar o divisor, que era o 3 em todas elas.

Não é comum encontrar problemas em que se procura o divisor ou o dividendo de uma operação, e nesse caso os alunos que propuseram o problema conseguiram isso. Eles foram além do que se esperava deles, provavelmente pelo fato de não usarem uma situação corriqueira envolvendo problemas de divisão.

Pode-se afirmar que foram criativos e que incorporaram na sua elaboração os conhecimentos que adquiriram depois do 5º ano.

4.2 Agrupamento das produções quanto às resoluções apresentadas

Nesta seção discute-se sobre os agrupamentos construídos durante as análises das produções registradas pelas duplas de alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental quanto às resoluções dos problemas de divisão. Discute-se primeiro o agrupamento identificado tanto nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano, na sequência, os agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano e depois os agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano, descrevendo e exemplificando cada um deles.

4.2.1 Agrupamento identificado tanto nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º quanto do 9º ano

Nesta subseção discute-se o único item que foi identificado tanto nas produções das duplas de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental I, quanto nas produções das duplas de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, relativas às resoluções dos problemas de divisão.

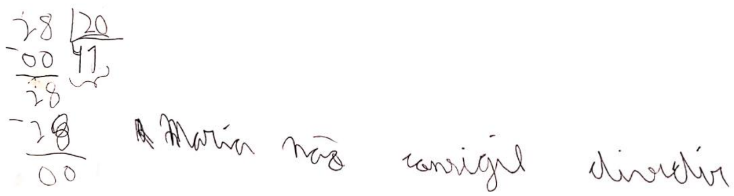
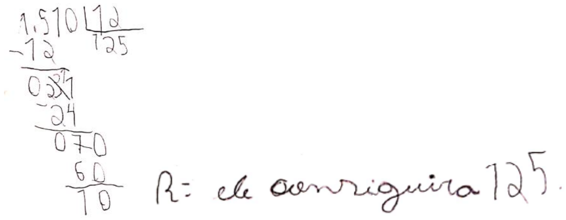
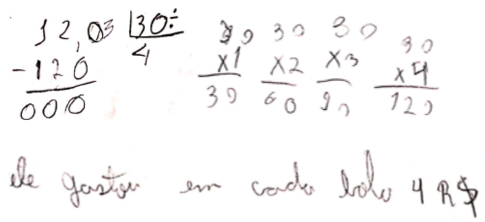
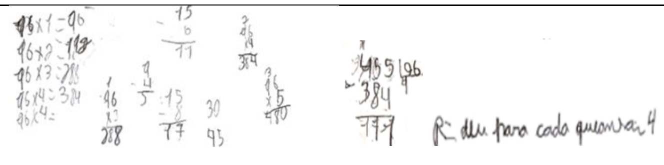
Há três procedimentos que foram observados nas resoluções das duplas do 5º ano que se pode dizer são os hábitos da aula ou as exigências do professor (SAIZ, 2001). Os três procedimentos que foram frequentes inicialmente nas produções dos alunos do 5º ano, são: i) usar o x ou ÷ na chave; ii) apresentar uma resposta final; e iii) usar cálculos auxiliares na resolução (multiplicações, subtrações e adições).

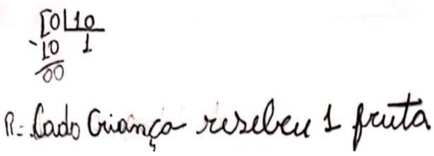
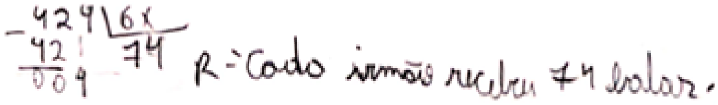
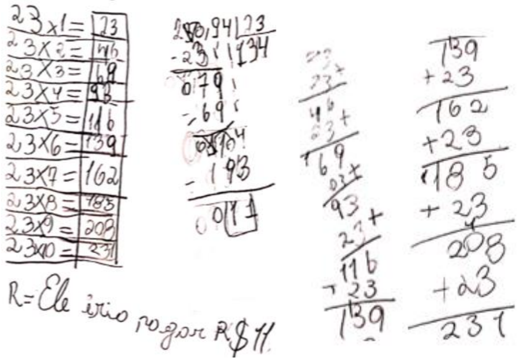
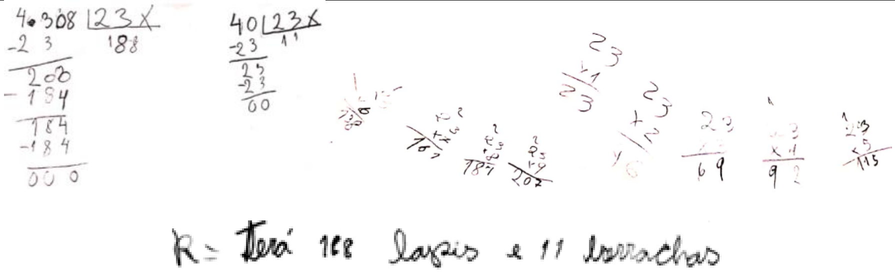
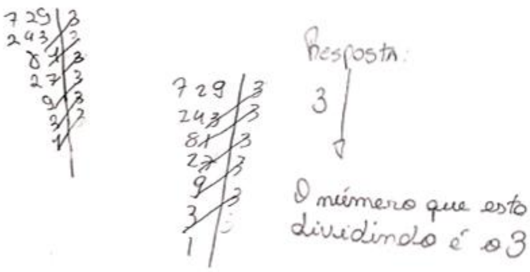
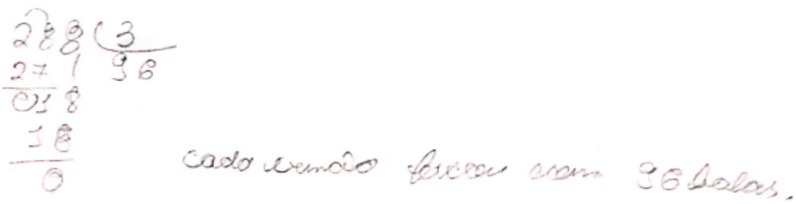
No entanto, apenas um desses aspectos, a apresentação de uma resposta final, se manteve frequente nas produções dos alunos do 9º ano.

- **Apresentar uma resposta final**

Foi possível identificar que nove (09) das dez (10) duplas resolvedoras do 9º ano apresentaram uma resposta final escrita por extenso ao problema que resolveram. São elas: DR1, DR3, DR4, DR5, DR6, DR7, DR8, DR9 e DR10. Apenas a dupla DR2 não apresentou.

Dentre as onze (11) duplas resolvedoras do 5º ano, apenas a dupla DR5 não apresentou uma resposta escrita por extenso, de modo a responder à pergunta final solicitada no problema de divisão proposto, como mostra o Quadro 25.

Dupla/ano	Imagem da resolução apresentada
DR1/5º ano	
DR2/5º ano	
DR3/5º ano	
DR4/5º ano	
DR6/5º ano	
DR7/5º ano	

DR8/5º ano	
DR9/5º ano	
DR10/5º ano	
DR11/5º ano	
DR1/9º ano	
DR3/9º ano	

DR4/9º ano	208 ∟2 104 Joãu; 104 ∟2 52 Irmã; 208 − 156 = 52 R: João comeu 104 frutos. Sua Irmã comeu 52 frutas sobrou 52 frutos
DR5/9º ano	4 × 9 = 36; 36 × 8 = 288; 288 ∟2 144 R: 144 km
DR6/9º ano	laranjas: 5 × 0,50 = 2,50; melão: 7 × 0,75 = 5,45 limão: 10 × 0,25 = 2,50; Cenouro: 5 × 0,40 = 2,00 2,50 + 2,00 + 5,45 + 2,50 = 12,45 R$: 12,45
DR7/9º ano	1252 × 2 = 2504; 1252 × 4 = 5008; 2504 ∟20 125,2; 5008 ∟8 626 R: Ele vai Ter 2504 carrinhos ele vai pagar 5008 ele Terá 125,2 carrinho em cada Caixa em 8x ele pagará 626.
DR8/9º ano	65 65 ∟5 1313 R: Cada irmão recebeu R$ 13.13,00.
DR9/9º ano	45 ∟5 9 R: Cada um ganhou 9 bombons.

DR10/9º ano	20 | 6 -18 3,33... 20 -18 20 -18 0 20 | 5 -20 4 0 R= 3,33 ou 4 (obs: o problema está confuso para entender)

Quadro 25: Imagem das respostas ao problema escritas por extenso.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Esse hábito, fomentado em sala de aula (SAIZ, 2001), permite a identificação da resposta final aos problemas (sejam de divisão ou não) apresentadas pelos alunos em suas resoluções, destacando de forma escrita qual a resposta que eles consideram como sendo a correta.

A apresentação de uma resposta final escrita por extenso, possibilitou a identificação da utilização das resoluções por algumas duplas, especialmente as que usaram o resto da divisão como resposta ao problema, como é o caso da dupla resolvedora DR7 do 5º ano ao resolver o problema elaborado pela dupla DE8. A dupla apresentou como resposta final o resto encontrado após efetuar a divisão, como mostra o Quadro 26.

Enunciado elaborado pela dupla DE8	Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos quantos carilho Orlando ficou?
Resolução apresentada pela dupla DR7	250 | 45 -225 5 025 R= Ele ficara com 25 carrinhos.

Quadro 26: Enunciado elaborado pela dupla DE8 e resolvido pela dupla DR7.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Embora o problema para ser resolvido de modo correto precisasse de uma operação de subtração, a dupla resolvedora mostrou saber usar corretamente o algoritmo da divisão. Se não houvesse a apresentação da resposta final escrita por extenso, poder-se-ia não perceber a interpretação dos alunos, diferente da imaginada por nós, afinal o algoritmo da divisão foi desenvolvido corretamente.

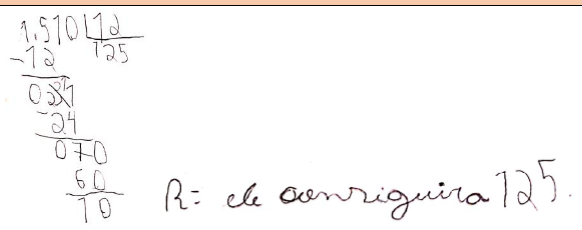
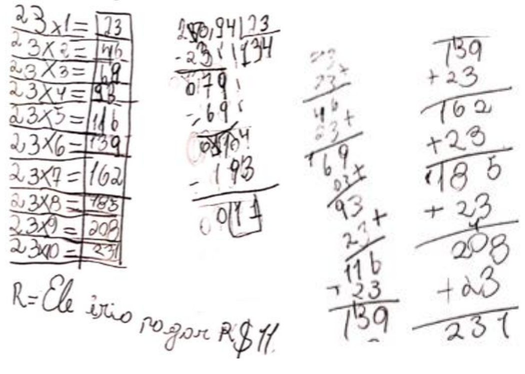
4.2.2 Agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano

Nesta subseção discute-se os agrupamentos que se referem às resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 5º ano e que não figuram nas produções dos alunos do 9º ano.

- **Não obter a parte não inteira do quociente nas grandezas contínuas**

Este agrupamento é composto pelas resoluções das duplas de alunos do 5º ano, DR2 e DR10, que ao chegarem em um resto menor que o divisor, não seguiram com o desenvolvimento do cálculo, encontrando apenas a parte inteira do quociente embora os problemas tratassem de grandezas contínuas, no caso, valores monetários.

O Quadro 27 ilustra essa situação.

DR	**Imagem da resolução**
DR2	
DR10	

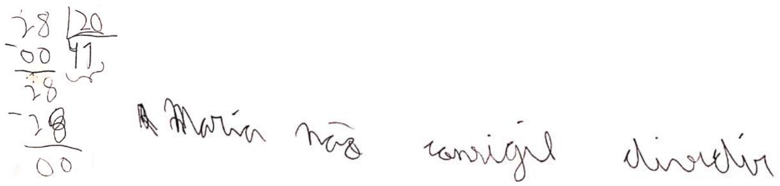
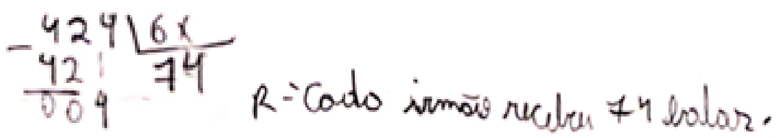
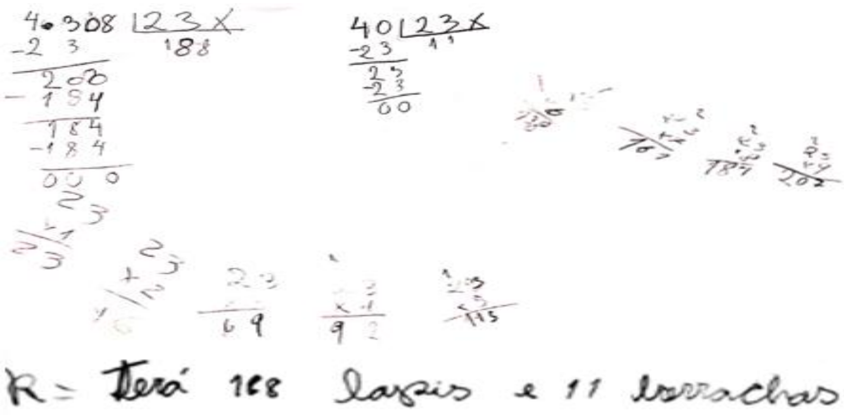
Quadro 27: Ilustrações das resoluções apresentadas pelas duplas DR2 e DR10.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Segundo Borba e Selva (2006, p. 14) "[...] esta estratégia pode ter sua base no próprio contrato didático realizado em sala de aula, em que o professor ao trabalhar com os números naturais, muitas vezes diz às crianças que ao acharem um resto, o mesmo deve ser deixado".

No entanto, ressalta-se que uma das habilidades preconizadas nos documentos oficiais é justamente que os alunos de 5º ano operem com divisão envolvendo um número racional com divisor natural de modo contextualizado. (BRASIL, 2017; PARANÁ, 2018). Mas isso não tem sido o que se vê com frequência acontecer nas aulas do 5º ano.

- **Não saber operar com o algoritmo da divisão**

Neste agrupamento foram consideradas as duplas que não souberam usar o algoritmo da divisão de maneira correta, embora o façam de formas diferentes. Dentre as onze (11) duplas resolvedoras do 5º ano, identifica-se três (03), DR1, DR9 e DR11, as quais mesmo tendo "montado" o algoritmo da divisão corretamente, não perceberam que havia incoerência com o resultado dado, como mostra o Quadro 28.

DR	Imagem da resolução
DR1	
DR9	
DR11	

Quadro 28: Ilustrações das resoluções nas quais as duplas não souberam usar o algoritmo.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

As duplas DR1, DR9 e DR11, escolheram corretamente o algoritmo da divisão e o montaram de maneira correta, mas apresentaram erros durante o desenvolvimento do mesmo. A dupla DR9 por exemplo, apresentando alguma ideia de que o quociente não poderia ser apenas 7, e não sabendo o que fazer com o resto 4 encontrado, apenas o registraram junto com o 7 no quociente. Por outro lado, a dupla DR1 não soube desenvolver as subtrações envolvidas no processo de resolução da divisão.

Essa resolução da dupla DR1 e a resolução da dupla DR11 indicam um outro tipo de resolução frequente: buscar encontrar o resto zero da divisão de qualquer maneira. Não importa se para isso, seja preciso “forçar”, uma vez que os valores apresentados nos enunciados, não resultariam em resto zero após efetuar a divisão.

Na análise das produções apresentadas pelas duplas resolvedoras DR1 e DR11, notou-se que apesar dos cálculos estarem errados nas três divisões apresentadas, ambas as duplas montaram o algoritmo corretamente, como observa-se nas ilustrações do Quadro 28, de modo que a dupla DR1 realizou o cálculo “28 dividido por 20” e a dupla DR11 realizou dois cálculos, um para os lápis (4023 dividido por 23) e outro para as borrachas (40 dividido por 23).

Os dois erros cometidos pela dupla DR11, tanto ao subtrair 184 de 200, resultando 18 ao invés de 16, quanto ao subtrair 23 de 40 resultando em 23, parecem ter sido uma “manobra” para fazer aparecer um número que pudesse ser dividido e que permitisse que o resto fosse zero. Tal fato pode ser verificado no primeiro cálculo mencionado, no qual a continuação da resolução do algoritmo da divisão seria juntar ao 16, o número 8 das unidades, porém, o número que foi juntado foi o 4, forçando obter um número que resultaria em resto zero.

Estes erros podem estar relacionados ao ensino do algoritmo de divisão em sala de aula se dar de forma mecânica, acompanhados por uma perda de sentido, como salienta Saiz (2001), do que está relacionado a cada etapa de desenvolvimento do algoritmo.

> [...] o ensino da operação de divisão, em grande parte das salas de aula, ainda é realizado por meio de uma abordagem que prioriza um ensino sem grandes reflexões. Souza (2010, p. 2), afirma que “as operações são apresentadas como técnicas, procedimentos e ações que, quando aplicadas em sequência e repetidamente, conduzem à resposta”. Dessa maneira os alunos aprendem muitas vezes apenas técnicas não compreendendo os processos envolvidos para chegar em tal resposta (CRUZ; TELES, 2020, p. 2).

De modo geral, as situações trabalhadas em sala de aula levam a respostas exatas. O aluno internaliza que para um procedimento de divisão estar correto precisa obter o resto zero. Isso mostra que não se discute sobre o que significa o resto e a aplicação do algoritmo não faz qualquer sentido.

"O aluno não é convidado a pensar, simplesmente executa algoritmos com base em procedimentos permitidos" (ALMOULOUD, 2016, p. 111). O autor também mencionou que a falta ou perda de sentido e a abordagem que foca na forma, mas sem conteúdo, são frequentes na aprendizagem da matemática.

Segundo Lautert e Spinillo (2002),

> [...] há crianças que mesmo atribuindo um significado matemático exclusivamente associado à divisão não resolvem com sucesso os problemas. Estas crianças sabem o que é dividir, porém não sabem aplicar a operação de divisão para solucionar os problemas. A concepção matemática da divisão parece anteceder o uso de procedimentos apropriados que permitam resolver corretamente os problemas, procedimentos estes que são adotados quando da instrução sobre a divisão no contexto escolar (LAUTERT; SPINILLO, 2002, p. 244).

Isto decorre do fato de o aluno não compreender a ideia envolvida na operação que está realizando. Segundo Saiz (2001), a partir do momento que os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, consequentemente eles não conseguem verificar as diferentes etapas do cálculo, em termos do problema formulado, sendo incapaz, naquele momento, de perceber qualquer incoerência na resposta obtida.

Ainda de acordo com Saiz (2001, p. 183) "[...] a atribuição de um significado a cada uma das etapas do cálculo, em termos de situação de referência, lhes permitirá resolver os problemas com o controle suficiente para determinar a sua validade".

Dessa forma, podemos dizer que no trabalho didático com os algoritmos o essencial é

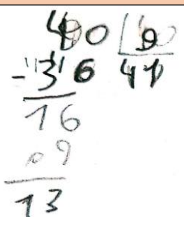
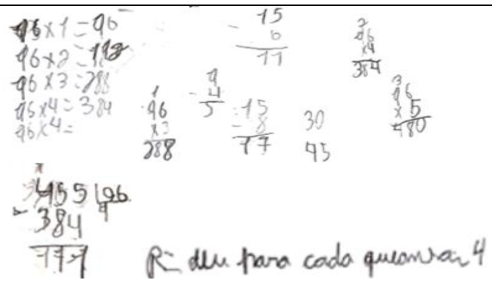
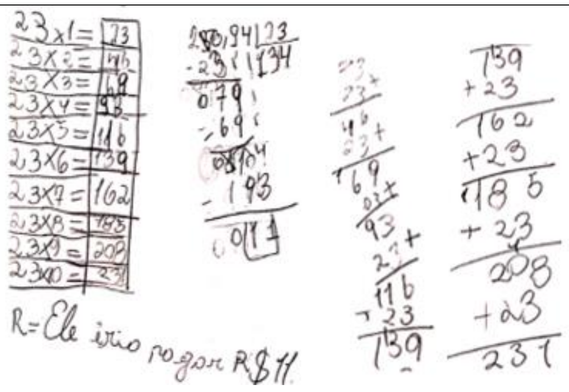
> [...] o entendimento sobre a sua função. Ou seja, o algoritmo de qualquer operação não é a expressão desta operação, mas somente um dos registros possíveis desta operação, usado basicamente para responder questões quantitativas, não expressando nada mais que isso. É fundamental entender os algoritmos como um registro de representação, que precisa ser construído com significado (NEHRING, 1996, p. 22).

Logo é necessário que o ensino dos algoritmos seja de forma construtiva, destacando os significados de suas regras, para que haja o aprendizado significativo e não apenas “decorar” o algoritmo sem ter entendimento da funcionalidade dele.

- **Saber usar o algoritmo, mas apresentar erros ao desenvolver os cálculos**

Neste agrupamento estão as resoluções das duplas, que de acordo com o que registraram, sabiam operar com o algoritmo, cometendo erros apenas ao realizarem as subtrações das parcelas.

Das onze (11) duplas resolvedoras do 5º ano, três (03) apresentaram erros durante o desenvolvimento das subtrações ao utilizarem o algoritmo da divisão, são elas: DR5, DR6 e DR10. O Quadro 29 mostra as imagens das resoluções realizadas por estas duplas.

DR	Imagem da resolução
DR5	
DR6	
DR10	

Quadro 29: Imagem das resoluções feitas pelas duplas DR5, DR6 e DR10.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

A dupla DR10 por exemplo, ao resolver o problema apresentou erros ao realizar a última multiplicação (23 x 4), uma vez que encontraram como resultado o número 93 ou invés de 92, esse fato os levou ao erro quando realizaram a subtração (104 – 93), concluindo que o resto seria 11, ao invés de 12.

Destaca-se também o fato de a dupla resolvedora não fazer estimativas dos valores apresentados no enunciado, não percebendo que ao dividir 30,94 por 23 o quociente seria pouco mais que 1 inteiro. Ao buscarem por uma resposta que lhes fosse satisfatória, a dupla apresentou como resposta final, ao enunciado proposto, o número encontrado no resto da divisão. Possivelmente por ser um número por eles considerado mais coerente com a situação proposta.

As operações que envolviam dividir 40 por 9 e 40 por 23, resolvidas respectivamente pelas duplas DR5 e DR11, também poderiam ter um desfecho diferente, se as duplas resolvedoras tivessem estimado os resultados das operações.

Neste sentido, Molinari (2010, p.133) salienta que “o estudante emprega corretamente o procedimento de solução, mas erra no resultado, revelando que compreendeu a estrutura semântica do problema, confundindo-se, porém, no cálculo final.” Podemos então dizer que ao apresentarem tais produções, as duplas “não tenham percebido os erros cometidos, por não haverem adquirido a prática de avaliar seus resultados” (MOLINARI, 2010, p. 134).

Os alunos, de modo geral, aprenderem a manipular o algoritmo, mas não entendem o que estão fazendo, não são estimulados a pensar mentalmente a validarem suas respostas. Se assim o fizessem, poderiam identificar alguns “absurdos” em suas resoluções.

Segundo Quintino e Schneider (2007),

> [...] no processo de ensino-aprendizagem, o erro pode contribuir positivamente; basta que se modifique a atitude de condenação do aluno como se ele fosse o único culpado pelo erro, e que se tome uma postura de tratamento preventivo dos mesmos. Ao cometer um erro, o aluno expressa o que sabe e o que não sabe; oferecendo ao professor uma oportunidade de ajudá-lo a adquirir o conteúdo que lhe falta, ou ainda, levá-lo a compreender por que errou (QUINTINO; SCHNEIDER, 2007, p. 4).

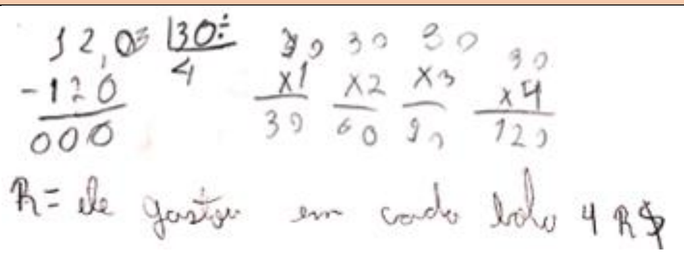
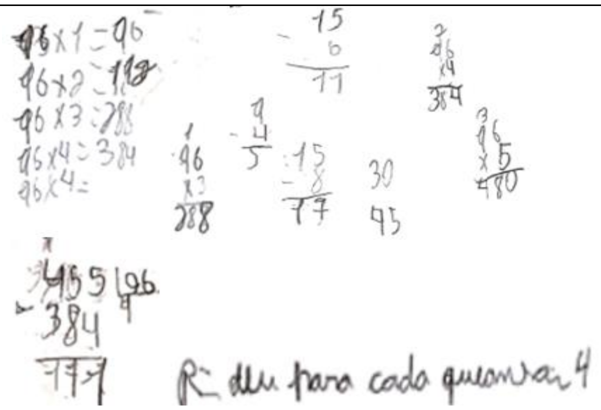
Dessa forma, torna-se de suma importância que o professor analise os erros cometidos pelos alunos e lhes forneça um *feedback* adequado, possível de entendimento, a partir de seus conhecimentos expressados nas resoluções, para que seja possível o estabelecimento de um diálogo em torno do objeto de conhecimento, e o aluno possa ser conduzido à aprendizagem.

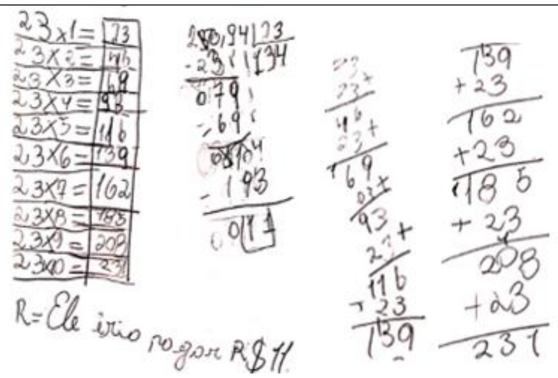
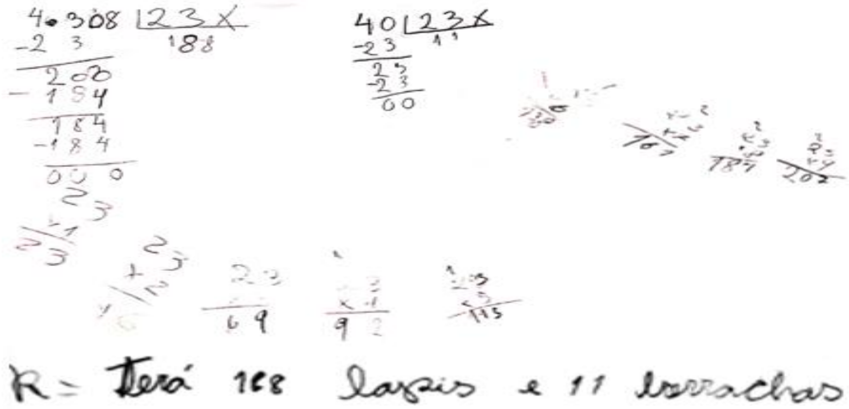
- **Usar cálculos auxiliares na resolução do enunciado proposto**

Neste agrupamento foram consideradas as resoluções apresentas pelas duplas de alunos que utilizaram cálculos auxiliares (adições, subtrações ou multiplicações) para resolver o problema proposto.

Os cálculos auxiliares servem para que os alunos possam verificar os resultados, é uma forma de validarem suas respostas, caso estejam com dúvidas sobre os valores obtidos durante o desenvolvimento de operações aritméticas. Servem também para fazer estimativas de valores possíveis. Assim, cada dupla de alunos julgou se havia, ou não, a necessidade de realizar tal procedimento durante a resolução da situação-problema proposta.

Dentre as onze (11) duplas resolvedoras do 5º ano, quatro (04) produções, apresentam cálculos auxiliares, a saber: DR4, DR6, DR10 e DR11, como mostra o Quadro 30.

DR	Imagem da resolução
DR4	
DR6	

DR10	
DR11	

Quadro 30: Imagem das resoluções feitas pelas duplas DR4, DR6, DR10 e DR11.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

É comum os alunos utilizarem cálculos auxiliares na resolução de problemas, sejam eles de divisão ou não. E ao considerar alunos do Ensino Fundamental I, este fato ocorre com mais frequência, uma vez que a maioria dos alunos ainda se sente inseguro em realizar operações matemáticas mentalmente ou são estimulados a registrarem suas maneiras de pensar.

A Figura 28 ilustra o procedimento, no qual uma professora incentiva os alunos a fazerem um “rascunho” visando facilitar o processo para encontrar o resultado da divisão 785 por 9.

Figura 28: Ilustração de uma professora ensinando os alunos a realizarem a operação.
Fonte: Milani, Imenes e Lellis (2008, p. 41).

Notou-se na Figura 28 acima apresentada, que a professora ao efetuar a divisão 785 dividido por 9 “montou” um trecho da tabuada do 9 ao lado do desenvolvimento do algoritmo da divisão. Procedimento parecido com o que fizeram as duplas cujas resoluções compõem esse agrupamento.

A Figura 29 a seguir, ilustra uma atividade apresentada por um livro didático (manual do professor) sobre como resolver um enunciado de problema de divisão. Nela podemos identificar com total clareza a sugestão do uso de cálculos auxiliares.

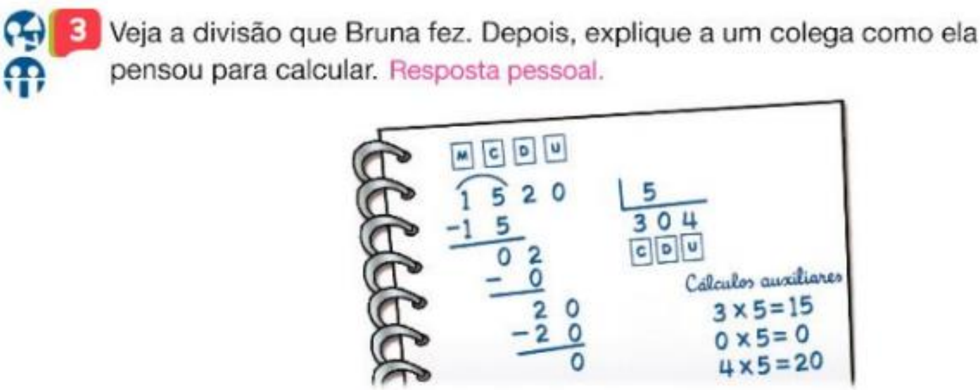


Figura 29: Imagem apresentada por um livro do 5º ano.
Fonte: Silveira (2017, p. 110).

Segundo Silva (2008), no desejo que seus alunos obtenham bons resultados o professor busca de formas variadas facilitar as tarefas, seja “[...] fornecendo-lhes abundantes explicações, ensinando pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicando-lhes pequenos passos nos problemas (SILVA, 2008, p. 63).

É importante destacar o fato de que os cálculos auxiliares não foram identificados nas produções escritas apresentadas pelos alunos do 9º ano, possivelmente pelo fato de já estarem mais seguros em relação ao processo necessário para a resolução de um problema envolvendo a operação de divisão.

- **Usar o algoritmo da divisão em qualquer situação, sem estimativas**

Embora casos apresentados em agrupamentos anteriores também pudessem ser resolvidos por meio de estimativas dos resultados, figura neste agrupamento apenas a resolução da dupla DR8. O enunciado pedia que fosse dividido 10 frutas entre 10 crianças, neste caso não era necessário o uso do algoritmo, uma vez que ao se tratar de um número pequeno (10 dividido por 10) registrar apenas o resultado 1 seria suficiente, não havendo a necessidade do uso do algoritmo da divisão. A figura 30, ilustra a resolução apresentada.

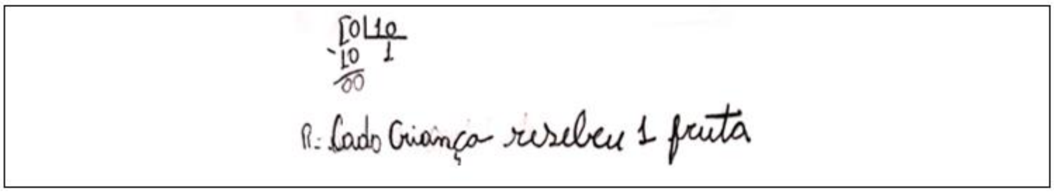
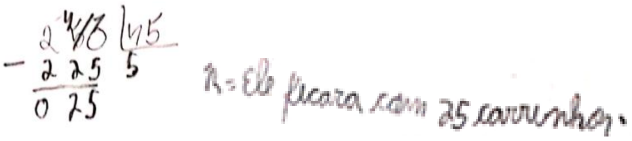
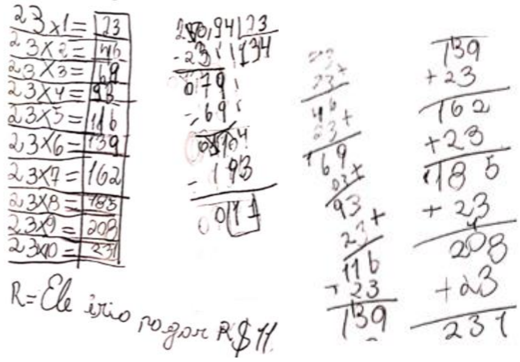


Figura 30: Imagem da resolução feita pela dupla DR8.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Como nesse caso, muitas vezes, o uso do algoritmo seria dispensável, mas como o trabalho pedagógico é voltado para o ensino do algoritmo, então mesmo quando a resolução do problema não precisava estar associada à aplicação de um algoritmo, ele é usado, como se fosse a única forma de validar o resultado a ser mostrado.

- **Usar o resto da divisão como resposta ao enunciado proposto**

Neste agrupamento, destacou-se o fato de que as duplas resolvedoras utilizaram o resto encontrado pelo algoritmo da divisão como resposta ao enunciado proposto. Dentre as onze duplas resolvedoras, duas realizaram este procedimento, são elas DR7 e DR10. As respectivas resoluções estão ilustradas no Quadro 31.

DR	**Imagem da resolução**
DR7	
DR10	

Quadro 31: Imagem das resoluções feitas pelas duplas DR7 e DR10.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

A dupla DR7 ao resolver o problema não identificou no enunciado que se tratava de uma operação de subtração, esse fato pode ter sido causado por a pesquisadora ter solicitado que fossem elaborados problemas envolvendo a operação de divisão. Logo a dupla apenas tomou os valores numéricos e os escreveu em forma de algoritmo de divisão, sem notar que não era um problema de divisão. Ao dividirem 250 por 45, apresentaram como resposta final 25, o qual se refere ao resto da divisão e não ao quociente, mas deve ter-lhes parecido mais coerente.

Já a dupla DR10 ao dividir 30,94 por 23, o número utilizado como resposta final à pergunta do enunciado foi o valor do resto encontrado na divisão ao invés de ser o resultado que aparece como quociente. Os alunos perceberam que o quociente não era 134, mas como não souberam usar a vírgula de modo correto e encontrar 1,34, o resto 11 que haviam encontrado, lhes pareceu mais conveniente. A dupla montou o algoritmo de forma correta, apresentando erro apenas no último cálculo, ao dividirem 104 por 23, que deveria ter 12 como resto, mas, deram o resto como resposta.

De acordo com Saiz (2001), os alunos resolvem o enunciado proposto com base nos indícios ou palavras indutoras no texto, o que é suficiente para a seleção da operação (ou não foi, no caso da dupla DR7) e para realizá-la. Também não se envolvem com o problema, nem controlam os procedimentos, pois isso “[...] permitiria ao menos que a criança comprovasse se o número dado corresponde ou não à resposta do problema” (SAIZ, 2001, p. 169). Pode-se dizer que “[...] a maior parte das crianças realiza a prova da divisão (prova dos 9), porém, ninguém faz a “prova do problema”, quer dizer, ninguém verifica se o resultado obtido é a solução do problema formulado” (SAIZ, 2001, p. 169).

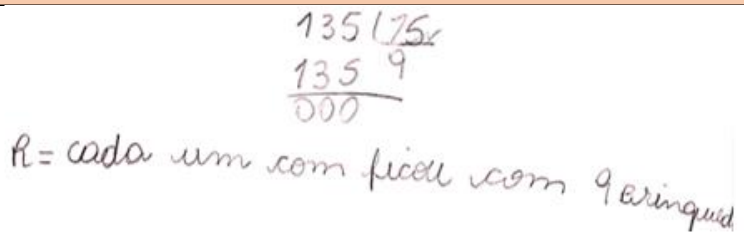
> [...] **a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto**. O fato de obtermos duas informações como resultado de uma divisão com naturais faz com que problemas que envolvam esta operação possam ter respostas diversificadas, apesar de um mesmo contexto (RIPOLL *et al.*, 2015, grifos do autor *apud* SOPPELSA, 2016, p. 5).

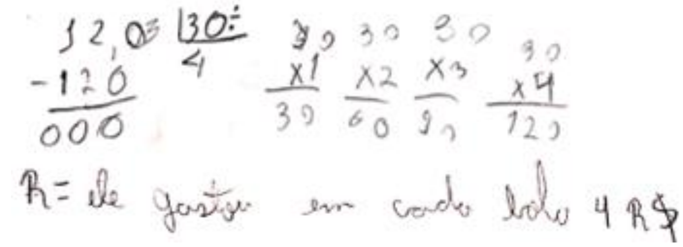
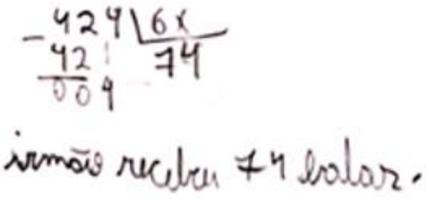
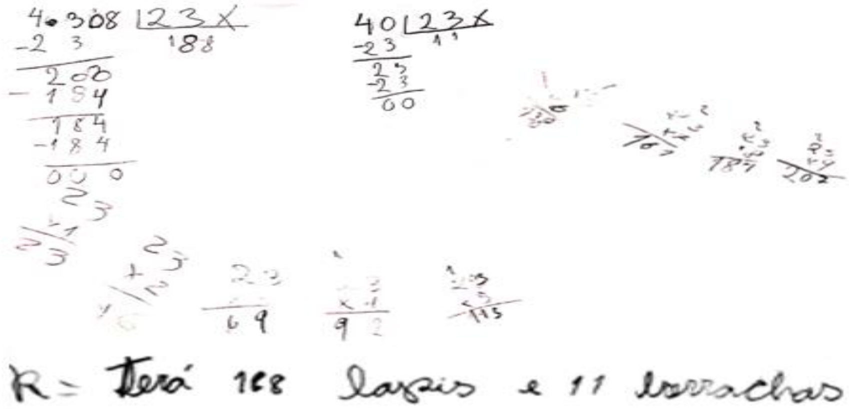
Nos dois casos apresentados aqui, pode-se dizer que os alunos tinham relação com os problemas, pois como os valores encontrados para o quociente lhes pareceram absurdos considerando os dados dos problemas, então utilizar o resto como resposta final para o problema pareceu-lhes mais conveniente.

- **Usar os símbolos “x” ou “÷” na chave**

Este agrupamento contempla as resoluções apresentadas pelas duplas de alunos, nas quais identifica-se o uso dos símbolos “x” e “÷” junto ao divisor, ao registraram o algoritmo para realizarem a resolução da operação de divisão.

Nas análises das produções, identificou-se que quatro (04) das onze (11) duplas resolvedoras do 5º ano registraram este procedimento. São elas DR3, DR4, DR9 e DR11, como mostra o Quadro 32.

DR	Imagem da resolução
DR3	

DR4	
DR9	
DR11	

Quadro 32: Imagem das resoluções feitas pelas duplas DR3, DR4, DR9 e DR11.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Esta análise também permite observar-se que de certa forma, em alguns casos os alunos realizam registros escritos sem saber ao certo o que estão fazendo, como visto na resolução apresentada pela dupla DR4, a qual mostra que a dupla, na lembrança de que deveriam registrar algum sinal de operação junto ao divisor, colocaram o sinal que indica divisão ao invés de multiplicação, como mostra a Figura 31.

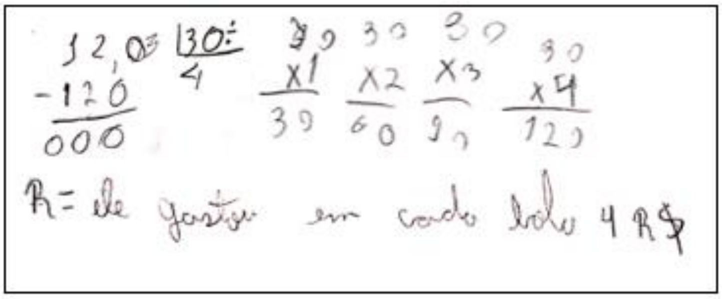


Figura 31: Imagem da resolução feita pela dupla DR4.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Entende-se que o uso desses símbolos ocorra por um possível incentivo do professor no momento da explicação do conteúdo, na resolução de exemplos na correção das atividades no quadro, objetivando indicar que ao se multiplicar divisor e quociente, esse resultado tem que ser o mesmo do dividendo**.**

As Figuras 32 e 33 foram retiradas de Luz (2008). Trata-se de um material produzido por uma professora no âmbito do Programa de Desenvolvimento Profissional (PDE), desenvolvido no Paraná. Nas figuras nota-se, o uso do símbolo x na chave, acompanhando o divisor.

Situação 18: Um aluno resolveu a divisão de **7105 por 35** assim:

```
7105  |35 x
 705   2221
 105
  05
   0
```

Figura 32: Situação 18 resolvida por um aluno de 5ª série.
Fonte: Luz (2008, p. 15)

Situação 19: Veja como um segundo aluno resolveu a mesma divisão:

```
7105  |35 x
7000   20021
0105
  70
  35
  35
   0
```

Figura 33: Situação 19 resolvida por um aluno de 5ª série.
Fonte: Luz (2008, p. 15)

As figuras representam resoluções apresentadas por alunos de 5ª série, que foram transcritas pela professora no seu trabalho. Essas imagens mostram que, o uso de símbolos junto a chave também ocorre em outros estabelecimentos escolares. É importante destacar que referências como estas, sobre o uso de símbolos na chave para o desenvolvimento do algoritmo da divisão não foram identificadas em materiais contendo resoluções apresentadas por alunos de 9º ano.

Fayol (2010), afirma que ao resolver problemas aritméticos, os alunos se apoiam nos dados fornecidos pelos enunciados, nos seus conhecimentos e competências e sabe que a “resolução deve apelar ao simbolismo matemático, a algarismos e a sinais” (FAYOL, 2010, p. 22).

Estes dois últimos agrupamentos mostram como as ações do professor em sala de aula são importantes para o desenvolvimento escolar dos alunos, uma vez que os alunos tendem a reproduzir os métodos utilizados pelos professores na elaboração de enunciados de problemas e na forma como realizam os registros escritos, seja na forma de apresentar o algoritmo, na reprodução de sinais, nos cálculos auxiliares ou ao apresentar uma resposta final a um problema.

4.2.3 Agrupamentos identificados exclusivamente nas resoluções apresentadas pelas duplas de alunos do 9º ano

Nesta subseção discute-se os agrupamentos encontrados, ao analisar as produções das duplas de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, quando registraram as resoluções dos problemas de divisão.

- **Dupla interpretação do enunciado**

Este agrupamento contempla o enunciado de problema de divisão elaborado pela dupla DE3, o qual foi descrito pela dupla resolvedora DR10 como sendo um enunciado “confuso”. A figura 34 ilustra o enunciado elaborado.

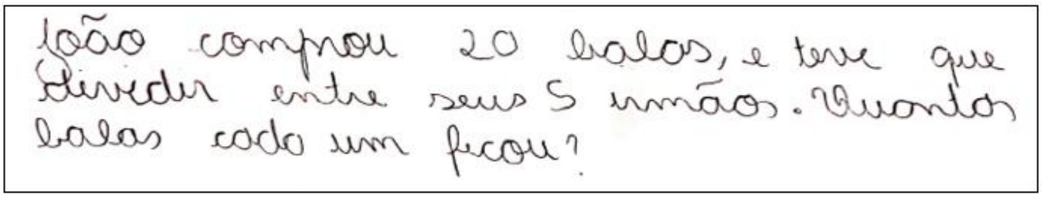

João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?

Figura 34: Enunciado elaborado pela dupla DE3.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

Este enunciado requereu atenção, uma vez que a dupla resolvedora, apresentou em seus registros contendo duas contas de divisão, uma dividindo as vinte balas para cinco pessoas e a outra dividindo as mesmas vinte balas para seis pessoas. A dupla resolvedora também registrou por escrito que o enunciado do problema estava confuso, como mostra a Figura 35.

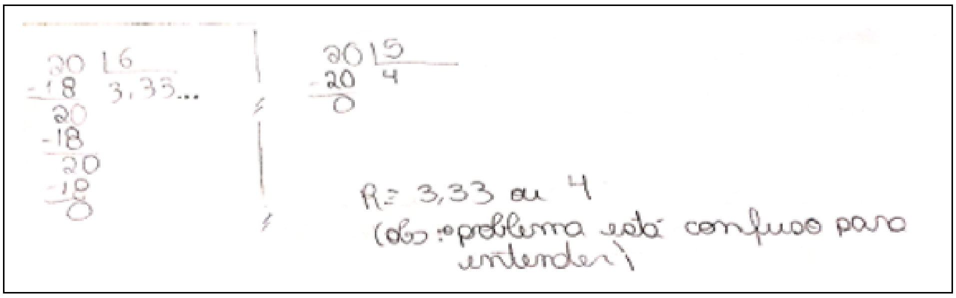


Figura 35: Resolução apresentada pela dupla DR10.
Fonte: Acervo da pesquisadora.

No momento da entrevista, a dupla resolvedora DR10 relatou ter apresentado dois cálculos como resolução ao problema, uma vez que não estava suficientemente claro no enunciado se as balas deveriam ser divididas entre João e seus 5 irmãos, ou apenas entre os 5 irmãos, não considerando João no momento da divisão.

Segundo Gitirana *et al*. (2014, p. 14) "[...] não é fácil transmitir, em uma linguagem suficientemente clara e compreensível a outra pessoa, uma ideia que está na cabeça de quem a está elaborando". Assim, a observação relatada pela dupla resolvedora DR10 nos mostra a importância de a escrita dos enunciados de problemas (independentemente de serem problemas de divisão ou não) serem suficientemente claras.

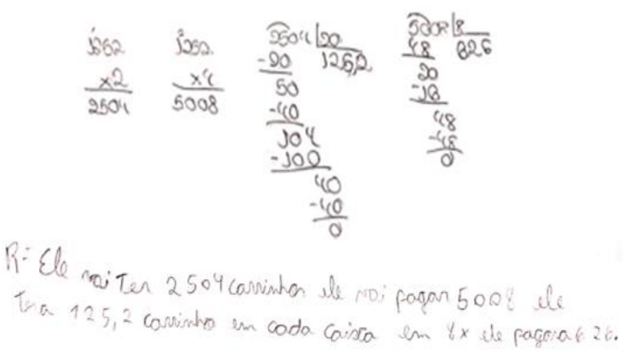
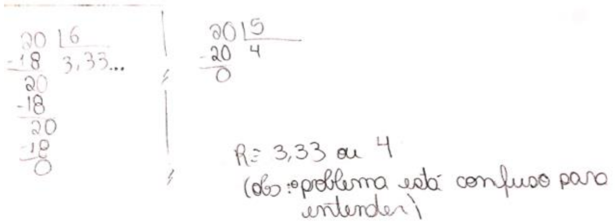
Não foi o caso da dupla que resolveu o problema, pois eles o compreenderam, apresentando as duas resoluções possíveis, mas "[...] A não compreensão do enunciado comprometerá a conversão desse em linguagem matemática e a consequente resolução do problema" (LORENSATTI, 2009, p. 95).

Para Gitirana *et al*. (2014, p. 119) "[...] em diversas ocasiões, as resoluções adotadas pelos estudantes são fortemente marcadas pela linguagem presente no enunciado do problema – o que pode provocar erros", uma vez que, no momento da realização da leitura e interpretação do enunciado, os alunos podem identificar duplo sentido ao ponto de não encontrarem a resposta correta ao problema proposto.

- **Não considerar que na divisão de grandezas discretas o resultado deve ser inteiro**

Este agrupamento contempla as resoluções de problemas de divisão apresentadas pelas duplas de alunos, as quais não consideram no momento da resolução, que ao dividir objetos o resultado deve ser um número inteiro.

Esse procedimento foi identificado nas resoluções apresentadas pelas duplas DR7 e DR10 do 9º ano, como mostra o Quadro 33.

DR	Imagem da resolução
DR7	
DR10	

Quadro 33: Imagem das resoluções feitas pelas duplas DR7 e DR10.
Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base nos dados coletados.

Apesar de os cálculos estarem corretos, a dupla DR7 não discutiu o fato de a divisão do número de carrinhos pelo número de caixas não ser exata, uma vez que o resultado da divisão de 2504 por 20, resultou em 125,2 que não é um número inteiro. Como se trata de objetos, o número de carrinhos em cada caixa deve ser inteiro, uma vez que, se fossem divididos os 4 carrinhos que sobraram entre as 20 caixas, cada caixa ficaria com partes de um carrinho, o que faz com que o elemento "carrinho" perca as suas propriedades originais.

Neste caso, a dupla resolvedora tratou de forma errada o resto ao utilizar a redistribuição, "[...] parece que o algoritmo convencional ao se distanciar dos dados do problema favorece a perda de significado do mesmo, levando os alunos a analisarem os resultados apenas a partir do algoritmo e não dentro do contexto do problema (BORBA; SELVA, 2006, p. 13-14). Já a dupla DR10, apresentou duas resoluções para o problema: "João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?". Os alunos consideraram que o problema estava mal formulado, e que haviam interpretado o problema de duas maneiras, incluindo e não incluindo João na divisão das balas. Ao não incluir João dividiram as 20 balas apenas entre os 5 irmãos, assim cada irmão receberia 4 balas, resultando em resto zero. E a outra resolução apresentada pela dupla DR10, dividia as 20 balas entre 6 pessoas, João mais seus 5 irmãos, que é a que interessa à discussão aqui apresentada. Neste caso, ao dividir as 20 balas por 6 pessoas, a dupla obteve a parte inteira (3 balas) e ao chegar em um resto menor que o divisor, ainda seguiram com a divisão, encontrando a parte decimal. Mesmo tendo registrado com o sinal indicando que seria uma dízima periódica, ainda assim, a dupla colocou um zero ao final como sendo o resto da divisão. Este registro remete ao fato de parecer ser necessário que as divisões resultem em zero para que estejam completamente resolvidas.

Poder-se-ia perguntar tal como Schoenfeld (1996, p. 5), "[...] onde é que os alunos aprenderam um tal disparate? Ao que ele mesmo responde que foi nas aulas de Matemática, por meio de resolução de exercícios e problemas sem contexto.

Segundo Schoenfeld (1996), ao escreverem a resolução os alunos

> [...] não olharam para o problema como se este fosse real. Eles vêem-nos como problemas escolares de Matemática, típicos – para exercício e prática – que os estudantes não esperam que façam sentido. Os alunos, simplesmente, fazem o cálculo e escrevem a resposta por baixo (SCHOENFELD, 1996, p. 5).

De acordo com Lautert (2005),

> [...] para resolver o problema, os estudantes necessitam refletir sobre a estrutura semântica do problema, interpretando-o, tomando como referência o conhecimento de mundo, [...]. Portanto, a resposta do cálculo matemático deverá ser reorganizada em função da estrutura semântica (LAUTERT, 2005, p. 53).

As duplas DR7 e DR10 não discutiram o fato de que objetos não devem ser divididos, que representam grandezas discretas, de modo a obter a parte decimal, uma vez que não é possível ter 125,2 carrinhos em cada caixa, por exemplo.

É preciso que os alunos compreendam de fato o enunciado, para que não apenas tomem os valores numéricos e apliquem o algoritmo sugerido, mas que possam discutir se o resultado encontrado está de acordo com o enunciado.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo investigar o que se revela da elaboração e resolução de problemas de divisão por alunos de 5º e 9º ano do Ensino Fundamental.

Os questionamentos que moveram essa pesquisa foram: Quais as características dos problemas de divisão elaborados pelos alunos de 5º e de 9º anos? Quais as formas mobilizadas, os algoritmos e como esses são empregados por alunos de 5º e de 9º anos, para a resolução de problemas de divisão?

Os dados foram construídos por meio de uma atividade solicitada a 42 estudantes, sendo 22 do 5º e 21 de 9º ano, resultando em 21 produções escritas: 21 problemas elaborados e 21 resoluções para serem analisadas.

Para a análise dos dados, pautou-se nas orientações da análise de conteúdo e da análise da produção escrita. Disso obteve-se os agrupamentos, os quais foram inicialmente estabelecidos por ano, 5º e 9º, relativamente à elaboração do enunciado e às resoluções. Por meio destes agrupamentos foi possível identificar as convergências e divergências entre os dados coletados.

Verificou-se que em relação à elaboração dos enunciados houve uma quantidade expressiva de convergências entre os enunciados elaborados pelos alunos do 5º e do 9º ano, uma vez que foram notados nove (09) agrupamentos para o 5º e oito (08) para o 9º, dos quais sete (07) foram identificados em ambas as turmas. O mesmo não se deu em relação às resoluções, uma vez que foram obtidos oito (08) agrupamentos para o 5º e três (03) para o 9º ano, dos quais apenas um (01) foi identificado em ambas as turmas.

Uma análise detalhada dos enunciados elaborados permitiu identificar algumas variáveis que estão destacadas a seguir.

Foi possível concluir que dez (10) dos onze (11) enunciados elaborados pelas duplas de alunos do 5º ano e sete (07) dos dez (10) enunciados elaborados pelas duplas do 9º ano eram problemas de partição. Sobre a natureza dos números envolvidos nos enunciados, concluiu-se que dez (10) dos onze (11) enunciados elaborados pelo 5º ano e sete (07) dos dez (10) enunciados elaborados pelas duplas do 9º ano utilizaram números naturais em suas elaborações. No entanto, uma (01) dupla do 5º ano e três (03) duplas do 9º ano apresentaram números racionais (decimais ou fracionários) em suas elaborações. Este fato deve ser considerado como indicativo de trabalhos/ações a serem desenvolvidos em sala de aula, uma vez que com o passar do desenvolvimento escolar, esperava-se identificar mais enunciados envolvendo números racionais nas produções dos alunos do 9º ano.

Com relação aos tipos de grandezas envolvidas nos enunciados elaborados, concluiu-se que nove das onze duplas do 5º ano e seis das dez duplas do 9º ano utilizaram grandezas discretas em seus enunciados, como frutas, bombons, balas e carrinhos. Duas duplas do 5º ano utilizaram valores monetários; uma dupla do 9º ano descreveu que as medidas do sítio seriam calculadas em quilômetros (km) e três duplas apresentaram valores monetários, utilizando grandezas contínuas.

Ainda quanto aos enunciados elaborados, apenas três problemas dos onze elaborados pelas duplas do 5º ano apresentaram números que resultaram em resto zero. Sete problemas continham números que resultaram em resto diferente de zero e um problema não era de divisão. Já no 9º ano, dos dez enunciados elaborados, seis resultavam em resto zero, dois em resto diferente de zero e dois enunciados não eram de divisão.

Como foram os próprios alunos que elaboraram enunciados dos problemas, eles usaram os elementos que julgaram suficientes para que a outra dupla pudesse interpretar o enunciado e, consequentemente resolver o problema. Foi predominante o uso da língua materna, mas também foi utilizada a linguagem numérica e simbólica.

Os alunos não se mostraram preocupados se com os valores numéricos escolhidos a divisão seria exata ou não, se sobraria resto e o problema admitiria deixá-lo ou se seria necessário continuar a divisão. Embora fosse importante ao formular os problemas, que os alunos tivessem antecipado os resultados e os procedimentos de resolução, já que. “[...] elaborar problemas requer uma mudança na maneira como se lida com a situação-problema: há um deslocamento do papel daquele que resolve para o papel daquele que formula o problema" (SPINILLO *et al.*, 2017, p. 933).

Destaca-se que em ambas as turmas investigadas, a maioria das duplas elaboraram enunciados de problemas de partição, possivelmente pelo fato de serem problemas com os quais os alunos já estão habituados a resolverem antes mesmo de serem apresentados aos conhecimentos formais de divisão e seus algoritmos, uma vez que “[...]” crianças, mesmo antes da instrução formal, conseguem solucionar situações-problema com a ideia de divisão” (BARCELLOS, 2017, p. 28). Também pode-se especular que esse é o tipo mais comum nos livros didáticos, ao se tratar de divisão nos anos iniciais, como apontou os trabalhos de Costa *et al.* (2018), Sopeppelsa (2016), Oliveira (2015), Lautert e Spinillo (2002), dentre outros.

Pode-se concluir, quanto à elaboração dos enunciados dos problemas envolvendo a operação de divisão, que não houve variação expressiva em relação às características dos enunciados elaborados pelos alunos do 5º e do 9º ano. Mesmo assim, os problemas elaborados por duas duplas do 9º ano, que utilizaram os conceitos de fatoração e de área do triângulo, exemplificam que conhecimentos adquiridos entre o 5º e o 9º anos foram incorporados pelos alunos ao proporem seus enunciados.

Já em relação às resoluções, identificou-se sete agrupamentos para o 5º e quatro para o 9º ano. No entanto, apenas um agrupamento figura nos dois grupos simultaneamente, que é “apresentar uma resposta final”.

A análise das resoluções apresentadas pelas duplas de alunos, das duas turmas, revelou que em todas as resoluções foram utilizadas apenas um tipo de algoritmo, a saber, o algoritmo da divisão usual pelo processo longo. É preciso lembrar, que os documentos oficiais que norteiam o trabalho dos professores em sala de aula, orientam o ensino de mais de um algoritmo para a resolução de problemas de divisão. No entanto, o uso de outros algoritmos não apareceu nas resoluções analisadas.

Com relação aos tipos de registros utilizados, identificou-se que ambas as turmas utilizaram registros multifuncionais, sendo a língua natural ao escreverem por extenso a resposta final e monofuncionais, uma vez que utilizaram algoritmos, linguagem numérica e simbólica para realizar as operações (DUVAL, 2010; 2011).

Os dados permitem dizer que os erros identificados nas resoluções dos alunos de 5º ano, tais como, apresentar o resto como resposta, forçar o resto zero, ou não saber usar o algoritmo, não foram repetidos pelos alunos de 9º ano. Isso também explica o número reduzido de agrupamentos relativos às resoluções, obtidos a partir das produções dos alunos do 9º ano.

Pode-se dizer que, de modo geral, os alunos do 9º ano utilizaram conhecimentos adquiridos com o passar do tempo escolar na elaboração dos enunciados, realizaram as resoluções de forma clara e organizada relativamente à disposição dos cálculos registrados. Isso pode indicar que demonstraram autonomia e firmeza nas resoluções, habilidades que foram construindo e treinando ao longo dos anos de escolarização em que cálculos envolvendo divisão estão embutidos em outros contextos. Esses fatos levam a afirmar que, com o passar dos anos escolares, os alunos alteram a forma como elaboram e resolvem problemas de divisão, o que é corroborado por Vergnaud (1990, *apud* REZENDE, 2017, p. 2) o qual afirma que “[...] a aprendizagem de um conceito matemático ocorre ao longo do processo escolar, sendo aprimorado a cada situação vivenciada pelos estudantes”.

A análise tanto dos enunciados elaborados, quanto das resoluções, evidenciou elementos como a incorporação nos enunciados de conteúdos que foram aprendidos com o passar do tempo escolar, ou a conservação de processos aprendidos nos anos iniciais, como apresentar uma resposta final escrita por extenso.

Isso também mostra como as ações do professor em sala de aula são importantes para o desenvolvimento escolar dos alunos, uma vez que os alunos tendem a reproduzir os métodos utilizados pelos professores na elaboração de enunciados de problemas e na resolução destes, ao apresentarem os registros escritos, como o algoritmo, os cálculos auxiliares ou a resposta final a um problema. Os alunos também tendem a serem influenciados pelos processos descritos nos livros didáticos, principal fonte de subsídio para o professor em suas aulas. Apesar de alguns livros didáticos apresentarem mais que um algoritmo para a operação de divisão, como é o caso de Dante (2017) e Silveira (2017), de um modo geral, os livros acabam por não contemplar atividades para as quais os alunos tenham que elaborar enunciados de problemas, independente da operação a ser utilizada (adição, subtração, multiplicação, divisão, etc.). Essa é uma ação que precisa ser feita pelo professor.

Ressalta-se a importância de incentivar os alunos a elaborarem enunciados de problemas (sejam eles de divisão ou não), considerando que esta prática pode contribuir positivamente no desenvolvimento do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos incluídos nessas elaborações. Mas, ao propor problemas, os alunos precisam lidar com aspectos que vão além dos conhecimentos matemáticos, como os linguísticos, o que torna a elaboração de problemas um grande desafio aos alunos, conforme aponta Spinillo *et al.* (2017, p. 5), mas extremamente importante pois "[...] os problemas elaborados pelos alunos se tornam cada vez mais complexos na medida em que se familiarizam com a linguagem matemática e com a linguagem dos enunciados".

Coloca-se como necessário intensificar a utilização de problemas do tipo quotitivo nas salas de aula e de modo a incentivar os alunos a elaborarem enunciados de problemas deste tipo. Considera-se pertinente o desenvolvimento de pesquisas futuras, que objetivem incentivar os alunos a criarem estratégias para elaboração de enunciados e para resolução de problemas. independente de qual seja a operação a ser utilizada, para que os alunos possam desenvolver o raciocínio mental e, ao mesmo tempo, sentirem-se estimulados a passar do raciocínio mental para o registro escrito. Além disso, mesmo no 9º ano, foram poucos os enunciados que envolveram números racionais, o que indicou que é preciso desenvolver trabalhos, que envolvam números além do conjunto dos números naturais, afinal números fracionários e decimais fazem parte do dia a da dos alunos.

E considerando, tal como Spinillo *et al.* (2017), que propor atividades é um dos desafios que o futuro professor se depara ao aprender a ensinar Matemática, é de grande importância que isso faça parte da formação para a docência. Assim, entende-se como relevante o desenvolvimento de investigações que abordem, por exemplo, a elaboração de problemas, pelos professores, ou as escolhas que estes fazem dos problemas apresentados em livros didáticos.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Suziê Maria de; PEREIRA, Ana Carolina Costa; ALVES, Verusca Batista. Um estudo preliminar sobre o ábaco de Gerbert do século X como recurso didático para o ensino das operações aritméticas. In: **Espacios**. v. 39, n. 52, p. 29, dez 2018. Disponível em: http://www.revistaespacios.com/a18v39n52/a18v39n52p29.pdf. Acesso em: 24 jul. 2020.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. In: **Boletim GEPEM**, Ano XXXIII, n.55, 2009, p.1-19.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. In: **REVEMAT**, v.11, n. 2, 2016, p. 111-141. Disponível em: file:///C:/Users/Acer/Downloads/46021-Texto%20do%20Artigo-163874-1-10-20170208.pdf. Acesso em: 11 dez. 2020.

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** 1998. 325 p. + anexos. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE, UNESP, Rio Claro.

BARCELLOS, Jéssica Silva. ***"Esse é mais difícil por causa das palavras":*** uma investigação psicolinguística acerca do papel da linguagem na resolução de problemas matemáticos de divisão. 2017. 178 p. Dissertação (Mestrado em Estudos da Linguagem) – Departamento de Letras. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Disponível em: file:///C:/Users/Acer/Downloads/1512041_2017_completo.pdf. Acesso em: 15 out. 2021.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed da Universidade de São Paulo, 1974.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; COSTA, António Pedro. Introdução. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Leituras em pesquisa qualitativa**. p. 13-23, 2019.

BORBA, Rute; SELVA, Ana Coelho Vieira. Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: **Anais da 29ª Reunião Anual da ANPEd**. Caxambu: ANPEd, 2006, p. 1-18. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/alunos.pdf. Acesso em: 02 dez. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; CIANI, Andréia Büttner. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). In: **BOLEMA**, ano 22, n. 33, 2009, p. 69-96. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2959. Acesso em: 19 jul. 2021.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, Stephen.; REYS, Robert E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, p. 32-48, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: 1951.

CARDOSO, Virginia. Cardia. Materiais didáticos para as quatro operações. 6 ed São Paulo: IME-USP, v. 2, 2005.

CENTURIÓN, Marília. **Números e Operações**: Conteúdo e metodologia da matemática. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

CRUZ, José André Bezerra da; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Divisão de Números Naturais: do saber previsto ao saber efetivamente ensinado em classes do Ensino Fundamental. In: **Educação Matemática Debate**. Montes Claros, v. 4, p. 1-26, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2667. Aceso em: 29 nov. 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática 6º ano**. 3 ed. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Ápis matemática, 5º ano: ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 7 ed. São Paulo: Papirus, p. 11-33. 2010.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no mundo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Vol. I, org. Tânia M. M. Campos; trad. Marlene A. Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de: Hygino H Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FAYOL, Michel. Fazer operações e resolver problemas - reflexões relativas ao ensino da aritmética. In: MICHEL, FAYOL et al. **Fazer contas ajuda a pensar?** Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos, p. 11- 42, 2010.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. O ábaco de Silvester II. In: **Revista Brasileira de História da Matemática**. v. 8, n. 15, p. 43-55, 2008. Disponível em: http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.8,%20no15,%20abril%20(2008)/4%20-%20Sebastiani%20-%20final.pdf. Acesso em: 24 jul. 2020.

FIORENTINI Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

GITIRANA, Verônica. *et al*. **Repensando multiplicação e divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1 ed. São Paulo: Editora PROEM, 2014.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à aritmética**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf. Acesso em: 24 jul. 2020.

HOUAISS, Antônio. **Mini Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1 ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

IFRAH, Georges. **Os números. A história de uma grande invenção**. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra: revisão técnica Antonio José Lopes, Jorge José de Oliveira. 9 ed. São Paulo: Globo, 1998.

JURADO, Uldarico Malaspina. El rincon de los problemas Los niños crean problemas de matemáticas. In: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 42, p. 235-241, 2015. Disponível em: http://docplayer.es/24966714-El-rincon-de-los-problemas-los-ninos-crean-problemas-de-matematicas.html. Acesso em: 03 jun. 2021.

KRULIK, Stephen; RUDNICK, Jesse A. **Problem solving:** a handbook for teachers**.** Boston: Allyn and Bacon, 1980.

LAUTERT, Sintria Labres. **As dificuldades de crianças com a divisão: um estudo de intervenção**. Recife: UFPE, 2005. 325p. Tese (Doutorado em Psicologia) Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco.

LAUTERT, Sintria Labres; SPINILLO Alina Galvão. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. In: **Psicologia Teoria e Pesquisa**. Brasilia, v. 18, n. 1, p. 237-246, 2002. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ptp/a/nbgMSjNSPMN8rTPZVvL3fKS/?lang=pt. Acesso em: 29 nov. 2020.

LORENSATTI, Edi Jussara Candido. Aritmética: um pouco de história. IN: ANPED SUL, 9, 2012, Caxias do Sul. **Anais...** 2012, p.15. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/1786/265. Acesso em: 24 abr. 2020.

LORENSATTI, Edi Jussara Candido. Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Conjectura**, Caxias do Sul, v. 14. n. 2, 2009. Disponível em: https://fundacao.ucs.br/site/midia/arquivos/linguagem.pdf. Acesso em: 28 mai. 2021.

LUZ, Marilei Aparecida Biscaia da. Caderno pedagógico de análise de erros. In: **PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação.** O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense: produção didático-pedagógica, 2008. Curitiba: SEED/PR. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/364-2. Acesso em: 30 nov. 2020.

MAGINA, Sandra; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lúcia. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? contribuição para o debate. In: **Em Teia: revista de educação matemática e tecnológica iberoamericana**, Recife, v. 1, n. 1, p. 1-23, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2186. Acesso em: 28 nov. 2020.

MAGINA, Sandra; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lúcia. O Raciocínio de Estudantes do Ensino Fundamental na Resolução de Situações das Estruturas Multiplicativas. In: **Ciência & Educação**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. Fundamentos de metodologia científica. 5 ed. São Paulo: Atlas S.A. 2003.

MILANI, Estela; IMENES Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Projeto conviver 5º ano**: matemática. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2008.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. In: **Ciência & Saúde Coletiva**, v. 17, n. 3 p. 621-626, 2012.

MOLINARI, Adriana Maria Corder. **Representação e solução de problemas aritméticos de divisão**: um estudo dos procedimentos empregados por alunos do ensino fundamental. Campinas, 2010. 252p. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

NAGY-SILVA, Márcia Cristina; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 499 - 511, 2005.

NAGY-SILVA, Márcia Cristina. **Do observável ao oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina.

NEHRING, Cátia Maria. **Compreensão de texto**: enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória. Florianópolis: UFSC, 2001. 210p. Tese. (Doutorado em Educação) Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

NEHRING, Cátia Maria. **A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais**. Florianópolis: UFSC, 1996. 238p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

NOGUEIRA, Ricardo Reto Baptista. **Matemática:** Uma abordagem histórica. v. 2. 2015. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B7xcAEO-VcyyazA3TGR6dUR2Nnc/view?resourcekey=0-02f48ch7NOr06CZQ3ieFwg. Acesso em: 24 jul. 2020.

NUNES, Terezinha. *et al*. As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In: **Introdução à Educação Matemática***:* os números e as operações numéricas. 1 ed. São Paulo: Proem, 2009.

OLIVEIRA, Fabiola Santos Martins de Araújo. **Crianças do 5º ano do ensino fundamental resolvendo problemas de divisão**: a calculadora pode contribuir? Recife: UFPE, 2015. 148p. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41 p. 73-98, 2011.

PALMER, Thomas H. **Arithmetic, oral e written, practilly applied by means suggestive questions.** Boston: 1854. Disponível em: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=miun.abu6934.0001.001&view=1up&seq=11. Acesso em: 24 jul. 2020.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.

PONTE, João Pedro da *et al*. Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de professoras num estudo de aula. In: **Quadrante**. v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015. Disponível em: https://educacaomatematica.mat.unb.br/wp-content/uploads/2020/07/Ponte-MQ-JMP-MB-Quadrante-242-2015.pdf. Acesso em: 18 jan. 2021.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1 ed, 2 reimp. Belo Horizonte, Autêntica 2006. 152 p.

QUINTINO, Josemara Alves de Morais; SCHNEIDER, Deborah Sandra Leal Guimarães. Aprendendo com os erros: Análise do erro de raciocínio e de cálculo nas produções escritas. In: **PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação**. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense: produção didático-pedagógica. Curitiba: SEED/PR., 2007. v.1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2007_unioeste_mat_artigo_josemara_alves_de_morais_quintino.pdf. Acesso em: 30 nov. 2020.

REZENDE, Veridiana. Didática da matemática e os desafios da sala de aula: uma experiência relacionada aos números irracionais. In: **Anais do XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática.** Cascavel, 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/schedConf/presentations. Acesso em: 06 out 2021.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 167 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina.

SANTOS, Edilaine Regina dos; BURIASCO, Regina Luzia Cório de. Análise da produção escrita em matemática como uma estratégia de ensino: algumas considerações. In: **Educação Matemática Pesquisa**. v. 17, n. 1, 2015, p. 119-136. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22233/pdf. Acesso em: 16 ago. 2021.

SANTOS, Edilaine Regina dos; BURIASCO, Regina Luzia Cório de. A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação: aspectos de uma caracterização a partir dos trabalhos do GEPEMA. In: **ALEXANDRIA**. v. 9, n. 2, 2016, p. 233-247. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2016v9n2p233/32844. Acesso em: 16 ago. 2021.

SANTOS, Edilaine Regina dos. TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. A análise da produção escrita em matemática como estratégia de avaliação e o conhecimento do conteúdo e dos estudantes por parte de futuros professores. In: **Ciências educacionais**. v. 8, n. 2, p. 1-13, 2018. Disponível em: file:///C:/Users/Acer/Downloads/684-Article-8610-1-10-20191112.pdf. Acesso em: 20 mai. 2021.

SAIZ, Irma. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 156-185, 2001.

SCHOENFELD, Alan. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P; LEAL, L. C; PONTE, J P. (Eds). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996.

SILVA, Bendito Antonio. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC. p.49-75, 2008.

SILVA, Alecio Soares. **Um estudo sobre aplicação do algoritmo de Euclides.** Campina Grande: UFCG, 2014. 68p. Dissertação (Mestrado Profissional) Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Federal de Campina Grande.

SILVEIRA, Ênio. AR: aprender e relacionar: matemática, 4º ano: ensino fundamental, anos iniciais. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2017.

SILVEIRA, Ênio. AR: aprender e relacionar: matemática, 5º ano: ensino fundamental, anos iniciais. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2017.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics**. 1925.Disponível em: https://archive.org/details/historyofmathema031897mbp/page/n149/mode/2up. Acesso em: 24 jul. 2020.

SOPPELSA, Janete Jacinta Carrer. Divisão Euclidiana: um olhar para o resto. In: **Anais do XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.** Curitiba, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_Janete_Soppelsa.pdf. Acesso em: 29 nov. 2020.

SOUZA, Emilia Isabel Rabelo; MAGINA, Sandra Maria Pinto. A Concepção do professor do Ensino Fundamental sobre estruturas multiplicativas. In: **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 10, n. 24, p. 797-815, 2017.

SPINILLO, Alina Galvão. *et al.* Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do Ensino Fundamental. In: **Bolema**. v 31, n 59, p. 928-946, 2017.

TAQUETTE, Stella. R.; BORGES, Luciana Métodos qualitativos de pesquisa: um olhar epistemológico. In: BICUDO, M A. V. **Leituras em pesquisa qualitativa**. p. 77-96, 2019.

TRAJANO, Antonio. **Arithmetica elementar ilustrada**. 68. ed. Rio de Janeiro: Typ. de Martins de Araujo & C. sd. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/104081. Acesso em: 24 jul. 2020.

TYCHANOWICZ, Simone Danielle. **O ensino da divisão nos anos iniciais**: compreensões dialogadas. Curitiba: UFPR, 2017. 211p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) Universidade Federal do Paraná.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais. 1 ed. Curitiba, CRV, p. 13-35, 2009.

VERGNAUD, Gérard. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: Problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2014.

ANEXOS

ANEXO A: Autorização da Instituição Coparticipante

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação   ***Aprovado na***
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP   ***CONEP em***
04/08/2000

Anexo II

Autorização da Instituição Coparticipante

Título da Pesquisa: **Divisão: As Compreensões de Alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**
Pesquisador Responsável: **Dulcyene Maria Ribeiro**
Pesquisadores Assistentes: **Daiane Gomes Prior**

Tipo de Pesquisa

( ) Iniciação Científica	(X) Dissertação/Mestrado
( ) TCC/Graduação	( ) Tese/Doutorado
( ) TCC/Especialização	( ) Projeto Institucional

Anexo II

Autorização da Instituição Coparticipante

Os pesquisadores acima identificados estão autorizados a realizarem a pesquisa e a coleta dados exclusivamente para fins científicos, assegurando a confidencialidade e o anonimato dos participantes da pesquisa segundo a Resolução 466/12 e/ou 510/16 – CNS/MS e as suas complementares.

Declaramos que a coleta de dados nessa Instituição Coparticipante será iniciada somente após a aprovação da Pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Unioeste (CEP – UNIOESTE).

____
(Nome e assinatura do responsável pelo campo de pesquisa)

Observação: Caso haja mais de uma Instituição Coparticipante, as autorizações podem ser apensadas separadamente.

Vera Cruz do Oeste, ____/____/2019.

ANEXO B: Folha de rosto

PlataForma Brasil MINISTÉRIO DA SAÚDE - Conselho Nacional de Saúde - Comissão Nacional de Ética em Pesquisa – CONEP

FOLHA DE ROSTO PARA PESQUISA ENVOLVENDO SERES HUMANOS

1. Projeto de Pesquisa:
Divisão: As Compreensões de alunos do 5º e do 9º ano do Ensino Fundamental

2. Número de Participantes da Pesquisa: 40

3. Área Temática:

4. Área do Conhecimento:
Grande Área 7. Ciências Humanas

PESQUISADOR RESPONSÁVEL

5. Nome:
Dulcyene Maria Ribeiro

6. CPF:	7. Endereço (Rua, n.º):		
266.426.438-95	Rua Israel da Vigo Silveira, 590 Nova Cidade CASCAVEL PARANA 85803040		
8. Nacionalidade: BRASILEIRO	9. Telefone: (45) 3324-5714	10. Outro Telefone:	11. Email: dulcyenemr@yahoo.com.br

Termo de Compromisso: Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e a publicar os resultados sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do projeto acima. Tenho ciência que essa folha será anexada ao projeto devidamente assinada por todos os responsáveis e fará parte integrante da documentação do mesmo.

Data: 12 / 08 / 19

Dulcyene Maria Ribeiro
Assinatura

INSTITUIÇÃO PROPONENTE

12. Nome:	13. CNPJ:	14. Unidade/Órgão:
Universidade Estadual do Oeste do Paraná/ UNIOESTE		Centro de Ciências Biológicas e da Saúde CCBS - UNIOESTE
15. Telefone: (45) 3220-3272	16. Outro Telefone:	

Termo de Compromisso (do responsável pela instituição): Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas Complementares e como esta instituição tem condições para o desenvolvimento deste projeto, autorizo sua execução.

Responsável: ANIBAL MANTOVANI DINIZ CPF: 615.292.459-53

Cargo/Função: DIRETOR DO CCET

Data: 12 / 08 / 2019

Assinatura

Prof. ANIBAL MANTOVANI DINIZ
Diretor do Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas

PATROCINADOR PRINCIPAL

Não se aplica.

ANEXO C: Declaração de uso de Banco de Dados não públicos

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação *Aprovado na*
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP *CONEP em*
04/08/2000

Anexo III

Declaração de uso de Banco de Dados não públicos

[ ] SIM [ ] NÃO

Os pesquisadores do projeto assumem o compromisso de:

1. Garantir a privacidade e o anonimato das pessoas que forneceram os dados coletados;
2. Garantir que os dados sejam utilizados única e exclusivamente para a execução dessa pesquisa;
3. Detalhar no Projeto quais informações serão retiradas dos prontuários, relatórios ou demais documentos que envolvam as fontes secundárias;
4. Respeitar todas as normas das Resoluções 466/12, 510/16 CNS/MS e suas complementares.

Declaramos a ciência das implicações legais decorrentes das Declarações do Anexo III.

Cascavel, ____/____/20___.

____

Pesquisador Responsável: Dulcyene Maria Ribeiro

____

Pesquisador Colaborador: Daiane Gomes Prior

ANEXO D: Declaração de Pesquisa não Iniciada

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação *Aprovado na*
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP *CONEP em*
04/08/2000

Anexo IV

Declaração de Pesquisa Não Iniciada

Título da Pesquisa: **Divisão: As Compreensões de Alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**
Pesquisador Responsável: **Dulcyene Maria Ribeiro**
Pesquisadores Assistentes: **Daiane Gomes Prior**

Tipo de Pesquisa

( ) Iniciação Científica	(X) Dissertação/Mestrado
( ) TCC/Graduação	( ) Tese/Doutorado
( ) TCC/Especialização	( ) Projeto Institucional

Declaramos que essa pesquisa não foi iniciada e aguarda a aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNIOESTE. Ao término desse estudo, nos comprometemos a tornar público os resultados assegurando o anonimato dos participantes da pesquisa e apensar o Relatório Final na Plataforma Brasil.

Declaramos a ciência das implicações legais decorrentes da Declaração do Anexo IV.

____

Pesquisador Responsável: Dulcyene Maria Ribeiro

____

Pesquisador Colaborador: Daiane Gomes Prior

Cascavel, ____/____/2019.

ANEXO E: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – 5º Ano

unioeste

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Aprovado na

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

CONEP em 04/08/2000

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: **Divisão: As Compreensões de Alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: **Dulcyene Maria Ribeiro (45) 99850-1744 e Daiane Gomes Prior (45) 99984-8161.**

Convidamos seu filho a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **Investigar as ideias sobre divisão e o discurso para a elaboração e resolução de situações-problema de divisão em dois momentos de escolaridade: no 5º e no 9º ano do Ensino Fundamental,** para isso serão analisadas as situações-problema de divisão que foram elaboradas no ano de 2014, momento em que seu filho cursava o 5º ano do Ensino Fundamental I.

Durante a execução do projeto destacamos que os riscos associados à participação do seu filho (a) é o constrangimento ou algum tipo de desconforto com os registros escritos por ele elaborado. Qualquer dúvida durante a pesquisa, os pesquisadores deverão ser contatados imediatamente. Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento. Já a participação do seu filho (a) contribuirá com o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática em nosso país, que busca entender as dificuldades dos alunos com o conceito de divisão.

O TCLE será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com o sujeito da pesquisa. Destacamos que o participante não pagará nem receberá nada para participar da pesquisa. Será mantida a confidencialidade do sujeito sendo que todo e qualquer material como os áudios, documentos e outros meios de comunicação, serão utilizadas somente para fins científicos do projeto de Pesquisa e que a participação dos envolvidos no projeto poderá ser cancelada a qualquer momento que julgarem necessário sem qualquer prejuízo presente e nem futuro para o desistente. O telefone do Comitê de Ética - UNIOESTE é (45) 3220-3092, tendo como horário de atendimento de segunda à sexta das 08:00 às 15:30, caso necessite de maiores informações. Caso exista algum inconveniente, a direção da escola será comunicada.

Declaro estar ciente do exposto e autorizo.. a participar da pesquisa.

Nome do responsável: ____

Assinatura: ____

Nós, **Dulcyene Maria Ribeiro e Daiane Gomes Prior**, declaramos que fornecemos todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

Vera Cruz do Oeste, ______ de _____________ de 2019.

ANEXO F: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – 9º Ano

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Aprovado na

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

CONEP em 04/08/2000

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: **Divisão: As Compreensões de Alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: **Dulcyene Maria Ribeiro (45) 99850-1744 e Daiane Gomes Prior (45) 99984-8161.**

Convidamos seu filho a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **Investigar as ideias sobre divisão e o discurso para a elaboração e resolução de situações-problema de divisão em dois momentos de escolaridade: no 5º e no 9º ano do Ensino Fundamental,** para isso será realizada uma atividade em sala, que consiste em elaborar e resolver situações-problema de divisão e em seguida uma entrevista, que será gravada para fins de analisar os dados coletados.

Durante a execução do projeto destacamos que os riscos associados à participação do seu filho (a) é o constrangimento ou algum tipo de desconforto com o gravador, que será usado para a entrevista, neste caso a gravação será interrompida. Qualquer dúvida durante a pesquisa, os pesquisadores deverão ser contatados imediatamente. Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento. Já a participação do seu filho (a) contribuirá com o desenvolvimento da pesquisa em

Educação Matemática em nosso país, que busca entender as dificuldades dos alunos com o conceito de divisão.

O TCLE será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com o sujeito da pesquisa. Destacamos que o participante não pagará nem receberá nada para participar da pesquisa. Será mantida a confidencialidade do sujeito sendo que todo e qualquer material como os áudios, documentos e outros meios de comunicação, serão utilizadas somente para fins científicos do projeto de Pesquisa e que a participação dos envolvidos no projeto poderá ser cancelada a qualquer momento que julgarem necessário sem qualquer prejuízo presente e nem futuro para o desistente. O telefone do Comitê de Ética - UNIOESTE é (45) 3220-3092, tendo como horário de atendimento de segunda à sexta das 08:00 às 15:30, caso necessite de maiores informações. Caso exista algum inconveniente, a direção da escola será comunicada.

Declaro estar ciente do exposto e autorizo.. a participar da pesquisa.

Nome do responsável: ____

Assinatura: ____

Nós, **Dulcyene Maria Ribeiro e Daiane Gomes Prior**, declaramos que fornecemos todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

Vera Cruz do Oeste, ______ de _____________ de 2019.

ANEXO G: Termo de Assentimento – 5º Ano

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação *Aprovado na*
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP *CONEP em*
04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: **Divisão: As compreensões de alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: **Dulcyene Maria Ribeiro (45) 99859-1744 e Daiane Gomes Prior (45) 99984-8161.**

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **Investigar as ideias sobre divisão e o discurso para a elaboração e resolução de situações-problema de divisão em dois momentos de escolaridade: no 5º e no 9º ano do Ensino Fundamental**, para isso utilizaremos os registros escritos por você elaborados no ano de 2014.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do estudo, destacamos que os riscos associados à sua participação é o constrangimento ou algum tipo de desconforto com as escritas por você elaboradas no momento da elaboração da situação-problema de divisão. Qualquer dúvida durante a pesquisa, os pesquisadores deverão ser contatados imediatamente.

Já a sua participação contribuirá com o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática em nosso país, que busca entender as dificuldades dos alunos com o conceito de divisão.

Destacamos que o participante não pagará nem receberá nada para participar da pesquisa e que a participação dos envolvidos no projeto poderá ser cancelada a qualquer momento que julgarem necessário.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone.

Declaro estar ciente do exposto e desejo participar do projeto.

Nome do participante: ____

Assinatura: ____

Nós, **Dulcyene Maria Ribeiro e Daiane Gomes Prior**, declaramos que fornecemos todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

Vera Cruz do Oeste, ______ de ______________ de 2019.

ANEXO H: Termo de Assentimento – 9º Ano

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação *Aprovado na*
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP *CONEP em*
04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: **Divisão: As compreensões de alunos do 5º e do 9º Ano do Ensino Fundamental**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: **Dulcyene Maria Ribeiro (45) 99859-1744 e Daiane Gomes Prior (45) 99984-8161.**

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **investigar as ideias sobre divisão e o discurso para a elaboração e resolução de situações-problema de divisão em dois momentos de escolaridade: no 5º e no 9º ano do Ensino Fundamental**, para isso você fará atividades em sala de aula envolvendo elaboração e resolução de situações-problema de divisão.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do estudo, destacamos que os riscos associados à sua participação é o constrangimento ou algum tipo de desconforto com o gravador, que será usado para gravar uma entrevista que acontecerá depois de resolvida a situação-problema de divisão. Caso sinta-se constrangido, a gravação será interrompida. Qualquer dúvida durante a pesquisa, os pesquisadores deverão ser contatados imediatamente.

Já a sua participação contribuirá com o desenvolvimento da pesquisa em Educação Matemática em nosso país, que busca entender as dificuldades dos alunos com o conceito de divisão.

Destacamos que o participante não pagará nem receberá nada para participar da pesquisa e que a participação dos envolvidos no projeto poderá ser cancelada a qualquer momento que julgarem necessário.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone.

Declaro estar ciente do exposto e desejo participar do projeto.

Nome do participante: ____

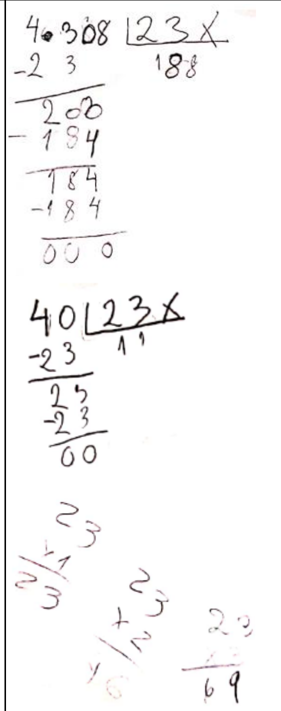
Assinatura: ____

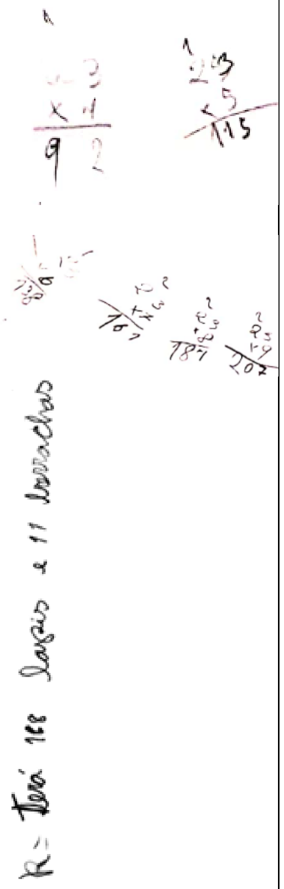
Nós, **Dulcyene Maria Ribeiro e Daiane Gomes Prior**, declaramos que fornecemos todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

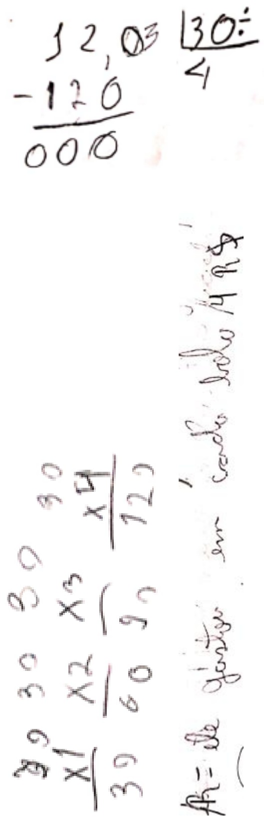
Vera Cruz do Oeste, ______ de ______________ de 2019.

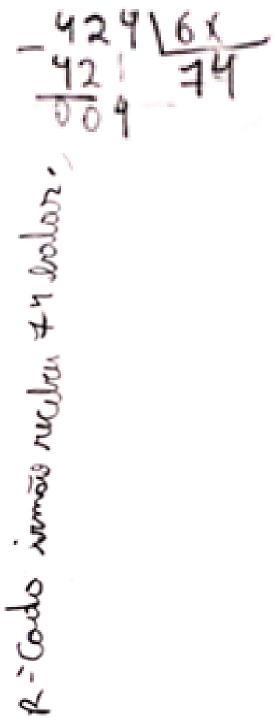
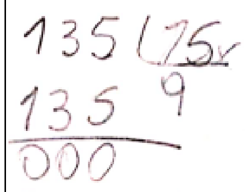
APÊNDICE

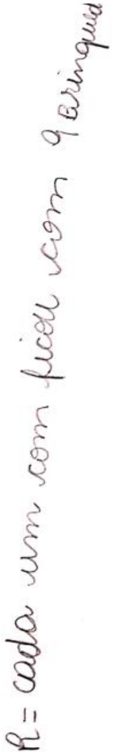
APÊNDICE A: Quadro completo contendo as produções dos alunos do 5º ano

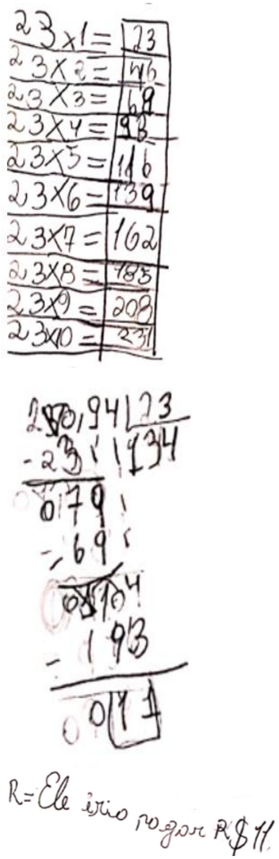
Enunciado elaborado	DE	DR	Imagem da resolução	Descrição da dupla que elaborou em relação a elaboração e em relação a resolução feita	Descrição da dupla que resolveu o problema	Interpretação da elaboração e da resolução	Inferência sobre a elaboração e a resolução
Luciana comprou 4308 lapis e 40 borracha e quer colocar eses lapis e borrachas dentro de 23 estojos grande?	DE1	DR11		Sobre a elaboração a dupla destacou a importância de usar a divisão para chegar ao resultado e ao serem questionados sobre a resolução alegaram estar correta e que os colegas haviam compreendido o que era proposto pelo problema, e que também estaria certo se tivessem somado os lápis com as borrachas para depois dividir entre os estojos.	A dupla leu o enunciado e relatou ter notado a necessidade de usar a divisão para saber quantos lápis e quantas borrachas seriam colocados em cada estojo.	Na elaboração do enunciado notamos o uso de números para fazer referências aos valores a serem usados na divisão, e que provavelmente eram valores aleatórios, considerando os resultados obtidos. Nota-se também o uso da palavra “colocar” para indicar que se tratava de uma operação de divisão e a necessidade de se realizar duas vezes a operação de divisão, uma ao dividir os 4308 lápis em 23 estojos e a outra ao dividir as 40 borrachas nos mesmos 23 estojos Este problema apresenta erros com relação a língua	Percebemos que o problema está incompleto, não apresentando uma pergunta final. Neste caso uma sugestão de pergunta final para o problema seria “quantos lápis e quantas borrachas cada estojo terá?” Quem elaborou pensava que os objetos podiam ser juntados para depois serem divididos. Talvez por isso, uma pergunta final não seria preciso. ➢ Quem resolveu, não entendeu assim. E apesar de não ter uma pergunta final, acabou fazendo duas divisões e informando o número de cada objeto separado como resposta, o que consideramos correto.

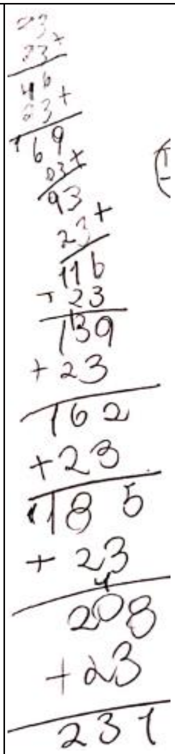
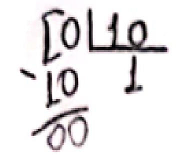
						portuguesa, embora apresente os elementos necessários para a resolução (quantidade de lápis e borracha para colocar nos estojos). Na resolução notamos que a dupla resolvedora montou o algoritmo de forma correta, realizando dois cálculos, um para os lápis e outro para as borrachas, usaram também cálculos auxiliares (tabuada do 23), mas cometeram erros no momento em que realizaram as subtrações, o que afetou o resultado final. Percebemos também o uso do (x) na chave e a apresentação de um R para a resposta final.	Seria necessário ainda pensar em como proceder com o resto de tais divisões, uma vez que tanto 4308, quanto 40 ao serem divididos por 23 não resultam em resto zero. Mas os alunos não perceberam isso, ao errarem as contas. Aliás, os dois erros cometidos, ao subtrair 184 de 200, resultando 18 ao invés de 16, e ao subtrair 23 de 40 resultando em 23, parece que foi uma manobra para forçar sobrar um número que pudesse ser dividido e fazer com que o resto fosse zero. Aliás na primeira das contas mencionadas a continuação exigia juntar ao 16, o número 8 das unidades, mas o número que foi juntado foi o 4, forçando esse número que daria resto zero. O uso do (x) na chave e a apresentação de uma resposta final, estão presentes em quase todos os problemas listados abaixo, resolvidos pelo 5º ano, possivelmente por ser a

							forma como foi apresentado pelo professor ou como era a ilustração no livro didático.
Tiago comprou 30 bolas. Ele gastou em tudo R$120 Reais quantos custou cada bola?	DE2	DR4		Sobre a elaboração a dupla relatou que a ideia era “fazer duas contas, uma de dividir e outra de vezes, primeiro a de dividir e depois a de vezes para tirar a prova real” para encontrar o valor de cada bola e ter certeza de que o resultado estaria correto, disseram também que haviam feito o cálculo para ver se o resultado seria possível (não queriam que fosse um número com vírgula). Em relação à resolução afirmaram que os colegas compreenderam o enunciado, não concordaram com a resolução, levando em conta o fato de não terem tirado a “prova real”, mas admitiram que a resposta estava correta.	A dupla resolvedora afirmou ter compreendido o enunciado, que todas as informações necessárias “os números” estavam presentes e usaram a operação de divisão para saber quanto custou cada bola, disseram também que sentiram a necessidade de fazer a tabuada do 30 como auxílio na resolução (cálculos adicionais apresentados junto com a resposta do problema).	Na elaboração notamos o uso de números indicando os valores a serem usados na divisão, o uso do cifrão (R$) e da palavra reais fazendo referência à moeda nacional utilizada. Há também a falta da vírgula e dos zeros na representação do dinheiro e falta de pontuação ao final da frase. Na resolução notamos o uso do símbolo da divisão (÷) ao lado do número 30 dentro da chave, o uso de cálculos auxiliares para a resolução da divisão e a presença do (R) indicando a resposta para a pergunta do problema. A forma de indicação da unidade monetária na resposta foi incorreta: ou colocava-se o símbolo R$ antes do número 4 ou escrevia-se a palavra reais depois do número 4.	Acredita-se que o uso do símbolo de divisão na chave seja um equívoco, pois ao que indica a resolução de outras duplas, o símbolo na chave deveria ser de multiplicação, indicando que quociente x o divisor daria o dividendo. A apresentação desse x, do uso de contas auxiliares e da resposta final, deve ser devido ao professor pedir que os alunos façam dessa forma.

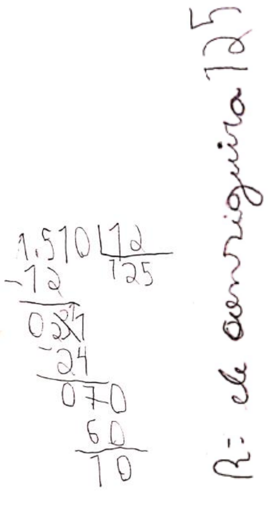
Andreia tinha 424 balas e teve que dividir com 6 irmão. Quantas balas cada irmão vai ter?	DE3	DR9		Sobre e elaboração a dupla relatou que era necessário “fazer a conta de dividir” para saber quantas balas cada irmão receberia, destacaram também o fato de que “Andreia” não entraria na divisão, que a mesma deveria ocorrer apenas entre os irmãos. Em relação à resolução afirmaram que estava correta, que haviam pensado daquela maneira.	A dupla que resolveu compreendeu o enunciado proposto e utilizaram o algoritmo da divisão para encontrar o resultado final.	Quem elaborou buscou usar a frase “teve que dividir” para que a dupla resolvedora compreendesse que se tratava de uma divisão. Os números utilizados provavelmente foram escolhidos aleatoriamente, levando em conta que o resultado da divisão se trata de uma dízima periódica. Já na resolução notamos a presença do símbolo (x) ao lado do número 6 dentro da chave e o equívoco ao colocar o resto (4) junto com o resultado encontrado (7). Isso mostra que não souberam operar com o algoritmo, pois não perceberam que dividir 4 por 6 não daria um número inteiro de vezes e que nesse caso, precisariam colocar (0) na chave ao lado do 7, formando 70.	O problema foi escrito de forma objetiva, deixando clara a pergunta final e os elementos necessários para a resolução. O algoritmo não foi utilizado de forma correta. Se esses alunos tivessem feito a prova real, talvez tivessem percebido que o resultado da multiplicação de 74 por 6 não era 424, mas não fizeram. Esse erro cometido na utilização do algoritmo é comum, os alunos sabem que precisam colocar algum número na chave, mas não se perguntam se o número que tem, no caso 4, caberia um número inteiro de vezes ao ser dividido por 6. Poucos alunos colocam que 4 cabe 0 vezes inteira em 6.
Isabela comprou 135 brinquedos e queria dividir entre seu 5 filhos, 7 subrinhos e 3 afilhado. Quanto vai para cada.	DE4	DR3		Sobre a elaboração a dupla relatou a necessidade de se fazer “duas contas, uma de mais e uma de dividir”. Primeiramente era necessário somar os filhos, os sobrinhos e os	A dupla que resolveu compreendeu o enunciado, não sentiram a necessidade de registrar no papel a soma dos filhos,	A necessidade do uso de duas operações, a adição e a divisão. Primeiramente era necessário somar os “5 filhos mais os 7 sobrinhos mais os 3 afilhados” resultando em	Pelo fato de não haver registro escrito, não foi possível identificar como quem resolveu pensou diretamente no número 9 como resposta para a divisão, embora ou foram

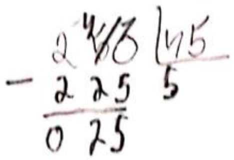
				afilhados e depois dividir os brinquedos pela soma de crianças. Em relação à resolução a dupla elaboradora afirmou que estava correta, que os colegas haviam compreendido o enunciado e acertado a resposta.	sobrinhos e afilhados, apenas registraram a operação de divisão buscando saber quantos brinquedos cada um receberia.	15 e na sequência dividir os 135 brinquedos pelas 15 crianças, para então saber a quantidade que cada um receberia. O problema apresenta erros gramaticais, mas esses erros não influenciaram na interpretação do enunciado. A resolução foi executada de forma correta e acreditamos que a soma das crianças foi realizada por meio de cálculo mental, levando em conta o fato de que não houve registro escrito da mesma. Notamos também a presença do (x) na chave e do (R) para indicar a resposta final.	utilizados cálculo mental ou auxiliares, já que no algoritmo, não há contas parciais.

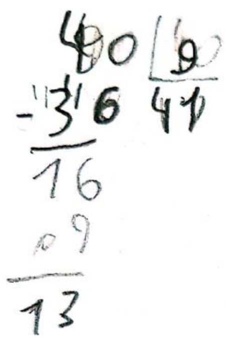
Mateus comprou 23 melos e pagol R$30,94. quento pagaria setivesse comprado um?	DE5	DR10		Sobre o enunciado, a dupla elaboradora relatou a necessidade de dividir o dinheiro pela quantidade de melões para que dessa forma pudesse ser encontrado o valor de um melão apenas. Em relação à resolução, afirmaram que estava correta.	A dupla que resolveu compreendeu o enunciado, desenvolvendo o cálculo de divisão do total gasto pela quantia de melões comprados.	Com relação ao enunciado para resolver era necessário dividir o dinheiro gasto (R$ 30,94) pela quantidade de melões comprada, para poder chegar ao valor unitário dos mesmos. O enunciado apresenta vários erros com relação a língua portuguesa, que não atrapalharam o entendimento do problema. Sobre a resolução, notamos a apresentação de cálculos extras: as multiplicações e as adições. Acreditamos que isso aconteceu por se tratar de uma divisão que está além da tabuada usualmente decorada pelos alunos (valor máximo tabuada do 10). O número utilizado como resposta final à pergunta do problema foi o valor do resto encontrado na divisão ao invés de ser o resultado que aparece abaixo da chave. Eles montaram o algoritmo de modo correto, erraram apenas no último cálculo, ao dividirem 104 por 23,	Acreditamos que a dupla elaboradora não pensou em valores que pudessem facilitar para a dupla que resolveria. Os alunos como não fizeram estimativas dos valores, não perceberam que o valor seria pequeno, ao dividir 30 por 23, pois seria pouco mais de 1. Assim a dupla resolvedora vai efetuando o algoritmo, mas sequer notam que deve haver algum erro na sua resposta final. E quando estão envolvidos, números não inteiros, É preciso levar em consideração se os alunos aprenderam a operar com números e principalmente se ao obterem um resto menor que o divisor, buscam encontrar a parte não inteira que pode se juntar ao quociente inteiro. Percebemos nessa e em outras resoluções o uso de tabuadas auxiliares, como do 30 no outro problema, e nesse agora do 23. Os alunos deviam ser

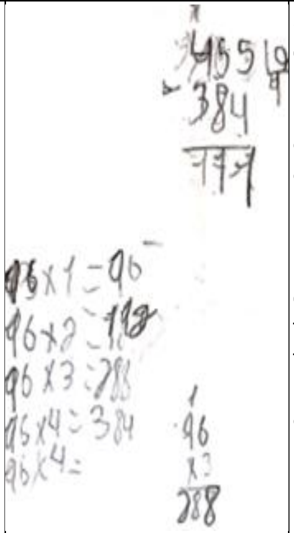
						mas como não sabem o que estão fazendo, deram o resto como resposta. Além disso os alunos sequer perceberam que o quociente não era 134, mas deveria ser 1,34. O (R) de resposta final, também foi registrado neste problema.	estimulados pelo professor a fazer isso, o que é bom, mas fazem indiscriminadamente, sem perceber o que estão fazendo.
gabriela com prol 5 futas 5 maça e 5 peras para 10 quiansas quantas deu para cada quiansas	DE6	DR8		Sobre o enunciado, a dupla elaboradora relatou que a ideia era cada criança receber metade de cada fruta, disseram também que o número "5 frutas" deveria ter sido tirado do problema na hora da escrita. Em relação à resolução afirmaram que estava errada, levando em conta o fato de que cada	A dupla afirmou ter entendido que o enunciado tratava maçãs e peras como sendo frutas, dessa forma não importava se cada crianças receberia partes de ambas e sim que cada um deveria receber determinada quantidade de	A frase interrogativa usada pela dupla elaboradora "quantas deu para cada quiansas" não deixa claro se cada criança deveria receber uma fruta inteira (independentemente de ser maçã ou pera) ou se cada criança deveria receber partes de ambas as frutas. Essa dupla interpretação levou a dupla resolvedora a	Este problema mostra o quanto erros de escrita, podem atrapalhar a elaboração e principalmente a resolução, considerando que quem lê não interpreta o que quem escreveu quis dizer. Matematicamente, a resolução do problema não precisava estar associada a um

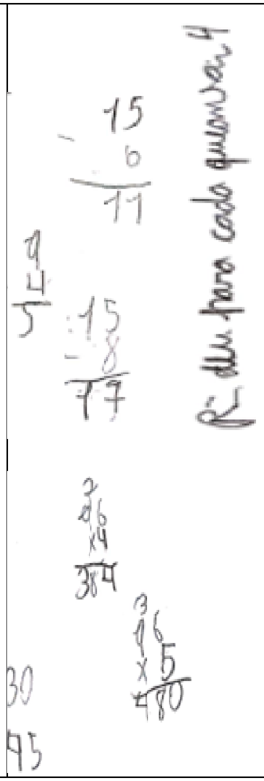
			R: Cada Criança resebeu 1 fruta	crianças não recebeu parte das duas frutas.	fruta independente de ser apenas maçã ou apenas pera.	somar as duas quantidades de fruta e dividir pelo número de crianças. Porém no momento da entrevista com a dupla elaboradora sobre a resolução, os mesmos ressaltaram que queriam que cada criança tivesse recebido partes de ambas as frutas. Essa afirmação ressalta a importância do uso correto da língua portuguesa na elaboração de enunciados. Além disso, mesmo quem resolveu ainda apresentou erros na ortografia, escrevendo recebeu com S ao invés de C. Nos registros da resolução identificamos o uso do (R) fazendo referência a resposta final.	algoritmo, já que era dividir 10 frutas por 10 crianças. Isso mostra como a questão do algoritmo é forte. Um enunciado mais claro para este problema seria “quanto cada criança recebeu de cada fruta?” ao invés de “quantas deu para cada quiansas”.

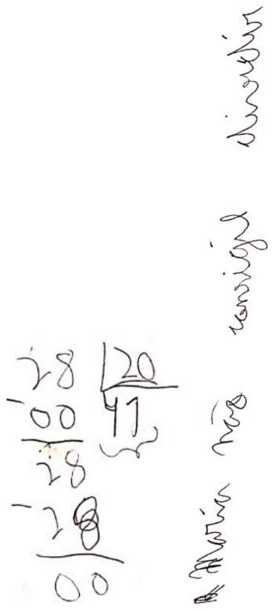
Paulo comprou 1.510 lapis e prestacão dividio po 12. Ele consegira?	DE7	DR2		Sobre o enunciado, a dupla relatou que era necessário “fazer conta de dividir” para resolver, disseram também que a palavra “prestação” representava o cálculo de 1510 ÷ 12, resultando no valor a ser pago em cada prestação. Com relação à resolução, afirmaram que estava correta, que os colegas haviam compreendido o que estava sendo pedido no enunciado.	A dupla afirmou ter compreendido que o enunciado pedia para resolver o cálculo 1510 ÷ 12 e que assim encontrariam o resultado final.	O enunciado apresenta vários erros em relação a língua portuguesa Notamos que o enunciado está incompleto, faltam palavras para ficar mais compreensível a proposta e a pergunta final a ser respondida não está relacionada com o cálculo pedido pelo enunciado. Em relação à resolução, notamos que a dupla compreendeu que era necessário dividir os 1510 por 12, obtendo o resultado 125 que seria o valor aproximado para a resposta. No registro da resolução foi apresentado o (R) de resposta final.	O fato de a dupla resolvedora saber que se tratava de uma operação de divisão os levou a realizarem uma divisão com os valores numéricos apresentados no enunciado, o que culminou com o que havia pensado a dupla que elaborou. Escreveram “1510 lápis”, mas disseram que 1510 era o valor pago “em lápis” que seria dividido em 12 prestações, por isso avaliaram que a resposta que os colegas deram estava correta. Então nessa interpretação, o texto correto, considerando o que quiserem formular quem elaborou seria: “Paulo comprou R$1510,00 em lápis e dividiu esse valor em 12 prestações. Quanto pagará em cada prestação? No entanto outra interpretação poderia ser feita, considerando “1510 lapis”. Então era preciso ter o valor pago pelos 1510 lápis ou o valor de cada lápis para

							que fosse possível descobrir o valor final pago e dividir esse valor em 12 prestações. Além de estar faltando valores, temos também a pergunta final “Ele conseguirá?” Se pensarmos na pergunta em si a resposta seria SIM, é possível dividir em 12. Pensando em uma situação problema talvez a pergunta mais apropriada seria “quanto pagará em cada prestação?” levando assim a dupla resolvedora a buscar um determinado valor para a resposta final. Problemas como esse evidenciam a importância da linguagem clara no momento da escrita de enunciados.
Orlando comprou 250 carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos. Quatos carilho Orlando ficou?	DE8	DR7		Sobre o enunciado, a dupla elaboradora relatou que era necessário “ler e prestar atenção, pois era fácil” disseram que a resposta era obtida ao resolver o cálculo 250 ÷ 45.	A dupla resolvedora resolveu de acordo com o que esperava a dupla que elaborou que era necessário resolver o cálculo 250 ÷ 45 para saber com	Notamos que tanto quem resolveu, quanto quem elaborou não compreendeu que a operação que resolvia o problema se tratava de uma subtração, explicitada na frase “Orlando comprou 250	Entendemos que o enunciado elaborado não se tratava de uma divisão em partes iguais, embora a palavra dividiu esteja presente no enunciado, poderia estar representando uma “divisão social”, onde

				Com relação à resolução afirmaram que estava correta.	quantos carrinhos Orlando ficaria.	carilhos e dividiu com seu irmão 45 carilhos”. Percebemos também no enunciado vários erros de ortografia. Como a dupla resolvedora sabia que deveriam ser elaborados problemas de divisão, apenas calcularam 250 ÷ 45 e usaram o resto encontrado nessa divisão como sendo o resultado final para o problema proposto. Na resolução deste problema o (R) foi registrado, indicando a resposta final.	não se divide em partes iguais. O termo dividiu foi usado no sentido de distribuir, compartilhar. Além disso, a resposta final registrada por extenso foi importante para sabermos a resposta que deram, pois sem ela poderíamos pensar que a resposta fosse 5. Será que acharam que 5 carinhos seria muito pouco por ficar e 25 seria melhor?
Cecilia comprou 40 caixas de chocolate e quer dividir em 9 netos. Quantos caixas cada neto recebeu	DE9	DR5		Sobre o enunciado, a dupla relatou a necessidade de se dividir as caixas de chocolate para os netos, descobrindo quanto cada neto receberia ao final. Com relação à resolução, afirmaram que estava correta.	A dupla resolvedora compreendeu que era necessário dividir as caixas de chocolate entre os netos, dessa forma realizaram o cálculo 40 ÷ 9 para saber quanto cada um receberia.	Notamos que era necessário se realizar o cálculo 40 ÷ 9 para encontrar a quantidade que cada neto receberia de chocolate. Com relação a escrita do enunciado, o problema está bem escrito, sem erros ortográficos, apenas faltou o ponto de interrogação ao final da pergunta e a concordância verbal. Em relação à resolução, percebemos que a dupla resolvedora compreendeu o enunciado, iniciaram de	Apesar do problema estar elaborado de forma clara, a dupla elaboradora não pensou sobre os números que foram colocados no problema, levando em conta que 40÷9=4 e ainda sobram 4 caixas. Ao menos não especificaram o que deveria ser feito com o resto da divisão. A dupla que resolveu não tem domínio do uso do algoritmo, já que não foi um simples erro de subtração, ao subtrair 40 de 36, mas na

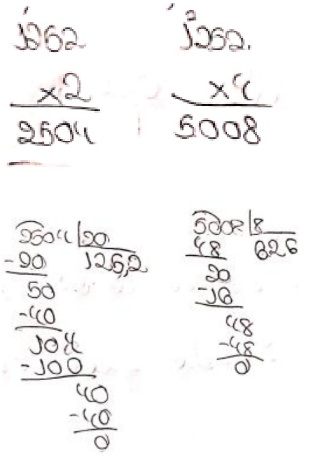
						forma correta a resolução, porém não chegaram ao resultado correto, devido a erros cometidos durante o desenvolvimento do algoritmo.	verdade o registro 16, revela que tiraram 3 de 4 que resultou em 1 e depois "abaixaram o 6", formando 16.
Sofia comprou 455 balas, para distribuir entre 96 crianças. Quantas balas sobraram?	DE10	DR6		Sobre o enunciado, a dupla elaboradora relatou que era necessário resolver a conta 455 x 96 para encontrar a resposta do problema. Com relação à resolução, afirmaram que estava "errada" pelo fato de os colegas não terem realizado o cálculo pensado pela dupla elaboradora.	A dupla resolvedora compreendeu que era necessário dividir as 455 balas para as 96 crianças, logo realizaram uma operação de divisão para encontrar o resultado final.	Notamos que era necessário realizar uma operação de divisão, buscando encontrar o resto, que foi a pergunta final proposta pela dupla elaboradora. O problema foi escrito de forma clara, não apresentando erros de ortografia. Com relação à resolução, percebemos que a dupla resolvedora fez uso de cálculos adicionais (contas de multiplicação e de subtração registradas no papel), que mesmo o quociente estando certo o resto encontrado ao final do cálculo estava errado, levando em conta erros cometidos durante o processo de subtração. A resposta final não estava de acordo com a pergunta do problema, a qual objetivava saber quantas balas sobraram	Este problema, aparentemente bem escrito, deixou claro que deveriam ser divididas 455 balas entre 96 crianças, mas a pergunta final estava relacionada com o resto "quantas balas sobraram?" Não sabemos se essa ocorrência foi intencional ou não, porém foi o único problema elaborado dessa forma. Porém a dupla resolvedora não compreendeu a pergunta, colocando o número de bala que cada criança recebeu, 4, ao invés de colocar o resto da divisão. Talvez isso tenha acontecido, pelo fato do resto que encontraram estar incorreto, (o resto seria 71 e não 171 como apresentado no registro escrito).

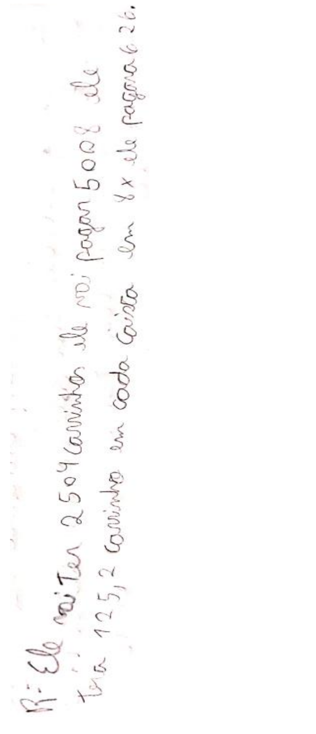
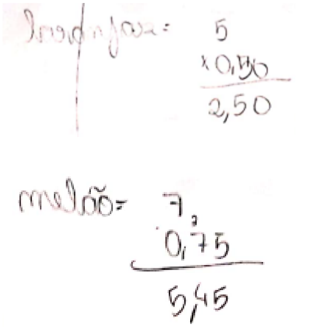
						e a dupla resolvedora não usou o resto encontrado (mesmo estando errado) como resposta final. Nesta resolução destacamos a presença do (R) indicando a resposta final.	O que fez a dupla que elaborou tão bem o problema pensar que a resolução exigia uma operação de multiplicação? Seria o fato de que ao perguntar sobre o resto, pensaram estar perguntando o resultado “de trás par frente”? Que o divisor multiplicado pelo quociente daria o dividendo?

Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças Ela vai conseguir?	DE11	DR1		Sobre o enunciado, a dupla elaboradora relatou que era necessário dividir as 28 balas entre as 20 crianças. Com relação à resolução a dupla afirmou que "não conseguiram resolver o problema, porque a resposta está errada", os colegas compreenderam o enunciado do problema e montaram a conta de maneira correta, mas o desenvolvimento do cálculo e a resposta estão incorretos.	A dupla resolvedora disse compreender que era necessário usar a divisão para responder ao problema, logo montaram o algoritmo 28 ÷ 20 para encontrar a resposta solicitada.	Percebemos que a proposta do enunciado com relação aos valores era dividir as 28 balas para 20 crianças, mas para responder à pergunta final colocada no problema, não seria necessário realizar cálculos, pois a mesma apenas pergunta "Ela vai conseguir?". Com relação a ortografia, na elaboração deste problema houve apenas a falta do ponto final. Em relação à resolução, notamos que a dupla resolvedora usou o algoritmo da divisão buscando resolver o problema, mas apresentaram erros ao desenvolver os cálculos do algoritmo da divisão. Esse fato os levou a responder que "Maria não consegil dividir". Em relação ao registro da resolução, destacamos a letra (R) indicando a resposta final. Destacamos também erros de português na escrita da resposta por extenso.	A primeira parte deste problema foi escrita de forma clara e de fácil entendimento "Maria tem 28 balas para distribuir para 20 crianças." O problema encontrado está na pergunta "Ela vai conseguir?" Essa pergunta pode ser respondida facilmente sem a necessidade de cálculo algum. Toda vez que o divisor for maior que o dividendo é possível dividir. Mas quem resolveu não percebeu isso. Talvez pelo fato de que em um problema de divisão, o mais comum é perguntar quanto recebeu, ficou, ganhou, mas sempre relacionada à quantidade. Nesse caso, a pergunta final mais pertinente seria "quantas balas cada criança receberá?". É muito interessante quando aparece algo diferente, como aconteceu com esse problema, mas quem resolve não está acostumado com isso. Observando os

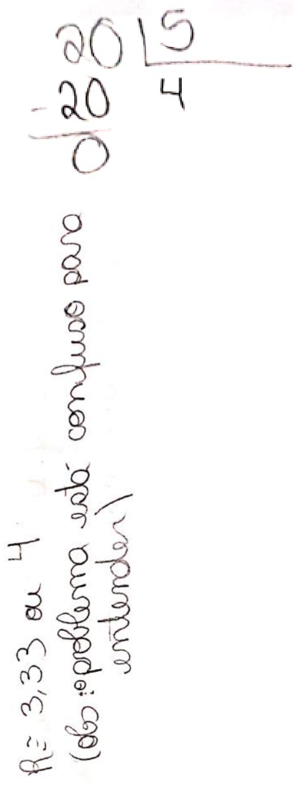
							registros da resolução, notamos que a dupla resolvedora não tinha domínio sobre o algoritmo, apenas o montaram corretamente. Forçaram encontrar resto zero, talvez pensando em justificar que Maria não conseguiria dividir, já que a pergunta era se ela conseguiria ou não. Mas sequer parecem compreender o que significa o quociente encontrado. Essa é uma situação em que o uso das estimativas faria muto sentido, mas os alunos não estão acostumados ou não são estimulados a pensar dessa forma, estimar, antes de usar algoritmo.

APÊNDICE B: Quadro completo contendo as produções dos alunos do 9º ano.

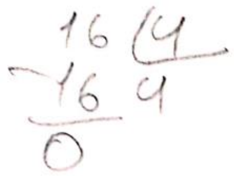
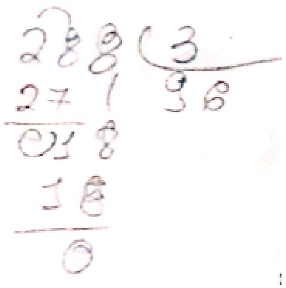
Enunciado elaborado	**DE**	**DR**	**Imagem da resolução**	**Descrição da dupla que elaborou em relação a elaboração e em relação a resolução feita**	**Descrição da dupla que resolveu o problema**	**Interpretação da elaboração e da resolução**	**Inferência sobre a elaboração e a resolução**
Joãozinho tem 1252 carrinhos e ele quer Duplicar sua coleção sendo que cada carrinho custa 4 reais. Quantos carrinhos ele vai ter? Quanto vai pagar? Ele vai dividir sua coleção em 20 caixas, quantos carrinhos vai ter em cada caixa? E quanto ele vai pagar em parcelas de 8x?	DE1	DR7		A dupla que elaborou objetivou levar os colegas a terem mais dificuldade em resolver, levando em conta os valores altos por eles usados no enunciado e a necessidade de realizar mais de um cálculo para chegar ao resultado final. Em relação à resolução, afirmaram que os colegas compreenderam o enunciado e resolveram de forma correta a situação proposta.	A dupla que resolveu relatou ter muita dificuldade na interpretação do enunciado, que faltou deixar mais claro o que estava sendo proposto, que poderia ter sido algo mais simples, que foi desnecessário o uso de tantos números e a necessidade de tantos cálculos (de vezes e de dividir) para chegar ao resultado final.	Inicialmente se trata de duas multiplicações (uma por 2 e outra por 4), na sequência, era necessário realizar uma divisão (por 20) a fim de saber quantos carrinhos teria em cada caixa e finalmente dividir o valor pago pelos carrinhos (por 8) para saber quanto pagaria pelos carrinhos em 8 parcelas. Este problema foi escrito de forma clara, notamos apenas o uso da letra D em maiúsculo no meio do texto sem se tratar de início de frase. Na resolução percebemos que a dupla resolvedora compreendeu a proposta do problema, realizando as multiplicações e divisões necessárias	A pergunta final poderia ser escrita de forma mais adequada, uma sugestão seria “se ele parcelar em 8 vezes, quanto pagará em cada parcela?” Apesar das contas estarem corretas, as duplas resolvedora e elaboradora não discutiram o fato de a divisão do número de carrinhos pelas caixas não ser inteiro, já que o resultado da divisão de 2504 por 20, deu 125,2. Como se trata de objetos, o número de carrinhos em cada caixa tem que ser inteiro. Esse é um aspecto comum, discutido na literatura.

						para chegar ao resultado final. No entanto, não perceberam, pelo menos não discutiram, o fato de a divisão do número de carrinhos pelas caixas ser 125,2 que é um número não inteiro, o que na prática não é possível. No registro da resolução percebemos também o uso da letra (R) indicando a resposta final do problema.	
Sabrina foi na fera e comprou 5 laranja, 7 melão, 10 limão e 5 cenoura. Sendo que cada laranja custa 50 centavos os melão 75 os limão 25 e as cenouras 40 quanto foi o total que ela pagou?	DE2	DR6		A dupla elaboradora afirmou que era necessário realizar “5 contas” para poder encontrar o resultado final. Ao analisar a resolução dos colegas afirmaram que houve a compreensão do enunciado e consequentemente a resolução estava correta.	A dupla resolvedora relatou que não houve dificuldade na interpretação do enunciado, que estava claro e apresentava todas as informações necessárias para a realização dos cálculos.	O enunciado foi escrito de forma clara, descrevendo a quantidade de frutas e legumes e o valor unitário dos mesmos, porém não envolve nenhuma operação de divisão uma vez que a pergunta final “quanto foi o total que ela pagou?” diz respeito a quantia de dinheiro que Sabrina gastou na	...

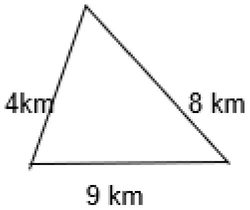
			Cenouro: 5 × 0,40 2,00 limão: 10 × 0,25 1:50 20= 00= 02,50 2,50 2,00 5,45 2,50 12,45 Rp: 12,45			feira, que é a soma dos produtos obtidos nas outras contas realizadas. Dessa forma a dupla elaboradora não contemplou a proposta da pesquisadora que era elaborar um problema de divisão. E a dupla que resolveu, não mencionou esse problema. Notamos também os erros com relação à língua portuguesa como a falta do S para palavras no plural e pontuação.	
João comprou 20 balas, e teve que dividir entre seus 5 irmãos. Quantas balas cada um ficou?	DE3	DR10	20 | 6 -18 3,33... 20 -18 20 -18 0	A dupla elaboradora pensou em algo fácil, para que a dupla que resolvesse não tivesse dificuldade em resolver. Com relação à resolução, afirmaram que não havia a necessidade de fazer duas contas separadas e que a primeira estava errada, pois colocaram os números com o intuito	A dupla que resolveu deixou claro na resolução que o problema estava confuso, considerando o fato de incluir ou não João na divisão das balas. Na resolução eles apresentaram dois algoritmos, um dividindo por 6 e o outro dividindo por 5. No momento da	Levando em conta a entrevista com a dupla que elaborou, a ideia era dividir as 20 balas pelos 5 irmãos. Mas a dupla que resolveu indagou sobre o fato de dividir por 5 ou por 6, afinal João deve ou não receber balas? E para não errarem fizeram as duas contas e deixaram registrado que havia dupla interpretação.	A frase usada na elaboração do problema “entre seus 5 irmãos” parece deixar claro que João não estaria incluído na divisão das balas. Então o que levaria a dupla que resolveu ter ficado com dúvida em relação à quantas pessoas estariam incluídas na divisão? O fato de que foi João quem comprou as

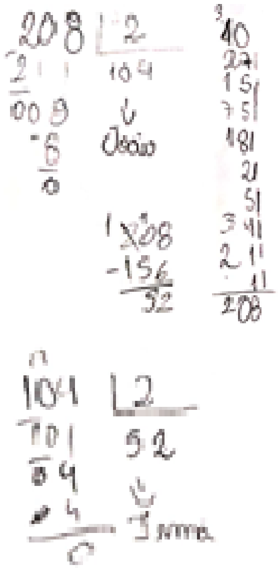
				de deixar óbvio o que estava sendo proposto.	entrevista a dupla reforçou o fato de o enunciado estar confuso, pois não estava claro se João receberia ou não as balas.	No enunciado notamos que os valores foram escritos em linguagem numérica, facilitando a identificação dos mesmos no momento da leitura. A problemática indica a importância do uso correto da língua portuguesa na elaboração de enunciados. Em relação a resolução, destacamos que as contas realizadas estão corretas e que há a presença do (R) para indicar a resposta final e também a descrição por extenso da dupla interpretação do enunciado.	balas "e teve que dividir" pode levar à interpretação de que o mesmo deveria estar incluído na divisão. Um enunciado claro em que João estaria incluído envolveria os termos "com seus 5 irmãos" ao invés de "entre seus 5 irmãos". Um enunciado em que João não estaria incluído na divisão e sem alterar o "entre seus 5 irmãos" seria "para dividir entre seus 5 irmãos".

Julia tinha R$ 6565,00, para dividir com seus 5 irmãos. Quantos reais deu para cada?	DE4	DR8	6565 | 5 -5 1313 15 -15 06 -5 15 -15 0 R: Cada irmão recebeu R$ 1313,00.	A dupla elaboradora afirmou ter pensado em uma situação fácil, de modo que os colegas vissem os números e já pudessem realizar a operação. Com relação à resolução afirmaram estar correta de acordo com a proposta por eles elaborada.	A dupla resolvedora relatou que o enunciado estava claro e que continha todos os elementos necessários para a realização dos cálculos.	A proposta era dividir R$ 6565,00 com 5 irmãos, resultando na quantidade que cada irmão receberia ao final. A dupla que resolveu, não considerou que a Júlia também receberia uma parte do dinheiro, o que estava de acordo com o planejado pela dupla que elaborou. Mas a palavra “com” poderia ter sido interpretada com a inclusão da Júlia na divisão. Observando registro escrito da resolução destacamos a presença do (R) para indicar a resposta final.	Assim como o problema anterior, tudo é uma questão de interpretação. Aqui não houve desacordo na interpretação das duplas, mas poderia ter havido.
Mario tem 4 bombons Paulo tem o triplo de bombons de Mario. E eles irão juntar essa quantia de doces para distribuir a 4 crianças. Sabendo disso quantos bombons cada criança irá receber?	DE5	DR2	4 × 3 12 + 4 16	A dupla elaboradora afirmou ter pensado em enunciado fácil, expondo todas as informações de forma clara e objetiva. Com relação à resolução, afirmaram que os colegas compreenderam e resolveram de forma correta.	A dupla resolvedora relatou que o problema estava fácil podendo ser resolvido de forma simples, que todas as informações estavam explícitas no enunciado.	Na elaboração percebemos que haveria a necessidade de se realizar mais de um cálculo, primeiramente era necessário calcular a quantidade de bombons que Paulo tinha, depois quantos bombons Mário e Paulo tinham juntos para finalmente dividir a quantidade encontrada para 4 crianças.	Este problema foi escrito de forma clara, o uso da língua portuguesa está correto, a pergunta final está escrita de forma coerente e de fácil compreensão. O que se destaca aqui, é que no nono ano os problemas tendem a apresentar mais do que um cálculo.

						Na resolução notamos que a dupla resolvedora compreendeu a proposta do enunciado e resolveram os cálculos necessários para encontrar a resposta final ao problema que estava sendo proposto.	
Sophia participou de uma gincana na qual venceu doze brincadeiras. Cada brincadeira valia vinte e quatro ponto nos quais seriam trocados por balas. Quando chegou em casa Sophia ficou com 1/3 das balas e dividiu o restante entre seus dois irmãos. Quantas balas cada irmão recebeu?	DE6	DR3		A dupla elaboradora optou por algo mais difícil, que levasse os colegas a pensarem sobre o procedimento a ser realizado, classificando a situação por elas elaborada como “charada”. Utilizaram números fracionários visando a diversificação dos elementos apresentados. Com relação a resolução, afirmaram que os colegas entenderam a proposta e executaram de forma correta.	A dupla resolvedora relatou ter dificuldades na interpretação do enunciado, que a pergunta pedia quantas balas cada irmão recebeu, mas que não estava escrito quantos irmão eram. Disseram também que utilizaram a fração como referência para saber em quantas pessoas seriam divididas as balas.	Este problema inicialmente propunha uma multiplicação para descobrir o total de balas ganho por Sophia, na sequência propõe a retirada de 1/3 das balas para finalmente repartir as que sobraram, entre duas pessoas. Quem resolveu depois de encontrar a quantidade de balas, dividiu o valor por 3, sem retirar 1/3. Mas como o número de irmão era 2 ao incluir a Sophia foi possível fazer essa conta, sem retirar 1/3 para depois dividir por 2. Apesar de não haver um R de resposta, há a indicação da resposta final.	Este problema aparentemente foi escrito de forma clara, mas ele pode também causar dúvidas, levando em conta que a dupla elaboradora não especificou como seria a troca dos pontos por balas (cada ponto vale uma bala? Cada grupo de pontos vale uma bala? Cada ponto vale mais que uma bala?). Essas perguntas poderiam causar erros no desenvolvimento do algoritmo e posteriormente na resposta final. Nesse caso seria importante que a dupla elaboradora especificasse como

			Cada irmão ficou com 36 balas.				seria a troca dos pontos pelas balas. Esse é mais um problema que apresenta a necessidade de fazer mais que uma conta, aliás, nesse poderia ser feita até 3 contas, embora a dupla que resolveu, omitiu duas delas. Esse foi o único enunciado que envolveu a inclusão de um número não inteiro na sua formulação.
Maria comprou um pacote de bombons, neste pacote continha 45 bombons, sua intenção era dividir estes bombons com suas 5 amigas. Quantos bombons cada amiga ganhou?	DE7	DR9	45 5 45 9 0	A dupla elaboradora optou por um enunciado mais simples, de modo a facilitar a compreensão e consequentemente a resolução da situação proposta. Em relação à resolução disseram que a dupla que resolveu compreendeu e resolveu de forma adequada.	A dupla resolvedora relatou que o enunciado estava claro, logo não tiveram dificuldade na resolução da situação proposta.	No enunciado notamos que era necessário usar a divisão para se chegar ao resultado de quantos bombons cada amiga receberia. Na resolução notamos que a dupla resolvedora utilizou os números escritos no enunciado para efetuar a divisão e destacar qual seria a resposta final.	Este problema foi escrito de forma clara, o uso da língua portuguesa está correto, a pergunta final está escrita de forma coerente e de fácil compreensão.

			R: Cada um ganhou 9 bombons.				
Descubra a área do sítio de Edmilson.  	DE8	DR5	4 × 9 = 36 36 × 8 = 288 288 ÷ 2 = 144 - 28 08 - 8 0 R: 144 km	A dupla elaboradora visava levar os colegas a usarem a fórmula para o cálculo de área de um triângulo, na qual é necessário resolver uma divisão. Com relação à resolução feita pelos colegas, a dupla afirmou que não entenderam o que estava sendo pedido, sendo necessário “dar dicas” para que pudessem resolver.	A dupla resolvedora relatou que haviam começado a resolução de forma correta, porém ficaram em dúvida, optaram por apagar e recomeçar. Disseram também que no princípio haviam feito apenas “contas de vezes” e que no segundo momento além das multiplicações optaram também por fazer a divisão. Concluíram que o enunciado dava duplo sentido sobre o que	No enunciado percebemos a presença de uma figura de formato triangular com suas respectivas medidas de lado, cujo objetivo era descobrir a área total da figura. Na resolução notamos que a dupla resolvedora usou cálculos de multiplicação e divisão separados buscando encontrar algum resultado para o que estava sendo proposto no enunciado. Ao dividirem por 2, podemos entender que estavam pensando na fórmula que calcula a área do triângulo, mas as duas multiplicações	A dupla elaboradora relatou que o objetivo era que os colegas usassem a fórmula para calcular a área do triângulo, (fórmula essa que envolve dividir valores). Mas o desenho que propuseram não ajudou para este tipo de resolução, usando apenas a fórmula (bxh/2), o que poderia ter sido mais fácil, se fosse um triângulo retângulo. Era preciso que a dupla resolvedora encontrasse primeiro a altura relativa a um dos lados, para que assim pudesse usar a

					realmente estava sendo proposto.	que ficaram registradas, não nos indicam se eles estavam pensando em multiplicar base por altura.	fórmula e chegar a fazer a divisão.
Em uma fruteira há 10 maça, 27 bananas, 15 laranjas 5 caixas de uva, com 15 cada uma, 18 melancias, 2 melões, 5 morangos, 34 cajus, 21 kiwi e 1 abacaxi. João comeu ½ desse número de frutas, e sua irmã comeu a metade do que sobrou. Quantas frutas João comeu? E sua irmã? E sobrou quantas?	DE9	DR4		A dupla elaboradora teve como objetivo levar os colegas a desenvolverem uma soma, de modo que o resultado pudesse ser dividido e resultasse em um número inteiro. Com relação à resolução, afirmaram que os colegas compreenderam o que foi proposto e resolveram corretamente.	A dupla resolvedora relatou que apesar de serem várias as informações apresentadas no enunciado e as perguntas a serem respondidas, o problema estava claro e fácil de resolver.	Este problema inicia com a necessidade de uma operação de adição, com o intuito de descobrir o total de frutas, para, na sequência realizar as divisões utilizando os números fracionários. As duplas elaboradora e resolvedora consideraram a divisão do total de frutas, sem considerarem a necessidade de cada um receber partes iguais de cada uma das frutas, o que tornou o problema mais simples. Na resolução há o registro de todas as contas feitas, bem como uma resposta por extenso.	O enunciado deste problema foi bem escrito, embora apresente vários valores numéricos, estes estão claros quanto a que se referem. As perguntas estão claras, mesmo quando não foram apresentadas em forma de pergunta, por exemplo: “João comeu ½ desse número de frutas”. As perguntas finais não visam apenas buscar os quocientes das divisões, mas também o resto, o que também é algo pouco comum em enunciados. Os números pelos quais as frutas foram divididas, apesar de estar apresentados como frações, envolveram apenas a divisão por 2, o que facilitou as contas.

			R: João Comeu 104 frutas. Seu irmão comeu 52 frutas Sobrou 52 frutas				
Fatore o número 729, cinco vezes pelo mesmo número (primo), até chegar nele mesmo (o número que está dividindo)	DE10	DR1	729 | 3 243 | 3 81 | 3 27 | 3 9 | 3 3 | 3 1 Resposta: 3 O número que esto dividindo é o 3	A dupla elaboradora teve como objetivo levar a dupla que resolveu o problema a perceber que a fatoração trata de divisões sucessivas e em relação a resolução a dupla afirmou que os colegas compreenderam o enunciado e resolveram de forma correta.	A dupla resolvedora relatou que o problema estava fácil de resolver, mas que faltou especificar melhor qual era a pergunta a ser respondida ao final da realização dos cálculos.	Na elaboração percebemos que se tratava de divisões sucessivas (por ser uma fatoração) e que a dupla elaboradora não colocou uma pergunta a ser respondida. Na resolução notamos que a dupla resolvedora compreendeu o que estava sendo proposto, logo representaram as divisões sucessivas por 3 até que o número final não pudesse mais ser dividido. Além disso, apresentaram uma resposta final por extenso.	Neste problema percebemos a iniciativa por parte da dupla elaboradora de incorporar os conhecimentos adquiridos com o passar dos anos escolares na elaboração do problema, no caso a fatoração. Mesmo não tendo um enunciado que represente alguma situação em que se tenha que dividir coisas, ainda assim faz uso da operação de divisão.