Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

PAULO WICHNOSKI

FENOMENOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CASCAVEL
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGCEM
ÁREA DE CONCETRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FENOMENOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PAULO WICHNOSKI

CASCAVEL – PR
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FENOMENOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PAULO WICHNOSKI

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Emanuel Klüber

CASCAVEL – PR
2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Wichnoski, Paulo
Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática / Paulo Wichnoski; orientador(a), Tiago Emanuel Klüber, 2021.
215 f.

Tese (doutorado), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2021.

1. Investigação Matemática. 2. Filosofia da Educação Matemática. 3. Fenomenologia. 4. Hermenêutica. I. Klüber, Tiago Emanuel. II. Título.

FOLHA DE ASSINATURA

DOS MEMBROS DA BANCA DE DEFESA

PAULO WICHNOSKI

FENOMENOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Nível de Mestrado e Doutorado, área de Concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE.

Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Orientador

Dulcyene Maria Ribeiro
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Membro Efetivo da Instituição

Rosa Monteiro Paulo
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Membro Convidado

Adlai Ralph Detoni
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
Membro Convidado

Luciane Ferreira Mocrosky
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Membro Convidado

Cascavel, 06 de abril de 2021.

Dou uma pequena pista para quem quer escutar: não se trata de ouvir uma série de frases que enumeram algo; o que importa é acompanhar a marcha de um mostrar.

(Martin Heidegger)

DEDICATÓRIA

À professora Tânia Stella Bassoi, por
ter me ensinado sobre a coragem.

(*in memoriam*)

AGRADECIMENTO

Com as leituras sobre Fenomenologia e Hermenêutica, aprendi que o *mundo-vida* é lugar *com-partilhado*, no qual o Ser, na sua individualidade do eu, é parte e dele participa sempre com o outro, de tal modo que o existir no mundo passa a ser condição de *partilhar-com*. O eu é um Ser em estado de interdependência com o outro e, portanto, a existência humana é movimento de intersubjetividade em que o outro nos é dado como presença.

Com esse pensar, reconheço que a tese se constituiu na recíproca *eu-outro*. O eu concebido como o individual autêntico do seu autor e o outro concebido como o professor orientador, os professores que compuseram a banca, os professores e os colegas do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciência e Educação Matemática, os autores lidos, o mundo. Desse modo, ela carrega em seu cerne a subjetividade daquele que a compôs e a intersubjetividade daqueles que, ao estarem no mundo, são copresença do seu autor.

Reconhecer, mais do que saudar e memorar, é uma forma de expressar gratidão e, portanto, ao reconhecer o outro em solicitude comigo no acontecer da pesquisa, o agradeço. Especialmente, agradeço à professora Tânia Stella Bassoi (*in memoriam*) e ao professor Tiago Emanuel Klüber, por me conduzirem por caminhos seguros durante o meu itinerário acadêmico. Aos professores Rosa Monteiro Paulo, Adlai Ralph Detoni, Luciane Ferreira Mocrosky e Dulcyene Maria Ribeiro, agradeço pelas discussões engendradas e direcionamentos feitos ao comporem a banca de qualificação e defesa.

Agradeço, também, ao outro supremo, por ser onipresença do meu *estar-aí* no mundo. Aqui, não me refiro a um outro encarnado, tampouco sobrenatural, mas a um Ser que, sendo supremo – e talvez aqui resida sua condição de supremacia – se revela semelhante com os outros e comigo, de tal modo que ao ser outro é, também, tantos, que se congregam, com ele, em um só. Como? Não sei, apenas sinto. Enfim, aos tantos outros presentes nas entrelinhas que dão corpo à tese e estão copresentes na circunvizão do lugar que ocupo no mundo, agradeço.

WICHNOSKI, P. **Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática**. 2021. 215 folhas. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2021.

RESUMO

Nesta tese, nos voltamos para a Investigação Matemática buscando compreendê-la no contexto da Educação Matemática. Esse *voltar-se* é um ato intencional e entrelaçado com a experiência vivida do sujeito que experienciou a interpretação. Isso traz para essa pesquisa características da Fenomenologia e da Hermenêutica e dessa postura interrogamos: *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática?* Para tanto, enfocamos doze obras acadêmicas que se mostraram significativas no campo da Investigação Matemática na Educação Matemática, com as quais construímos os dados. Com o movimento fenomenológico-hermenêutico efetuado, a Investigação Matemática na Educação Matemática pôde ser compreendida em duas regiões de convergências que a expressaram como *um modo de fazer Matemática* e como *um modo de ensinar Matemática*. Enquanto *um modo de fazer Matemática*, valoriza as conjecturas, os testes, as generalizações e as demonstrações como seu *modus operandi*; e, enquanto *um modo de ensinar Matemática*, idealiza para a sala de aula a experiência científica da produção do conhecimento em Matemática, concebendo o fazer dos alunos e dos professores como um *imitar*, um *agir como* o matemático. Hermeneuticamente a compreensão se abriu para um modo de ensinar Matemática que subjaz a impessoalidade cotidiana da epistemologia do fazer Matemática do matemático, valorizando-o. Além disso, ainda que, em princípio, a Investigação Matemática na Educação Matemática tenha se mostrado pretensamente aberta, há a possibilidade de incorrer no fechamento do processo investigativo ao atribuir a característica de abertura somente às situações iniciais e ao pressupor um único modo fazedor. Isso implica na permanência dos alunos e dos professores em um fazer que não lhes permite atrever-se, no sentido genuíno da palavra, a fazer Matemática, o que coloca em suspeita os seus modos autênticos de serem sujeitos investigadores ao *estarem-com* a Investigação Matemática na Educação Matemática.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Filosofia da Educação Matemática; Fenomenologia; Fazer Matemática; Ensinar Matemática.

WICHNOSKI, P. **Phenomenology of Mathematical Investigation in Mathematics Education**. 2021. 215 leaves. Thesis (PhD in Science Education and Mathematics Education) - Graduate Program in Science Education and Mathematical Education, State University of Western Paraná - UNIOESTE, Cascavel, 2021.

ABSTRACT

In this thesis, we turn to the Investigation of Mathematics with the intention of comprehending it in the context of Mathematic Education. This *approach* is an intentional act and intertwined with the lived experience of the subject who experienced the interpretation. This brings to the research characteristics of Phenomenology and Hermeneutics, and from that position, we question: *what is this; Mathematical Investigation in Mathematics Education?* Searching for ways to face the theme, we highlight twelve academic works that have shown themselves significant in the field of Mathematical Inquiry in Mathematics Education, which we built the data with. With the hermeneutic-phenomenological movement accomplished, the Mathematical Investigation in Mathematics Education can be comprehended in two convergence regions that expressed it as *a way to do Mathematics and as a way of teaching Mathematics*. As *a way of doing Mathematics*, it values conjectures, tests, generalizations, and demonstrations as its modus operandi; and, as *a Mathematics teaching method*, it idealizes to the class the scientific experience of knowledge production in Mathematic, forging the making of the student and of the teachers to an *imitating*, an *acting* as the mathematician. The comprehension hermeneutically opened itself to a way of teaching Mathematics that underlies the everyday impersonality of Mathematical epistemology of the doing Mathematics of the Mathematician, valuing them. Besides, though, in principle, the Mathematical Investigation in Mathematics Education has been shown pretentiously open, there is the possibility of incurring in the closing of the investigative process upon attributing the opening characteristic exclusively to the initial situations and on presupposing an only making method. This implies the permanence of students and of teachers in a making that does not allow them to dare, in the genuine meaning of the word, to make Mathematics, which places in decline their authentic methods of being investigative individuals on *being-with* the Mathematics Investigation in Mathematics Education.

Keywords: Mathematical Investigation; Philosophy of Mathematics Education; Phenomenology; Doing Mathematics; Teaching Mathematics.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

GENERALIDADES QUE ENCETAM O DISCURSO

Enveredar-se pelos meandros da Educação Matemática, em particular da Investigação Matemática, é um caminho audacioso para um jovem pesquisador, porque se assume o desafio de dialogar com nomes já consagrados e que contribuem significativamente com temas concernentes à Educação Matemática e porque teorizar e arquitetar ideias no contexto de um campo tão complexo e em desenvolvimento, como se apresenta o campo da Investigação Matemática na Educação Matemática, não é uma tarefa das mais simples.

Todavia, não posso negligenciar o desejo de apresentar aos colegas da comunidade da Educação Matemática (futuros professores, professores e pesquisadores), as ideias emergentes do exercício reflexivo diário, enquanto professor de Matemática e pesquisador em Investigação Matemática. A escrita desta tese foi o modo que encontrei para colocá-las em pauta e engendrar discussões junto aos leitores, para que, no diálogo instaurado, elas possam ganhar contribuições e refinamentos.

Ainda nos tempos da graduação, pela primeira vez *estive-com* a Investigação Matemática e senti apreço pelos seus pressupostos teórico-metodológicos, sem explicações causais. Embora à época eu não tenha me dado conta, desde o primeiro movimento intencionado a essa temática, o desejo que estava por detrás de todo o esforço realizado, seja em situações práticas, em estudos teóricos ou em pesquisas acadêmicas com interrogações específicas, era o de compreender o *isto* que me causava afeição.

O gosto pela Investigação Matemática crescia à medida que dúvidas se presentificavam. A compreensão de alguns aspectos me remetia a outros que, por sua vez, paradoxalmente se mostravam incompreensíveis; o esclarecimento de algumas ideias me direcionava a outras: turvas, nebulosas e epistemologicamente não desveladas, de tal modo que o entendimento foi se fazendo em um emaranhado de (in)compreensões.

Os gargalos teóricos e as questões que se apresentavam carentes de explicações e desvelamentos serviram de inspiração para me manter fiel à pesquisa na área da Investigação Matemática e, desde 2011, tenho direcionado meus estudos a essa temática, inicialmente como um modo de compreensão e, posteriormente, como uma tentativa de *pro-duzir* conhecimentos.

No trabalho[1] de conclusão da graduação, busquei, no banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) dos anos de 2007 a 2010, identificar as questões que apresentaram alguma característica da Investigação Matemática de acordo com a literatura assumida naquele momento e, como desdobramento, reformular algumas das outras, com a intenção de enxertá-las dessas características.

No trabalho[2] de mestrado, interroguei a Investigação Matemática no contexto de uma política pública de formação de professores, especificamente, no Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) do estado Paraná, e busquei tecer um cenário de pesquisa para compreender como ela se revelou, nesse contexto, enquanto possibilidade formativa.

Nesta tese, interrogo-a com a intenção de compreendâ-la na Educação Matemática, almejando o fortalecimento do campo da Investigação Matemática, prezando pela qualidade, inovação e arrojo, não em oposição ao já estabelecido e nem em alinhamento, mas com ele, interrogando e lançando novos olhares, novas ideias e novas interrogações – movimento próprio da constituição do conhecimento – e, assim, ser, em suas devidas proporções, um modo de *ver* e compreender a Investigação Matemática na Educação Matemática.

Ao que tange à produção acadêmica *stricto sensu*, no Brasil, há poucas pesquisas que tematizaram a Investigação Matemática. As poucas pesquisas realizadas, em geral, tratam apenas de confirmar os fatos já anunciados pelas teorias existentes ou fornecem explicações *post hoc* para os fatos novos e as descobertas ocasionais (WICHNOSKI, KLÜBER, 2015).

Essa escassez reforça a construção desta tese e reafirma a necessidade de aumentar o número de pesquisas nessa área para que seja possível ampliar o diálogo na comunidade da Educação Matemática e fomentar a *pro-dução* de conhecimentos. Nesse sentido, esta tese vem na contramão desse cenário ao interrogar a própria Investigação Matemática na Educação Matemática e, consequentemente, os fatos existentes e as explicações fornecidas.

Ao construí-la com a perspectiva fenomenológica, não trago verdades, mas

[1] Cf. Wichnoski (2012).
[2] Cf. Wichnoski (2016).

possibilidades, pois o que é a verdade senão uma vivência psíquica do sujeito que conhece? (HUSSERL, 1989). Para Martins (2006a, p. 29), "a verdade reside apenas na subjetividade e não separa e nem isola em elementos unitários o homem e o seu mundo", ou seja, a vida real não se encerra ao estar, o pesquisador, a pesquisar.

Com Merleau-Ponty (1999), compreendo que a percepção não é um fato psicológico, não é algo empírico, não se percebe pelos órgãos do sentido isoladamente. A percepção, em Fenomenologia, é o conjunto das vivências que traz o sentido do que está sendo vivenciado; por isso o fenômeno é sempre abarcado e compreendido na experiência vivida do pesquisador.

Bicudo (2011b) afirma que "é na percepção que a verdade do existente, enquanto tal, mostra-se a nós como presença" (p. 32). Portanto, no movimento de conhecer e atribuir sentido ao que interrogo, não é possível abstrair-me de mim mesmo, nem me separar do fenômeno interrogado, pois eu e a Investigação Matemática já estamos ontologicamente unidos.

Assim sendo, a existência individual que se desdobra e se revela na minha experiência vivida está, aqui, sendo considerada e libertando-me de uma pesquisa objetiva e impessoal, trazendo a questão da existência humana para o primeiro plano. Esse entendimento de verdade me liberta da máxima de que ela só pode ser compreendida em termos dos objetos externos, abre a realidade interna e subjetiva e mostra que ela pode existir mesmo em contradição com fatos objetivamente explicados e aceitos (MARTINS, 2006a).

Merleau-Ponty (1999, p. 3) nos diz que "tudo aquilo que sei do mundo, mesmo por ciência, eu o sei a partir de uma visão minha ou de uma experiência do mundo sem a qual os símbolos da ciência não poderiam dizer nada". Assim, o processo de conhecer narrado nesta tese se dá como um ato consciente e fundamentado na minha subjetividade, pois é a cognição subjetiva que "permite a cada homem perceber de forma pessoal e peculiar e apropriar-se do conhecimento de maneira idiossincrática" (MARTINS, 2006a, p. 32).

Entretanto, nos diz Heidegger (2015, p. 175), "o mundo é sempre o mundo compartilhado com os outros". Desse modo, o eu é sempre um Ser com os outros, os quais são copresença da presença do Ser no mundo, que por sua vez é copresença para o outro e, portanto, o existir no mundo é movimento de intersubjetividade, "é estar em interdependência, em solicitude com os outros" (MARTINS, 2006b, p. 52). Para

Husserl (2002, p. 25), na vida imanente do próprio eu

> encontra-se implícita a imanente vidas dos ‘outros’, sem confundir-se com a própria esfera primordial. Há uma recíproca apercepção intersubjetiva do ‘eu e de seu oposto’ *(sein Gegenüber)*. O oposto do eu tem que ser outro eu. Ao *ego* só pode opor-se, propriamente, um *alter ego*. Na experiência do meu próprio corpo radica a experiência que tenho de corpos alheios e, por sua mediação, tenho experiência da subjetividade alheia, de uma segunda vida transcendental distinta da minha.

Husserl nos diz, então, que é na intersubjetividade que se constitui o mundo para todos. Cada Ser é um *Ser-em-si*, porém só pode existir no modo do outro, como diferença. Foi com os outros, com teorias, com autores, com professores que passei a me preocupar – no sentido fenomenológico de intencionalidade – com a Investigação Matemática na Educação Matemática, o que pressupõem que o conhecimento aqui *pro-duzido* se dá, também, na dimensão da intersubjetividade.

Entretanto, a subjetividade é sempre do sujeito, portanto, minha. Diz do meu modo característico de compreender, dos meus atos cognitivos e das minhas ações de organização do percebido. Todos os atos que se dão na subjetividade do sujeito se dão no agora e, nele, também se perdem, pois já não são mais o que eram. Por isso, eles precisam ser expressos pela linguagem para serem comunicados e tornados intersubjetivos. Nessa comunicação intersubjetiva, outros atos se desencadeiam, outras compreensões se anunciam e novas articulações são possíveis (BICUDO, 2020).

> É importante destacar que o ato de perceber se dá na subjetividade do sujeito, donde a percepção clara do fenômeno ocorre na vivência do corpo-vivente. Além disso, o percebido é enlaçado pela intencionalidade, de modo que a consciência realize os atos cognitivos, articulando o que assim lhe é trazido. Essa ação articuladora também se dá na subjetividade do sujeito. Porém o ato de expressar enlaça aspectos não só do sujeito, uma vez que solicita também a materialidade da expressão: a linguagem. [...] Sendo assim, o percebido evidencia uma dimensão que transcende a subjetividade do sujeito, na medida em que enlaça os indícios do fenomenal e da coisa percebida. [...] Com essas colocações, estou realizando o movimento de transcender a esfera da subjetividade, adentrando a da intersubjetividade, em que o outro está presente (BICUDO, 2020, p. 39-40).

Com isso, compreendo que não se trata de reduzir a subjetividade à intersubjetividade, o eu ao outro, e vice-versa, no processo de conhecer. Há a subjetividade, que torna o conhecimento possível para cada sujeito, e há, também, a intersubjetividade, que permite o diálogo, a organização do pensado, do constituído e o processo de elaboração. Portanto, dizer que o processo de conhecer aqui narrado se dá a partir da minha subjetividade, significa, tão somente dizer que ele se dá com a minha forma característica de existir no mundo com o outro, uma vez que o meu existir é em um mundo que é sempre *com-partilhado* e, portanto, intersubjetivo.

A minha constituição ontológica me faz um *Ser-em-si* mesmo, mas também um *Ser-com* outros e, por isso, originariamente, o movimento do pesquisar que assumo pode ser assim narrado:

> Há, nesse movimento, a presença do sujeito – ego-individual – que vive a experiência e a expressa; mas há também o outro presente na comunidade imediata e na historicidade da própria linguagem daquele que expressa. Expõe-se, então, a crueza do limiar *linguagem/mundo*, cuja complexidade se amplifica, [...] porque desse limiar também faz parte a experiência do fenomenal. Experiência essa que é individual, mas que ao *estar-se-no-mundo-com* oferece possibilidade de eclodir o espanto da constatação de que ao indivíduo nunca é dada a possibilidade de ser tão somente ego-sujeito, mas que em sua própria subjetividade carrega o outro e o mundo, inclusive na medida em que no próprio movimento de sua constituição *outro* e *mundo* já fazem parte. Traz o espanto de constatarmos que, na experiência primeira – que talvez seja apenas assim denominada por força da vontade de compreendermos a constituição do conhecimento pessoal – à qual somos fadados a não chegar, estão os atos cognitivos, os racionais e o gérmen de toda a idealização. Donde a experiência vivida constituir-se (sic) como nexo da experiência homem-mundo, portanto em seu cerne a subjetividade daquele que experiencia, o outro, constituído na intersubjetividade e o mundo da linguagem, que permite avançar nos processos de idealização (BICUDO, 2011c, p. 34-35).

Isso posto, a escrita do texto apresentado do capítulo 1 ao capítulo 6 ganha forma na primeira pessoa do plural como um modo de dizer ao leitor que, ontologicamente, a tese foi redigida *a muitas mãos*, ainda que as considerações apresentadas, desde a gênese da construção da interrogação até o desfecho da pesquisa, tenham sido tecidas a partir da minha experiência subjetiva com a Investigação Matemática, ao enfocá-la intencionalmente.

Assim, o ponto de partida desta pesquisa é um dado tomado na dimensão da minha experiência vivida, isto é, o fenômeno interrogado faz parte daquilo que estudo e vivencio, portanto, sobre ele possuo uma posição, uma visão e uma concepção prévia, enquanto estrutura prévia do compreender (HEIDEGGER, 2015). Porém, há um esforço de colocar essa estrutura prévia em suspensão e focalizá-lo em perspectivas.

Isso não significa me livrar das teorias e das crenças que carrego – isso não é possível – pois toda a interpretação move-se na posição, visão e concepção prévia e "já sempre se movimenta no já compreendido e dele se deve alimentar" (HEIDEGGER, 2015, p. 214). Significa, então, deixar o fenômeno interrogado mostrar-se em sua essência e em suas possibilidades de aparecer, abrindo-se uma compreensão fenomenológica-hermenêutica.

Com esse entendimento, a compreensão vai se dando na abertura para o que se mostra existencialmente contextualizado e aquilo que interrogo “passa a ser abrangido pela consciência que, em seu movimento de se estender para o que é enfocado, o abarca” (MARTINS; BICUDO, 2006, p. 19). Implicitamente, esse movimento já está anunciado no título da tese.

A palavra *Fenomenologia* designa a Ciência dos fenômenos e, portanto, refere-se àquilo que se mostra na percepção, em atos de consciência (HEIDEGGER, 2015). O termo *Investigação Matemática* é o fenômeno interrogado e a *Educação Matemática* é o solo no qual o fenômeno encontra sentido. Ao anunciar uma *Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática*, o movimento de pesquisa é um voltar-se para e um abrir-se à Investigação Matemática de um Ser que, ao estar no mundo, é sempre consciência.

Ao findar esta pesquisa, almejo arquitetar uma compreensão da Investigação Matemática na Educação Matemática que transcenda as suas particularidades internas, isto é, aquilo que a ela é imanente, e atinja os sentidos latentes e que não aparecem nos modos cotidianos de compreender, constituindo uma compreensão no e pelo contexto histórico do *eu-outro*. Portanto, há uma intenção de abrir-se à Investigação Matemática e compreendê-la na Educação Matemática em um exercício interpretativo com o mundo já existente em que percebo-a e percebo-me como presentes.

Esta primeira apresentação sobre o que interrogo, o modo como interrogo e os caminhos que disso se abrem, leva-me a estruturar esta tese em 6 capítulos, além deste prelúdio, no qual as primeiras palavras foram escritas de modo ainda obscuro, mas que lançam veredas para traçar os objetivos, justificar a pertinência da pesquisa e trazer a minha expectativa com relação a sua construção. Também, trago algumas generalidades sobre o feito, para encerrar o discurso.

Nesse sentido, o capítulo 1 *ex-põe* o movimento efetuado para a construção da interrogação de pesquisa, esclarecendo a origem, as premissas e as razões sobre as quais ela se sustenta. O capítulo 2 *ex-põe* uma releitura teórica sobre a Fenomenologia e a Hermenêutica Fenomenológica. O capítulo 3 *ex-põe* o pensar metodológico da pesquisa.

Já o capítulo 4 *ex-põe* o movimento fenomenológico-hermenêutico efetuado, desde a construção dos dados até os núcleos de ideias. O capítulo 5 *ex-põe* o revelado pelos núcleos de ideias e o movimento hermenêutico realizado, visando os sentidos intrínsecos ao texto da descrição, avançando na direção da compreensão do fenômeno. O capítulo 6 *ex-põe* o desfecho da pesquisa, mas não final e sim como uma abertura a outros horizontes compreensivos e à outras possibilidades de pesquisa.

Por fim, algumas generalidades encerram o discurso e dizem da minha experiência vivida na construção desta pesquisa, das pretensões futuras enquanto professor e pesquisador afeto à Investigação Matemática e da contribuição que deixo para a comunidade da Educação Matemática nesse momento. Também, é apresentado um glossário – produto da minha compreensão sobre o sentido de alguns termos – o qual pode servir de aporte para a leitura da tese.

CAPÍTULO 1

A INTERROGAÇÃO DE PESQUISA: ABRINDO-SE À COMPREENSÃO

Nas pesquisas que assumem uma postura fenomenológica, a interrogação destaca-se e constitui-se, por assim dizer, como pano de fundo, em que as perguntas que se instauram durante o movimento do pesquisar se assentam e fazem sentido. Ela marca o primeiro dos tantos movimentos de redução fenomenológica por destacar, no vasto campo de interesse, o que será investigado; ela é o pilar, a âncora da pesquisa e sustenta e direciona os procedimentos a serem efetuados.

Ela "é correlata ao interrogado e a quem interroga" (BICUDO, 2011a, p. 22), uma vez que é construída intencionalmente por um sujeito que está no mundo. Ela carrega consigo "a perplexidade do investigador diante do mundo" (BICUDO, 2011a, p. 24) e manifesta aquilo que ele vem inquerindo ao longo do tempo. Desse modo, há uma correlação entre a interrogação, o interrogado e quem interroga, que merece esclarecimentos por meio de um esforço inteligível em busca de dizer, por meio da linguagem, aquilo que se intenciona na pesquisa (BICUDO, 2011a). Esse é, pois, o objetivo deste capítulo.

Ao interrogar constantemente o fenômeno, novos questionamentos emergem, outras perspectivas se estabelecem e tencionam a busca para outras compreensões, não no sentido de compreender mais ou melhor, ou ainda, absolutamente; mas no sentido de compreender sob diferentes perspectivas. "Bastaria dizer que, *quando se logra compreender*, compreende-se de um modo *diferente*" (GADAMER, 1999, p. 444). É isso que tem ocorrido ao interrogar constantemente a Investigação Matemática; uma abertura a novas compreensões e, uma delas nos remete a compreendê-la no contexto da Educação Matemática.

A tese se funda na intuição do pesquisador que se movimenta para o desejo de querer saber. A ideia nasce como desdobramento dos estudos engendrados ao longo de dez anos, os quais denunciaram certa obscuridade no tocante à epistemologia, aos procedimentos e às características da Investigação Matemática.

As teorias existentes, mesmo que tematizem aspectos da Investigação Matemática no contexto da Educação Matemática, deixam lacunas teóricas carentes de compreensões. A título de exemplo, Ponte (2003) relata a "existência de lacunas e pontos em aberto, relativos, em especial, à ancoragem deste conceito [Investigação Matemática] na matemática pura ou aplicada e à integração e gestão curricular" (p. 1, inserção nossa). Além disso,

> a noção de investigação matemática, como conceito educativo, enfrenta dois desafios, um de natureza conceptual e outro de natureza empírica. Em termos conceptuais, importa analisar em que consiste esta perspectiva e como se distingue de outras perspectivas semelhantes, como a resolução de problemas. Importa analisar, ainda, quais as suas possíveis fontes de legitimidade, ou seja, as premissas em que pode assentar a sua justificação (PONTE, 2003, p. 2-3).

Ernest (1996) afirma que a compreensão de Investigação Matemática na Educação Matemática ainda é obscura por duas razões: a primeira relaciona-se à mudança de significado do termo *investigação* no contexto da Educação Matemática, o qual é adotado em um discurso generalizado que identifica a Investigação Matemática com a tarefa que dispara a atividade. Já a segunda trata acerca da mudança de foco que pode ocorrer durante a atividade, ao passo que novas questões se estabelecem e novas situações para exploração são geradas.

Embora tenham sido evidenciadas há aproximadamente vinte anos, as brechas epistemológicas na teoria sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática ainda carecem de aprofundamentos e reparos, resistindo à ação do tempo, fazendo-se atuais e abertas a discussões. Isso tem se revelado, também, em estudos contemporâneos, conforme citamos:

> Os focos das pesquisas em Investigação Matemática sinalizam para a necessidade de haver pesquisas que extrapolem a esfera da experiência pedagógica, promovendo um avanço na área. Estudos de cunho filosófico e epistemológico podem ser empreendidos questionando a própria Investigação Matemática e os aspectos inerentes a ela (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015, p. 188).

Ao dizermos que as brechas epistemológicas no campo da Investigação Matemática na Educação Matemática carecem de reparos, não compreendemos o termo *reparo* como um ato ou ação que conserta e restaura, no sentido de lapidar o que não está bom, mas como um "dirigir ou fixar a vista, a atenção em; perceber" (FERREIRA, 2010, p. 657) algo de modo atento, abrindo-se à atenção de quem vê. Com isso, dizemos que há a carência de um voltar-se contemplativo, de um olhar com cuidado, de um notar, de um ver e observar, de um buscar clareza para que o aprofundamento compreensivo possa ir acontecendo.

Sem pretensões de esgotar a produção do conhecimento em Investigação Matemática – fenomenologicamente isso não é possível – e admitindo o caráter aberto e inesgotável das Ciências, o movimento de compreensão, aqui intencionado, não se faz em face dos resultados já alcançados, mas com as inquietações, interrogações e aspectos que a fundamentam no contexto da Educação Matemática e que, ao serem *reparados* reflexivamente, podem conduzir-nos a compreensões inusitadas.

Conforme relatado, a Investigação Matemática já está no campo das vivências do autor desta tese, o que implica haver uma compreensão sobre ela, ainda que derivada do cotidiano das suas atividades de ensino e pesquisa. É uma compreensão ôntica, oriunda de uma atitude natural, “inteiramente plena de aquisições antigas e opera, por assim dizer, na superfície do ser” (MERLEAU-PONTY, 1999, p. 74) além de estar “alicerçada numa crença originária, onde assumimos o caráter de irreflexão, de ausência de questionamentos diante daquilo que nos circunda e do próprio *eu*” (BRAGAGNOLO, 2014, p. 76), isto é, que aceita a Investigação Matemática como simplesmente existindo na fatualidade do mundo. Com Heidegger (2015), compreendemos que essa compreensão é uma compreensão existencial que não foi colocada sob foco e interrogada, mas dada no movimento da experiência vivida do autor ao *estar-com* a Investigação Matemática.

Nesta tese, a colocamos em foco, interrogando-a e buscando clareza sobre outros aspectos que não apenas os oriundos da vivência, mas de uma ontologia que acessa as entranhas do seu significado menos imediato. Para que a compreensão se dê ao nível ontológico, é preciso visar a Investigação Matemática com a única preocupação de vê-la existir e deixar desabrochar as suas essências. Dito de outro modo, não permanecemos nas suas diferentes formas de aparição, mas no modo como se fundam e como elas aparecem.

Merleau-Ponty (1999) coloca a percepção como um fundamento que vem antes da significação do percebido. Portanto, ela não tem conteúdo, mas como se dá no corpo próprio, permite perceber e visar o percebido em atos de consciência, significando-o. Nesse sentido, o fenômeno do conhecimento não se dá na percepção, porque esta é vazia de conteúdo, mas naquilo que é acessado por meio dela, no percebido.

Por exemplo, ao estar um pássaro de nome científico *Pitangus sulphuratus* cantando, o som emitido pelo seu canto, semelhante à pronúncia das palavras *bem*, *te* e *vi*, origina o seu nome popular brasileiro: *bem-te-vi* (FIOCRUZ, s/a). Agora, suponha que um sujeito de origem não brasileira, para o qual a língua portuguesa não lhe tem significado e o pássaro não se constitui presença no seu *mundo-vida*, ouça o seu canto. Podemos alargar essa hipótese para um sujeito criança brasileira não alfabetizado ou para um sujeito surdo. O canto do pássaro será associado, por estes diferentes sujeitos, à pronúncia *bem-te-vi*?

Fenomenologicamente, a resposta para essa pergunta é *não*. Note-se que há um objeto real (o pássaro) e um objeto percebido (o canto). Por meio da percepção o som é dado; este é vazio, sem conteúdo, é apenas um som. O ato de perceber, neste som, a pronúncia *bem-te-vi* é o percebido. Essa pronúncia é uma significação do sujeito àquilo que percebe, a partir das suas vivências, ou seja, são significações vividas.

A assertiva de Merleau-Ponty (1999) nos lembra que a percepção, ao ocorrer pelo corpo próprio, é afetada pelas vivências subjetivas e é diferente para cada sujeito. Ao perceberem o mesmo fenômeno (o canto), os sujeitos considerados no exemplo do pássaro, atribuem diferentes significados ao que percebem, isto é, o fenômeno, quando tematizado por diferentes sujeitos, é significado de diferentes modos, dada as suas diferentes experiências de mundo. Em analogia com a *pro-dução* do conhecimento, o exemplo do pássaro nos esclarece que a percepção implica em ouvir o canto, e o *bem-te-vi* a ele associado é o conhecimento *pro-duzido*. Desse modo, é pela percepção que se dá o acesso ao que se mostra do fenômeno, ela é a *porta de entrada* para o conhecimento, por isso que ela é um fundante, um conhecimento originário.

Ao ser, a percepção, fundada na experiência do sujeito encarnado e relacionada à atitude corpórea, nosso pensar não é apenas um atributo mental, mas um envolvimento corporal com o mundo. Conforme compreendemos com Nóbrega (2008, p. 147), “as significações que surgem, o sentido, são, em última instância, significações vividas e não da ordem do eu penso”. Isso nos faz lembrar da frase *penso, logo existo*, de René Descartes. Se o significado que temos das coisas são significações vividas, então o existir é, a priori*,* do pensar, e inclusive, dissociado dele. Nesse sentido, o pensar só é possível porque existimos; ideia que ecoa na frase *existo, logo penso*, de Friedrich Nietzsche.

Para Merleau-Ponty (1999, p. 3), "todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido, e se queremos pensar a própria ciência com rigor, apreciar exatamente o seu sentido e seu alcance, precisamos primeiramente despertar essa experiência do mundo da qual ela é a expressão segunda". Portanto, a compreensão que almejamos nesta tese não se resume à articulação de ideias e a sínteses descritivas de textos existentes na literatura; não nos serve uma compreensão externa ao *mundo-vida*.

Aliás, com a Fenomenologia, compreendemos que não há nada externo a ele, o qual é o solo de todo conhecimento e de toda percepção possível e, por assim ser, almejamos uma compreensão tão livre quanto possível de conceitos prévios e entrelaçada com o que se mostra no movimento de interpretação hermenêutica, sem que seja satisfeito o desejo de querer saber por explicações teóricas. É, assim, uma compreensão fenomenológica-hermenêutica cujo

> interesse não se dirige às coisas, mas aos múltiplos 'modos subjetivos', nos quais ela se manifesta, aos 'modos de manifestação' que permanecem não temáticos na atitude natural. O especificamente fenomenológico se estabelece, portanto, na correlação entre os vividos e os modos de doação dos objetos, não na correlação entre vivido e objeto (MOURA, 1989, p. 201-202).

Essa compreensão vai se dando em um movimento – do ôntico ao ontológico – ou seja, deslocando-se do modo real, objetivo e individualizado de a Investigação Matemática ser no mundo, para modos de ela ser enquanto possibilidades. A separação das dimensões ôntica e ontológica foi feita por Heidegger e é assim descrita por Schmidt (2014, p. 92): "a ontologia significa o corpo de conhecimento organizado sobre as formas diferentes que as entidades são, enquanto que 'ôntico' se refere às formas reais que seres individuais são", isto é, na dimensão ontológica estão as mostrações, as manifestações dos entes; e na dimensão ôntica estão os entes em sua concretude.

Ao que parece, as preposições *do* e *ao* indicam um movimento para frente, porém o movimento realizado é de retorno, saindo do modo cotidiano (existencial) de compreensão e retornando às coisas, elas mesmas. Por exemplo, um modo de ser ôntico (cotidiano) da Investigação Matemática na

Educação Matemática é ser uma metodologia de ensino, enquanto que sua ontologia se volta para os modos de ser uma metodologia; então, se vai do objetivamente dado (objeto) para o ontologicamente compreendido (fenômeno).

Mas, o que são as coisas? Não sabemos. Só sabemos o que delas se dá à percepção, isto é, delas só podemos dizer acerca daquilo que é visto e compreendido com toda carnalidade do corpo próprio. Com isso, ressaltamos que da postura fenomenológica "nunca conhecemos o que há em si, o real, entendido como objetivamente dado. [...] [conhecemos] 'a coisa' [que] é dada ao sujeito intencional: como fenômeno e este não existe de modo objetivamente dado" (BICUDO, 2020, p. 36, inserção nossa).

Dentre as possibilidades de compreensão que se abriram, fomos direcionados pelo próprio fenômeno a compreendê-lo a partir de ideias e compreensões outras, sistematizadas em obras acadêmicas que se mostraram significativas a nós e à comunidade que pesquisa sobre a Investigação Matemática. Assim sendo, cunhamos um estudo com aquilo que tem sido produzido, permanecido e que se apresenta relevante à área, para, senão responder, aclarar a interrogação que orienta essa pesquisa.

Olhar para as obras acadêmicas que se mostraram significativas no campo da Investigação Matemática se justifica pelo fato de elas terem sido preservadas pela tradição, sobrevivido à temporalidade e, ainda hoje, se prestarem úteis à comunidade da Educação Matemática. Isso, segundo Schmidt (2014), as confere certa dignidade por parte daqueles que as acolheram em seus estudos. Todavia, compreendemos que a significância a elas atribuída não é um estatuto do agora e sempre, mas um juízo que pode se perder no futuro.

Nessa mesma vertente, trabalhos que buscam a compreensão de um fenômeno situado na Educação Matemática têm sido desenvolvidos em projetos de igual envergadura. A título de exemplo, Miarka (2011) e Klüber (2012) buscam, em suas teses de doutorado, a compreensão da Pesquisa em Etnomatemática e a compreensão da Modelagem Matemática, respectivamente. Miarka (2011) interroga a pesquisa em Etnomatemática com o discurso de autores significativos na área, e Klüber (2012) interroga a Modelagem Matemática na Educação Matemática com textos de autores significativos na área.

Mesmo que o estudo aqui apresentado se aproxime dos estudos de Miarka (2011) e Klüber (2012), sua distinção está ao passo que interroga outro fenômeno – a Investigação Matemática. Assim, olhando intencionalmente como ela se manifesta em diferentes perspectivas nos textos de obras acadêmicas significativas sobre o tema, e amparado no movimento que nos faz questionar, que nos faz querer saber sobre; a interrogação de pesquisa assim se estrutura: *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática?*

Heidegger (2015) nos diz que

> todo questionar é um buscar. Toda busca retira do que se busca a sua direção prévia. Questionar é buscar cientemente o ente naquilo que ele é e como ele é [...]. O questionar enquanto 'questionar acerca de alguma coisa' possui um *questionado*. Todo questionar acerca de... é, de algum modo, um interrogar sobre... Além do questionado, pertence ao interrogar um *interrogado* [...]. No questionado reside, pois, o *perguntado*, enquanto o que propriamente se intenciona (p. 40).

No contexto desta tese, essas palavras iluminam a compreensão de que ao questionar a Investigação Matemática, buscamos compreendê-la em seu *é* e *como é*. Todavia, para Heidegger (2015), no *é* e *como é* reside o ser, enquanto aquilo que determina o ente como ente e, portanto, o buscar para o qual nos lançamos intenciona o ser da Investigação Matemática no solo em que ela se manifesta: a Educação Matemática. Dessa estrutura questionadora "o que resulta como *interrogado* [...] é o próprio ente [a Investigação Matemática]. Este é como que interrogado em seu ser" (HEIDEGGER, 2015, p. 42, inserção nossa).

Em conformidade com Bicudo (2011c), acreditamos que compreender e esclarecer a interrogação de pesquisa constitui-se como ponto crucial da pesquisa fenomenológica. Este movimento nos permite enfocar *o que* ela interroga e deslindar as regiões para as quais ela nos remete, para onde ela nos conduz. Além disso, é este movimento que permite pensarmos reflexivamente nos procedimentos a serem tomados, no *como* proceder com a pesquisa, para compreender o fenômeno.

Interrogando a própria interrogação e atendo-nos à linguagem que a expressa, vemos ênfase no pronome *isto*, ao perguntar sobre o que é a Investigação Matemática na Educação Matemática. Pensamos que à medida que se esclarece o significado desse pronome e a sua função na estrutura da interrogação, esclarece-se, também, a própria interrogação. Na língua portuguesa, entre outras funções, ele (o pronome *isto*) é utilizado para evidenciar a posição de uma palavra em relação a outras ou em relação ao contexto da frase.

Na estrutura da interrogação dessa pesquisa, ele é usado porque o referente está depois do pronome. Portanto, ao perguntar *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática?*, ele traduz o movimento pretendido na pesquisa, qual seja, um movimento de aproximação com a Investigação Matemática que permite *ver* as minúcias, os detalhes, aquilo que nos textos das obras acadêmicas significativas revela significados que se abrem à compreensão.

Todavia, aquilo que é *visto* ao *estar próximo* do interrogado deve, também, ser *visto* no contexto em que a pesquisa se assenta, isto é, na Educação Matemática. Assim, esse *ver* é um movimento de expansão e contração, ou seja, os horizontes do *isto* visado se expandem à medida que dele nos aproximamos e se contraem à medida que dele nos afastamos. Dessa maneira não se aprisiona no afunilamento que carrega a limitação do campo de visão, mas avança e se abre no círculo hermenêutico[3].

A forma como a interrogação foi constituída e *ex-posta*, torna o pronome *isto* imperioso sobre as demais palavras, cuja função é anunciar o fenômeno interrogado, desconhecido em sua região de inquérito, mas já presente na experiência vivida do pesquisador que, conforme dissemos, é sempre constituída como nexo da experiência homem-mundo.

Da perspectiva fenomenológica que esta tese se edifica, o *isto* indica o intento ato de dirigir-se ao fenômeno ou, como nos diz Husserl (1996), o ato do *visar-isto*. Portanto, ao perguntar: *o que é isto?*, o fenômeno é visado por um perceber fundado na percepção, com a qual "se constrói o ato do visar-isto, um ato novo que por ela [a percepção] se rege e que dela depende quanto à sua diferença. Nesse e só nesse visar indicativo é que reside a significação" (HUSSERL, 1996, p. 39, inserção nossa).

Desse modo, o *ver* que visa o *isto* (a Investigação Matemática na Educação Matemática) não se limita a um mero perceber como um ato involuntário, mas é um *ver* abarcado pela percepção e, por assim ser, é um ato intencional. A intencionalidade desse ato não é característica dos fenômenos

[3] No subcapítulo 2.2 trazemos mais detalhes sobre o círculo hermenêutico e sobre o modo como o compreendemos.

psíquicos no sentido de *ter intenção*, mas é uma característica peculiar da consciência, entendida como um abrir-se consciente para, ou, como nos diz Husserl (2002), a intencionalidade é a característica das vivências.

Dito isso, o conhecimento *pro-duzido* e sistematizado nesta tese se dá na união entre o sujeito que interroga e o fenômeno interrogado, a qual passa a existir com a percepção. Da perspectiva fenomenológica, somente abrindo-se intencionalmente à Investigação Matemática é que podemos compreendê-la. Esses esclarecimentos acerca da interrogação da pesquisa nos remetem, no capítulo 2, a uma incursão teórica na Fenomenologia e na Hermenêutica Fenomenológica, para avançar com a compreensão daquilo que interrogamos.

CAPÍTULO 2

A FENOMENOLOGIA E A HERMENÊUTICA FENOMENOLÓGICA: *EX-PONDO* COMPREENSÕES

Neste capítulo, apresentamos uma incursão teórica sobre a Fenomenologia e a Hermenêutica Fenomenológica, como um modo de *ex-por* compreensões a partir do diálogo estabelecido com a literatura, e de esclarecer a postura assumida na construção da tese.

2.1 Fenomenologia

Etimologicamente, a palavra *Fenomenologia* significa a Ciência dos fenômenos. No século XVIII, Lambert utilizou o termo *Fenomenologia* para designar a teoria da ilusão sob suas diferentes formas. Kant usou a expressão *Fenomenologia geral* para designar a disciplina propedêutica, enquanto disciplina introdutória, préviamente vinculada à metafísica. Porém, somente com Hegel, em 1807, através da obra *Fenomenologia do Espírito*[4], o termo entrou definitivamente na tradição filosófica, tornando-se de uso corrente (HUSSERL, 2002).

Com Husserl (1989), a *Fenomenologia* ganha um significado diferente de Kant e Hegel. Tal diferença reside no modo de compreender as relações entre o fenômeno e o Ser. Husserl (1989) encerra o fenômeno no campo imanente, isto é, no campo do indissociável, definindo-o como sendo tudo aquilo de que podemos ter consciência, cuja dimensão essencial é a intencionalidade. De acordo com Giorgi (2014, p. 390), “afirmar que a intencionalidade é a essência da consciência equivale, portanto, a dizer que a consciência é por si mesma intencional, que ela está aberta ao que não é consciência dela mesma”.

No sentido fenomenológico, a consciência é entendida como o fluxo temporal das experiências vividas e a intencionalidade “é *visada de consciência* e *produção de um sentido* que permite perceber os fenômenos humanos em seu teor vivido” (HUSSERL, 2002, p. 21). Portanto, falar de consciência nos remete à totalidade das experiências vividas, pois tudo que é vivido, só o é, porque há

[4] Cf. Hegel (2005).

uma consciência que se volta para..., de modo intencional, abarcando, enlaçando e trazendo a clareza do vivido, ou seja, “não há nada que possa ser dito ou ao que se possa referir que não inclua implicitamente a consciência” (GIORGI, 2014, p. 388). Assim, é pela consciência que há o encontro com as coisas do mundo, neutras e isentas de quaisquer significados.

Ao propor a volta às coisas mesmas, Husserl interessa-se pelo fenômeno tal como se torna presente e se mostra à consciência. Nessa volta, há um voltar-se para o fenômeno da experiência que busca pela evidência apodítica, isto é, pelas evidências incontestáveis. Para Husserl (2002), “o sentido do ser e do fenômeno são inseparáveis” (p. 13) e sua fenomenologia pretende estudar “o ser tal como se apresenta no próprio fenômeno” (p. 13), preocupando-se com o estudo dos fenômenos em seus modos de *ser-no-mundo*.

O acesso as essências é, na perspectiva de Husserl, dado pela intuição e esta é entendida como um ato por meio do qual os fenômenos se revelam e ganham sentido. As essências não estão dissociadas dos fatos, não estão neles, e tampouco são os fatos. As essências emanam dos fatos e são intuídas pela consciência quando se lhe apresentam os fenômenos.

> Quando um fato se nos apresenta à consciência, juntamente com ele captamos uma essência (*Wesen, eidos*). Se, por exemplo, ouvimos diferentes sons, neles reconhecemos algo de comum, uma *essência comum*. No fato, portanto, captamos sempre uma essência. As essências são as maneiras características do aparecer dos fenômenos. Não são resultados de uma abstração ou comparação de vários fatos. Para poder comparar vários fatos singulares, já é preciso ter captado uma essência, ou seja, um aspecto pelo qual eles são semelhantes. O conhecimento das essências é intuição diferente daquela que nos permite captar fatos singulares. As essências são conceitos, isto é, objetos ideais que nos permitem distinguir e classificar os fatos (HUSSERL, 2002, p. 14).

Se pensarmos assim, um conceito é algo constituído na percepção, não como um fato psicológico, mas como o conjunto de vivências que traz o sentido do que está sendo vivenciado. Se, para Husserl, os essenciais são conceitos, os quais se constituem nas intuições originárias, então não se pode falar, por exemplo, em conceitos matemáticos, porque não são construídos na percepção. Recordando o exemplo do pássaro, mencionado no capítulo 1, é na percepção que a essência *bem-te-vi* do fenômeno *canto*, no fato *pássaro cantando*, se dá. Não é apenas a percepção psíquica do fato, mas aquela que se dá por atos de consciência.

Husserl também nos fala sobre a imanência e a transcendência. A imanência é entendida como aquilo que é interno ao objeto intencional e que não subsiste fora dele, portanto, imutável no fluxo temporal. É tudo aquilo que é próprio do fenômeno, que faz parte da sua natureza e que possibilita conhecê-lo (HUSSERL, 2002). A exemplo, é próprio ao número se mostrar como contagem, logo a contagem é um aspecto imanente a ele.

Já a transcendência refere-se às características externas ao fenômeno e pode mostrar-se além do imediatamente dado; é aquilo que o transcende. A exemplo, a compreensão de número como código. A codificação é um aspecto que transcende o conceito de número. Desse modo, ao enfocar um objeto intencionalmente (fenômeno), ele se doa à consciência imanente e transcendente (HUSSERL, 2002).

Isso pode ser compreendido com o exemplo da *vermelhidão do vermelho*, posto na obra *A ideia da Fenomenologia*, de Edmund Husserl (1989), e retomado e discutido por Merleau-Ponty (1999), em *Fenomenologia da Percepção*. Se considerarmos duas matizes, dois tons de vermelho, as perguntas que Husserl coloca são: “Não podemos nós julgar que são semelhantes, não estes fenómenos individualmente singulares de vermelho, mas as espécies, os matizes como tais? A relação de semelhança não é aqui um dado genérico absoluto?” (HUSSERL,1989, p. 86).

Quando se fala em vermelho, pensamos nele, aliado a um objeto vermelho (batom, flor, carro, etc), que são atos de abstração do sujeito psicológico. Todavia, qual é a ideia do vermelho que conhecemos? O que permite caracterizar o vermelho do tomate e o vermelho do morango? São vermelhos distintos, mas são vermelhos. Nota-se que, independentemente do fenômeno situado, há um sentido genérico do vermelho, portanto, imanente. As características e os aspectos do vermelho que podem revelar-se quando intencionado pela consciência que o percebe é a transcendência. Assim como não se duvida da existência do vermelho e de qual seja a sua essência,

> também não tem sentido duvidar ainda, no tocante à essência do conhecimento e a sua configuração, de qual seja o seu sentido, quando se têm dados diante dos olhos numa consideração puramente visual e ideadora, no seio da esfera da redução fenomenológica, os correspondentes fenómenos e a sua espécie (HUSSERL, 1989, p. 86).

Todavia, há uma advertência para a não simplicidade do problema da origem do conhecimento, assim como há no problema da vermelhidão do vermelho. No tocante ao problema do conhecimento, é necessário distinguir as suas múltiplas formas e espécies, além de investigar suas relações recíprocas de essências (HUSSERL, 1989).

A compreensão é uma existência audaz e não se consegue viver no mundo sem ela, que é histórica, cultural e constituída na experiência vivida. Nesse sentido, a minha experiência com o vermelho é o que faz eu compreendê-lo, “minha sensação do vermelho é *apercebida* como manifestação de um certo vermelho sentido” (MERLEAU-PONTY, 1999, p. 7), enquanto consciência. A vermelhidão do vermelho é uma experiência vivida e, logo, só pode ser descrita por quem a vivencia. É um transcendente em relação ao universal e imanente em relação ao próprio vermelho. Isso é o conhecimento compreendido e expressado com a perspectiva fenomenológica.

De modo geral, nos diz Husserl (1989), existem duas classificações para o conhecimento, conhecimento intuitivo e conhecimento racional. O primeiro, dado pela percepção imediata e, o segundo, dado pela razão, pelo intelecto, pela análise, pela reflexão. É equívoco supor que o conhecimento intuído é interno ao sujeito que está a conhecer. Igualmente equivocado, é falar do interior (intuitivo) e do exterior (objetivo).

A Fenomenologia não assume a dicotomia entre interno e externo porque o sujeito está no mundo e é sempre *Ser-no-mundo*. Logo, o conhecimento se dá no encontro entre o visto e aquele que o visa intencionalmente, tendo como primado a percepção. Portanto, o fenômeno do conhecimento, segundo Husserl, é um dar-se conta, “efetuado por um sujeito individualmente contextualizado, que olha em direção ao que se mostra de modo atento” (BICUDO, 2011b, p. 30). Não há conhecimento *por aí, para pegar*, ele é constituído no movimento intencional que o abarca.

Assim, há um voltar-se intencional do sujeito para o fenômeno. Esse movimento de voltar-se e de abrir-se, efetuado pela consciência, intenciona as próprias vivências e pode ser compreendido pelo movimento *noesis-noema*, traduzido pelo par *ver-visto*. Em suma, aquilo que é visto, o é em perspectivas, de modo que o que é visto já se doou em seus modos de manifestar-se para aquele que o vê. Recorrendo a Sokolowski (2012), podemos entender o *noema* como

> um objeto de intencionalidade, um correlato objetivo, mas considerado desde a atitude fenomenológica, considerado apenas como experienciado. Não é uma cópia de um objeto, nem um substituto para um objeto, nem um sentido que nos relaciona ao objeto; é o objeto mesmo, mas considerado desde o ponto de vista filosófico (SOKOLOWSKI, 2012, p. 68).

Ao ser enfocado, o objeto é para a consciência uma manifestação, que por meio de um ato intencional, se permite ser visto, não naquilo que ele é naturalmente, segundo a atitude natural, mas nos modos que ele se dá como presença à consciência que o percebe; tem-se aí o *noesis*. Dessa forma, o *noesis* “se relaciona aos atos intencionais por meio dos quais intencionamos as coisas: as percepções, os atos significantes, as intenções vazias, as intenções cheias, os juízos, as recordações. Mas se refere a eles, vistos do ponto de vista fenomenológico” (SOKOLOWSKI, 2012, p. 69).

Desse modo, compreendemos que nenhum objeto existe fora da consciência, pois não é ontologicamente separado da experiência vivida. Há uma manifestação do objeto, não enquanto realidade ôntica, mas como realidade percebida de acordo com a perspectiva de quem percebe, logo, o objeto se constitui, vem a ser e se mostra em seus modos de aparecer ao sujeito que o percebe intencionalmente. Por exemplo, a vermelhidão do vermelho doa-se em aspectos passíveis de serem percebidos, porém as possibilidades de o vermelho aparecer dependem de quem o percebe, ou seja, a qualidade do percebido mostra-se na percepção do sujeito, na esfera subjetiva.

É neste sentido que Bicudo (2011c) afirma que a Fenomenologia husserliana efetua o “movimento de trabalhar com os sentidos e significados que não se dão em si, mas que vão se constituindo e se mostrando em diferentes modos, de acordo com a perspectiva do olhar e na temporalidade histórica de suas durações” (p. 41). Para Husserl (1989, p. 32),

> não tem sentido algum falar das coisas que simplesmente existem e apenas precisam de ser vistas; mas que esse «meramente existir» são certas vivências da estrutura específica e mutável; que existem a percepção, a fantasia, a recordação, a predicação, etc., e que as coisas não estão nelas como num envólucro ou num recipiente, mas se *constituem* nelas as coisas, as quais não podem de modo algum encontrar-se como ingredientes naquelas vivências.

Nessa perspectiva, aquilo que se mostra não se mostra em si, mas na experiência vivida em um ato intencional que acolhe o percebido e o enlaça, dando-se conta do que percebe, bem como dos atos efetuados, uma vez que “ao percebermos o fenômeno em seu campo de manifestação, nosso olhar, que é um ver compreensivo, já traz consigo a historicidade de nossas vivências e o solo cultural e histórico em que o fenômeno se presentifica” (BICUDO; KLÜBER, 2013, p. 27), ou seja, o fenômeno passa a existir no *mundo-vida*.

A Fenomenologia procede elucidando e distinguindo o sentido daquilo que se mostra e como se mostra e, portanto, constitui-se em uma epistemologia especial da essência que ultrapassa a visão puramente científica de Ciência, a exemplo da própria Matemática, que parte da definição para o teorema, o qual, uma vez provado, incita proposições em um processo dedutivo de validação. Ao falar de Fenomenologia, Husserl (1989) evoca que

> a sua particularidade exclusiva é o procedimento intuitivo e ideador dentro da mais restrita redução fenomenológica, é o método especificamente filosófico, na medida em que tal método pertence essencialmente ao sentido da crítica do conhecimento e, por conseguinte, ao de toda a crítica da razão em geral (p. 87).

A Fenomenologia é derivada de uma atitude que, em última instância, busca a ausência absoluta de pressupostos a priori, não duvidando da sua existência, mas interrogando-os junto ao fenômeno. Isso significa não projetar teorias ou explicações ao visto, mas deixar-se conduzir por ele, para ele mesmo se esclarecer. Fundamenta-se na redução eidética (redução às essências), movendo-se à redução transcendental como dado de evidência apodítica que permite efetuar a análise daquilo que nela efetivamente se dá. Opõe-se ao conhecimento fundado na experiência empírica dos fatos ou, como nos diz Husserl (1989, p. 15), “Parte das ‘coisas-mesmas’ (não dos fatos) como se apresentam em sua pureza à consciência”.

Husserl propõe a volta às coisas mesmas como fonte do conhecimento, de modo a interessar o fenômeno como se mostra à consciência. Desse modo, a Fenomenologia não pretende estudar puramente a coisa, nem puramente a representação da coisa, mas a coisa tal como se apresenta à consciência, vista como fenômeno (HUSSERL, 2002). Segundo Husserl, essa compreensão nasce ao tratar da Filosofia como Ciência de rigor a partir da *ausência de pressupostos*, do *caráter a priori* e das *evidências apodíticas*.

A *ausência de pressupostos* está ligada à ausência de quaisquer teorias filosóficas explicativas e não como postura de interrogar sobre o mundo e sobre concepções que são anteriores a investigação. É um desprender-se, pela *epoché*, de quaisquer pressuposições que derivam do mundo exterior, isto é, uma suspensão do juízo sobre aquilo que se sabe do mundo natural. Desse modo, “a única fonte do conhecimento, para o fenomenólogo, é a evidência que caracteriza os dados imanentes da consciência” (HUSSERL, 2002, p. 15).

O *caráter a priori* fundamenta o rigor da Filosofia em um a priori universal, isto é, em dados que independem da experiência empírica. A partida de toda investigação deve ser a coisa mesma, tal como se apresenta à consciência em sua pureza. Consciência que é superior a qualquer plano empírico e revela-se como condição anterior a qualquer possibilidade do conhecimento (HUSSERL, 2002).

A *evidência apodítica* refere-se à essência pura dos objetos, àquilo que não é passível de dúvidas e que se manifesta no imediatamente dado a consciência. Nas palavras de Husserl, “refere-se a algo imediatamente dado, anterior à toda teoria, construção ou hipótese, situado ao nível da vivência fenomenológica” (HUSSERL, 2002, p. 17). Logo, é pela evidência apodítica que as coisas e os fatos se mostram presentes, eles mesmos.

Nesse sentido, a Fenomenologia opõe-se à visão positivista de Ciência, a qual busca confirmar hipóteses pela construção de teorias que sustentam suas afirmações, uma vez que olha para o objeto intencional em sua totalidade “sem a intervenção de conceitos prévios que o definem e sem basear-se em um quadro teórico prévio que enquadre as explicações sobre o visto” (MARTINS; BICUDO, 2006, p. 16). Preocupa-se com o estudo das essências, as quais se tornam evidentes com a redução fenomenológica, em um movimento contextualizado no *mundo-vida*.

Para Husserl (1989, p. 56-57), “a obscuridade acerca do conhecimento no tocante ao seu sentido ou a sua essência exige uma ciência do conhecimento, uma ciência que nada mais pretende do que trazer o conhecimento à claridade universal”. Portanto, se há uma obscuridade no conhecimento, relativa à sua essência, então é realmente necessário ter uma Ciência que estude o conhecimento, no sentido de torná-lo claro e que explique como o conhecimento é possível, mas contraditório a explicar tudo através de fatos psicológicos (HUSSERL, 1989). A crítica de Husserl à produção do conhecimento reside, portanto, na atitude que busca justificativas nos fatos. Para ele, é preciso uma atitude que clarifica e elucida a essência do conhecimento, no sentido de responder o que é essencial para conhecer, caso contrário o conhecimento é sem sentido; daí nasce a atitude fenomenológica.

Por exemplo, uma compreensão da Investigação Matemática no contexto da Educação Matemática derivada dos fatos, poder-se-ia estruturar em face dos textos lidos e dos conhecimentos prévios, procedendo ao enquadramento dos dados para validarem ou refutarem aquilo que já se sabe. Todavia, com a postura fenomenológica, a Investigação Matemática é enfocada no modo em que ela aparece, no modo como ela passa a existir no mundo, deixando-a se mostrar. Aquilo que já é sabido se coloca em suspensão para que ela mesma se revele, ou seja, a compreensão é fundamentada na manifestação do *isto* interrogado, guiada tão somente por aquilo que dele se revela.

A ideia de Fenomenologia em Husserl é um exercício de rotorno às coisas mesmas, desnudando-as para perceber a essência; é, portanto, uma epistemologia da essência. Este conceito de Fenomenologia foi repensado por Heidegger (2015) em *Ser e Tempo*, o qual não nega o retorno às coisas mesmas, porém, preocupa-se com o Ser da consciência até então indeterminado e não questionado por Husserl.

Na Fenomenologia de Husserl, o fenômeno se mostra como tal na consciência, isto é, o conhecimento é um voltar-se à coisa mesma mediado por uma subjetividade transcendental. Contudo, na Fenomenologia de Heidegger, essa ideia ganha novo significado ao voltar-se para a historicidade e para a temporalidade do *Ser-no-mundo*, para que as coisas apareçam, ou seja, o conhecimento é um voltar-se à coisa mesma, porém enlaçado com a experiência vivida do Ser conhecedor e não assentado no fenômeno puro.

Heidegger (2015) diz que a Fenomenologia é “deixar e fazer ver por si mesmo aquilo que se mostra, tal como se mostra a partir de si mesmo” (p. 74). Desse modo, traz à tona o problema da existência do Ser que está a conhecer e busca uma explicação fenomenológica da própria existência humana ou, como ele mesmo frisa, o que se coloca em pauta é a questão do sentido do Ser. Husserl assume que as coisas, elas mesmas, são as vivências da própria consciência, é a consciência do eu puro do Ser. Heidegger, admite que essas vivências são abstrações, uma vez que já somos sempre *Seres-no-mundo* e, portanto, não pode haver consciência separada do mundo (SEIBT, 2018).

Nesse sentido, segundo Seibt (2018), Heidegger entende que a compreensão das coisas e do Ser, a partir de categorias tradicionais cartesianas, não permite alcançar o ser próprio das coisas e do Ser e, por isso, é necessário buscar uma compreensão mais originária do Ser. Todavia, o Ser não pode ser entendido como um fenômeno do conhecimento, dado que é algo mais lato e indefinível e “nunca pode tornar-se verdadeiramente um objeto para nós, dado que somos ser no próprio ato de constituir qualquer objeto enquanto objeto” (PALMER, 2018, p. 175).

Em *Ser e Tempo*, Heidegger evoca que cada um possui uma certa compreensão acerca do Ser, acumulada na própria experiência. Assim, a reflexão a respeito do sentido abrangente do Ser deve ser, ela própria, fenomenológica, isto é:

> A ontologia tem que se tornar fenomenologia. A ontologia tem que se voltar para os processos de compreensão e de interpretação pelos quais as coisas aparecem; tem que descobrir o modo e a orientação da existência humana; tem que se tornar visível a estrutura invisível do ser-no-mundo. [...] Significa que a ontologia deve, enquanto fenomenologia do ser, tornar-se uma «hermenêutica» da existência (PALMER, 2018, p. 176).

Ao falar de hermenêutica da existência, Heidegger (2015) propõe uma interpretação das possibilidades que o Ser tem de existir, a qual torna clara a natureza do Ser, transformando-a em uma ontologia da compreensão e interpretação. Denomina o ser do Ser humano de existência ou *ser-aí* e, portanto, sua Fenomenologia passa a ser uma Fenomenologia Hermenêutica do *Dasein.* Todavia, o que significa o *ser-aí* ou a existência do Ser? Segundo o dicionário de Filosofia Abbagnano (2007), *existência* significa um modo de ser limitado e definido. Disso, desdobram-se três significados particulares: o modo de ser *determinado*, o modo de ser *real* e o modo de ser *próprio do homem*.

O modo de ser *determinado* está ligado à ideia de existência assumida na linguagem comum e em diversas linguagens científicas como, por exemplo, na Matemática, que, a partir de Hilbert, a entende como ausência de contradições. O modo de ser *real*, ideia utilizada com frequência na história da Filosofia, coloca o significado de existência na realidade que é ou que subsiste. O modo de ser *próprio do homem*, ideia amparada na Filosofia existencial, significa que a existência é o modo de ser do homem no mundo, ligada à sua intimidade própria com o mundo, isto é, “o modo de ser próprio do homem enquanto é um modo de ser no mundo, em determinada situação, analisável em termos de possibilidade”

(ABBAGNANO, 2007, p. 402).

No entanto, para Heidegger (2015), o conceito de existência não é um simples existir, mas uma condição de abertura, por meio das existenciálias: *afetividade, compreensão* e *expressão*, para a experiência. Isso quer dizer que a abertura para a experiência pode ser vivida como afetividade, como compreensão e como expressão, sem distinções de prioridade, o que significa que "a ideia criadora deve ser intuída e será finalmente expressa somente nas condições de abertura do ser para a compreensão do sentido do mundo" (MARTINS, 2006b, p. 45).

Nessa perspectiva, mundo é, aqui, entendido como o horizonte em que se dá o encontro com os outros Seres e com os entes, constituindo a base do *ser-com*. É neste mundo que, ao estabelecer relações com o outro, o Ser tem a possibilidade de *vir-a-ser.* É importante compreender que o binômio *Ser-mundo* é uma totalidade, posto que o Ser já está no mundo. Nas palavras de Heidegger (2015, p. 562):

> *Ser e tempo* reservou 'existência' para designar toda a riqueza das relações recíprocas entre presença e ser, entre presença e todas as entificações, através de uma entificação privilegiada, o homem. Nessa acepção, só o homem existe.

Percebemos, assim, que *ser-no-mundo* não alude à ideia de existência do Ser. É somente na interlocução do homem com o mundo que emerge a concepção existencial. Nesse sentido, a existência humana diferencia-se de outras formas de existir como, por exemplo, as biológicas e, conforme Martins (2006b, p. 50), "existência e vida nunca poderão ser sinônimos, pois somente o homem tem existência"; "a pedra 'é', mas não existe. O carro 'é', mas não existe. Deus 'é', mas não existe" (HEIDEGGER, 2015, p. 562).

O *ser-no-mundo* é *com-partilhado*, isto é, o Ser partilha o mundo com coisas, com pessoas e consigo mesmo. Desse modo, a existência acontece em um contexto de abertura do Ser *para-com* os outros e *para-com* ele mesmo e, portanto, o modo de *ser-no-mundo* é um modo de liberdade circunstancial: o homem é livre dentro dos limites criados pela circunstancialidade. Por exemplo, o homem não escolhe a família na qual nasce, nem a cultura da qual participa, mas pode escolher, no âmbito dessas circunstancialidades, o modo de ser *para-com* a sua família e a sua cultura (MARTINS, 2006b).

Em oposição à ideia cartesiana de Ciência que pressupõe a dicotomia entre o sujeito e o objeto, a Fenomenologia Hermenêutica busca as soluções na experiência vivida no aqui e no agora, na experiência direta e, não nega o mundo externo, dado que “onde quer que o ser seja presença, na sua realidade vivida, haverá mundo, por que a própria existência humana é estar-no-mundo” (MARTINS, 2006b, p. 49). Dessa maneira, o Ser está no mundo e o mundo nele.

Ao denominar sua Fenomenologia de hermenêutica, Heidegger não se refere à Hermenêutica como teoria da exegese bíblica, como metodologia filológica ou como Ciência da interpretação, mas como uma explicação fenomenológica da existência do Ser ou, como evoca Seibt (2018, p. 128),

> sua fenomenologia será hermenêutica, por passar por uma análise da existência daquele ente que já sempre compreende o ser (o ser humano, que Heidegger pretende reconduzir a si mesmo, enquanto ele mesmo, através da expressão ser-aí – *Dasein*), que habita na proximidade do ser e tende a encobrir essa relação na vida normal do dia a dia, ou seja, na sua ocupação absorvida com os entes, as coisas com que lida.

Para Heidegger (2015), o fenômeno da compreensão e interpretação é ontológico, é um elemento fundante da existência do Ser; é, portanto, idissociável da sua existência. Sendo *Seres-no-mundo*, já somos sempre compreensão e “compreendemos sempre a partir do nosso próprio horizonte [...] por uma constante referência à nossa experiência” (PALMER, 2018, p. 165), de modo que a compreensão é sempre enxertada de um contexto histórico e cultural, da vivência do Ser (intérprete) ou daquele que, vivendo compreende e interpreta. Assim, a compreensão não é isenta de pressuposições e só subsiste a partir de uma pré-compreensão que opera no interior de um conjunto de relações, uma vez que, ao mesmo tempo em que somos um Ser individual, somos um Ser com pessoas e com coisas.

Na Fenomenologia Hermenêutica, a ideia de hermenêutica ainda está associada à compreensão, porém o ato de compreender é uma realidade existencial, entendida ontologicamente. A compreensão não ocorre de modo operatório como uma técnica de interpretação, mas como um processo histórico e culturalmente situado que transcende as formas liguísticas, indo além da objetividade do dito (PALMER, 2018). Ao buscar o retorno às coisas mesmas, a Fenomenologia Hermenêutica não lida com as coisas em si, com o fenômeno puro, mas com a coisa percebida, compreendendo-a em sua essência e sempre entrelaçada com a experiência vivida do Ser (SEIBT, 2018).

As preocupações com o Ser tecidas em *Ser e Tempo*, se dão em torno da ideia do Ser e dos modos de *vir-a-ser* do homem, cuja existência se dá no *pro-jeto*, enquanto movimento no espaço e no tempo. Portanto, ao constituir-se junto ao mundo, nas ações dirigidas pela consciência, como um modo de o ser do homem se dar, focando, intencionalmente, o que está no mundo, o homem *pro-jeta-se*. Nesse sentido, *pro-jetar-se* significa constituir-se junto ao mundo e *ser-no-mundo* refere-se ao modo em que se dá o encontro do homem com as coisas do mundo. Portanto, carrega a ideia do *ser-no*, enquanto interpretação do ser do Ser no mundo, e do *ser-com* enquanto interpretação das relações que o Ser estabelece *para-com* o outro que está no mundo (MARTINS, 2006b).

Heidegger (2015) nos diz que “conhecer é um modo de ser da presença enquanto ser-no-mundo, isto é, que o conhecer tem seu fundamento ôntico nesta constituição de ser” (p. 107) e, portanto, o conhecimento é um modo ontológico de *ser-no-mundo*. Assim, o conhecimento se dá abarcando o percebido na percepção do sujeito que está no mundo, pois o sujeito não opera sobre o objeto, mas sim naquilo que é visto do objeto, nas suas múltiplas formas de aparição. Pelas vias da Fenomenologia Hermenêutica, o conhecimento não é derivado de um atributo mental ou emanado puramente do fenômeno interrogado, mas se funda na experiência vivida e na atitude corpórea do Ser que está a conhecer, sempre com o mundo.

2.2 Hermenêutica Fenomenológica

O objetivo do texto apresentado neste subcapítulo não é efetuar uma descrição histórica, como se fosse uma linha do tempo, iniciando com a origem da Hermenêutica até sua compreensão mais contemporânea, perpassando pelas transformações sofridas. Trata-se, tão somente de *ex-por* como compreendemos a Hermenêutica com a qual procedemos à interpretação das obras acadêmicas significativas e qual o seu sentido para a pesquisa fenomenológica. Pontuamos que existem outras concepções sobre a Hermenêutica que não são fenomenológicas[5], as quais não são trazidas para

[5] Cf. Palmer (2018).

esse texto, porém é importante apontar essa diferença no cuidado com os termos e, por isso, utilizaremos a expressão *Hermenêutica Fenomenológica*.

Ao buscar compreender o fenômeno em obras acadêmicas significativas, há um voltar-se para textos construídos por sujeitos existindo histórica e culturalmente, para os quais o mundo tem um sentido próprio. A tarefa que assumimos com esses textos, pela própria postura de investigação, não é a de interpretá-los no sentido de reconstruir as ideias dos autores, mas de compreendê-los como *textos que falam*, que expressam sentidos capazes de iluminar o fenômeno interrogado. Portanto, a interpretação não é psicológica, mas fenomenológica, guiada pela escuta do dizer dos textos enquanto produtos do pensar humano.

Ao nos referirmos a esses textos como obras acadêmicas significativas, vemo-los como *obras* enquanto construção humana e não como meros objetos de análise. Como objetos de análise, são estáticos e redutíveis a métodos científicos, mas como obras, “apelam para modos de compreensão mais subtis e compreensíveis” (PALMER, 2018, p. 21). Esse modo de vê-los encontra clareza na seguinte citação:

> Uma obra literária não é um objeto que compreendemos através da conceptualização ou da análise; é uma voz que devemos ouvir e, «ouvindo-a» (mais do que vendo-a) compreendemo-la. [...] A compreensão literária tem que se enraizar em modos de compreensão mais latos e primordiais que têm a ver com o nosso próprio ser-no-mundo. Portanto, compreender uma obra literária não é uma espécie de conhecimento científico que foge da existência para um mundo de conceitos; é um encontro histórico que apela para a experiência pessoal de quem está no mundo (PALMER, 2018, p. 24).

Com isso, a compreensão buscada nesta pesquisa transcende as formas linguísticas de compreender, via de regra, analíticas e apegadas à linguagem e à objetividade da palavra, mas avança para uma compreensão que alcança o texto no e pelo contexto histórico do sujeito que experiencia a interpretação e, por isso, é hermenêutica. Todavia, não é uma Hermenêutica metódica e normativa como propunha Dilthey, mas filosófica, aberta para o mundo do humano. Desse modo, possibilita que a interpretação se dê enxertada de aspectos históricos, sociais e culturais, tanto dos autores, quanto do intérprete.

A nossa tarefa de interpretação não se resume à apropriação do conteúdo dos textos das obras acadêmicas significativas como se fosse possível exercer um controle intelectual sobre eles, sob a égide do esquema sujeito-objeto; antes, é uma tarefa com aquilo que nos é dado *ver* com a experiência vivida, em uma relação de interpelação em que o intérprete e a obra interrogam-se mutuamente. Nesse dinamismo entre o intérprete e a obra, a Hermenêutica vem dar seu contributo e outorgar a possibilidade de *ver* e *ouvir* o texto.

> Assim, interpretar a obra significa caminhar para o horizonte interrogativo no qual o texto se move. Mas isto também significa que o intérprete se move em direção a um horizonte em que outras respostas são possíveis. É nos termos dessas outras respostas – no contexto temporal da obra nos tempos que corre – que temos que compreender o que o texto diz (PALMER, 2018, p. 312).

Segundo Bicudo e Garnica (2011), ao *estar-com* uma obra escrita, o que se vê no texto não é o dizer do autor, mas a sua intenção de dizer. Desse modo, ao lê-lo se estabelece uma interlocução do leitor *para-com* essa intenção, fixada na escrita, que deve transcender a mera decodificação de seus sinais gráficos, dado que a sua constituição não se resume ao que se vê na escrita e, portanto, a sua compreensão também não pode resumir-se a isso que se vê.

> Atuam, nessa compreensão, os direitos do autor, que no texto coloca suas percepções e experiências no desejo de torná-las públicas; os direitos do texto que carrega em si, independente de como e quando foi gerado, as marcas materiais que transportam a mensagem; o direito do leitor que pode atribuir significado ao texto, transformá-lo e interpretá-lo livremente, redizê-lo e recontextualizá-lo. Os direitos do autor e do leitor convergem em uma importante luta que gera a tensão que sustenta o movimento da interpretação-compreensão que, por dar-se no círculo existencial hermenêutico, nunca finda (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 69).

As últimas frases dessa citação apontam para a compreensão como um processo em movimento que se desenvolve de maneira circular, que ao nunca findar, enclausura-se às voltas daquilo que se quer compreender, em um ato *ad infinitum*. Essa mesma ideia é explicada por Palmer (2018):

> Aquilo que compreendemos agrupa-se em unidades sistemáticas, ou círculos compostos de partes. O círculo como um todo define a parte individual, e as partes em conjunto formam o círculo. Por exemplo, uma frase, como um todo é uma unidade. Compreendemos o sentido individual quando a consideramos na sua referência à totalidade da frase; e reciprocamente, o sentido da frase como um todo está dependente do sentido das palavras individuais (p.120-121).

Assim, o sentido individual se nutre da totalidade para existir e, ao revés, o sentido da totalidade só é possível porque ela se nutre dos sentidos individuais que a compõem, mas que existem porque, por ela, foram nutridos, e assim repetidamente. “Por uma interação dialética entre o todo e a parte, cada um dá sentido ao outro; a compreensão é portanto circular. E porque o sentido aparece dentro desse «círculo», chamamos-lhe o «círculo hermenêutico»” (PALMER, 2018, p. 121), que ao ser contextualizado no mundo, passa a ser existencial.

Se o movimento interpretativo opera dentro do círculo hermenêutico, sem o qual o sentido do texto não pode emergir; e se a compreensão das partes depende da compreensão do todo, que encontra nas partes o seu sentido; há razões para supor certo contrassenso, ao qual Palmer (2018) chama de contradição lógica, haja vista que o círculo hermenêutico pressupõe já compreender o que não se compreende.

Todavia, assim como é arriscado reduzir a Matemática à Lógica, conforme nos mostra a Filosofia e a História da Matemática; tampouco, nos diz Palmer (2018), a tarefa de compreensão pode ser explicada e, mais que isso, validada nesse domínio. Além disso, o conhecimento prévio necessário para haver a comunicação entre as partes e o todo está ao nível da pré-compreensão e “tem que ser alterado no ato de compreensão” (PALMER, 2018, p. 44).

Percebemos, pois, que a compreensão hermenêutica é um ato de movimento, e movimentar-se pressupõe sair do lugar. É nesse sentido de mobilidade que buscamos compreender a Investigação Matemática na Educação Matemática, saindo de uma região que a compreende sob a ótica ingênua e irrefletida da atitude natural, em direção a uma região que a olha para além do *isto* que aí está, em busca de uma compreensão ontológica. Para Heidegger (2015), a Hermenêutica caracteriza-se como Filosofia à medida que se preocupa tão somente com os modos do pensamento humano em detrimento das regras e dos fundamentos metodológicos que ditam como proceder, é

> aquela função anunciadora fundamental pela qual o *Dasein* torna conhecida para si a natureza do ser. A hermenêutica enquanto metodologia da interpretação dos estudos humanísticos é uma forma derivada que assenta na função ontológica primária da interpretação e a partir dela cresce (PALMER, 2018, p. 177).

Desse modo, Heidegger nos diz que a Hermenêutica é o poder ontológico de compreender e interpretar, pelo qual as coisas se revelam na existência do Ser, em sua dimensão fundamental. Isso traz à tona a visão de que o conhecimento é um modo de *ser-no-mundo*, contrastando com a visão empírico-formal, que o concebe único e universal e exclui o Ser do processo de conhecer.

A verdade, em Heidegger (2015), é fundada no *des-encobrimento* enquanto um descobrir o que está encoberto. "Descobrir é um modo de ser no mundo" (HEIDEGGER, 2015, p. 291) e, portanto, é um *estar-aí* a ser desvelado temporal e historicamente e, por isso, "*só 'se dá' verdade à medida que e enquanto a presença é*" (HEIDEGGER, 2015, p. 298). Desse modo, toda a verdade comunicada pela linguagem é relativa à presença.

É neste sentido que afirmamos, no capítulo 1 desta tese, que não existe um compreender absoluto, mas um compreender que se dá em perspectivas, que se faz em um movimento de intencionalidade e que se desvela sempre para o sujeito que se abre à compreensão. A verdade não é uma universalidade alcançada metodicamente, mas antes, via uma dialética entre o sujeito que interroga, o interrogado e o mundo.

> O método é incapaz de revelar uma nova verdade; apenas explica o tipo de verdade já implícita no método. A própria descoberta do método não se alcançou metodicamente, mas sim dialeticamente, isto é, como resposta problematizante ao tema investigado. No método o tema a investigar orienta, controla e manipula; na dialética, é o tema que levanta as questões a que irá responder. A resposta só pode ser dada se pertencer ao tema e situando-se nele. A situação interpretativa não é mais a de uma pessoa que interroga e a de um objeto, devendo aquele que interroga construir 'métodos' que lhe tornem acessível o objeto (GADAMER, 1999, p. 170).

Nessa perspectiva, o conhecimento é algo existencial, isto é, o Ser, sendo no mundo, é sempre aberto a conhecer e, dessa forma, a verdade não se fixa no método, não se mostra metodicamente, mas dialeticamente. Essa oposição entre verdade e método, tratada na obra *Verdade e Método*, de Hans-Georg Gadamer (1999), é uma crítica ao modo de fazer Ciência estruturada nas interpretações metódicas que impedem a revelação de novas verdades (ESPÓSITO, 1991).

O sentido que a Hermenêutica tem para a pesquisa fenomenológica é de promover o reconhecimento e a possibilidade de *pro-dução* do conhecimento rompendo com os padrões estabelecidos pelo método científico, pois com Gadamer (1999) compreendemos que ela não se estrutura em um método ou metodologia para a compreensão. Dito de outra maneira, a Hermenêutica não tem um método que vise a verdade escondida nas entrelinhas do texto. Não há verdade no texto que precise de um método para se tornar explícita, desocultada.

Gadamer (1999) fala de uma interpretação em que o intérprete busca a verdade que se constitui no entrelaçamento do dito pelo autor e o compreendido pelo leitor, em diálogo, deixando que o texto se exponha e revele os aspectos que carrega como traços de um dizer, os quais são compreendidos, sempre, entrelaçados com o leitor. Nas palavras de Gadamer (1999, p. 566),

> na ressurreição do sentido do texto já se encontram sempre implicadas as idéias próprias do intérprete. O próprio horizonte do intérprete é, desse modo, determinante, mas ele também, não como um ponto de vista próprio que se mantém ou se impõe, mas antes, como uma opinião e possibilidade que se aciona e coloca em jogo e que ajuda a apropriar-se de verdade do que diz o texto.

Gadamer propõe uma compreensão dialética que possibilita o encontro de horizontes entre o interrogado e o interrogador, livrando o processo de conhecer da unicidade metodológica e da universalidade da verdade, isto é, o conhecimento não é acessível apenas por uma única forma e a verdade não é absoluta, vista como *vale sempre*, mas é um constituir-se subjetivo, cultural, social e histórico. Portanto, a Hermenêutica traz para a pesquisa fenomenológica o fenômeno da interpretação indissociável do mundo, atrelado às experiências vividas daquele que interpreta.

Ao possibilitar que o processo de conhecer não se dê por vias metodológicas traçadas aprioristicamente, a Hermenêutica Fenomenológica não nega a sua importância, porém não fundamenta nelas o rigor da investigação, como algo previamente definido, mas no trajeto, na temporalidade vivida durante o processo de conhecer: é um “entrelaçamento entre o acontecer e o compreender” (GADAMER, 1999, p. 594-595).

Da perspectiva Hermenêutica Fenomenológica, interpretar não é ser interpelado pelo texto e deixar-se por ele conduzir, mas é um interrogar e um movimentar em outra direção que permita compreendê-lo em termos do que não foi dito, aquilo é dado ver (HEIDEGGER, 2015). Ou, como nos diz Gadamer (1999), o *lócus* da interpretação hermenêutica é o *entre* da familiaridade e estranheza contidas no texto. Com o entendimento de Hermenêutica apresentado neste subcapítulo, é que buscamos *ex-por* a nossa compreensão acerca da Investigação Matemática na Educação Matemática. Dessa incursão teórica na Fenomenologia e na Hermenêutica Fenomenológica, *ex-pomos*, no capítulo 3, os procedimentos metodológicos da pesquisa.

CAPÍTULO 3

EX-PONDO O PENSAR METODOLÓGICO DA PESQUISA

A compreensão da Investigação Matemática na Educação Matemática se expressa em um movimento que requer um *como* acontecer. Isso nos direciona a explicitar os procedimentos metodológicos da pesquisa, enquanto escolhas que sustentaram a sua construção. Contudo, este acontecer não foi determinado a priori e visto como um processo a ser seguido metodicamente. Ao ser fenomenológico, ele se fez junto à pesquisa e foi conduzido pelo fenômeno, posto em suspensão, interrogado e refletido constantemente.

Esclarecemos, ainda, que ao discorrer sobre os procedimentos realizados, não desejamos traduzir fidedignamente o percurso efetuado na pesquisa. Descrevê-los pode sugerir uma ideia de linearidade e isso, do ponto de vista fenomenológico, não é possível, uma vez que o movimento realizado é descontínuo e sinuoso, enxertado de abstrações, comparações, dúvidas que se tornam certezas, certezas que se tornam dúvidas, sem ser paradigmático e hierárquico. Portanto, o que desejamos com este capítulo é fornecer indicações das características de cada momento e o papel que assumiram na pesquisa.

Com a interrogação construída e *ex-posta* no capítulo 1, nos voltamos ao contexto das nossas experiências vividas buscando possibilidades de encontro com o tema abordado. Procurando por modos de produzir os dados da pesquisa, abriu-se a possibilidade de interrogar a Investigação Matemática com obras acadêmicas (artigos, dissertações, teses, capítulos de livros, livros, etc) que são, de algum modo, significativas na literatura.

Neste momento, perguntamos: o que é ser significativo? Para quem? Ainda que as respostas para essas perguntas não estivessem claras, fomos conduzidos pelas nossas vivências na pesquisa acadêmica e direcionados às dissertações e às teses brasileiras construídas com vistas à Investigação Matemática enquanto *lócus* da manifestação das ideias expressivas acerca do tema, com o interesse de identificarmos os trabalhos referenciados.

A opção por considerar somente pesquisas acadêmicas *stricto sensu* brasileiras se justifica por estarem sob a égide da mesma política educacional que esta, aqui apresentada. Além disso, nos direcionar para os trabalhos assumidos como referências nessas pesquisas é um modo de identificar para onde os autores brasileiros *olham* ao tematizar a Investigação Matemática na Educação Matemática. Este modo de seleção de materiais para análise é recorrente nas pesquisas em Educação Matemática e, portanto, faz parte das nossas vivências, as quais, junto com o fenômeno, conduziram os procedimentos, como dissemos.

Inicialmente, no ano de 2018, fizemos uma busca *online* na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[6] utilizando as expressões *Investigação Matemática* e *Investigações Matemáticas*, considerando o período temporal anterior a 2018. Com essa busca, obtivemos um universo de quatorze pesquisas: a mais antiga publicada no ano de 2006 e a mais contemporânea publicada no ano de 2017. Estas pesquisas diferenciam-se pelo caráter científico do seguinte modo: duas teses, seis dissertações de mestrado acadêmico e seis dissertações de mestrado profissional, e estão explicitadas no Quadro 1.

Quadro 1: Pesquisas *stricto sensu* brasileiras em Investigação Matemática na Educação Matemática

Natureza científica	**Título**	**Ano de conclusão**
Teses	Educação Matemática: favorecendo investigações matemáticas através do computador[7]	2006
	A exploração-investigação matemática: potencialidades na formação contínua de professores[8]	2011
Dissertações de mestrado acadêmico	Investigações matemáticas na recuperação de Ciclo II e o desafio da inclusão escolar[9]	2007
	Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas[10]	2007
	Investigações matemáticas e resolução de problemas – que fronteiras?[11]	2008
	Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio[12]	2013

6 <http://bdtd.ibict.br/vufind/>.
7 Cf. Santana (2006).
8 Cf. Lamonato (2011).
9 Cf. Cristóvão (2007).
10 Cf. Rodrigues (2007).
11 Cf. Trindade (2008).
12 Cf. Corradi (2013).

Natureza científica	Título	Ano de conclusão
	A investigação matemática com o geogebra no estágio com pesquisa do curso de licenciatura em matemática da UEG/Iporá[13]	2015
	Investigação matemática em sala de aula: uma proposta para a inclusão do aluno surdo no ensino regular[14]	2015
Dissertações de mestrado profissional	Investigação em sala de aula: uma proposta de atividade em salas de aula do ensino fundamental[15]	2007
	O ensino de potências e raízes com o auxílio da calculadora: uma experiência investigativa em sala de aula [16]	2008
	Investigação matemática: uma proposta de ensino de estatística para o 8° ano do ensino fundamental [17]	2015
	Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem[18]	2015
	Investigação matemática: contribuições para o ensino de sequências e padrões para alunos do ensino fundamental[19]	2016
	Proposta de oficinas didáticas para o ensino de análise combinatória utilizando traços da investigação matemática como método de ensino[20]	2017

Fonte: o autor

Inspirados na pesquisa de Klüber (2012), pela semelhança no modo de interrogar o fenômeno e na visão de conhecimento assumida, identificamos e selecionamos os trabalhos que serviram de referências para as pesquisas do Quadro 1 e que, de algum modo, tematizaram a Investigação Matemática na Educação Matemática, sem diferenciá-los quanto a natureza científica.

Por conseguinte, quantificamos a frequência com que esses trabalhos foram citados nas pesquisas do Quadro 1 e assumimos que a frequência superior ou igual a quatro indicava trabalhos com alguma relevância na área. Este número de corte se deu tendo em vista que os demais trabalhos foram citados apenas uma vez por alguma das pesquisas. O Quadro 2 sintetiza a

[13] Cf. Oliveira (2015).
[14] Cf. Santos (2015).
[15] Cf. Calhau (2007).
[16] Cf. Melo (2008).
[17] Cf. Guerra (2015).
[18] Cf. Bonotto (2015).
[19] Cf. Rosa (2016).
[20] Cf. Pereira (2017).

ocorrência e a natureza científica dos trabalhos que se mostraram referências nas pesquisas em Investigação Matemática na Educação Matemática, no âmbito da pós-graduação *stricto sensu* brasileira.

Quadro 2: Inventário dos trabalhos consultados com maior frequência pelas pesquisas *stricto sensu* brasileiras em Investigação Matemática na Educação Matemática

Codificação	Natureza científica	Título	Autores	Ocorrência
1	Livro	Investigações Matemáticas na sala de aula	João Pedro da Ponte; Joana Brocardo; Hélia Margarida Oliveira	14[21]
2	Artigo	As actividades de investigação, o professor e aula de Matemática	Helena Fonseca; Lina Brunheira; João Pedro da Ponte	7
3	Artigo	Investigações matemáticas na sala de aula	Maria Helena Cunha; Hélia Margarida Oliveira; João Pedro da Ponte	5
4	Dissertação	Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática	Juliana Facanali Castro	5
5	Capítulo de livro	Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia	Paul Ernest	5
6	Artigo	O trabalho do professor numa aula de investigação matemática	João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Lina Brunheira; José Manuel Varandas	5
7	Livro	Histórias de investigações matemáticas	João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Maria Helena Cunha; Maria Irene Segurado	5
8	Capítulo de livro	Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática	Carlos Alberto dos Santos Braumann	4

[21] Neste total, diferentes edições estão sendo consideradas. Para fins de análise, nesta tese, consideramos a 3ª edição.

Codificação	Natureza científica	Título	Autores	Ocorrência
9	Capítulo de livro	Quatro funções da investigação na aula de Matemática	E. Paul Goldenberg	4
10	Tese	As investigações na aula de Matemática: um projecto curricular no 8º ano	Joana Brocardo	4
11	Artigo	Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico	Dario Fiorentini; Fernando Luís Pereira Fernandes; Eliane Matesco Cristóvão	4
12	Dissertação	Avaliações de investigações matemáticas: uma experiência	José Manuel Varandas	4
13	Artigo	Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal	João Pedro da Ponte	4
14	Livro	A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas	João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; José Manuel Varandas; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira	4
15	Capitulo de livro	Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas	João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira; José Manuel Varandas	4
16	Dissertação	Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor	Hélia Margarida Oliveira	4

Fonte: o autor

Mesmo com essa busca, as perguntas sobre o que é ser significativo e para quem ainda não estavam claras. Era preciso transcender a tradição de quantificar os trabalhos que se mostraram referências para as pesquisas *stricto* *sensu* brasileiras em Investigação Matemática, a um primeiro[22] nível, como um meio de ter acesso ao significativo.

Ao colocar em suspensão o movimento de *como* fazer a pesquisa, nos demos conta que os trabalhos consultados nas pesquisas *stricto sensu* brasileiras também possuíam um conjunto de trabalhos assumidos como referências. Assumir os trabalhos que se mostraram referências no primeiro nível de busca, como significativos para as pesquisas *stricto sensu* brasileiras, implicava em assumir os trabalhos que se mostraram referências dos trabalhos selecionados no primeiro nível como significativos e, recursivamente, este movimento poderia ser realizado, tantas vezes quantas se quisesse, acessando outros[23] níveis de seleção.

Com esse pensar procedemos a um segundo nível[24] de quantificação, no qual consideramos somente os trabalhos que já haviam sido quantificados no primeiro nível. Dito de outro modo, no universo de trabalhos selecionados no primeiro nível, buscamos o quantitativo de citações entre eles. Em seguida, efetuamos o cruzamento desses trabalhos, contabilizando a ocorrência que um foi referenciado em outro e, assim, chegamos à síntese *ex-posta* no Quadro 3.

Quadro 3: Cruzamento entre os trabalhos selecionados no primeiro nível de seleção

Codificação	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1						X		X		X		X		X		X
2							X								X	
3																
4							X		X							
5																
6														X	X	
7																
8																
9																
10					X		X		X					X	X	X
11	X			X												
12		X				X	X							X		X
13		X				X	X	X		X		X		X	X	X
14															X	
15																
16																
TOTAL	1	2	0	1	1	3	5	2	2	2	0	2	0	5	5	4

Fonte: o autor

[22] Entenda-se: uma vez.
[23] Entenda-se: duas, três, ..., n vezes.
[24] Entenda-se: duas vezes.

Para fins de esclarecimentos ao leitor, o Quadro 3 deve ser lido da seguinte forma: na primeira coluna, estão contidos os trabalhos, de acordo com a codificação do Quadro 2; e, na primeira linha, estão contidos os trabalhos que foram referenciados pelos trabalhos do Quadro 2 e selecionados no primeiro nível de seleção, os quais são, respectivamente, os próprios trabalhos do Quadro 2 (contidos na primeira coluna), dado que o movimento efetuado é o de cruzamento dos trabalhos referenciados quatro ou mais vezes pelas pesquisas *stricto sensu* brasileiras em Investigação Matemática, neles mesmos. Por exemplo, os trabalhos sete e quinze foram referenciados pelo trabalho dois; nenhum trabalho foi referenciado pelo trabalho cinco; o trabalho três não foi referenciado por nenhum outro trabalho.

Na segunda quantificação, selecionamos os trabalhos consultados uma vez ou mais. Esse critério de escolha implicou na exclusão dos trabalhos três, onze e treze. Assim, valemo-nos de dois níveis de quantificação e de critérios de inclusão e exclusão para selecionar os trabalhos. Os critérios de inclusão foram: no primeiro nível, frequência superior ou igual a quatro e, no segundo nível, frequência superior ou igual a um. Já os critérios de exclusão foram: no primeiro nível, frequência inferior a quatro e, no segundo nível, frequência zero.

Especificamente, excluímos o trabalho quatro, porque, embora tenha atingindo frequência igual a um no segundo nível de quantificação, essa, advém do trabalho onze que, conforme o Quadro 3, possui frequência zero neste nível de quantificação. Também, especificamente, incluímos os trabalhos um e cinco, porque, embora tenham atingido frequência igual a um no segundo nível de quantificação, o Quadro 3 nos mostra que o trabalho cinco foi referenciado pelo trabalho dez, o qual foi referenciado por dois trabalhos, entre eles, o trabalho um que, de acordo com o Quadro 2, foi referenciado de forma unânime pelas pesquisas *stricto sensu* brasileiras em Investigação Matemática.

Tais escolhas configuraram-se como significativas a nós por terem sido selecionadas junto a nossa experiência vivida com o fenômeno interrogado. Também, entendemos que elas são significativas à comunidade brasileira que pesquisa a Investigação Matemática na Educação Matemática, por serem fontes de recorrência das pesquisas *stricto sensu* nessa área*,* desenvolvidas no Brasil. O Quadro 4 apresenta os trabalhos que se revelaram *lócus* da manifestação do fenômeno, doravante denominados de *obras acadêmicas significativas* dessa pesquisa.

Quadro 4: Obras acadêmicas significativas em Investigação Matemática consideradas na pesquisa

Codificação	Natureza científica	Título	Autores
1[25]	Livro	Investigações Matemáticas na sala de aula	João Pedro da Ponte; Joana Brocardo; Hélia Margarida Oliveira
2[26]	Artigo	As actividades de investigação, o professor e aula de Matemática	Helena Fonseca; Lina Brunheira; João Pedro da Ponte
3[27]	Capítulo de livro	Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia	Paul Ernest
4[28]	Artigo	O trabalho do professor numa aula de investigação Matemática	João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Lina Brunheira; José Manuel Varandas
5[29]	Livro	Histórias de investigações matemáticas	João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Maria Helena Cunha; Maria Irene Segurado
6[30]	Capítulo de livro	Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática	Carlos Alberto dos Santos Braumann
7[31]	Capítulo de livro	Quatro funções da investigação na aula de Matemática	E. Paul Goldenberg
8[32]	Tese	As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano	Joana Brocardo
9[33]	Dissertação	Avaliações de investigações matemáticas: uma experiência	José Manuel Varandas

[25] Cf. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013).
[26] Cf. Fonseca, Brunheira e Ponte (1999).
[27] Cf. Ernest (1996).
[28] Cf. Ponte, Oliveira, Brunheira e Varandas (1999).
[29] Cf. Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998).
[30] Cf. Braumann (2002).
[31] Cf. Goldenberg (1999).
[32] Cf. Brocardo (2001).
[33] Cf. Varandas (2000).

Codificação	Natureza científica	Título	Autores
10[34]	Livro	A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas	João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; José Manuel Varandas; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira
11[35]	Capitulo de livro	Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas	João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira; José Manuel Varandas
12[36]	Dissertação	Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor	Hélia Margarida Oliveira

Fonte: o autor

Ao lê-las, não buscamos um conteúdo literal no dito, nas palavras, como um dado pragmático, mas naquilo que elas querem dizer na totalidade do texto, no significado que carregam no contexto do texto, em suas polissemias, as quais deixam transparecer a multiplicidade de sentidos correlatos ao interrogado.

Nessa leitura, destacamos excertos que expressam alguma relação daquilo que é dito no texto das obras acadêmicas significativas com a interrogação da pesquisa. Com eles, construímos asserções articuladas para *ex-por* os modos como os compreendemos, sem alterar e tampouco traduzir o dito, mas tornando-os claros e condizentes com a região de inquérito da pesquisa.

Buscando pelos significados presentes na descrição[37] dessas asserções articuladas e que dizem do fenômeno interrogado, procedemos ao estabelecimento das unidades de significado, isto é, frases que expressam significados distinguíveis no contexto do texto. Um exemplo dessa construção segue no Quadro 5.

[34] Cf. Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira, Oliveira (1999).
[35] Cf. Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1999).
[36] Cf. Oliveira (1998).
[37] Com Bicudo (2011c), compreendemos essa descrição não como aquela que descreve o vivido de modo direto e imediato, como se pressupõe na observação pretensamente objetiva do positivismo, mas como um modo de expressão sempre entremeado com o *mundo-vida*.

Quadro 5: Exemplo da construção das unidades de significado

Excertos do texto	**Asserções articuladas**	**Unidades de significado**
Pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de Matemática? Essa questão geral suscita uma discussão sobre o que são atividades de investigação matemática. Importa saber se está ao alcance dos alunos investigar questões matemáticas e de que forma isso pode contribuir para a sua aprendizagem.	Os autores iniciam o discurso perguntando sobre a possibilidade de realizar investigações nas aulas de Matemática, inspiradas no trabalho dos matemáticos. Essa pergunta suscita as discussões sobre o que são atividades de Investigação Matemática em sala de aula.	O trabalho dos matemáticos como inspiração para o trabalho pedagógico com a Investigação Matemática.
As investigações uma vez que elas constituem uma parte essencial da actividade matemática: estão directamente relacionadas com a produção de conhecimento matemático e ligadas à natureza dessa ciência.	Ao expor as recomendações do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) para o ensino de Matemática, a autora justifica a importância de integrar a Investigação Matemática nas aulas de Matemática por que ela está diretamente relacionada com a produção de conhecimento matemático e ligadas à natureza da Matemática.	A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a produção de conhecimento matemático. A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a natureza da Matemática.

Fonte: o autor

Em conformidade com Giorgi (2014), há uma correspondência entre as descrições contidas nos excertos e as contidas nas unidades de significado, porém, na segunda descrição, há o movimento intencional de descrever o dito em uma linguagem mais especializada que a da primeira, apreendendo a sua essência.

Ressaltamos que este momento não é único no movimento fenomenológico, podendo ser retomado quantas vezes necessárias a partir de uma retomada da leitura. Ele acolhe a análise ideográfica, entendida como a representação de ideias por meio de símbolos ou ideogramas, que se inclina às descrições ingênuas do sujeito, na sua individualidade (BICUDO, 2011d).

Indo em direção às sínteses mais abrangentes do dito e interpretado, “buscando as estruturas das experiências vividas que revelam o modo de ser do fenômeno" (BICUDO, 2011d, p. 58), continuamos[38] com o movimento de redução fenomenológica, buscando por convergências comuns entre as unidades de significado, de tal modo que, a partir das características individuais, pudessem emergir constitutivos mais abrangentes, que articulassem as características globais expressas em cada unidade.

Neste momento, o movimento foi de saída do individualizado em direção às convergências. Aqui, se tem a análise nomotética, que indica o movimento de reduções transcendentais do aspecto individual ideográfico e "é resultante da compreensão das convergências e divergências dos aspectos que se mostram nas análises ideográficas" (MACHADO, 1994, p. 42).

As primeiras convergências das unidades de significado possibilitaram as primeiras ideias, ainda turvas, denominadas, aqui, de *primeiras ideias nucleares*. O Quadro 6 exemplifica a constituição de um grupo dessas ideias.

Quadro 6: Exemplo do trabalho de redução fenomenológica realizado com as unidades de significado

Primeira ideia nuclear	**Unidades de significado**
Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.	A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a natureza da Matemática.
	No discurso oficial, a Investigação Matemática é a essência da Matemática.
	No discurso profissional, a Investigação Matemática constitui a verdadeira Matemática.
	Diferentes abordagens consideram a Investigação Matemática um exemplo da verdadeira Matemática.

Fonte: o autor

Olhando para a totalidade das primeiras ideias nucleares, sentidos convergentes foram percebidos. Isso solicitou outra convergência, originando grupos de ideias mais abrangentes e mais claros que os anteriores, denominados, aqui, como *segundas ideias nucleares*. Tal sistematização é exemplificada no Quadro 7.

[38] Dizemos isso porque compreendemos que o movimento de redução fenomenológica tem início com a construção da interrogação de pesquisa.

Quadro 7: Exemplo do trabalho de redução fenomenológica realizado com as primeiras ideias nucleares

Segunda ideia nuclear	Primeiras ideias nucleares
Sobre a prática pedagógica com a Investigação Matemática.	Diz sobre a abertura e a divergência da Investigação Matemática.
	Diz sobre o professor e a Investigação Matemática.
	Diz sobre o ensino, a prática pedagógica e a Investigação Matemática.
	Diz sobre a presença dos contextos intra e extramatemático na Investigação Matemática.
	Diz sobre o aluno e a Investigação Matemática.
	Diz sobre as fases/momentos/etapas da prática pedagógica com a Investigação Matemática.

Fonte: o autor

Procedendo com mais uma convergência, articulamos os sentidos que emergiram de cada grupo das segundas ideias nucleares em *núcleos de ideias*, as quais findaram o processo de redução fenomenológica porque expressaram os essenciais, os invariantes do fenômeno interrogado, aquilo que, embora manifestado de diferentes maneiras, não se alterou em sentido. Tais núcleos se doaram à descrição e à interpretação, sempre entrelaçadas com a interrogação desta pesquisa: *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática?* Um exemplo da articulação das segundas ideias nucleares, constituinte dos núcleos de ideias segue no Quadro 8.

Quadro 8: Exemplo do trabalho de redução fenomenológica realizado com as segundas ideias nucleares

Núcleo de ideias	Segundas ideias nucleares
A Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática	Diz sobre a Investigação Matemática e a produção do conhecimento em Matemática.
	Diz sobre a Investigação Matemática e a aplicação da Matemática.
	Diz sobre a Investigação Matemática e a Matemática.
	Diz sobre os tipos de raciocínio presentes na Investigação Matemática e no fazer Matemática.

Fonte: o autor

Em todos esses momentos, a *epoché* foi efetuada com a intenção de colocar em suspenção as concepções prévias e os pré-conceitos sobre o fenômeno interrogado, olhando com prudência para o que se mostra. "Esse procedimento envolve o 'dar-se conta' daquilo que se está fazendo, de modo que a redução se torna transcendental, denominada, então, de fenomenológica" (BICUDO, 2011b, p. 35). É, portanto, um movimento de pôr entre parênteses

> a confiança espontânea na positividade do mundo. 'A redução fenomenológica consistirá simplesmente em 'suspender' essa adesão ingênua, em distender de algum modo os liames que nos prendem ao mundo, em fazer abstração também de tudo o que a ciência e o saber constituído pretendem nos ensinar sobre ele...'. Por uma exclusão radical de toda interpretação espontânea, é necessário afetar com o 'índice da dúvida' as evidências prévias para não ser enganados por elas (BRUYNE; HERMAN; SCHOUTHEETE, 1977, p. 75).

O movimento da *epoché* permitiu nos afastar dos modos ingênuos de proceder e interrogar, promovendo a ruptura com as certezas do senso comum. Ao que pese a esse movimento, realizá-lo, não se tratou de nos destituirmos das crenças e valores prévios, mas de estarmos atentos aos modos como eles se tornaram presentes na compreensão do fenômeno.

Ao *ex-por*, por meio da escrita, os modos pelos quais construímos esta pesquisa, há uma linearidade que não expressa o movimento efetuado. Os procedimentos adotados não foram seguidos de forma exata e estanque, mas retomados quantas vezes necessárias e, inclusive, reiniciados.

Não é próprio da pesquisa fenomenológica seguir um paradigma com indicadores hierarquicamente organizados. Ela se constrói em um vaivém, na oscilação de avanços e retrocessos que tecem o caminho metodológico percorrido. Como nos diz Husserl (2002, p. 87), "*a fenomenologia procede elucidando visualmente, determinando e distinguindo o sentido*. Compara, distingue, enlaça, põe em relação, separa em partes, ou segrega momentos. Mas tudo no puro ver".

Dessa enunciação teórica, com a qual *ex-pusemos* os procedimentos da pesquisa, passamos a *ex-por*, no capítulo 4, o movimento fenomenológico-hermenêutico realizado desde a construção dos dados à construção dos núcleos de ideias.

CAPÍTULO 4

O MOVIMENTO FENOMENOLÓGICO-HERMENÊUTICO EFETUADO

Este capítulo tem o objetivo de *ex-por* o movimento fenomenológico-hermenêutico realizado, elucidando a construção dos dados, a hermenêutica e as reduções fenomenológicas realizadas. A ordem de apresentação das obras acadêmicas significativas segue a disposição do Quadro 4.

4.1 A construção das unidades de significado

Para cada obra, apresentamos alguns dados objetivos, tais como: o título, os autores, o ano de publicação, a natureza científica e uma sinopse do seu conteúdo. Posteriormente, *ex-pomos* os excertos destacados dos seus textos e o movimento hermenêutico efetuado para a construção das respectivas unidades de significado. O código (x;y), ao final, traz ordenadamente o número da obra e da respectiva unidade de significado, por exemplo: o código (1;2) designa a segunda unidade de significado da obra um, o código (8;5) designa a quinta unidade de significado da obra oito.

OBRA 1

Quadro 9: Dados objetivos da obra 1

Título: Investigações Matemáticas na sala de aula
Autores: João Pedro da Ponte; Joana Brocardo; Hélia Margarida Oliveira
Ano de publicação: 2013
Natureza científica: livro
Sinopse: A obra, considerada aqui em sua 3ª edição, traz resultados de pesquisas empíricas. Os autores apresentam discussões, com recursos a exemplos efetivamente vividos em sala de aula, discutindo aspectos como as vantagens e as dificuldades do trabalho investigativo em sala de aula, o papel dos professores e dos alunos em aulas investigativas, o lugar que as atividades de investigação têm no currículo de Matemática, a geração de conjecturas, a reflexão e a formalização do conhecimento em tarefas de Investigação Matemática situadas no campo da Geometria, da Estatística e da Aritmética. Em sete capítulos, os autores debatem a ideia de investigar em Matemática, a aula de investigação, as investigações numéricas, as investigações geométricas, as investigações em estatística, a avaliação do trabalho de investigação e as investigações no currículo, além de tangenciar outros temas como, por exemplo, a informática e a Psicologia da Educação Matemática.

Fonte: o autor

Quadro 10: Construção das unidades de significado com a obra 1

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos, e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo conjectura-teste-demonstração.	Ao apresentar as investigações no âmbito da atividade científica em Matemática, a obra explicita que elas são fortemente caracterizadas pelo estilo conjectura-teste-demonstração.	O estilo conjectura-teste-demonstração é uma forte característica da investigação em Matemática. (1;1)
Pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de matemática? Essa questão geral suscita uma discussão sobre o que são atividades de investigação matemática. Importa saber se está ao alcance dos alunos investigar questões matemáticas e de que forma isso pode contribuir para a sua aprendizagem. Importa também saber de que competências necessitam os professores para promover esse tipo de trabalho.	A pergunta: *pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de matemática?,* suscita as discussões sobre o que são atividades de Investigação Matemática em sala de aula.	O trabalho dos matemáticos como inspiração para o trabalho pedagógico com a Investigação Matemática. (1;2)
Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de um modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.	Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar significa formular questões que nos interessam e para as quais não temos respostas prontas. Essas respostas são procuradas de modo fundamentado e rigoroso.	A Investigação Matemática requer a formulação de questões a serem investigadas. (1;3) Na Investigação Matemática, o modo como se procura respostas é fundamentado e rigoroso. (1;4)
O processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás. Essa perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva.	Ao discutir sobre a atividade de investigação vista pelos matemáticos, é afirmado que, nela, o processo de criação matemática surge fértil.	O processo de criação matemática surge fértil na investigação em Matemática. (1;5)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
As *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar* identificam cinco objetivos gerais para todos os alunos: (i) aprender a dar valor à Matemática; (ii) adquirir confiança na sua capacidade de fazer Matemática; (iii) tornar-se apto a resolver problemas matemáticos; (iv) aprender a comunicar matematicamente; e (v) aprender a raciocinar matematicamente. [...] <u>O documento defende que [...] "Fazer matemática"</u> e <u>"raciocinar matematicamente"</u> são ideias que <u>apontam claramente para</u> a ideia da realização de <u>investigações matemáticas</u>.	Ao discutir sobre as Investigações Matemáticas no currículo americano, é afirmado que as Investigações Matemáticas estão relacionadas ao fazer Matemática e a raciocinar matematicamente.	O currículo americano aponta, de modo explícito, que fazer Matemática é fazer Investigação Matemática. (1;6) No currículo americano, raciocinar matematicamente aponta claramente para a ideia de fazer Investigação Matemática. (1;7)
<u>A realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais</u>. O primeiro abrange o <u>reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões</u>. O segundo momento refere-se ao processo de <u>formulação de conjecturas</u>. O terceiro inclui a <u>realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas</u>. E, finalmente, o último diz respeito à <u>argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado</u>.	Ao discutir sobre os processos usados em uma investigação científica em Matemática, é afirmado que eles se constituem em: exploração da situação, formulação de questões e conjecturas, realização de testes das conjecturas, demonstração das conjecturas e avaliação do trabalho realizado.	A Investigação Matemática envolve a formulação de questões a serem investigadas. (1;8) A Investigação Matemática envolve a formulação de conjecturas. (1;9) A Investigação Matemática envolve a realização de testes das conjecturas. (1;10) A Investigação Matemática envolve a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. (1;11)
<u>As investigações matemáticas constituem uma das atividades</u> que os alunos podem realizar e <u>que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas.</u>	As Investigações Matemáticas constituem uma atividade que se articula com a Resolução de Problemas.	A Investigação Matemática se relaciona de muito perto com a Resolução de Problemas. (1;12)
Os exercícios e os problemas tem uma coisa em comum. Em	Ao discutir sobre as investigações feitas pelos	Na Investigação Matemática as

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambiguidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição.	matemáticos como tarefas matemáticas, é afirmado que elas diferem dos exercícios e dos problemas porque requerem situações iniciais abertas, cabendo ao investigador defini-las.	situações iniciais são abertas. (1;13)
O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem ajuda trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professores.	Ao discutir sobre a atividade de investigação feita pelos matemáticos, como atividade de ensino e aprendizagem, é afirmado que ela traz para a sala de aula a atividade matemática genuína e requer do aluno atitudes similares as do matemático profissional.	A Investigação Matemática traz uma atividade matemática genuína para a sala de aula. (1;14) Na Investigação Matemática, as ações dos alunos são como as do matemático profissional. (1;15)
Pode-se sempre programar o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação.	Ao discutir sobre a dinâmica da aula com a Investigação Matemática, é afirmado que a atividade de investigação é imprevisível, enxertada de variados percursos de inquirição, avanços, recuos e divergências.	A Investigação Matemática é uma atividade imprevisível. (1;16) A Investigação Matemática é enxertada de variados percursos de inquirição. (1;17) A Investigação Matemática é enxertada de avanços e recuos. (1;18) A atividade de Investigação Matemática é divergente. (1;19)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática.	Ao discutir sobre a dinâmica da aula com a Investigação Matemática, é afirmado que se espera a utilização, por parte dos alunos, dos vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática.	Espera-se que na Investigação Matemática os alunos utilizem os processos característicos da atividade investigativa em Matemática. (1;20)
No entanto, é fundamental, para que o processo investigativo não saia empobrecido, que o professor procure levar os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas. Se, por um lado, é necessário insistir na realização de testes de conjecturas e se, de fato, uma conjectura parece tornar-se mais credível à medida que resiste a sucessivos testes, por outro lado, os alunos devem compreender que o teste, só por si, não confere o estatuto de conclusão aos seus resultados.	Ao discutir sobre a dinâmica da aula com a Investigação Matemática, é afirmado que os alunos devem compreender o caráter provisório de uma conjectura e que ela, por si só, não confere o estatuto de conclusão aos seus resultados.	Na Investigação Matemática, é fundamental compreender o caráter provisório das conjecturas. (1;21)
Capítulo III Investigações numéricas O conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido do número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objetivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver essa compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e testes de conjecturas e a procura de generalizações.	No capítulo intitulado *Investigações numéricas*, é afirmado que as investigações numéricas contribuem para desenvolver a compreensão global dos números e operações, bem como para desenvolver a capacidade de formular e testar conjecturas e para procurar generalizações.	As investigações numéricas contribuem para desenvolver a compreensão global dos números e operações. (1;22) As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de conjecturar. (1;23) As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de testar conjecturas. (1;24) As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de generalizar. (1;25)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		Investigações no campo da Aritmética são intituladas de investigações numéricas. (1;26)
Hoje, um pouco por todo o mundo, perspectivam-se opções curriculares que, em vez de se centrarem na memorização e aplicação de técnicas de cálculo, dão ênfase à apropriação de aspectos essenciais dos números e suas relações. [...] <u>As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para prosseguir essas novas orientações curriculares</u>. Desde muito cedo, podem ser propostas tarefas em que <u>os alunos são convidados a analisar padrões e regularidades envolvendo números e operações elementares</u>.	As investigações numéricas contribuem com as orientações curriculares que dão ênfase à apropriação de aspectos essenciais dos números e suas relações e possibilitam aos alunos analisar padrões e regularidades.	As investigações numéricas possibilitam analisar regularidades. (1;27) As investigações numéricas possibilitam analisar padrões. (1;28)
<u>Outra potencialidade das investigações numéricas é a de proporcionarem o estabelecimento de conexões matemáticas</u>. Muitas investigações numéricas promovem a compreensão de relações <u>entre padrões numéricos e geométricos</u>.	As investigações numéricas estabelecem conexões matemáticas entre padrões numéricos e geométricos.	As investigações numéricas estabelecem conexões matemáticas. (1;29) As investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos. (1;30)
De fato, o desafio lançado pela <u>generalização de um padrão numérico e a compreensão do que traduz essa generalização constituem aspectos</u> que muitas vezes estão <u>envolvidos nas investigações numéricas</u> e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico.	A generalização, juntamente à compreensão do seu significado, é um dos aspectos envolvidos nas investigações numéricas.	A compreensão da generalização envolve aspectos presentes nas investigações numéricas. (1;31)
Capítulo IV <u>Investigações geométricas</u> A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e	No capítulo intitulado *Investigações geométricas,* é afirmado que as investigações geométricas contribuem para a formulação e para os testes de conjecturas, bem como para a procura e a demonstração de generalizações. Também, que a exploração de diferentes tipos	Investigações no campo da Geometria são intituladas de investigações geométricas. (1;32) As investigações geométricas

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
investigativa. [...] As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas.	de investigações geométricas pode contribuir para concretizar a relação entre a realidade e a Matemática.	contribuem para a formulação de conjecturas. (1;33) As investigações geométricas contribuem para a realização de testes das conjecturas. (1;34) As investigações geométricas contribuem para generalizar e demonstrar. (1;35) As investigações geométricas podem contribuir para concretizar a relação entre a Matemática e a realidade. (1;36)
Salienta-se, por exemplo, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceptual em Geometria.	As investigações geométricas suscitam o aspecto experimental e indutivo e, também, suscitam a aplicação da Geometria em situações da vida real.	As investigações geométricas suscitam o aspecto experimental. (1;37) As investigações geométricas suscitam o aspecto indutivo. (1;38) As investigações geométricas suscitam a aplicação da Geometria na vida real. (1;39)
Capítulo V Investigações em Estatística [...]. Na verdade, a Estatística constitui uma importante ferramenta para a realização de projetos e investigações em numerosos domínios.	No capítulo intitulado *Investigações em Estatística*, é afirmado que a Estatística constitui uma importante ferramenta para a realização de investigações.	Investigações no campo da Estatística são intituladas de investigações em estatística. (1;40)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
O ensino da estatística assume uma perspectiva investigativa quando o seu objetivo fundamental é o desenvolvimento da capacidade de formular e conduzir investigações recorrendo a dados de natureza quantitativa. Os alunos trabalham, então, com problemas reais.	O ensino de Estatística assume uma perspectiva investigativa, quando tem o objetivo de desenvolver a capacidade de formular e conduzir investigações recorrendo a dados de natureza quantitativa, de modo que os alunos trabalhem com problemas reais.	A presença de problemas reais no ensino de Estatística. (1;41)
Vimos em pormenor como se desenvolveu uma investigação estatística relacionada com características biológicas, sociais e culturais dos alunos. Muitas outras situações podem servir de ponto de partida para investigações estatísticas, incluindo problemas ambientais (como poluição, mudança climática, tratamento de resíduos), problemas sociais (níveis de escolarização da população, desemprego, distribuição de riqueza), questões de saúde (epidemias, prevenção de doenças).	As investigações em Estatística podem partir de problemas ambientais, sociais, culturais, de saúde pública, e outros, relacionados a realidade.	A presença de problemas relacionados com a realidade no ensino de Estatística. (1;42)
O professor deve dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio para os alunos.	Ao discutir os papéis do professor em uma aula com a Investigação Matemática, é afirmado que o professor deve escolher situações iniciais potencialmente desafiadoras para os alunos.	Na Investigação Matemática, o professor escolhe situações que julga serem desafiadoras para os alunos. (1;43)
Deve existir, por parte do professor, uma predisposição para manifestar, perante os alunos, o seu raciocínio matemático. Mediante o modelo do professor, os alunos podem aprender muito sobre aspectos fundamentais do processo investigativo. Esse constitui, pois, um elemento importante a ser utilizado para promover a aprendizagem dessa faceta do trabalho na disciplina de Matemática.	Ao discutir os papéis do professor em uma aula com a Investigação Matemática, é afirmado que o professor deve se predispor a manifestar seu raciocínio matemático e, assim, ser modelo para os alunos aprenderem sobre os aspectos fundamentais do processo investigativo.	Na Investigação Matemática, deve haver a manifestação do raciocínio matemático do professor. (1;44) Na Investigação Matemática, o raciocínio matemático do professor pode contribuir para que os alunos aprendam sobre o processo investigativo. (1;45)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) de 5ª à 8ª, publicados em 1998, dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação e pesquisa no ensino e na aprendizagem da Matemática.	Ao discutir sobre a Investigação Matemática no currículo brasileiro, é afirmado que os Parâmetros Curriculares Nacionais dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação.	Os Parâmetros Curriculares Nacionais dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação. (1;46)
As atividades de investigação e de pesquisa surgem aqui na perspectiva da Matemática como contexto de trabalho e também na sua utilização em contextos diversos, relativos a outras áreas e temas transversais.	Ao discutir sobre a Investigação Matemática no currículo brasileiro, é afirmado que, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, as atividades de investigação surgem na perspectiva da Matemática como contexto de trabalho e, também, na sua utilização em contextos diversos.	Nos Parâmetros Curriculares Nacionais as atividades de investigação surgem na perspectiva da Matemática como contexto de trabalho. (1;47) Nos Parâmetros Curriculares Nacionais as atividades de investigação surgem na perspectiva de utilização da Matemática em contextos diversos. (1;48)
Podemos dizer que no currículo brasileiro as atividades de investigação e exploração merecem um grande destaque, tanto no estudo dos conteúdos matemáticos respeitantes aos Números, Grandezas e Medidas, Geometria e Probabilidades como na sua utilização em contextos da vida real, em estreita associação com a Estatística e Análise de dados.	No currículo brasileiro as atividades de investigação e exploração merecem um grande destaque no estudo dos conteúdos matemáticos, bem como na sua utilização em contextos da vida real.	No currículo brasileiro, a Investigação Matemática merece destaque no estudo dos conteúdos matemáticos. (1;49) No currículo brasileiro a Investigação Matemática merece destaque na utilização da Matemática em contextos da vida real. (1;50)

Fonte: o autor

OBRA 2

Quadro 11: Dados objetivos da obra 2

Título: As actividades de investigação, o professor e aula de Matemática
Autores: Helena Fonseca; Lina Brunheira; João Pedro da Ponte
Ano de publicação: 1999
Natureza científica: artigo
Sinopse: A obra explicita o trabalho realizado no Projeto[39] *Matemática para todos – investigações na sala de aula*, desenvolvido no Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa entre os anos de 1995 e 1999 com professores do ensino básico, secundário e superior. Em seu conteúdo, são discutidos aspectos concernentes à relação entre a Investigação Matemática e a atividade puramente matemática e entre as Investigações Matemáticas e a atividade de resolver problemas. A partir de experiências vividas em sala de aula, são discutidos aspectos concernentes à dinâmica, à preparação e à reflexão da aula investigativa, suas fases e momentos, bem como aspectos relacionados ao papel assumido pelos professores e pelos alunos. Por fim, são colocadas em pauta discussões acerca de projetos educativos no domínio da Investigação Matemática refletindo sobre o modo que podem contribuir para a reconfiguração das práticas pedagógicas.

Fonte: o autor

Quadro 12: Construção das unidades de significado com a obra 2

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Esta noção de problema foi sendo progressivamente enriquecida por se considerar importante apresentar aos alunos não apenas problemas já perfeitamente formulados em contextos muito precisos. Muitas vezes, <u>o processo de resolução pode implicar</u> <u>a exploração do contexto para além do que surge no enunciado</u>, a formulação de questões alternativas. Uma perspectiva ainda mais ampla é dada por autores como John Mason (1996) e Alan Schoenfeld (1996) que, partindo da resolução de problemas, <u>valorizam todo um conjunto de processos característicos da actividade matemática como formular, testar e provar conjecturas e argumentar.</u>	Ao discutir os aspectos envolvidos nas atividades de Resolução de Problemas e de Investigação Matemática, afirma-se que na atividade de exploração e de investigação, o processo de resolução do problema pode extrapolar o contexto do seu enunciado. A Investigação Matemática valoriza os processos característicos da atividade matemática como, formular, testar e provar conjecturas. As atividades de Investigação Matemática partem da Resolução de Problemas.	Na Investigação Matemática, o processo de resolução pode implicar na exploração para além do enunciado do problema. (2;1) A Investigação Matemática valoriza a formulação, os testes e a prova de conjecturas, bem como a argumentação. (2;2) A Resolução de Problemas é o ponto de partida para a Investigação Matemática. (2;3)

[39] "O projecto Matemática para todos – MPT desenvolve-se, desde 1994, no Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e procura manter uma ligação estreita entre a investigação educacional e a prática pedagógica. Da equipa (sic) fazem parte docentes e investigadores da área da Educação Matemática do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e das Escolas Superiores de Educação de Portalegre, Setúbal e Viseu e professores dos 2º e 3º ciclos do ensino básico e do ensino secundário. O trabalho do projecto realiza-se segundo três áreas temáticas centrais da disciplina de Matemática: Funções, Geometria, e Números e Regularidades" (PONTE et al., 1999, p. 3).

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Chegamos assim às actividades de exploração e de investigação matemática.		
A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: "o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objetivo é a viagem e não o destino".	Ao discutir os aspectos envolvidos nas atividades de Resolução de Problemas e de Investigação Matemática, afirma-se que, na Investigação Matemática, o importante é a exploração da Matemática em todas as direções.	Na Investigação Matemática, é importante a exploração da Matemática em todas as direções. (2;4)
Numa investigação Matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.	Ao discutir os aspectos envolvidos nas atividades de Resolução de Problemas e de Investigação Matemática, os autores afirmam que a Investigação Matemática tem como objetivo explorar todos os caminhos; é um processo divergente e sabe-se o ponto de partida, porém não se sabe o ponto de chegada.	Na Investigação Matemática, importa a exploração de todos os caminhos. (2;5) A Investigação Matemática é um processo divergente. (2;6) Na Investigação Matemática, sabe-se qual é o ponto de partida, mas não o de chegada. (2;7)
O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que durante a fase de desenvolvimento da tarefa os alunos se envolvem em um processo investigativo no qual compreendem a situação proposta, organizam os dados, formulam questões e conjecturas, as testam e, em alguns casos, as demonstram.	Na Investigação Matemática, os alunos formulam questões para serem investigadas. (2;8) Na Investigação Matemática, os alunos elaboram conjecturas. (2;9) Na Investigação Matemática, os alunos realizam testes das conjecturas elaboradas. (2;10) Na Investigação Matemática, os alunos elaboram demonstrações. (2;11)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Por um lado, para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos.	Ao discutir sobre a preparação da aula de Investigação Matemática, afirma-se que é preciso escolher ou formular tarefas com questões suficientemente abertas e interessantes.	Na Investigação Matemática, é importante elaborar questões suficientemente abertas e interessantes para disparar a atividade. (2;12)
Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado. Isto poderá implicar um maior apoio do professor junto dos grupos no sentido de os ajudar a entender o que se pretende.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que as tarefas podem ser apresentadas sem uma discussão inicial e que, se assim for, haverá a necessidade de maior apoio, por parte do professor, para ajudar os alunos a entender o que se pretende.	A apresentação da tarefa sem uma discussão inicial implica na necessidade de maior apoio do professor aos alunos. (2;15)
Finalmente, podemos pensar ainda no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da actividade dos alunos.	Ao discutir as fases da aula com a Investigação Matemática, afirma-se que a tarefa pode surgir espontaneamente a partir da atividade dos alunos.	Na Investigação Matemática, a tarefa pode surgir espontaneamente a partir da atividade dos alunos. (2;14)
Ao organizar a fase de discussão o professor deve conhecer bem o trabalho dos alunos de modo a valorizar tanto as descobertas mais interessantes como as mais modestas.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que na fase da discussão o professor deve conhecer o trabalho dos alunos para poder valorizar as descobertas mais interessantes e as mais modestas.	Na Investigação Matemática, o professor deve valorizar as descobertas dos alunos. (2;15)
Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da actividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que durante a fase de desenvolvimento, o professor tem o papel de orientar a atividade, de modo que o decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece aos alunos.	Na Investigação Matemática, a fase de desenvolvimento deve centrar-se na atividade dos alunos. (2;16) Na Investigação Matemática, o professor orienta a atividade dos alunos. (2;17) Na Investigação Matemática, o professor

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		intervém no modo de trabalhar dos alunos. (2;18)
Na fase de desenvolvimento do trabalho [...] o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. Segundo o NCTM (1994), o professor deve colocar regularmente a pergunta “porquê” a seguir aos comentários dos alunos, de modo a “provocar o raciocínio”, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas.	Ao discutir sobre a aula com a Investigação Matemática, afirma-se que o professor deve seguir os comentários dos alunos e provocar o raciocínio, levando-os a analisar e refletir sobre o seu próprio trabalho e a procurar significado para as suas descobertas.	Na Investigação Matemática, o professor deve levar os alunos a analisar e a refletir sobre o trabalho realizado e sobre o significado das descobertas. (2;19)
O processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las.	A fase de desenvolvimento da tarefa diz respeito à compreensão da situação proposta, à organização de dados, à formulação de questões para investigar, à formulação, testes e demonstração de conjecturas.	A formulação de questões para investigar, bem como a formulação de conjecturas, os testes e a demonstração, são etapas que acontecem durante a fase do desenvolvimento da Investigação Matemática. (2;20)
Muitas vezes as solicitações feitas pelos alunos ao professor vão no sentido de validar os seus processos ou ideias. Como resposta o professor não deverá emitir opiniões muito concretas mas sim incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que o professor deve incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as conjecturas por eles elaboradas.	Na Investigação Matemática, o professor deve incentivar os alunos a refletirem sobre as conjecturas por eles elaboradas, incentivando o espírito crítico. (2;21)
Durante o trabalho investigativo, os alunos poderão seguir por caminhos através dos quais não serão bem sucedidos. Nesta situação, o professor deverá evitar dizer-lhes imediatamente que seguem um caminho infrutífero e dar algum tempo para que seja a sua própria experiência a mostrar-lhes o erro. No entanto, tem de ter cuidado para que essa	Na atividade de Investigação Matemática, é a própria experiência dos alunos que deve mostrar-lhes se os caminhos que estão seguindo são frutíferos, mas, por vezes, é necessário que o professor avance com pistas mais diretas, que conduzam os alunos para um caminho possível, na exploração da tarefa.	Na Investigação Matemática, é a própria experiência dos alunos que deve mostrar-lhes se os caminhos que estão seguindo são frutíferos. (2;22) Na Investigação Matemática, por vezes, o professor tem que dar

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
exploração mal conduzida não se prolongue demasiado e não acabe por lhes provocar desmotivação. Assim, por vezes é necessário que o professor avance com pistas mais directas para um caminho possível a seguir na exploração da tarefa.		pistas mais diretas sobre o caminho possível a ser seguido na exploração da tarefa. (2;23)
Durante a fase de discussão o professor, na sua função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos.	Ao discutir sobre a aula de Investigação Matemática, afirma-se que, na fase de discussão, o professor tem a função de moderador e orientador para estimular a comunicação entre os alunos.	Na Investigação Matemática, o professor atua como moderador e orientador, promovendo a comunicação. (2;24)
A discussão final sobre a actividade dos alunos é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, sabendo que esta é um elemento indispensável numa aula de investigação.	Ao discorrer sobre as fases da aula com a Investigação Matemática, afirma-se que a fase da discussão final é um elemento indispensável e uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho realizado.	A discussão das atividades dos alunos é um elemento indispensável em uma aula com a Investigação Matemática. (2;25)
Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática? Obviamente que os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o grau de especialização que atinge, o tempo e o interesse que dedica à sua actividade são em dimensão incomparáveis com os do aluno. No entanto, a actividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza.	Como modo de disparar o discurso, pergunta-se: será possível estabelecer um paralelo entre a atividade do matemático e a atividade do aluno na aula de Matemática? Em resposta, afirma-se que a natureza da atividade desenvolvida por ambos é equivalente, ainda que em dimensões incomparáveis.	A natureza da atividade do aluno em uma aula com a Investigação Matemática é equivalente à atividade do matemático. (2;26)
A realização de aulas de investigação comporta, como vimos, três fases distintas a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. No entanto, mesmo a adopção dessa perspectiva requer muitas outras decisões.	A aula de Investigação Matemática comporta três fases distintas, a saber: a introdução da tarefa, a realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta.	A aula de Investigação Matemática comporta as fases de introdução da tarefa, realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. (2;27)
Em qualquer caso, estes projectos, para assumirem um cunho verdadeiramente	Ao discutir sobre possibilidades de realizar Investigações Matemáticas, afirma-se que,	A Investigação Matemática é fundamentalmente

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
investigativo devem ter as características fundamentais que marcam a realização de qualquer investigação em qualquer domínio: 1. Uma **questão** (ou um conjunto de questões) bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta. 2. Uma **conjectura** (ou um conjunto de conjecturas), informada por experiência anterior e por princípios educativos sólidos, que indique as direcções de trabalho a prosseguir. 3. A realização de **testes** práticos, pondo à prova as conjecturas, através da realização de experiências na sala de aula e da recolha de dados indicando os respectivos resultados. 4. A **validação** dos resultados obtidos, através de uma análise de dados cuidadosa, da construção de uma argumentação que evidencie o alcance do trabalho feito e da respectiva divulgação.	para uma atividade assumir um cunho verdadeiramente investigativo, deve ter as características fundamentais que marcam a realização de qualquer investigação, quais sejam: uma ou um conjunto de questões bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta; uma ou um conjunto de conjecturas, a realização de testes que põem à prova as conjecturas, e a validação dos resultados obtidos.	caracterizada por questões, conjecturas, testes e validação de conjecturas. (2;28) Questões bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta, é uma das características que marcam a Investigação Matemática. (2;29)

Fonte: o autor

OBRA 3

Quadro 13: Dados objetivos da obra 3

Título: Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia
Autor: Paul Ernest
Ano de publicação: 1996
Natureza científica: capítulo de livro
Sinopse: A obra tece considerações acerca da Investigação, Resolução de Problemas e Pedagogia, situadas no sistema educacional britânico. Com caráter puramente teórico, discute os resultados matemáticos como produtos da atividade humana de formulação e resolução de problemas, defendendo a ideia de que a Matemática, enquanto Ciência, se nutre dos mais variados problemas científicos. Além disso, debate as consequências, decorrentes do caráter inquiridor, assentado na resolução de problemas matemáticos e no fato de a Matemática ser uma construção falível, propondo uma pedagogia baseada na inquirição. Trata, ainda, de algumas distinções entre problemas e investigações, bem como das várias percepções acerca das investigações e dos problemas. Apresenta, por fim, a pedagogia de formulação de problemas como uma abordagem que confere poder epistemológico aos alunos e que contribui para a visão social-construtivista e/ou mesmo absolutista-progressiva da Matemática, incluindo não só o tratamento do conteúdo, mas também um método de ensino. Salienta, assim, que as ideologias subjacentes ao currículo da Matemática são utilitaristas e tornam o pensamento matemático estratégico rotineiro. Vê nas ambiguidades e nas contradições do currículo britânico oportunidades para utilizar uma abordagem investigativa.

Fonte: o autor

Quadro 14: Construção das unidades de significado com a obra 3

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Uma das dificuldades na discussão de problemas e investigações é que estes conceitos estão mal definidos e são entendidos de forma diferente por diferentes autores. No entanto, existe um consenso em que ambos estão relacionados com a inquirição matemática.	Ao buscar distinguir problemas e investigações, afirma-se que existe um consenso de que em termos conceituais, ambos conceitos se relacionam com a inquirição matemática.	Problemas e investigações estão relacionados com a inquirição matemática. (3;1)
Os "public educators" vão mais longe, encorajando os alunos a questionar o conteúdo do curso, a pedagogia e a avaliação; e utilizando situações e problemas, projectos e tópicos socialmente relevantes, para promover um maior empenho social dos alunos e dar-lhes mais poder. Assim, a resolução de problemas e as investigações serão em parte baseadas em materiais autênticos, como jornais, estatísticas oficiais, e problemas sociais. Para o "public educator", esta pedagogia é um meio de desenvolver entre os alunos as qualidades de cidadania e empenhamento social.	Ao apresentar diferentes concepções sobre problemas e investigações, afirma-se que os educadores públicos utilizam tópicos socialmente relevantes para o trabalho com a Investigação Matemática e que, para eles, a Investigação Matemática é uma pedagogia capaz de desenvolver entre os alunos a cidadania e o empenho social.	Para os educadores públicos, a Investigação Matemática deve basear-se, em partes, em problemas sociais. (3;2) Para os educadores públicos, a Investigação Matemática é uma pedagogia. (3;3) Para os educadores públicos, a Investigação Matemática é um meio para desenvolver a cidadania. (3;4)
A metáfora geográfica também é aplicada ao processo de investigação matemática. "A ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. O objetivo é a viagem, não o destino." (Pirie, 1987, p. 2). Aqui a ênfase está em explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objectivo específico. Assim, enquanto o processo de resolução de problemas em matemática é descrito como convergente, as investigações matemáticas são divergentes.	Ao discutir o processo de inquirição envolvido na Resolução de Problemas e na Investigação Matemática, afirma-se que, na Investigação Matemática, a ênfase está em explorar uma questão da Matemática em todas as direções e, por isso, esse processo é descrito como divergente.	Comparativamente à Resolução de Problemas, a Investigação Matemática é um processo divergente. (3;5)
Bell et al. (1983) propõem um modelo de investigação com quatro fases: formulação do problema, resolução do problema, verificação,	Ao discutir o processo de inquirição envolvido na Resolução de Problemas e na Investigação Matemática, afirma-se que a Investigação	Fazer Investigação Matemática envolve a abstração. (3;6)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
integração. [...] Estes autores sugerem que a investigação matemática tem uma forma especial, com as suas próprias componentes características de abstracção, representação, modelação, generalização, demonstração e simbolismo.	Matemática tem uma forma especial, com componentes próprias como a abstração, a representação, a modelação, a generalização, a demonstração e o simbolismo.	Fazer Investigação Matemática envolve a modelação. (3;7) Fazer Investigação Matemática envolve a generalização. (3;8) Fazer Investigação Matemática envolve a demonstração. (3;9)
Esta abordagem tem a virtude de especificar um certo número de processos mentais envolvidos na investigação matemática (e na resolução de problemas). Embora outros autores, como Polya (1945), incluam muitas das componentes do modelo como processos de resolução de problemas, a diferença central está na inclusão da formulação de problemas, que precede a sua resolução.	Ao buscar distinguir problemas e investigações, afirma-se que a Investigação Matemática difere da Resolução de Problemas pela inclusão da formulação dos problemas a serem investigados.	A Investigação Matemática difere da Resolução de Problemas. (3;10) A Investigação Matemática requer a formulação de problemas a serem investigados. (3;11)
A perspectiva do grupo dos "progressive educators" preocupa-se em facilitar a criatividade individual na matemática, e a resolução de problemas e as investigações matemáticas são encarados como tendo um papel central em relação a isto. [...] Os temas a investigar restringem-se a situações da Matemática Pura, ou a tópicos relativos a questões "seguras" e não políticas. Em consonância com a ideologia geral, a ênfase é colocada no aluno e nos seus interesses, e não no contexto social em que ele vive, estuda e virá um dia a trabalhar.	Ao apresentar diferentes concepções sobre problemas e investigações, afirma-se que os educadores progressistas veem a Investigação Matemática como facilitadora da criatividade individual, com temas restritos à Matemática Pura, sem colocar ênfase no contexto social em que o aluno vive, estuda e virá um dia a trabalhar.	Para os educadores progressistas, a Investigação Matemática se restringe ao contexto da Matemática Pura. (3;12) A Investigação Matemática tem o papel de facilitar a criatividade individual na Matemática. (3;13)
Embora as investigações possam começar por uma situação ou questão matemática, o foco da atividade muda assim que novas questões são postas, e novas situações são geradas e exploradas.	O foco da atividade de Investigação Matemática muda assim que novas questões são postas e novas situações são geradas e exploradas.	Na Investigação Matemática, o foco da atividade muda assim que novas questões são postas. (3;14)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
A resolução de problemas e as investigações como método de ensino requerem que se considere o contexto social da turma e as suas relações de poder. A resolução de problemas permite ao aluno aplicar a sua aprendizagem criativamente, numa nova situação, mas o professor ainda mantém muito do seu controlo (sic) sobre o conteúdo e o modo de ensinar. Se a abordagem investigativa é adoptada de modo a permitir ao aluno a formulação de problemas e questões para investigação de modo relativamente livre, torna-se emancipadora.	As investigações como método de ensino requerem que se considere o contexto social dos alunos e se for adotada como uma abordagem que os permita formular problemas e questões para investigar de modo relativamente livre, torna-se emancipadora.	A Investigação Matemática é um método de ensino. (3;15) A Investigação Matemática pode ser emancipadora ao permitir ao aluno a formulação de questões. (3;16)

Fonte: o autor

OBRA 4

Quadro 15: Dados objetivos da obra 4

Título: O trabalho do professor numa aula de investigação Matemática
Autores: João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Lina Brunheira; José Manuel Varandas
Ano de publicação: 1999
Natureza científica: capítulo de livro
Sinopse: A obra relata um trabalho realizado no âmbito do projeto[40] *Matemática para todos – investigações na sala de aula*, por meio da observação de situações de aula, nas quais foram propostas tarefas de Investigação Matemática. Analisa um conjunto de episódios relativos às fases de arranque, de desenvolvimento e de discussão final do trabalho realizado. Discute e caracteriza os papéis do professor em aulas de Investigação Matemática, relacionando-os com o seu conhecimento profissional, buscando compreender os fatores que se evidenciam como mais importantes para facilitar a sua atuação e como é possível gerir a situação didática, estabelecendo as normas de funcionamento da aula, determinando expectativas, indicando o que é ou não desejável, o que é ou não permitido aos alunos e ao professor. Os autores apresentam alguns aspectos do trabalho investigativo como, por exemplo, as etapas e os momentos que dividem o trabalho em sala, as relações que se estabelecem com a atividade Matemática, alguns argumentos que justificam a sua utilização para o ensino de Matemática, bem como estudos sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação.

Fonte: o autor

[40] Idem nota 39.

Quadro 16: Construção das unidades de significado com a obra 4

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
O trabalho investigativo recolhe uma atenção significativa nos currículos de Matemática de diversos países [...] o programa francês sublinha a importância de habituar os alunos à actividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. O currículo inglês inclui aspectos directamente relacionados com o trabalho investigativo numa das suas grandes áreas de objectivos (*Using and applying mathematics*). O programa português do ensino básico contempla esta perspectiva quando se refere à realização de actividades de exploração e pesquisa ou à elaboração de conjecturas.	Ao discutir o trabalho investigativo nos currículos de Matemática de diversos países, afirma-se que o programa francês sublinha a importância do trabalho investigativo para habituar os alunos à atividade científica em Matemática. No currículo inglês, o trabalho investigativo está relacionado com a utilização e aplicação da Matemática. No ensino básico português, o trabalho investigativo está relacionado às atividades de pesquisa e à elaboração de conjecturas.	No programa francês, a Investigação Matemática é significativa para habituar os alunos à atividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. (4;1) O currículo inglês inclui no trabalho investigativo a aplicação da Matemática. (4;2) O programa português inclui a investigação como um modo de realizar exploração, pesquisa e elaborar conjecturas. (4;3)
Numa aula de trabalho investigativo, distinguem-se, de um modo geral, três etapas fundamentais: a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e o momento de síntese e conclusão final.	Ao discutir sobre o trabalho investigativo em sala de aula, afirma-se que, nesse trabalho, distinguem-se as etapas de formulação da tarefa, desenvolvimento do trabalho, síntese e conclusão final.	As etapas fundamentais do trabalho investigativo são a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a conclusão. (4;4)
O facto de as ideias matemáticas se desenvolverem como fruto das tentativas de compreensão, como resposta a problemas e necessidades experimentadas pelo próprio aluno, e não como simples assimilação de ideias pré-existentes, confere grande importância à formulação de boas questões. Ao mostrar aos alunos que é possível olhar para as ideias matemáticas de modo interrogativo, colocando questões que podem ser investigadas – e promovendo a investigação, de facto, de algumas delas.	Ao discutir sobre os desafios encontrados pelos alunos na realização de uma Investigação Matemática, afirma-se que as ideias matemáticas se desenvolvem a partir de tentativas de compreensão, experimentadas pelos alunos que, ao olhá-las de modo interrogativo, colocam questões que podem ser investigadas.	Na Investigação Matemática, as ideias matemáticas são frutos de tentativas de compreensão experimentadas pelos alunos. (4;5)
Os papéis remetem para diversos aspectos do conhecimento profissional do professor, nomeadamente para o seu	Os papéis do professor na aula com a Investigação Matemática são discutidos sob duas vertentes, a saber, a	A investigação Matemática possibilita conexões entre

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
conhecimento matemático, em especial relativo à tarefa de investigação em causa, e para o seu conhecimento didáctico relacionado com a organização do trabalho e a condução da actividade dos alunos. [...] Vejamos em primeiro lugar a vertente matemática. [...] Durante a aula, questões, conjecturas e argumentos propostos pelos alunos podem levá-lo a considerar novos aspectos da tarefa, envolvendo-se em raciocínio matemático adicional. Ao prosseguir a investigação, o seu raciocínio matemático desenvolve-se de forma análoga ao raciocínio matemático dos alunos – colocando questões, formulando conjecturas, fazendo testes e validando resultados, processos característicos de uma actividade de investigação. Além disso, durante a aula, surgem também com frequência oportunidades de estabelecer relações entre o trabalho que se está a fazer e outros conceitos matemáticos ou extra-matemáticos – o que requer do professor cultura matemática e capacidade de decidir quais as ligações a estabelecer. É no decurso da realização de actividade investigativa na sala de aula que o professor pode constituir um modelo matemático para os seus alunos de modo mais genuíno (Lampert, 1990; Mason, 1996).	vertente matemática e a vertente didática. Ao que concerne à vertente matemática, com aporte em Lampert (1990) e Mason (1996), afirma-se que há a possibilidade de o professor estabelecer conexões entre conceitos matemáticos, bem como destes com conceitos extramatemáticos, além da possibilidade de constituir um modelo matemático de modo mais genuíno.	conceitos matemáticos. (4;6) A Investigação Matemática possibilita conexões de conceitos matemáticos com conceitos extramatemáticos. (4;7) Na aula com a Investigação Matemática, o professor pode constituir um modelo matemático de modo mais genuíno. (4;8)
Os objectivos da aprendizagem envolvem duas dimensões (Christiansen e Walther, 1986) que estão sempre presentes, de modo explícito ou implícito. A primeira remete para o nível dos conteúdos matemáticos, cabendo ao professor explicar um conceito, recordar uma noção, ou estabelecer relações directas com outras ideias ou representações matemáticas ou extra-matemáticas.	Ao discutir sobre os objetivos de aprendizagem da Investigação Matemática, afirma-se que eles envolvem a explicação dos conteúdos matemáticos, a recordação de uma noção, o estabelecimento de relações entre ideias ou representações matemáticas, ou destas com ideias e representações extramatemáticas.	Na vertente didática da Investigação Matemática, os conteúdos matemáticos são um dos objetivos da aprendizagem. (4;9) Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem,

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		recordar uma noção matemática. (4;10) Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas. (4;11) Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas e extramatemáticas. (4;12)
As acções de ensino ao alcance do professor, ou seja, os meios que pode usar para atingir os objectivos pretendidos, traduzem-se essencialmente em três papéis fundamentais: desafiar, apoiar e avaliar. [...] O professor desafia os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo. Apoia-os, fazendo perguntas, comentários ou sugestões. Procura avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, toma a sua decisão de prosseguir, alterar um ou outro aspecto do que se está a fazer, ou mudar para outra fase do trabalho.	No trabalho investigativo as ações de ensino ao alcance do professor traduzem-se essencialmente em desafiar, apoiar e avaliar. Desafiar os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los no trabalho investigativo; apoiá-los fazendo perguntas, comentários ou sugestões; avaliá-los no tocante aos progressos e a eventuais dificuldades.	Cabe ao professor desafiar, apoiar e avaliar os alunos no trabalho investigativo. (4;13)
A criação de um ambiente favorável à actividade de investigação é apenas um dos aspectos do trabalho do professor. Outro aspecto, não menos importante, é servir de modelo aos alunos no que se refere ao modo de trabalhar em Matemática.	Ao discutir os papéis do professor na realização de uma Investigação Matemática, afirma-se que um dos aspectos do trabalho do professor é criar um ambiente que favoreça o acontecer da Investigação Matemática. Outro aspecto é que o modo de o professor trabalhar com a Matemática	Criar um ambiente favorável à Investigação Matemática é um dos aspectos do trabalho do professor. (4;14) Na Investigação Matemática, o modo

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
	deve servir de modelo para os alunos.	de o professor trabalhar com a Matemática deve servir de modelo aos alunos. (4;15)
Num estudo conduzido por Lampert (1990), com uma turma do 5.º ano e que envolvia a realização de tarefas de investigação. [...], aponta a mesma ideia, indicando que o seu papel de perita lhe servia para demonstrar aos seus alunos o que significa saber Matemática. Para isso, envolvia-se no raciocínio dos alunos, ao mesmo tempo que modelava o comportamento deles perante a atividade.	Em decorrência de um estudo sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação, afirma-se que é papel do professor demonstrar aos alunos o que significa saber Matemática. Isso pode ser feito envolvendo-se no raciocínio dos alunos e modelando o comportamento deles perante a atividade.	A professora considera que o seu papel servia para demonstrar aos alunos o que significa saber Matemática. (4;16) A professora envolvia-se no raciocínio dos alunos e modelava o comportamento deles perante a atividade de Investigação Matemática. (4;17)
É claro que o professor continua a ter de apresentar, aos alunos, informação sobre os conceitos, procedimentos e notações matemáticas. No entanto, em vez de isso ser feito de forma abrupta e descontextualizada, pode ser feito, como refere Lampert, à medida que se ensina os alunos como fazer Matemática.	Ao discutir sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação, afirma-se que o professor pode apresentar aos alunos informação sobre os conceitos, os procedimentos e as notações matemáticas, à medida que se ensina, aos alunos, como fazer Matemática.	O professor pode apresentar conceitos, informações, procedimentos e notações matemáticas, à medida que ensina aos alunos como fazer Matemática. (4;18)
O professor tem oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos e pode compreender os métodos individuais usados por eles.	Ao discutir sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação, afirma-se que, na Investigação Matemática, é dada ao professor a oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos.	Na Investigação Matemática, o professor tem a oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos. (4;19)
Mesmo sem perceber completamente a ideia dos alunos, a professora acha interessante a sua tentativa de encontrar uma relação e estimula-os a explicar.	Em decorrência de estudos sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação, afirma-se que, em um deles, a professora se interessa pelo modo que os alunos encontraram uma relação e os estimula a explicá-la.	A professora estimula os alunos a explicarem a relação encontrada. (4;20)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
O professor pode adoptar diversas estratégias – não interferir no trabalho dos alunos, interferir de forma discreta e ligeira.	Ao discutir sobre a atividade do professor em aulas de exploração e investigação, afirma-se que o professor pode optar por não interferir no trabalho dos alunos ou interferir de forma discreta e ligeira.	Na Investigação Matemática, o professor pode não interferir no trabalho dos alunos ou, se necessário, interferir de forma discreta e ligeira. (4;21)
O facto de os alunos observarem directamente o professor a investigar é extremamente importante para aprenderem, eles próprios, o modo de conduzir uma investigação.	É importante que os alunos observem diretamente o modo de investigar do professor para aprenderem, eles próprios, a conduzir uma investigação.	O fazer investigação do professor pode levar os alunos a aprenderem sobre o modo de conduzir uma investigação. (4;22)
Além disso, durante a aula, surgem também com frequência oportunidades de estabelecer relações entre o trabalho que se está a fazer e outros conceitos matemáticos ou extramatemáticos – o que requer do professor cultura matemática e capacidade de decidir quais as ligações a estabelecer.	Ao discutir sobre o trabalho investigativo em sala de aula, afirma-se que, durante a aula, surgem oportunidades para estabelecer relações entre o trabalho que se está a fazer e outros conceitos matemáticos ou extramatemáticos, cabendo ao professor decidir quais serão estabelecidas.	Na Investigação Matemática, estabelecer relações entre conceitos é importante. (4;23) Na Investigação Matemática, o estabelecimento das relações entre conceitos depende da cultura matemática do professor. (4;24) Na Investigação Matemática, o professor deve ter a capacidade para decidir quais ligações matemáticas estabelecer. (4;25)
Todo o trabalho didáctico realizado pelo professor, requer uma compreensão da tarefa e das suas ligações matemáticas. O aspecto mais específico da sua actividade como professor da sua disciplina é o facto de se apoiar no pensamento matemático, antes, durante e depois da aula.	Ao discutir sobre o trabalho investigativo, afirma-se que o trabalho do professor requer a compreensão da tarefa e das ligações matemáticas que promove e, especificamente, o apoio no pensamento matemático.	Na aula de Investigação Matemática, o professor deve se apoiar no pensamento matemático. (4;26)

Fonte: o autor

OBRA 5

Quadro 17: Dados objetivos da obra 5

Título: Histórias de investigações matemáticas
Autores: João Pedro da Ponte; Hélia Margarida Oliveira; Maria Helena Cunha; Maria Irene Segurado
Ano de publicação: 1998
Natureza científica: livro
Sinopse: A obra deriva do projeto[41] *Prática e reflexão sobre a prática: análise narrativa de situações de ensino-aprendizagem* e tece discussões em torno de quatro temas: 1) a Matemática, respeitando uma perspectiva epistemológica sobre esta Ciência, que a encara muito mais como uma atividade de construção do conhecimento, do que como um corpo de saber a transmitir; 2) a importância da interação social no processo de negociação dos significados matemáticos e consequentemente na aprendizagem; 3) a dinâmica da inovação curricular e o problema da concretização prática de novas orientações pedagógicas e 4) as potencialidades de uma análise narrativa das situações de ensino-aprendizagem. Com ênfase no professor e no estudo do seu conhecimento profissional em contextos investigativos, o trabalho se desenvolve a partir da narrativa de situações reais de ensino-aprendizagem. Explicita, em um primeiro momento, questões acerca da Matemática como atividade humana, da interação social no processo de aprendizagem, da dinâmica de inovação curricular, das atividades de investigações na aula de Matemática, da preparação e realização de aulas pautadas na Investigação Matemática e das dificuldades a serem superadas. Em um segundo momento, estas questões são discutidas a partir do trabalho empírico realizado, tal como elas se revelam ao longo das diversas narrativas, confrontando o trabalho desenvolvido com os pressupostos iniciais da investigação.

Fonte: o autor

Quadro 18: Construção das unidades de significado com a obra 5

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
<u>O que são actividades de investigação?</u> Uma vez que existe uma profusão de formulações sobre o que se entende por "investigações matemáticas", é necessário explicitar o sentido que lhes atribuímos neste projecto. <u>As investigações matemáticas são parte</u> do que alguns autores designam por <u>"atividade matemática", o que corresponde a identificar *aprender* Matemática com *fazer* Matemática. Nesta perspectiva, esta ciência é encarada mais como uma forma de gerar conhecimento do que como um corpo de conhecimentos.</u>	A Investigação Matemática é parte do que alguns autores chamam de atividade matemática, o que corresponde a identificar o aprender Matemática com o fazer Matemática. Nesta perspectiva, a Matemática é encarada mais como uma forma de gerar conhecimento do que como um corpo de conhecimento.	A Investigação Matemática é parte da atividade matemática. (5;1) Na Investigação Matemática há uma identidade entre aprender Matemática e fazer Matemática. (5;2) A Investigação Matemática é encarada como uma forma de gerar conhecimento. (5;3)

[41] O objetivo do projeto era "estudar, numa perspectiva de análise narrativa, o conhecimento profissional necessário ao professor que pretende envolver os seus alunos em actividade matemática significativa, bem como os problemas e dilemas profissionais com que se confronta nestas situações de ensino-aprendizagem. [...] O projecto, que se revestiu de um carácter de investigação-acção, envolveu professores e alunos do 2º e 3º ciclos do ensino básico, decorrendo as suas actividades de campo em escolas das zonas de Viseu e Lisboa" (PONTE et al., 1998, p. 6-7).

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas. Os dois termos são usados muitas vezes de modo indistinto.	Na tentativa de esclarecer o que são as atividades de investigação, afirma-se que o conceito de Investigação Matemática é muito próximo do conceito de Resolução de Problemas.	A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são conceitos próximos. (5;4)
A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. "Actividades investigativas" ou "investigações matemáticas" designam, no contexto deste projecto, um tipo de atividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São atividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos.	As atividades investigativas ou Investigações Matemáticas designam um tipo de atividade de cunho muito aberto, que enfatiza os processos matemáticos de reflexão, generalização, busca por regularidades, formulação, teste, justificação e demonstração de conjecturas.	A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza a busca por regularidades. (5;5) A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de generalização. (5;6) A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de conjecturar. (5;7) A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de testar as conjecturas. (5;8) A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de demonstrar. (5;9) As atividades de Investigação Matemática são abertas. (5;10)
O aspecto mais distintivo das atividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto que na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente	Ao discutir os aspectos que distinguem as atividades de Investigação Matemática e de Resolução de Problemas, afirma-se	A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são distintas. (5;11)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
especificada ao aluno, <u>na actividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas</u>.	que, enquanto que na Investigação Matemática, as questões a estudar são abertas, na Resolução de Problemas elas tendem a ser completamente especificadas.	A Investigação Matemática se diferencia da Resolução de Problemas, por conter questões inicialmente vagas. (5;12)
<u>As atividades de investigação envolvem</u> assim <u>uma componente essencial de formulação de problemas</u>, etapa normalmente ausente (porque já cumprida de antemão pelo professor) na resolução de problemas.	Ao discutir os aspectos que distinguem as atividades de Investigação Matemática e de Resolução de Problemas, afirma-se que a formulação dos problemas a serem investigados é uma componente essencial envolvida nas atividades de Investigação Matemática.	A formulação dos problemas a serem investigados é essencial na Investigação Matemática. (5;13)
Enquanto que na resolução de problemas faz sentido sugerir heurísticas gerais (como as de Pólya, 1945) ou estratégias mais específicas (como as de Schoenfeld, 1982), <u>nas atividades de investigação o leque de possibilidades é de tal maneira vasto</u> que se torna difícil fazer semelhante sistematização.	Ao discutir os aspectos que distinguem as atividades de Investigação Matemática e de Resolução de Problemas, afirma-se que, nas atividades de Investigação Matemática, o leque de possibilidades das estratégias a seguir é vasto.	Na Investigação Matemática, é difícil seguir uma heurística, em decorrência da variedade de possibilidades. (5;14)
Assim, enquanto que na resolução de problemas o objectivo é a estratégia seguida e a solução a que conduz, na actividade de investigação o objectivo é a compreensão de um domínio problemático. [...] <u>O processo investigativo tem</u>, assim, <u>um carácter mais divergente do que</u>, em geral, <u>a resolução de um problema.</u>	Ao discutir os aspectos que distinguem as atividades de Investigação Matemática e de Resolução de Problemas, afirma-se que o processo investigativo tem um caráter mais divergente do que a resolução de um problema.	O processo investigativo é mais divergente do que a resolução de um problema. (5;15)
<u>As investigações matemáticas caracterizam-se, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno para</u> este <u>justificar e provar</u> as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas	Ao elencar elementos que possam caracterizar as Investigações Matemáticas, afirma-se que uma característica é o estímulo que fornecem	A Investigação Matemática estimula o aluno a justificar e a provar. (5;16)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
argumentações perante os seus colegas e o professor. As capacidades de argumentação e prova são dois aspectos destacados da capacidade de comunicar matematicamente.	ao aluno para justificar e provar, enquanto capacidades de comunicar matematicamente.	Argumentar e provar são aspectos da capacidade de comunicar-se matematicamente. (5;17)
Ao confrontarem as suas diferentes conjecturas e justificações, os elementos da turma constituem-se como pequena comunidade matemática, na qual o conhecimento matemático se desenvolve em conjunto. O trabalho do aluno aproxima-se, assim, do trabalho do matemático.	Ao buscar caracterizar as Investigações Matemáticas, afirma-se que elas proporcionam a constituição de uma pequena comunidade matemática, aproximando o trabalho do aluno do trabalho do matemático.	Na Investigação Matemática, o trabalho do aluno se aproxima do trabalho do matemático. (5;18) Na aula com a Investigação Matemática, os alunos constituem uma pequena comunidade matemática. (5;19)
Este modo de ver a aprendizagem vem, naturalmente, relativizar a importância dos conteúdos no currículo. Ainda que estes continuem a constituir o suporte da atividade, o desenvolvimento de capacidades de ordem superior torna-se um objectivo destacado e os processos característicos da atividade matemática passam a constituir o foco do ensino.	Ao discorrer sobre a preparação de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que o modo de a Investigação Matemática ver a aprendizagem enfoca o ensino dos processos característicos da atividade matemática.	Na Investigação Matemática, os processos característicos da atividade matemática são o foco do ensino. (5;20)
O ponto de partida de uma investigação, tal como foi pensado pelo professor, pode relacionar-se de modo mais ou menos directo com um ou outro tema do currículo. Mas a atividade que o aluno realiza, particular e única, pode originar outras questões, seguir por caminhos inusitados e acabar por se relacionar com muitos outros temas.	Ao discorrer sobre a preparação de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que a atividade de Investigação Matemática desenvolvida pelo aluno pode seguir caminhos inusitados.	Na Investigação Matemática, o aluno pode seguir caminhos inusitados. (5;21)
A ideia de que as situações a propor devem ser abertas, no sentido de estimularem o aluno a colocar as suas próprias questões, é um dos aspectos mais fortes das tarefas de natureza investigativa.	Ao discorrer sobre a preparação de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que a abertura das situações é um dos aspectos fortes das tarefas de natureza investigativa.	As tarefas de Investigação Matemática são abertas. (5;22)
Um dos grandes objetivos das atividades de investigação é a condução dos alunos a graus	Ao discorrer sobre a realização de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que um dos grandes	A generalização é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (5;23)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
progressivos de generalização e de abstracção.	objetivos das atividades de investigação é a generalização e a abstração.	A abstração é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (5;24)
Consequentemente, a justificação das conjecturas apresentadas é uma componente importante. Tal como foi mencionado anteriormente, o grau de formalização dessa justificação depende do nível de desenvolvimento matemático do aluno.	Ao discorrer sobre a realização de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que a justificação das conjecturas é uma componente importante, e que o grau de formalização dessa justificação depende do nível de desenvolvimento matemático do aluno.	A justificação das conjecturas é uma componente importante na Investigação Matemática. (5;25)
As investigações constituem um meio privilegiado de proporcionar aos alunos uma experiência matemática autêntica, porque facilitam o envolvimento num tipo de trabalho que se encontra muito próximo da atividade matemática.	Ao discorrer sobre a realização de aulas com a Investigação Matemática, afirma-se que as Investigações Matemáticas proporcionam aos alunos uma experiência matemática autêntica, porque os envolve em um tipo de trabalho muito próximo da atividade matemática.	A experiência matemática que a Investigação Matemática proporciona é muito próxima da atividade matemática. (5;26) A experiência matemática que a Investigação Matemática proporciona é autêntica. (5;27)
As atividades de investigação evidenciam a ligação entre conteúdos matemáticos, um dos aspectos frequentemente mais pobres do conhecimento matemático dos alunos.	Ao discutir sobre as atividades de Investigação Matemática e o currículo, afirma-se que elas evidenciam a ligação entre conteúdos matemáticos.	A Investigação Matemática evidencia a ligação entre conteúdos matemáticos. (5;28)
No decurso duma atividade de investigação é frequente surgirem novas questões. É positivo que isso aconteça e é importante que os professores o valorizem na devida altura (JP5). É também importante que os alunos sintam que faz parte do seu papel colocar novas questões.	Ao discutir sobre aulas envolvendo tarefas de cunho investigativo, afirma-se que, em uma atividade de Investigação Matemática, é frequente o surgimento de novas questões e importante que os alunos coloquem novas questões.	Na atividade de Investigação Matemática é frequente surgirem novas questões para serem investigadas. (5;29) Na atividade de Investigação Matemática, é papel dos alunos colocar novas questões para investigar. (5;30)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
A capacidade de pensar matematicamente é, pelo menos, tão importante como o domínio de conhecimentos matemáticos específicos. Trata-se de uma capacidade que parece ser claramente estimulada pela realização deste tipo de atividades.	Ao discutir sobre as tarefas de Investigação Matemática e o saber matemático, afirma-se que elas estimulam a capacidade de pensar matematicamente.	A Investigação Matemática estimula o pensar matematicamente. (5;31)
O ponto de partida poderá ser, em muitos casos, uma ou outra questão mais estruturada. Mas, dum modo geral, as tarefas a propor devem permitir ao aluno uma ampla margem de escolhas pessoais, tanto em relação às questões a estudar como no que se refere às estratégias a seguir.	Ao discutir sobre as tarefas de investigação e o saber matemático, afirma-se que elas devem permitir diferentes escolhas, tanto das questões a estudar, quanto das estratégias a seguir.	Na Investigação Matemática, é possível escolher questões para investigar. (5;32) Na Investigação Matemática, é possível escolher estratégias para investigar as questões. (5;33)
"Actividades investigativas" ou "investigações matemáticas" [...]. São atividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos).	Ao elencar elementos para caracterizar o que são as atividades de Investigação Matemática, afirma-se que elas são predominantes nos contextos exclusivamente matemáticos.	O contexto exclusivamente matemático é predominante na Investigação Matemática. (5;34)
Nas actividades de investigação, espera-se que os alunos descubram relações que o professor sabe de antemão [...]. Por vezes os alunos surpreendem o professor, descobrindo relações em que ele ainda não tinha pensado.	Ao discutir sobre aulas envolvendo tarefas de cunho investigativo, afirma-se que é esperado dos alunos o descobrimento de relações que o professor sabe de antemão, além daquelas que ainda não foram pensadas por ele.	Na Investigação Matemática, os alunos podem descobrir relações não pensadas pelo professor. (5;35)
O professor, por outro lado, reconhece e valoriza o trabalho realizado pelo aluno.	Ao discutir o conhecimento profissional do professor em atividades de Investigação Matemática, afirma-se que o professor deve valorizar o trabalho do aluno.	Na Investigação Matemática, o professor valoriza o trabalho do aluno. (5;36)

Fonte: o autor

OBRA 6

Quadro 19: Dados objetivos da obra 6

Título: Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática
Autor: Carlos Alberto dos Santos Braumann
Ano de publicação: 2002
Natureza científica: capítulo de livro
Sinopse: A obra faz uma narrativa de duas experiências com dois problemas matemáticos na intenção de explicitar o que é a atividade de investigação em Matemática. Na primeira experiência narrada, o autor ocupava a condição de aluno do ensino secundário no período de teste do programa curricular da Matemática Moderna e a investigação se deu em torno da problemática das raízes dos números complexos não nulos. A segunda experiência relatada trata-se de uma Investigação Matemática com problemas de crescimento populacional e de pesca. Em ambas, o enfoque é puramente matemático, enfatizando o processo de busca por inferências, assumindo hipóteses, conjecturas, descobertas e experimentação de hipóteses, bem como assumindo suposições que pudessem permitir a prova Matemática.

Fonte: o autor

Quadro 20: Construção das unidades de significado com a obra 6

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Aqui, a "descoberta" fez-se por acaso. Relatarei agora <u>um exemplo de investigação</u> relativamente recente em <u>que funcionou a intuição informada (isto é, baseada numa certa experiência da matéria)</u>, e não tanto o acaso, <u>para conjecturar o resultado a demonstrar.</u> Trata-se de investigação matemática aplicada em problemas de crescimento populacional e de pescas.	Relata-se uma experiência com a atividade de Investigação Matemática aplicada em problemas de crescimento populacional e de pescas, na qual funcionou a intuição para conjecturar o resultado a demonstrar.	A intuição funcionou na atividade de Investigação Matemática. (6;1) Formular conjecturas é um objetivo da Investigação Matemática. (6;2) Demonstrar é um objetivo da Investigação Matemática. (6;3)
<u>O problema que se me pôs é o de saber o que sucederia se o crescimento natural da população não seguisse o modelo logístico</u> mas algum outro modelo mais complexo, desde que biologicamente razoável. Afinal, nós não sabemos qual exactamente o modelo seguido na natureza.	O problema que disparou a investigação matemática consistiu em descobrir o que acontece se o crescimento natural da população não seguir o modelo logístico, mas algum outro modelo mais complexo, desde que biologicamente razoável.	Um problema de crescimento populacional deu origem à investigação. (6;4)
Começámos por afirmar que aprender Matemática passa necessariamente por uma faceta investigativa, que só se pode apreender fazendo	Só se pode aprender Matemática fazendo Investigação Matemática ao nível adequado para cada grau	A aplicação da Matemática não deve ser excluída

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
investigação matemática (ao nível adequado para cada grau de ensino). Dessa investigação não devemos excluir (antes pelo contrário) as aplicações da Matemática (e, particularmente, a modelação Matemática), explorando a sua relação simbiótica com as diversas Ciências. Mas os problemas e projectos de natureza mais puramente matemática (não directamente suscitados pelas aplicações) também são úteis e necessários.	de ensino. Dela, não se deve excluir as aplicações da Matemática, a modelação matemática e a relação simbiótica da Matemática com outras Ciências, ainda que os problemas de natureza puramente matemática sejam úteis e necessários.	da Investigação Matemática. (6;5) A modelação matemática não deve ser excluída da Investigação Matemática. (6;6) Problemas puramente matemáticos são necessários à Investigação Matemática. (6;7)
Uma experiência de uma investigação trivial, mas que me deu particular satisfação, vem do ensino secundário, quando fui (há muitos anos) aluno de uma turma especial ("Matemática Moderna"). Considere-se um complexo $z = x + iy$ (x e y reais). Suponhamos que $z \neq 0$. Então, ele pode ser representado na forma trigonométrica $z = r\text{cis}\,\theta$ (representação unívoca se tomarmos $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$), onde $\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Note-se que cis é uma função periódica de período 2π e que $\text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2) = (\text{cis}\,\theta_1)(\text{cis}\,\theta_2)$. O problema reduzia-se então a demonstrar que $s = \sum_{k=0}^{n-1} w.k.$	Relata-se uma experiência com a Investigação Matemática, em torno do problema das raízes dos números complexos concretos não nulos. Nessa investigação, o problema reduzia-se a demonstrar que $s = \sum_{k=0}^{n-1} w.k.$	O fazer investigativo aponta para uma demonstração. (6;8)
Se imaginarmos esses vectores como forças aplicadas na origem, a sua simetria circular implicaria intuitivamente que a força resultante, a soma vectorial das forças aplicadas, tivesse um efeito nulo. Essa era uma explicação intuitiva do resultado, que reforçava consideravelmente a convicção da sua verdade universal, mas não era uma demonstração.	Uma explicação intuitiva, imaginada para o problema, reforça a sua veracidade universal, mas não era uma demonstração.	O pensamento intuitivo se faz presente na Investigação Matemática. (6;9) A explicação intuitiva reforça a veracidade das conjecturas, mas não as validam. (6;10)
Em Matemática, porém, só se pode dar como certo aquilo que se prova. E o meu objectivo era provar os resultados anteriores quando a taxa de crescimento natural per capita	Em Matemática, só se pode dar como certo aquilo que se prova e, na investigação realizada, o objetivo era a demonstração.	A demonstração como o objetivo da Investigação Matemática. (6;11)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
fosse arbitrária, desde que satisfazendo condições ditadas pela própria Biologia.		

Fonte: o autor

OBRA 7

Quadro 21: Dados objetivos da obra 7

Título: Quatro funções da investigação na aula de Matemática
Autor: E. Paul Goldenberg
Ano de publicação: 1999
Natureza científica: capítulo de livro
Sinopse: A obra traz, em seu conteúdo, reflexões acerca das funções da Investigação Matemática na aula de Matemática, as quais se mostram como exploração, descobrimento e questionamento, originando três tipos de investigações: explorar, descobrir e pôr em questão. Para cada tipo de investigação, são trazidos exemplos e discutidas algumas diferenças entre elas. A discussão do autor tangencia temas como a Matemática, o currículo, a necessidade de investigar nas aulas de Matemática, as exigências curriculares e pedagógicas para o trabalho com a Investigação Matemática, bem como as recompensas desse tipo de trabalho em sala de aula.

Fonte: o autor

Quadro 22: Construção das unidades de significado com a obra 7

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Tanto nas discussões sobre os currículos, como enquanto professor, utilizei a investigação; gostei da investigação; os miúdos gostaram; mas não fiz qualquer pesquisa formal sobre a investigação. <u>Que é que eu realmente sei sobre a investigação na sala de aula?</u> Bem vistas as coisas, muito pouco, mas quando o nosso grupo estava a trabalhar na *Connected geometry*, começámos a ver <u>essencialmente três tipos de investigação – adiante designados por Explorar, Descobrir e Pôr em questão</u>.	Ao se perguntar o que sabe sobre a investigação na sala de aula, o autor afirma que sabe muito pouco, mas, a partir do trabalho do seu grupo, foi possível ver três tipos de investigação, nomeadamente: Explorar, Descobrir e Pôr em questão.	*Explorar, Descobrir* e *Pôr em questão* são tipos de Investigação Matemática. (7;1)
Neste caso, <u>o pedido final para definir uma "regra"</u> constitui a parte crítica que distingue esta investigação da versão do problema dos selos do correio acima proposto. <u>Se se tivesse pedido aos alunos para fazerem uma lista de todas as triplas que</u>	Ao ser apresentado um exemplo de investigação do tipo *descobrir*, afirma-se que neste tipo de investigação a tarefa solicita, para além da exploração da situação, a definição de uma regra.	As investigações do tipo *descobrir* solicitam a definição de uma regra. (7;2)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
fizeram triângulos, mas não se lhes tivesse pedido para generalizar, é possível que de qualquer modo alguns alunos tivessem "descoberto" a generalização, mas o problema (tal como apresentado) não teria ido além da simples exploração, sem conduzir à descoberta.		
As atividades de investigação, pela sua natureza, tendem a ser de certo modo abertas — podem ser prosseguidas a vários níveis de profundidade, e por vezes pode ser difícil distinguir de modo significativo (e rigorosamente) extensões pertinentes, embora com poucos pontos de contacto, de desvios irrelevantes. As actividades de investigação podem pois conduzir os alunos para um território matemático impreparado e pode levá-los a desenvolver processos que não são a norma.	Ao buscar elementos para caracterizar as atividades de Investigação Matemática, afirma-se que elas têm natureza aberta e podem prosseguir a vários níveis de profundidade, conduzindo os alunos a territórios matemáticos não preparados pelo professor.	As atividades de Investigação Matemática tendem a ser de natureza aberta. (7;3) As atividades de Investigação Matemática podem prosseguir a diversos níveis de profundidade. (7;4) As atividades de Investigação Matemática podem conduzir os alunos a territórios matemáticos não preparados pelo professor. (7;5)
Qualquer investigação deve ter certos pressupostos, parâmetros, domínios, hipóteses, inclusive questões fixas. Os alunos devem aprender a não variar tudo o que podem, mas antes a mudar só uma coisa de cada vez, continuando a observar o efeito das mudanças naquilo até compreenderem o efeito, antes de mudar qualquer outra coisa.	As tarefas de Investigação Matemática devem assumir alguns pressupostos, parâmetros, domínios e hipóteses iniciais, de modo que permitam ao aluno fazer variações de elementos particulares, bem como observar os efeitos produzidos.	Na Investigação Matemática os alunos devem aprender a mudar uma coisa de cada vez. (7;6) Na Investigação Matemática os alunos precisam observar efeitos das mudanças efetuadas e dizer o que compreendem. (7;7)
Os professores precisam de ter boas bases matemáticas, para além de sensibilidade pedagógica, para poderem decidir quando é que uma investigação deve prosseguir e quando é que provavelmente será mais frutuoso pôr termo à investigação em curso de modo a permitir passar a outra.	Ao serem discutidas as capacidades do professor em atividades de Investigação Matemática, afirma-se que o professor deve ter boas bases matemáticas e que isso está além da sua sensibilidade pedagógica.	Na Investigação Matemática, o professor precisa ter boa base matemática. (7;8) Na Investigação Matemática, a sensibilidade

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		pedagógica do professor não basta. (7;9)
Consequentemente, se um dos objectivos da educação matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que as pessoas descobrem factos e métodos, deveriam também, durante uma parte significativa do tempo de aprendizagem, dedicar-se a essa mesma actividade: descobrir os factos. Não podemos apresentar factos e pôr os alunos simplesmente a aplicá-los ou a prová-los; assim como não podemos explicar técnicas e fazer com que os alunos se limitem a executá-las. O objectivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação.	Afirma-se que, se o objetivo da Educação Matemática é fazer com que os alunos aprendam como é que se descobrem fatos e métodos, devem dedicar-se a essa atividade de descobrimento. O objetivo propriamente dito é que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz e, para isso, tem que fazer investigação.	Fazer Investigação Matemática permite que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz e a dedicar-se à atividade de descobrimento. (7;10)
As introduções exploratórias deste género parecem constituir uma das maneiras em que a investigação é mais frequentemente utilizada nos currículos modernos – como uma primeira experiência para os alunos [...]. A expectativa não é de que a investigação faça emergir algum facto ou técnica específicos – e talvez nem sequer alguma conjectura. O objectivo é criar um cenário para o trabalho posterior, ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolver um "sentido" do território.	Ao tratar das investigações do tipo *explorar*, afirma-se que elas são utilizadas com frequência como uma primeira experiência com a Investigação Matemática e não se propõem a fazer emergir algum fato, alguma técnica ou conjectura, senão criar um cenário para o trabalho posterior, ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolver um sentido do território.	As investigações do tipo *explorar* têm o objetivo de ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolverem um sentido do território. (7;11)
Outra função corrente da investigação nos currículos é conduzir os alunos à descoberta de uma ideia ou facto matemáticos muito específicos. Nesta função, pode ainda ser utilizada como uma primeira experiência, mas poderá igualmente servir como parte do corpo ou mesmo final de uma sequência de aprendizagem.	Ao discorrer sobre as investigações do tipo *descobrir*, afirma-se que elas têm o objetivo de conduzir a atividade para uma descoberta matemática, podendo servir como uma primeira experiência com este tipo de trabalho e como parte ou produto final de uma sequência didática.	As investigações do tipo *descobrir* têm o objetivo de conduzir a atividade para uma descoberta matemática. (7;12)
Ao contrário da função de Explorar, *Pôr em questão* é bastante focada, mas, ao contrário da Descoberta, não é tanto sobre	*Pôr em questão* se diferencia da ideia de explorar pelo fato de ser uma tarefa bastante focada e se diferencia da ideia	As investigações do tipo *pôr em questão* são focadas na definição, domínio e

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
factos matemáticos particulares como <u>sobre a definição, o domínio, as restrições e aquilo que metaforicamente</u> (ou topologicamente!) <u>se poderia designar por “vizinhança” do facto matemático.</u>	da descoberta por não incidir tanto sobre o fato matemático, mas sobre os resultados e as ideias circunvizinhantes desse fato.	restrições do fato matemático. (7;13)
Temos, assim, <u>uma</u> quarta <u>função da investigação</u> no currículo: <u>ensinar o aluno a investigar</u>. Qualquer um dos três tipos de investigação antes analisados – explorar, descobrir ou pôr em questão – podem ser aqui de alguma ajuda, mas <u>o propósito</u> agora não <u>é</u> apenas o conteúdo matemático, mas <u>também aprender como investigar</u>.	Ao discorrer sobre as funções da Investigação Matemática no currículo, afirma-se que uma das suas funções é ensinar os alunos a investigar.	Uma função da Investigação Matemática é ensinar os alunos a investigar. (7;14)

Fonte: o autor

OBRA 8

Quadro 23: Dados objetivos da obra 8

Título: As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano
Autora: Joana Brocardo
Ano de publicação: 2001
Natureza científica: tese
Sinopse: A obra teve como objetivo analisar a influência de um projeto com a Investigação Matemática na forma como os alunos aprendem e veem a Matemática, bem como os aspectos de caráter curricular emergentes. Nesse projeto, a exploração de tarefas de Investigação Matemática foi encarada como metodologia privilegiada de desenvolvimento do currículo. As reflexões são tecidas dentro de um quadro teórico constituído por três áreas, a saber, o currículo, as Investigações Matemáticas e a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem. O estudo segue a abordagem da pesquisa qualitativa baseada em estudos de caso e discute questões como: quais características assume a atividade de investigação desenvolvida pelos alunos e quais as suas potencialidades relativamente à aprendizagem da Matemática? Como se caracteriza a atividade de investigação desenvolvida pelos alunos? Qual a eventual relação entre as características individuais dos alunos e a evolução relativamente ao modo de explorar as tarefas? Quais as potencialidades dessa experiência de trabalho ao nível da aprendizagem da Matemática? Que relação existe entre as principais características da visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem e a exploração de tarefas de investigação? Quais as características da visão sobre a Matemática e sua aprendizagem dos alunos que participaram no projeto? Em que medida a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem condiciona o modo como exploram as tarefas de investigação? Que aspectos de caráter curricular emergem da implementação do projeto? Que problemas levanta a concretização de uma metodologia de desenvolvimento curricular centrada na exploração de investigações? Que potencialidades se identificam nesta metodologia? Que decisões de caráter curricular se revelam importantes no desenvolvimento do projeto?

Fonte: o autor

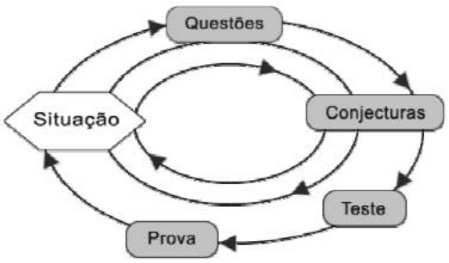
Quadro 24: Construção das unidades de significado com a obra 8

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
A ideia de que aprender Matemática é essencialmente *fazer* Matemática (NCTM, 1991), que tem vindo a reunir grande consenso ao nível da comunidade de educação matemática, destaca a importância de que os alunos tenham oportunidades de explorar tarefas de natureza exploratória e investigativa vivendo, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais.	A ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática destaca a importância de os alunos explorar tarefas de natureza exploratória e investigativa, vivendo, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais.	Na Investigação Matemática, os alunos têm a oportunidade de vivenciar, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais. (8;1)
As investigações foram consideradas como metodologia privilegiada de desenvolvimento curricular, ou seja, a sua exploração foi orientada de forma que a construção de conceitos assim como a aquisição de conhecimentos e técnicas, decorresse da actividade desenvolvida pelos alunos na exploração de tarefas de investigação.	A Investigação Matemática é uma metodologia que privilegia a construção do conceito matemático e a aquisição de conhecimentos e técnicas matemáticas.	A Investigação Matemática privilegia a construção de conceitos matemáticos. (8;2) A Investigação Matemática privilegia a aquisição de conhecimentos e técnicas. (8;3)
Estas recomendações gerais salientam a importância de integrar, nas aulas de Matemática, as investigações uma vez que elas constituem uma parte essencial da actividade matemática: estão directamente relacionadas com a produção de conhecimento matemático e ligadas à natureza dessa ciência.	Ao expor as recomendações do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) para o ensino de Matemática, justifica-se a importância de integrar a Investigação Matemática nas aulas de Matemática por que ela está diretamente relacionada com a produção de conhecimento matemático e ligada à natureza da Matemática.	A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a produção de conhecimento matemático. (8;4) A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a natureza da Matemática. (8;5)
Ao procurar clarificar o que é uma investigação matemática pode-se partir, essencialmente, de quatro ideias iniciais diferentes. Assim, pode-se considerar que as investigações são parte daquilo que vários autores referem como *actividade matemática*.	Ao buscar esclarecer o que é uma Investigação Matemática, afirma-se que ela é parte da atividade matemática.	A Investigação Matemática é parte da atividade matemática. (8;6)
Também se podem comparar as características das investigações com as	Ao buscar esclarecer o que é uma Investigação Matemática, afirma-se que ela pode ser comparada	A Investigação Matemática pode ser comparada com a Resolução

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
de outras actividades como a resolução e formulação de problemas.	com a atividade de Resolução de Problemas.	de Problemas. (8;7)
Uma outra possibilidade consiste em procurar caracterizar o que é uma investigação a partir dos processos matemáticos que nela estão envolvidos e nas suas relações.	Ao buscar esclarecer o que é uma Investigação Matemática, afirma-se que ela pode ser caracterizada a partir dos processos matemáticos e das relações entre eles.	A Investigação Matemática pode ser caracterizada a partir dos processos matemáticos e das relações entre eles. (8;8)
Embora uma investigação se possa iniciar a partir de uma questão ou situação matemática, o objecto da inquirição é alterado por quem conduz a investigação ao formular novas questões que exigem análise e exploração.	Ao discutir sobre investigações e problemas, afirma-se que, em uma Investigação Matemática, o objeto de inquirição é alterado ao serem formuladas novas questões para investigar.	Na Investigação Matemática, o objeto de inquirição é alterado com a formulação de novas questões. (8;9)
Há características que permitem precisar o que se entende por uma investigação matemática. Em primeiro lugar, um aspecto que partilham com a formulação de problemas, mas que as distingue de um problema, tem a ver com a formulação de questões. Na resolução de problemas as questões estão formuladas à partida, enquanto nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver.	Ao discutir sobre investigações e problemas, afirma-se que a formulação de questões para investigar é uma característica que permite precisar a Investigação Matemática e diferenciá-la da Resolução de Problemas.	A formulação de questões para investigar é uma característica da Investigação Matemática. (8;10) A formulação de questões para investigar permite diferenciar a Investigação Matemática da Resolução de Problemas. (8;11)
Uma outra diferença entre problemas e investigações assenta numa distinção relativamente ao seus objectivos. Num problema, procura-se atingir um ponto não imediatamente acessível, ao passo que numa investigação o objectivo é a própria exploração.	Ao discutir sobre investigações e problemas, afirma-se que, na Investigação Matemática, o objetivo é a exploração da situação.	Na Investigação Matemática, o objetivo é a exploração da situação. (8;12)
Numa abordagem de resolução de problemas, cabe ao professor colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar uma forma, um caminho que lhe permita chegar à solução. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor pode escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno,	Ao discutir sobre investigações e problemas, afirma-se que, na abordagem pedagógica com a Investigação Matemática, o aluno	Na Investigação Matemática, a formulação de questões para investigar cabe ao aluno. (8;13)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
mas é a este que cabe a formulação de questões, definindo assim os seus próprios problemas dentro da situação proposta.	formula questões para serem investigadas.	
Esta definição de investigação está de acordo com a sugerida por Ernest (1996) relativamente a duas características: tratar-se de um actividade divergente e tratar-se de uma situação em que a decisão sobre o método de exploração é da responsabilidade do aluno.	Ao trazer características da Investigação Matemática para diferenciá-la da Resolução de Problemas, afirma-se, em conformidade com outro autor, que ela é uma atividade divergente e o método de exploração é definido pelo aluno.	A Investigação Matemática é uma atividade divergente se comparada à Resolução de Problemas. (8;14) Na Investigação Matemática, o aluno define o método de exploração. (8;15)
Este autor considera haver uma grande proximidade entre as investigações e os problemas *open-ended* pois, para além de serem agrupados na mesma categoria, não figuram em mais nenhuma. Assim, Pehkonen considera que estas situações problemáticas podem ser caracterizadas por: situação de partida fechada e objectivo da situação aberto.	Para Pehkonen, há grande proximidade entre investigações e os problemas *open-ended,* as quais são situações que podem ser caracterizadas pela situação de partida fechada e objetivo aberto.	Há uma concepção de que a Investigação Matemática é próxima dos problemas com objetivo aberto (*open-ended*). (8;16)
Pirie (1987), ao procurar clarificar o que entende por uma investigação, salienta que ela constitui uma situação aberta cuja exploração não tem como objectivo chegar à resposta certa.	Ao buscar reunir características da Investigação Matemática, afirma-se que uma Investigação Matemática consiste em uma situação aberta que não requer respostas certas.	A Investigação Matemática é uma situação aberta. (8;17) As tarefas de Investigação Matemática não têm como objetivo chegar a uma resposta certa. (8;18)
Assim, uma investigação é uma actividade que envolve três processos: exploração de possibilidades, formulação de conjecturas e procura de argumentos que validem as descobertas realizadas.	Ao buscar reunir características da Investigação Matemática, afirma-se que ela é uma atividade que envolve a exploração de possibilidades, a formulação de conjecturas e a validade das descobertas realizadas.	A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a exploração de possibilidades. (8;19) A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		formulação de conjecturas. (8;20) A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a validação das conjecturas. (8;21)
Assim, uma vez que numa investigação matemática a situação inicialmente proposta é caracterizada por enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados, é necessária, em primeiro lugar, a explicitação da questão ou situação. O foco da investigação começa a ser clarificado a partir da idealização e realização de experiências iniciais.	Ao buscar reunir características da Investigação Matemática afirma-se que, nela, a situação inicial tem objetivos pouco precisos e pouco estruturados.	A proposta inicial de uma Investigação Matemática tem objetivos pouco precisos e estruturados. (8;22)
É importante começar a formular e testar as primeiras conjecturas. Este processo pode conduzir à recolha de mais dados, ao abandono de conjecturas e à formulação de novas conjecturas. Torna-se então pertinente procurar estabelecer argumentos ou provas que possam validar ou rejeitar as conjecturas resultantes do processo anterior. Finalmente, uma outra característica deste processo resulta de ele poder gerar novas questões a investigar.	Ao buscar reunir características da Investigação Matemática, afirma-se que é importante iniciar com a (re)formulação, teste e abandono de conjeturas, avançando para a recolha de novos dados, para o estabelecimento de provas e o levantamento de novas questões.	A Investigação Matemática inicia com a formulação de questões para serem investigadas. (8;23) A Investigação Matemática requer a formulação e testes de conjecturas. (8;24) Na Investigação Matemática é pertinente estabelecer argumentos e provas para validar as conjecturas. (8;25) A Investigação Matemática pode gerar novas questões para investigar. (8;26)
Para além de se indicarem sumariamente os processos matemáticos envolvidos numa actividade de investigação, salienta-se aquilo que designo por não linearidade.	A não linearidade é uma característica importante	A não linearidade da atividade é uma característica importante da

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Este aspecto constitui uma importante característica da actividade de investigação.	da atividade de Investigação Matemática.	Investigação Matemática. (8;27)
Deste modo, uma actividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos nela envolvidos, mas, também, pela interacção entre eles.	Uma característica da atividade de Investigação Matemática é dada pelos processos matemáticos nela envolvidos.	A atividade de Investigação Matemática é caracterizada pelos processos matemáticos. (8;28)
 Figura 3 - A actividade de investigação	O processo envolvido em uma atividade de Investigação Matemática envolve uma situação inicial, questões, conjecturas, teste e prova.	A Investigação Matemática envolve conjecturas. (8;29) A Investigação Matemática envolve testes de conjecturas. (8;30) A Investigação Matemática envolve a prova de conjecturas. (8;31)
Quando se procura definir determinado conceito complexo pode ajudar começar por pensar em exemplos concretos ou naquilo que ele não é. [...] Pirie (1987) [...] refere que uma investigação não é: uma tarefa em que há uma solução única e em que o caminho que leva à solução é prescrito; um exercício com a clara intenção de praticar repetitivamente uma técnica matemática.	Uma Investigação Matemática não é uma tarefa que tem solução única, com a prescrição metodológica do processo de resolução e com a intenção de repetir técnicas matemáticas.	A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem solução única. (8;32) A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem a prescrição metodológica do processo de resolução. (8;33) A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem a intenção de repetir técnicas matemáticas. (8;34)
		No discurso oficial, a Investigação Matemática é a

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Relativamente ao modo como são vistas as investigações no discurso oficial, considera que são claras as seguintes características: constituem um exemplo do que é a essência da matemática; estão principalmente relacionadas com os padrões, as relações e a generalização.	No discurso oficial, as características das Investigações Matemáticas são: atividade essencial da Ciência Matemática, atividade relacionada com os padrões, as relações e as generalizações.	essência da Matemática. (8;35) No discurso oficial, a Investigação Matemática está relacionada com os padrões. (8;36) No discurso oficial, a Investigação Matemática está relacionada com as generalizações. (8;37)
Finalmente, no discurso profissional, as investigações são consideradas como constituindo a *verdadeira* matemática e salientada a sua natureza *aberta*.	No discurso profissional, a Investigação Matemática constitui a verdadeira Matemática e tem natureza aberta.	No discurso profissional, a Investigação Matemática constitui a verdadeira Matemática. (8;38) No discurso profissional, a Investigação Matemática tem natureza aberta. (8;39)
De uma forma geral, em todas estas abordagens iniciais o conceito de investigação se refere o processo – nelas é mais importante o processo do que o conteúdo –, a abertura – admitem várias possibilidades de exploração –, a criatividade e o facto de constituírem exemplos do que é a *verdadeira* Matemática.	Em diferentes abordagens que buscam esclarecer o que é uma atividade de investigação, o conceito de Investigação Matemática se refere ao processo empreendido e à abertura.	A Investigação Matemática é um processo aberto e criativo exemplificando a verdadeira Matemática. (8;40) Diferentes abordagens consideram a Investigação Matemática um exemplo da verdadeira Matemática. (8;41)
Podemos também encontrar consensos relativamente a alguns processos matemáticos envolvidos numa actividade de investigação. Assim, de uma forma mais ou menos explícita todos consideram	É consenso entre alguns autores que os processos envolvidos em uma atividade de Investigação Matemática seguem a	O processo de uma atividade de Investigação Matemática segue a sequência

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
a sequência conjectura – generalização – prova/demonstração/convencer.	sequência conjectura, generalização, demonstração.	conjectura, generalização, demonstração. (8;42)
Mas, de uma forma geral, consiste em seguir um processo indutivo que começa na análise de exemplos particulares e que permite começar a identificar padrões.	De uma forma geral, a Investigação Matemática segue um processo indutivo, iniciando com exemplos particulares que permitam identificar padrões.	A atividade de Investigação Matemática segue um processo indutivo. (8;43) O processo indutivo que a atividade de Investigação Matemática segue, inicia com casos particulares. (8;44) O processo indutivo que a atividade de Investigação Matemática segue, permite identificar padrões. (8;45)
No ponto seguinte opto por olhar, em particular, para a conjectura e para a demonstração. Assim, considero que estes dois processos são de tal forma importantes tanto *per si,* como nas actividades de investigação.	Ao buscar caracterizações para a atividade de Investigação Matemática, afirma-se que os processos de conjecturar e demonstrar são importantes.	A conjectura é importante na Investigação Matemática. (8;46) A demonstração é importante na Investigação Matemática. (8;47)
Uma tarefa mais estruturada, pode ser mais adequada para alunos que começam a ter as suas primeiras experiências de investigação, sem que isso signifique uma menor qualidade da tarefa como proposta de actividade de investigação.	Ao buscar caracterizações para a atividade de Investigação Matemática, afirma-se que as tarefas mais estruturadas não desqualificam a proposta de Investigação Matemática.	A Investigação Matemática não é descaracterizada se, nas primeiras experiências, envolver tarefas mais estruturadas. (8;48)
Holding (1991) considera que todas as investigações derivam de uma situação inicial a que chama ponto de partida. Este deve ter as seguintes características: ser compreensível, ser desafiador, conter algum bloqueio, ou seja, não ser visível uma solução imediata e implicar alguma	Ao buscar caracterizações para a atividade de Investigação Matemática, apresenta-se a ideia de Holding que, por sua vez, considera a análise de casos particulares como	A análise de casos particulares pode ser um bom ponto de partida para a Investigação Matemática. (8;49)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
discriminação entre possíveis acções. Uma boa sugestão para o ponto de partida, consiste em concebê-lo como a análise de um caso particular.	um bom ponto de partida para a Investigação Matemática.	
Finalmente, Porfírio e Oliveira (1999) consideram que é importante que o enunciado de uma tarefa de investigação dê indicações de que os alunos devem descobrir argumentos para validar as suas conjecturas. De facto, uma vez que a prova constitui parte integrante do processo investigativo e que os alunos tendem a considerar como *conclusão* uma conjectura que resiste a alguns testes, o enunciado deverá vincar a necessidade da prova.	É importante que a validação das conjecturas seja sugerida no enunciado das tarefas de Investigação Matemática, enquanto parte integrante do processo investigativo.	Na Investigação Matemática, os alunos devem descobrir argumentos para validarem suas conjecturas. (8;50) É importante que o enunciado das tarefas de Investigação Matemática indique a necessidade de se validar as conjecturas. (8;51) A prova de conjecturas faz parte da Investigação Matemática. (8;52) A necessidade de provar as conjecturas deve estar vinculada ao enunciado das tarefas de Investigação Matemática. (8;53)
Ernest (1996) considera que uma das formas de entender a resolução de problemas e as investigações é a de as considerar como abordagens pedagógicas à Matemática. Caracteriza a abordagem a que chama investigativa recorrendo a uma comparação com outras, focada nos papéis do professor e dos alunos e que resume na tabela	Comparativamente a outras abordagens, na Investigação Matemática a escolha da situação de partida pode ser feita pelo professor ou pelo aluno. Também, na Investigação Matemática a definição dos problemas a investigar e a escolha do método de investigação são livres.	A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha da situação de partida. (8;54) A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha dos problemas a investigar. (8;55)

<table>
<tr><th>Excertos do texto</th><th>Asserções articuladas</th><th>Unidades de significado</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>Método</th><th>Papel do professor</th><th>Papel do aluno</th></tr><tr><td>Descoberta guiada</td><td>Formula o problema ou escolhe a situação com o objectivo em mente.
Conduz o aluno para a solução ou objectivo.</td><td>Segue a orientação.</td></tr><tr><td>Resolução de problemas</td><td>Formula o problema.
Deixa o método de solução em aberto.</td><td>Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.</td></tr><tr><td>Abordagem investigativa</td><td>Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno)</td><td>Define os seu próprios problemas dentro da situação.
Tenta resolver pelo seu próprio caminho.</td></tr></table></td><td></td><td>A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha do método. (8;56)</td></tr>
<tr><td>De uma forma geral o trabalho investigativo envolve três fases: introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final.</td><td>O trabalho investigativo envolve a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final.</td><td>O trabalho investigativo envolve introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final. (8;57)</td></tr>
<tr><td>Constrói um triângulo rectângulo [ABC]. Sobre cada cateto e sobre a hipotenusa constrói quadrados e calcula a área de cada um deles. Arrasta um dos vértices do triângulo. Que conjectura poderás fazer? Explica porque é que pensas que esta conjectura é sempre válida.</td><td>É apresentado um exemplo de Investigação Matemática em que a conjectura e a explicação da sua validade estão presentes no enunciado da tarefa.</td><td>A tarefa de Investigação Matemática vincula ao seu enunciado a necessidade de elaborar e validar conjecturas. (8;58)</td></tr>
</table>

Fonte: o autor

OBRA 9

Quadro 25: Dados objetivos da obra 9

Título: Avaliações de investigações matemáticas: uma experiência
Autor: José Manuel Varandas
Ano de publicação: 2000
Natureza científica: dissertação
Sinopse: A obra trata do processo de avaliação na realização de Investigações Matemáticas na sala de aula, buscando compreender o modo como os professores, com experiência na realização desse tipo de atividade, encaram a sua integração em um sistema coerente de avaliação formativa e somativa, o modo como valorizam e utilizam diferentes instrumentos e metodologias de avaliação e a reação dos alunos a esses diferentes instrumentos avaliativos. Para isso, foram propostas práticas de ensino pautadas na Investigação Matemática em duas turmas do 10º ano do ensino secundário português, as quais foram avaliadas por meio de quatro modos distintos de trabalho e um instrumento comum. Cada tarefa proposta foi avaliada de acordo com apenas uma das combinações de trabalho e avaliação, a saber, trabalho em grupo e relatório em grupo, trabalho em grupo e relatório individual, trabalho em grupo e apresentação oral e trabalho individual e relatório individual, em tempo limitado. Na parte teórica, o trabalho aborda discussões a partir das diferentes concepções e instrumentos avaliativos, da avaliação de tarefas de investigação e da avaliação de relatórios. Também, discute as atitudes e concepções dos alunos com vistas à Matemática e ao seu ensino, bem como o conhecimento profissional e o conhecimento didático do professor no tocante à Matemática, à aprendizagem, à aula de Investigação Matemática, ao currículo e aos processos instrucionais.

Fonte: o autor

Quadro 26: Construção das unidades de significado com a obra 9

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Ainda como forma de contribuir para o desenvolvimento do referido pensamento, o capítulo das orientações metodológicas indica a necessidade do professor propor actividades que levem o aluno a "intuir, conjecturar, experimentar e provar" (p.8), aspectos diretamente relacionados com o trabalho investigativo.	Intuir, conjecturar, experimentar e provar são aspectos diretamente relacionados com o trabalho investigativo.	O trabalho investigativo se relaciona diretamente com as conjecturas e a demonstração. (9;1) O trabalho investigativo se relaciona diretamente com a intuição. (9;2) O trabalho investigativo se relaciona diretamente com a experimentação. (9;3)
A aula de investigação englobando, segundo Cristiansen e Walther (1986), três momentos – apresentação da tarefa, a actividade dos alunos e a discussão — é outro aspecto ligado à instrução que o professor tem de dar resposta como forma de criar um bom ambiente de trabalho e uma cultura da sala de aula que aproxime o trabalho dos alunos ao trabalho dos matemáticos.	Com aporte em Cristiansen e Walther, afirma-se que a aula de Investigação Matemática engloba três momentos: a apresentação da tarefa, a atividade dos alunos e a discussão.	A aula de Investigação Matemática engloba os momentos de apresentação da tarefa, a atividade dos alunos e a discussão. (9;4)
A valorização dos modos de avaliação pelos alunos foi fortemente influenciada pelas suas concepções acerca da Matemática, e pelo que, no seu entender, os professores valorizam em termos de avaliação. Assim, considerando que na Matemática o mais importante não é encontrar a "resposta certa" e que nas investigações podem chegar a conclusões diversificadas, consideram o trabalho de grupo como forma privilegiada para a actividade investigativa.	Nas investigações, os alunos podem chegar a conclusões diversificadas.	Na Investigação Matemática, as conclusões podem ser diversificadas. (9;5)
A questão central prendeu-se com o grau de estruturação das questões a propor. Foi ponderado o facto de que uma tarefa mais estruturada poderia limitar a actividade de investigação dos alunos mas, em contrapartida, permitir-lhes uma maior autonomia, principalmente aos menos habituados a desenvolver trabalho de cunho investigativo. Perante várias formulações possíveis, optou-se por	A partir de um trabalho prático com a Investigação Matemática, afirma-se que tarefas mais estruturadas permitem maior autonomia a alunos menos habituados com o trabalho investigativo.	Tarefas mais estruturadas permitem maior autonomia para os alunos menos habituados com a Investigação Matemática. (9;6)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
uma que se pode classificar de "semiestruturada".		
No caso do currículo de Matemática português "encontram-se algumas referências directas ou indirectas a tarefas de natureza investigativa e/ou a desempenhos típicos dos alunos neste tipo de tarefas" (p. 24). Concretamente, no programa de Matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 1997) encontram-se várias referências. É referida a necessidade do aluno "validar conjecturas" (p. 4) como forma de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico.	O currículo português faz algumas referências a tarefas de natureza investigativa, dentre elas, a necessidade de o aluno validar as conjecturas, como forma de desenvolver o raciocínio e pensamento científico.	A necessidade de validar as conjecturas é uma referência do currículo português ao trabalho com a Investigação Matemática. (9;7) O currículo português refere-se à validação das conjecturas como forma de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico. (9;8)
Para uma integração com sucesso de tarefas investigativas na sala de aula é necessário que o professor estabeleça "uma boa relação com este tipo de trabalho matemático — o que significa compreender o que é uma actividade de investigação, apreciar o seu valor enquanto experiência matemática".	Compreender o que é uma atividade de investigação significa relacioná-la a um tipo de trabalho matemático e apreciar o seu valor enquanto experiência Matemática.	A atividade de Investigação Matemática tem seu valor enquanto experiência Matemática. (9;9)
Dado que as atitudes são maleáveis ou seja "sujeitas a transformação por via da informação ou da experiência do indivíduo" [...], o papel do professor é determinante para a mudança ou para a consolidação das atitudes dos alunos. Na verdade, implicitamente, ele fornece informação e estrutura experiências que constituem a base das concepções dos alunos acerca da Matemática.	As atitudes dos alunos transformam-se por via da informação ou da experiência, a qual é determinada e estruturada pelo professor e constitui a base das concepcções dos alunos acerca da Matemática.	Na Investigação Matemática, as atitudes dos alunos transformam-se por via da informação ou da experiência. (9;10) As atitudes do professor como determinantes das atitudes dos alunos. (9;11)
A realização de tarefas de investigação e exploração pelos alunos constitui uma experiência matemática fundamental para que eles possam atingir alguns dos objectivos mais importantes do ensino dessa disciplina.	A realização de tarefas de investigação e exploração pelos alunos constitui uma experiência matemática fundamental.	A realização de Investigações Matemáticas constitui uma experiência matemática fundamental. (9;12)
Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira e Oliveira (1999) indicam que a presença da perspectiva investigativa assume nos currículos de Matemática de Inglaterra, França, Portugal e	A perspectiva investigativa está presente nos currículos de Matemática da Inglaterra, da França, de	A Investigação Matemática assume forte presença nos currículos de Matemática da Inglaterra, da França, de

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
também nos documentos programáticos norte-americanos “uma forte presença”.	Portugal e nos documentos programáticos norte-americano.	Portugal e nos documentos programáticos norte-americano. (9;13)

Fonte: o autor

OBRA 10

Quadro 27: Dados objetivos da obra 10

Título: A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas
Autores: João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; José Manuel Varandas; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira
Ano de publicação: 1999
Natureza científica: livro
Sinopse: A obra é proveniente do trabalho realizado no projeto[42] *Matemática para todos – investigações na sala de aula*. De natureza empírica, o trabalho traz discussões centradas no raciocínio matemático e didático dos alunos e do professor, no papel dos alunos e do professor e na interação professor-aluno com uma tarefa proposta a alunos portugueses do 7º e 9º ano de escolaridade. Anterior à apresentação e à discussão dos episódios de aula, os autores discutem teoricamente a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas como atividades matemáticas, a presença das tarefas de Investigação Matemática no currículo e trazem um panorama de outras pesquisas já realizadas nesses domínios.

Fonte: o autor

Quadro 28: Construção das unidades de significado com a obra 10

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
Portanto, de acordo com Ernest, e tal como surge no quadro 1, a abordagem investigativa acrescenta à resolução de problemas a dimensão de formulação do problema. A partir de uma situação proposta pelo professor ou pelo aluno, este define os seus objectivos, coloca as suas questões e explora caminhos possíveis para atingir esses objectivos.	A abordagem investigativa acrescenta à Resolução de Problemas a formulação do problema, e que é o aluno que define os objetivos, as questões a serem investigadas e explora os caminhos para atingi-los.	Na Investigação Matemática, é necessário formular problemas para investigar. (10;1) A formulação de problemas para investigar diferencia a Investigação Matemática da Resolução de Problemas. (10;2) Na Investigação Matemática, o aluno define os objetivos. (10;3) Na Investigação Matemática, o aluno

[42] Idem nota 39.

<table>
<tr><th>Excertos do texto</th><th>Asserções articuladas</th><th>Unidades de significado</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>define as questões a serem investigadas. (10;4)</td></tr>
<tr><td>É também bem conhecida uma metáfora geográfica utilizada para descrever as investigações e que tem origem num provérbio chinês “a estrada é o objectivo” (Christiansen & Walther, 1986). Pirie (1987), refere que neste tipo de actividade, “o objectivo é a jornada, não o destino” (p. 2), ou ainda, como esclarece Ernest “a ênfase é colocada na exploração de uma terra desconhecida” (1991, p. 285). Consequentemente, a divergência é uma característica marcante dessa atividade.</td><td>Utilizando-se de metáforas referenciadas por Christiansen e Walther, Pirie e Ernest, afirma-se que a divergência é uma característica marcante da atividade de Investigação Matemática.</td><td>A Investigação Matemática tem a divergência da atividade como característica marcante. (10;5)</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>situação-objectivo
situação de partida</td><td>FECHADA</td><td>ABERTA</td></tr>
<tr><td>FECHADA</td><td>problemas fechados</td><td>open-ended problems
situações da vida real
investigações
problem fields
variações do problema</td></tr>
<tr><td>ABERTA</td><td>situações da vida real
variações do problema</td><td>situações da vida real
variações do problema
projectos
formulação de problemas</td></tr>
</table>
A análise deste quadro revela a proximidade entre os open-ended problems, as investigações e os problem fields, pois além de estarem agrupados na mesma categoria são os únicos que não são comuns a nenhuma outra.</td><td>Há proximidade entre os open-ended problems, as investigações e os problem fields.</td><td>Há uma aproximação entre a Investigação Matemática e os open-ended problems. (10;6)

Há uma aproximação entre a Investigação Matemática e os problem fields. (10;7)</td></tr>
<tr><td>Silver (1993/96) é um dos autores que tal como Ernest (1991), defende que a formulação de problemas é um aspecto indissociável do ensino de cunho investigativo. Das diferentes perspectivas que apresenta para evidenciar a relevância e o papel da formulação de problemas no ensino, observam-se, de facto, muitos pontos de contacto com as actividades de investigação.</td><td>Com referência a Silver e a Ernest, afirma-se que a formulação dos problemas a investigar é um aspecto indissociável do ensino de cunho investigativo.</td><td>A formulação de problemas é indissociável do ensino de cunho investigativo. (10;8)</td></tr>
<tr><td>Grupo D - O raciocínio didáctico do professor na condução dos alunos na realização de uma investigação. Este grupo de categorias respeita às decisões e acções do professor dentro de cada uma das fases típicas da realização de uma atividade de investigação (introdução/trabalho independente dos alunos/discussão).</td><td>Ao ser analisada uma situação de ensino com a Investigação Matemática, afirma-se que, nela, a atividade dos alunos foi conduzida pelo professor e tipicamente realizada</td><td>Introdução, trabalho independente dos alunos e discussão, são fases típicas da atividade de Investigação Matemática. (10;9)

O raciocínio didático do professor conduz os</td></tr>
</table>

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
	nas seguintes fases: introdução, trabalho independente dos alunos e discussão.	alunos na realização de uma investigação. (10;10)
No caso das investigações, é redutor identificá-las simplesmente com a tarefa que dá origem à actividade uma vez que a ideia mais fundamental é que a investigação esteja centrada no aluno. Este no decorrer da atividade irá (re)colocar questões que o encaminharão em direcções inusitadas: "o objeto de *inquiry* muda e é redefinido por aquele que a conduz".	Na atividade de Investigação Matemática, o aluno coloca questões que o encaminharão em direções inusitadas, ou seja, o objeto de inquirição muda por quem conduz a investigação.	Na atividade de Investigação Matemática, o aluno coloca questões. (10;11) Na atividade de Investigação Matemática, o objeto de inquirição muda por quem a conduz. (10;12)
Procurando caracterizar os processos matemáticos envolvidos nas atividades de investigação, observa-se que estes possuem uma forte componente de indução. No entanto, o contexto da justificação e da prova também têm um lugar importante, e que pode ser expresso na ideia de convencer-se a si próprio e os outros da veracidade de uma conjectura. Todos estes se relacionam, porém, com diversos processos matemáticos que são utilizados nas investigações: procurar regularidades, interpolar, extrapolar, conjecturar, testar, generalizar e provar.	Os processos envolvidos nas atividades de Investigação Matemática são fortemente indutivos, com lugar importante para a justificação e a prova de conjecturas. Esses processos se relacionam com a procura de regularidades, as conjecturas, os testes, a generalização e a prova de conjecturas.	Os processos envolvidos na Investigação Matemática são fortemente indutivos. (10;13) A justificação e a prova de conjecturas têm um lugar importante na Investigação Matemática. (10;14) Os processos envolvidos na Investigação Matemática se relacionam com a procura de regularidades. (10;15) Os processos envolvidos na Investigação Matemática se relacionam com a procura, testes, generalização e demonstração de conjecturas. (10;16)
Assim, dentro de uma classe vasta que denomina "problemas", distingue duas actividades: resolver e investigar. A primeira, classicamente associada à ideia de problema, é uma actividade convergente, em que o objectivo é	Ao ser tratado da resolução de problemas e das investigações, afirma-se que dentro de uma classe vasta	A atividade de investigação de problemas é divergente. (10;17)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
previamente definido e que envolve a busca de um método de resolução. A segunda, identificada como investigar, é, por sua vez, uma atividade divergente.	de problemas, a atividade de investigar é divergente.	
A investigação realizada sobre a realização de trabalho investigativo em Matemática é relativamente escassa. Esta investigação sugere que os alunos, ao fim de algum tempo de trabalho em tarefas de investigação, são capazes de compreender a essência desse processo, produzindo as suas conjecturas, testando-as, e apresentando justificações.	Como resultado de um trabalho empírico com a Investigação Matemática, conclui-se que a atividade investigativa envolve um processo essencialmente amparado em conjecturas, testes e justificações.	O processo de investigação, na Investigação Matemática, é essencialmente amparado em conjecturas, testes e justificações. (10;18)
Ao professor cabe também dar sugestões que orientam os alunos na sua actividade. No Episódio 1 (segmento 3), a professora termina um momento de exploração conjunta com os alunos, sugerindo-lhes que tentem representar a conjectura obtida através de um esquema. De modo semelhante, no Episódio 2, a professora depois de ter conseguido que os alunos se apercebessem que a sua conjectura não era válida, continua a apoiá-los na investigação dando indicações explícitas sobre a necessidade de gerarem um maior número de dados (linha 18). No Episódio 3 (linha 39) a professora sugere uma abordagem geométrica. No final do segundo segmento do mesmo episódio (linhas 66-72), a professora faz a síntese da conjectura formulada e refere possíveis investigações que os alunos poderiam ainda efectuar.	A partir de alguns episódios de aula, sugere-se que, na Investigação Matemática, cabe ao professor dar sugestões que orientam os alunos na sua atividade.	Na Investigação Matemática, o professor orienta a atividade dos alunos. (10;19)
O raciocínio matemático do professor neste tipo de trabalho estrutura-se pelos mesmos itens que o raciocínio dos alunos (questionar, conjecturar, testar e validar). O que está em causa é a realização de uma tarefa de investigação e estes aspectos estão sempre necessariamente presentes.	Os aspectos do raciocínio matemático que estão necessariamente presentes na realização de uma atividade de Investigação Matemática são: questionar, conjecturar, testar e validar.	Questionar, conjecturar, testar e validar estão necessariamente presentes na Investigação Matemática. (10;20)

Fonte: o autor

OBRA 11

Quadro 29: Dados objetivos da obra 11

Título: Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas
Autores: João Pedro da Ponte; Catarina Ferreira; Lina Brunheira; Hélia Margarida Oliveira; José Manuel Varandas
Ano de publicação: 1999
Natureza científica: capítulo de livro
Sinopse: Embora inicie com uma síntese teórica acerca das Investigações Matemáticas, em sua completude, a obra tem caráter empírico. Discute questões que se levantam quando se apresentam aos alunos tarefas de cunho investigativo, interessando-se especialmente na dinâmica da sala de aula e no papel do professor. A narrativa é de uma tarefa desenvolvida com alunos portugueses do 7º e 9º ano, como ação do projeto[43] *Matemática para todos: um projecto colaborativo*. As reflexões efetuadas incidem sobre os processos de formulação de questões e conjecturas, testes, validação (prova) de conjecturas e exploração da tarefa. Por fim, trazem algumas implicações desse tipo de trabalho sobre o aluno, o professor e o currículo.

Fonte: o autor

Quadro 30: Construção das unidades de significado com a obra 11

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
As novas perspectivas da filosofia da Matemática dão ênfase à atividade matemática e chamam a atenção para os processos investigativos envolvidos na criação do conhecimento matemático [...]. No entanto, a ideia não é nova. Ela está na base da proposta de Pólya de fazer da resolução de problemas um elemento essencial da experiência matemática dos alunos.	Os processos investigativos envolvidos na criação do conhecimento matemático estão na base da proposta de Polya de fazer da Resolução de Problemas um elemento essencial da experiência matemática dos alunos.	Os processos investigativos envolvidos na criação do conhecimento matemático estão na base da proposta de Polya. (11;1)
Actualmente, há um consenso geral entre os educadores de que aprender Matemática envolve, de uma maneira fundamental, fazer Matemática. E fazer Matemática é, primeiro que tudo, fazer investigações matemáticas.	É consenso entre os educadores que aprender Matemática envolve fazer Matemática que, por sua vez, é fazer Investigação Matemática.	Fazer Matemática é fazer Investigação Matemática. (11;2)
É necessário começar por colocar questões interessantes e produtivas. Depois, é essencial correr o risco de	Uma Investigação Matemática começa com o colocar questões, avançando com a formulação de conjecturas, o teste e a	A Investigação Matemática começa com o colocar questões. (11;3)

[43] "Este projecto pretende estabelecer uma forte ligação entre a investigação e a prática da sala de aula. A sua equipa (sic) inclui 11 formadores de professores e investigadores de universidades e de escolas superiores de educação e 9 professores do 2º e 3º ciclos do ensino básico e do ensino secundário. Organizaram-se três grupos principais que se dedicam a tópicos matemáticos específicos (funções, geometria, e números e regularidades), pois pretendemos dar bastante atenção ao currículo existente e assegurar a adequação das tarefas para a sala de aula" (PONTE et al., 1999, p. 3).

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
formular conjecturas. O teste e a recolha de mais dados podem fortalecer essas conjecturas ou conduzir à elaboração de outras. Argumentos plausíveis e provas formais podem fornecer argumentos adicionais para confirmar ou rejeitar as nossas conjecturas. Ao longo deste processo, podem também emergir novas questões para investigar.	recolha dos dados, a argumentação e a prova formal.	Na Investigação Matemática, é essencial formular conjecturas. (11;4) A Investigação Matemática requer testes de conjecturas. (11;5) A Investigação Matemática requer a recolha de dados. (11;6) A Investigação Matemática requer a argumentação e a prova formal de conjecturas. (11;7)
As investigações matemáticas são também importantes do ponto de vista educacional. Na nossa perspectiva (Oliveira et al., 1997), elas: [...] fornecem vários pontos de partida para alunos com diferentes níveis de capacidade.	As Investigações Matemáticas fornecem vários pontos de partida para alunos com diferentes níveis de capacidade.	A Investigação Matemática fornece vários pontos de partida. (11;8)
Contudo, é essencial partilhar significados, promover a utilização de uma linguagem Matemática mais correcta, compreender a importância das demonstrações — em suma, avançar para a formalização.	Ao discorrer sobre a atividade de Investigação Matemática em sala de aula, afirma-se que é essencial compreender a importância das demonstrações e avançar para a formalização.	As demonstrações são importantes na Investigação Matemática. (11;9) Avançar para a formalização é importante na Investigação Matemática. (11;10)
As investigações matemáticas aproximam o aluno da actividade do investigador matemático. Elas têm duas características distintivas: (a) o interesse reside mais nas ideias matemáticas e nas suas relações do que na sua relação com o contexto e (b) o aluno tem um papel determinante na definição das questões a investigar, assim como na	A Investigação Matemática é caracterizada pela definição de questões a investigar, de estratégias de investigação e de validação dos resultados. Seu interesse reside mais nas ideias matemáticas e nas suas relações	A definição de questões para investigar é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;11)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
concepção de estratégias e na sua execução, e na validação dos resultados.		A definição de estratégias de investigação é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;12) A validação dos resultados é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;13) A Investigação Matemática tem interesse nas ideias matemáticas e nas suas relações. (11;14)
As conjecturas, mesmo quando resistem a vários testes, não têm ainda o estatuto de verdades matemáticas. Para serem consideradas matematicamente válidas têm de ser justificadas com base numa argumentação lógica ou, pelo menos, plausível.	Na Investigação Matemática, a ideia da prova matemática está associada à necessidade de justificar as conjecturas com base em argumentação lógica ou, pelo menos, plausível.	Na Investigação Matemática, a prova de conjecturas está associada a argumentação lógica. (11;15) Na Investigação Matemática, a prova de conjecturas está associada à argumentação plausível. (11;16)
As conjecturas formuladas pelos alunos foram obtidas por observação, quer da tabela inicial, quer de uma tabela a que acrescentaram mais linhas, ou obtidas pela manipulação quer de números isolados, quer de linhas ou colunas.	Ao apresentar a exploração de uma tarefa de Investigação Matemática realizada por alunos, afirma-se que as conjecturas foram obtidas por observação ou manipulação de casos particulares.	As conjecturas advieram da observação de casos particulares. (11;17) A atividade de Investigação Matemática requereu a observação. (11;18)
A partir deste momento, a professora assume um papel mais activo e comporta-se como se estivesse a trabalhar ao lado dos alunos, num grande grupo. Enquanto um aluno apresenta os seus resultados, os	Ao narrar uma atividade de Investigação Matemática, afirma-se que a professora assumiu um papel ativo, dirigindo a atenção dos alunos para o caminho e procurando	A professora dirigiu a atenção dos alunos para o caminho. (11;19)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
outros são chamados a participar. A professora começa por dirigir a atenção para o "caminho", procurando fornecer informação aos alunos sobre estratégias que podem usar para encontrar uma conjectura.	fornecer informação sobre estratégias que poderiam ser usadas para encontrar uma conjectura.	A professora forneceu informações para encontrar uma conjectura. (11;20)
Neste caso, parte do papel da professora é chamar a atenção para a necessidade de se justificarem as conjecturas enunciadas. Para isso, a professora tem de escolher as conjecturas que devem ser provadas – precisa seleccionar aquelas que sejam mais interessantes, que possam ser exemplares e que não sejam repetitivas relativamente a outras.	É papel do professor chamar a atenção dos alunos para a necessidade de se justificarem as conjecturas, escolhendo aquelas que devem ser provadas.	Na Investigação Matemática, é papel do professor mostrar a necessidade de justificar as conjecturas. (11;21) Na Investigação Matemática, o professor escolhe as conjecturas a serem provadas. (11;22)
O papel do professor é essencial na selecção da tarefa, na estruturação da aula, na sua condução e na negociação de significados, que é especialmente importante para a aprendizagem dos alunos. O professor tem que orientar processo de comunicação, reconhecendo o papel da linguagem não oral e tentando promover a linguagem matemática — sem a impor prematuramente. O professor deve estar ciente que pelos seus actos, ou mesmo por omissão, está constantemente transmitindo informação, através de linguagem oral e não oral — de modo que intervir e não intervir são, basicamente, duas formas da intervenção.	O professor é essencial na seleção da tarefa, na estruturação e condução da aula, bem como na orientação do processo de comunicação e deve estar ciente que intervir e não intervir na atividade de Investigação Matemática são, basicamente, duas formas da intervenção.	O professor é essencial na seleção da tarefa, na estruturação e condução da aula de Investigação Matemática. (11;23) O professor intervém na atividade de Investigação Matemática. (11;24)

Fonte: o autor

OBRA 12

Quadro 31: Dados objetivos da obra 12

Título: Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor
Autora: Hélia Margarida Oliveira
Ano de publicação: 1998
Natureza científica: dissertação
Sinopse: A obra busca analisar o envolvimento de duas professoras na realização de atividades de Investigação Matemática, de modo a interrogar o papel dessas professoras nesse tipo de atividade, os desafios impostos e como são enfrentados, e o conhecimento profissional evidenciado. Na parte teórica, a obra aborda as orientações curriculares para o

ensino de Matemática, as atividades de Investigação Matemática, o papel do professor e o ensino da Matemática, aproximações e distanciamentos entre problemas e investigações matemáticas, a preparação, realização e avaliação das aulas com a Investigação Matemática. Outras questões, também são discutidas, tais como: a formação matemática do aluno, a atividade matemática na sala de aula, os desafios que se impõem ao professor ante as reformas educacionais e a inovação e o conhecimento matemático, didático e sobre si próprio, do professor.

Fonte: o autor

Quadro 32: Construção das unidades de significado com a obra 12

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
No âmbito deste estudo, considera-se que as actividades de investigação envolvem processos iminentemente matemáticos tais como a procura de regularidades, formulação, teste, justificação e prova de conjectura. Gozando de uma grande proximidade com as actividades de resolução de problemas, com as quais são, aliás, muitas vezes identificadas, distinguem-se destas pelo facto das questões não estarem completamente formuladas permitindo que o aluno as concretize. O processo investigativo tem, também, um carácter mais divergente do que, em geral, a resolução de problemas, pois os dados e os objetivos da tarefa possuem uma maior indefinição.	As Investigações Matemáticas envolvem processos iminentemente matemáticos, tais como a procura de regularidades, a formulação, o teste, a justificação e a prova de conjecturas. Há grande proximidade entre as atividades de Investigação Matemática e de Resolução de Problemas, as quais, distinguem-se pelo fato de que nas atividades de Investigação Matemática as questões não estão completamente formuladas. Além disso, o processo investigativo tem um carácter mais divergente do que, em geral, o processo de Resolução de Problemas.	A atividade de Investigação Matemática envolve a procura de regularidades. (12;1) A atividade de Investigação Matemática envolve a formulação de conjecturas. (12;2) A atividade de Investigação Matemática envolve os testes de conjecturas. (12;3) A atividade de Investigação Matemática envolve a justificação e prova de conjecturas. (12;4) Há grande proximidade entre a atividade de Investigação Matemática e a atividade de Resolução de Problemas. (12;5) Questões iniciais não completamente formuladas distinguem a atividade de Investigação Matemática da

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		atividade de Resolução de Problemas. (12;6) A Investigação Matemática tem um processo mais divergente do que a Resolução de Problemas. (12;7)
Tal como foi definido no início deste trabalho, o conceito de actividade de investigação pretende aproximar a actividade do aluno à do matemático. envolve por isso processos iminentemente matemáticos.	A atividade de investigação pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático e, por isso, envolve processos iminentemente matemáticos.	A atividade de Investigação Matemática pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático. (12;8) A atividade de Investigação Matemática envolve processos iminentemente matemáticos. (12;9)
Num primeiro momento há a interrogação a uma situação, portanto há uma questão que é formulada e sobre a qual se vai trabalhar. A observação, na procura de algo que evidencie regularidade, é um elemento fundamental nesta fase.	Na Investigação Matemática, em um primeiro momento, a questão com a qual vai se trabalhar deve ser formulada. Além disso, a observação é um elemento fundamental na procura de regularidades.	O ponto de partida de uma atividade de Investigação Matemática é a formulação de questões. (12;10) A observação é um elemento fundamental na fase inicial de uma Investigação Matemática. (12;11)
Essa distinção tem sido explicada, por diversos autores com base no provérbio chinês "A estrada é o objectivo" (Christiansen & Walther, 1986) que aplicam ao propósito das actividades de investigação. Usando esta metáfora dir-se-á que na resolução de problemas o objectivo é o destino, ou seja, a solução do problema, embora não se desconsidere que à partida existia a possibilidade de optar entre vários caminhos. Pirie (1987) embarcando na mesma metáfora considera que	Usando a metáfora *a estrada é o objetivo*, afirma-se que o destaque na atividade de investigação é a exploração de uma porção de Matemática em todas as direções e por isso elas têm uma natureza mais divergente do que os problemas.	A exploração de uma porção de Matemática em todas as direções se destaca na atividade de Investigação Matemática. (12;12) A atividade de Investigação Matemática é mais divergente do que os problemas. (12;13)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
o que se destaca nas actividades de investigação é a exploração de uma 'porção' de matemática em todas as direcções. Portanto, elas têm uma natureza mais divergente do que os problemas.		
Ao desenvolverem-se actividades de investigação em diversas áreas da Matemática, encontram-se, frequentemente, regularidades e padrões, sendo portanto, realçada essa sua marca distintiva. Deste modo o NRC (1990) recomenda que "o currículo de Matemática introduza e desenvolva padrões matemáticos de muitos tipos diferentes" (p. 12). Por outro lado, as actividades de investigação, pelo facto de estimularem a exploração e a experimentação, reforçam a visão da Matemática como ciência, o que, além de ser mais autêntico de acordo com as actuais tendências epistemológicas, também contribui de forma significativa para um maior envolvimento de todos os alunos.	As regularidades e os padrões realçam a marca distintiva das atividades de Investigação Matemática. Essas atividades, por sua vez, reforçam a visão da Matemática como ciência, ao estimularem a exploração e a experimentação.	As regularidades realçam a marca distintiva da Investigação Matemática. (12;14) Os padrões realçam a marca distintiva da Investigação Matemática. (12;15) Por estimular a exploração e a experimentação, a Investigação Matemática reforça a Matemática como Ciência. (12;16)
A ideia de que as situações a propor devem ser abertas, no sentido de estimularem o aluno a colocar as suas próprias questões, é um dos apelos mais fortes das actividades de natureza investigativa. Este grau de abertura pode até mesmo traduzir-se em propostas que não estejam necessariamente na forma interrogativa.	A ideia de que as situações a serem investigadas devem ser abertas, constitui um dos apelos mais fortes das atividades de natureza investigativa.	A abertura das situações é um dos apelos mais fortes da Investigação Matemática. (12;17)
Um dos grandes objectivos das actividades de investigação é a condução dos alunos a graus progressivos de generalização e de abstracção. Consequentemente, a justificação das conjecturas apresentadas é uma componente importante do seu trabalho.	A generalização e a abstração são grandes objetivos das atividades de investigação e, como consequência disso, a justificação das conjecturas é uma componente importante do trabalho investigativo.	A generalização é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (12;18) A abstração é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (12;19)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
		A justificação das conjecturas é uma componente importante da Investigação Matemática. (12;20)
Reconhece-se o papel fundamental do professor na integração das actividades de investigação no currículo. <u>A selecção das propostas e o estabelecimento de objetivos para a sua realização relacionam-se com a especificidade da turma e com o contexto em que surgem na aula, os quais não podem ser completamente definidos, de antemão, pelos autores de programas</u>. <u>O professor</u> afigura-se-nos, deste modo, <u>como *fazedor de currículo*: delineando objectivos, metodologias e estratégias</u>.	O papel fundamental do professor na integração das atividades de investigação no currículo é de *fazedor de currículo*, delineando os objetivos, as metodologias e as estratégias.	O papel do professor na Investigação Matemática é de fazedor de currículo. (12;21) Na Investigação Matemática, os objetivos relacionam-se com o contexto que surge na aula e não podem ser definidos de antemão. (12;22) Na Investigação Matemática, o professor delineia objetivos, metodologias e estratégias. (12;23)
A proposta apresentada foi a procura de regularidades numa tabela com os quadrados dos números inteiros até cem, que eles próprios construíram. <u>Os alunos centraram-se na identificação do último dígito das potências calculadas para fazerem asserções sobre o comportamento do quadrado de certos números</u>. No entanto, apesar de este não constituir um conteúdo programático, <u>a professora usou esta forma de olhar para as potências, tal como foi construída pelos alunos</u>.	Ao narrar uma atividade com a Investigação Matemática, afirma-se que a professora considerou a forma como os alunos olharam para as potências, mesmo que este tema não fazia parte do conteúdo programático.	Na Investigação Matemática, o professor considera o pensar do aluno. (12;24)
Adicionalmente, a preocupação do professor com a exploração cabal da situação, pode levar a uma construção demasiadamente estruturada da investigação. Como consequência, o aluno tenderá a encarar a proposta de trabalho como um conjunto de tarefas a serem resolvidas, e não como	Ao discorrer sobre a aula com atividades de Investigação Matemática, afirma-se que grau de abertura das situações depende da abordagem que é escolhida pelo professor.	O grau de abertura da Investigação Matemática depende da abordagem que é escolhida pelo professor. (12;25)

Excertos do texto	Asserções articuladas	Unidades de significado
uma investigação cujos objectivos e estratégias são por ele definidos. Assim o grau de abertura das situações depende não só (e talvez, não primariamente) do tipo de questão a investigar mas também da abordagem que é escolhida pelo professor.		

Fonte: o autor

Percebendo interpretações com significados confluentes e outras com significados profusos e variados, empreendemos o movimento de buscar convergências entre as unidades de significado e expressá-las, de modo um tanto quanto articulado, em ideias nucleares. O resultado desse momento da pesquisa é exemplificado no subcapítulo 4.2, o qual *ex-põe* as primeiras convergências de significados compreendidos e interpretados em cada obra acadêmica significativa.

4.2 As primeiras ideias nucleares

Esse momento do movimento de redução fenomenológica teve início com o esforço de desvelar os significados que permaneceram constantes em cada unidade de significado, construindo, assim, os primeiros invariantes, conforme sintetizamos no Quadro 33.

Quadro 33: As unidades de significado e os primeiros invariantes

Unidades de significado	Primeiros invariantes
O estilo conjectura-teste-demonstração é uma forte característica da investigação em Matemática. (1;1)	Sobre o estilo conjectura-teste-demonstração.
O trabalho dos matemáticos como inspiração para o trabalho pedagógico com a Investigação Matemática. (1;2)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
A Investigação Matemática requer a formulação de questões a serem investigadas. (1;3)	Sobre a abertura. Sobre os processos matemáticos.
Na Investigação Matemática, o modo como se procura respostas é fundamentado e rigoroso. (1;4)	Sobre o processo investigativo.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
O processo de criação matemática surge fértil na investigação em Matemática. (1;5)	Sobre a atividade científica de criação matemática.
O currículo americano aponta claramente que fazer Matemática é fazer Investigação Matemática. (1;6)	Sobre o fazer Matemática. Sobre o currículo.
No currículo americano, raciocinar matematicamente aponta claramente para a ideia de fazer Investigação Matemática. (1;7)	Sobre o raciocínio matemático. Sobre o currículo.
A Investigação Matemática envolve a formulação de questões a serem investigadas. (1;8)	Sobre a abertura. Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve a formulação de conjecturas. (1;9)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve a realização de testes das conjecturas. (1;10)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve a argumentação, a demonstração e a avaliação do trabalho realizado. (1;11)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática se relaciona de muito perto com a Resolução de Problemas. (1;12)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Na Investigação Matemática, as situações iniciais são abertas. (1;13)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática traz uma atividade matemática genuína para a sala de aula. (1;14)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
Na Investigação Matemática, as ações dos alunos são como as do matemático profissional. (1;15)	Sobre o aluno como matemáticos.
A Investigação Matemática é uma atividade imprevisível. (1;16)	Sobre a divergência.
A Investigação Matemática é enxertada de variados percursos de inquirição. (1;17)	Sobre a divergência.
A Investigação Matemática é enxertada de avanços e recuos. (1;18)	Sobre a divergência.
A atividade de Investigação Matemática é divergente. (1;19)	Sobre a divergência.
Espera-se que, na Investigação Matemática, os alunos utilizem os processos característicos da atividade investigativa em Matemática. (1;20)	Sobre o aluno. Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
Na Investigação Matemática, é fundamental compreender o caráter provisório das conjecturas. (1;21)	Sobre os processos matemáticos.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
As investigações numéricas contribuem para desenvolver a compreensão global dos números e operações. (1;22)	Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de conjecturar. (1;23)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de testar conjecturas. (1;24)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas contribuem para desenvolver a capacidade de generalizar. (1;25)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
Investigações no campo da Aritmética são intituladas de investigações numéricas. (1;26)	Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas possibilitam analisar regularidades. (1;27)	Sobre as regularidades. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas possibilitam analisar padrões. (1;28)	Sobre os padrões. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas estabelecem conexões matemáticas. (1;29)	Sobre o contexto puramente matemático. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos. (1;30)	Sobre os padrões.
A compreensão da generalização envolve aspectos presentes nas investigações numéricas. (1;31)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
Investigações no campo da Geometria são intituladas de investigações geométricas. (1;32)	Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações geométricas contribuem para a formulação de conjecturas. (1;33)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações geométricas contribuem para a realização de testes das conjecturas. (1;34)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
As investigações geométricas contribuem para generalizar e demonstrar. (1;35)	Sobre os processos matemáticos. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações geométricas podem contribuir para concretizar a relação entre a Matemática e a realidade. (1;36)	Sobre Matemática e a realidade.
As investigações geométricas suscitam o aspecto experimental. (1;37)	Sobre a experimentação. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações geométricas suscitam o aspecto indutivo. (1;38)	Sobre a indução. Sobre uma Investigação Matemática específica.
As investigações geométricas suscitam a aplicação da Geometria na vida real. (1;39)	Sobre Matemática e realidade. Sobre uma Investigação Matemática específica.
Investigações no campo da Estatística são intituladas de investigações em estatística. (1;40)	Sobre uma Investigação Matemática específica.
A presença de problemas reais no ensino de Estatística. (1;41)	Sobre Matemática e realidade.
A presença de problemas relacionados com a realidade no ensino de Estatística. (1;42)	Sobre Matemática e realidade.
Na Investigação Matemática, o professor escolhe situações que julga serem desafiadoras para os alunos. (1;43)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, deve haver a manifestação do raciocínio matemático do professor. (1;44)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o raciocínio matemático do professor pode contribuir para que os alunos aprendam sobre o processo investigativo. (1;45)	Sobre o professor.
Os Parâmetros Curriculares Nacionais dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação. (1;46)	Sobre o currículo.
Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, as atividades de investigação surgem na perspectiva da Matemática como contexto de trabalho. (1;47)	Sobre o currículo.
Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, as atividades de investigação surgem na perspectiva de utilização da Matemática em contextos diversos. (1;48)	Sobre o currículo.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
No currículo brasileiro, a Investigação Matemática merece destaque no estudo dos conteúdos matemáticos. (1;49)	Sobre o currículo.
No currículo brasileiro, a Investigação Matemática merece destaque na utilização da Matemática em contextos da vida real. (1;50)	Sobre o currículo.
Na Investigação Matemática, o processo de resolução pode implicar na exploração para além do enunciado do problema. (2;1)	Sobre a divergência.
A Investigação Matemática valoriza a formulação, os testes e a prova de conjecturas, bem como a argumentação. (2;2)	Sobre os processos matemáticos.
A Resolução de Problemas é o ponto de partida para a Investigação Matemática. (2;3)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Na Investigação Matemática, é importante a exploração da Matemática em todas as direções. (2;4)	Sobre a divergência.
Na Investigação Matemática, importa a exploração de todos os caminhos. (2;5)	Sobre a divergência.
A Investigação Matemática é um processo divergente. (2;6)	Sobre a divergência.
Na Investigação Matemática, sabe-se qual é o ponto de partida, mas não o de chegada. (2;7)	Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, os alunos formulam questões para serem investigadas. (2;8)	Sobre a abertura. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, os alunos elaboram conjecturas. (2;9)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, os alunos realizam testes das conjecturas elaboradas. (2;10)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, os alunos elaboram demonstrações. (2;11)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, é importante elaborar questões suficientemente abertas e interessantes para disparar a atividade. (2;12)	Sobre a abertura.
A apresentação da tarefa sem uma discussão inicial implica na necessidade de maior apoio do professor aos alunos. (2;15)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula. Sobre o professor.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
Na Investigação Matemática, a tarefa pode surgir espontaneamente a partir da atividade dos alunos. (2;14)	Sobre a abertura. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, o professor deve valorizar as descobertas dos alunos. (2;15)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, a fase de desenvolvimento deve centrar-se na atividade dos alunos. (2;16)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, o professor orienta a atividade dos alunos. (2;17)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor intervém no modo de trabalhar dos alunos. (2;18)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor deve levar os alunos a analisar e a refletir sobre o trabalho realizado e sobre o significado das descobertas. (2;19)	Sobre o professor.
A formulação de questões para investigar, bem como a formulação de conjecturas, os testes e a demonstração são etapas que acontecem durante a fase do desenvolvimento da Investigação Matemática. (2;20)	Sobre os processos matemáticos. Sobre as fases do trabalho em sala de aula.
Na Investigação Matemática, o professor deve incentivar os alunos a refletirem sobre as conjecturas por eles elaboradas, incentivando o espírito crítico. (2;21)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, é a própria experiência dos alunos que deve mostrar-lhes se os caminhos que estão seguindo são frutíferos. (2;22)	Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, por vezes, o professor tem que dar pistas mais diretas sobre o caminho possível a ser seguido na exploração da tarefa. (2;23)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor atua como moderador e orientador, promovendo a comunicação. (2;24)	Sobre o professor.
A discussão das atividades dos alunos é um elemento indispensável em uma aula com a Investigação Matemática. (2;25)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula.
A natureza da atividade do aluno em uma aula com a Investigação Matemática é equivalente à atividade do matemático. (2;26)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica. Sobre o aluno.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
A aula de Investigação Matemática comporta as fases de introdução da tarefa, realização pelos alunos e a discussão/reflexão conjunta. (2;27)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula.
A Investigação Matemática é fundamentalmente caracterizada por questões, conjecturas, testes e validação de conjecturas. (2;28)	Sobre os processos matemáticos.
Questões bem definidas, para as quais se pretende obter uma resposta, é uma das características que marcam a Investigação Matemática. (2;29)	Sobre a abertura.
Problemas e investigações estão relacionados com a inquirição matemática. (3;1)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a atividade científica de criação Matemática.
Para os educadores públicos, a Investigação Matemática deve basear-se, em partes, em problemas sociais. (3;2)	Sobre Matemática e realidade.
Para os educadores públicos, a Investigação Matemática é uma pedagogia. (3;3)	Sobre a Investigação Matemática e o ensino.
Para os educadores públicos, a Investigação Matemática é um meio para desenvolver a cidadania. (3;4)	Sobre desenvolver a cidadania.
Comparativamente à Resolução de Problemas, a Investigação Matemática é um processo divergente. (3;5)	Sobre a divergência.
Fazer Investigação Matemática envolve a abstração. (3;6)	Sobre a abstração.
Fazer Investigação Matemática envolve a modelação. (3;7)	Sobre a modelação matemática.
Fazer Investigação Matemática envolve a generalização. (3;8)	Sobre os processos matemáticos.
Fazer Investigação Matemática envolve a demonstração. (3;9)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática difere da Resolução de Problemas. (3;10)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
A Investigação Matemática requer a formulação de problemas a serem investigados. (3;11)	Sobre a abertura.
Para os educadores progressistas, a Investigação Matemática se restringe ao contexto da Matemática Pura. (3;12)	Sobre o contexto puramente matemático.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
A Investigação Matemática tem o papel de facilitar a criatividade individual na Matemática. (3;13)	Sobre a criatividade matemática.
Na Investigação Matemática, o foco da atividade muda assim que novas questões são postas. (3;14)	Sobre a divergência.
A Investigação Matemática é um método de ensino. (3;15)	Sobre a Investigação Matemática e o ensino.
A Investigação Matemática pode ser emancipadora ao permitir ao aluno a formulação de questões. (3;16)	Sobre a abertura.
No programa francês, a Investigação Matemática é significativa para habituar os alunos à atividade científica, com referência clara ao processo de descoberta. (4;1)	Sobre a atividade científica de criação matemática. Sobre o currículo.
O currículo inglês inclui no trabalho investigativo a aplicação da Matemática. (4;2)	Sobre a aplicação da Matemática. Sobre o currículo.
O programa português inclui a investigação como um modo de realizar exploração, pesquisa e elaborar conjecturas. (4;3)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o currículo.
As etapas fundamentais do trabalho investigativo são a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a conclusão. (4;4)	Sobre as etapas do trabalho em sala de aula.
Na Investigação Matemática, as ideias matemáticas são frutos de tentativas de compreensão experimentadas pelos alunos. (4;5)	Sobre a experimentação.
A investigação Matemática possibilita conexões entre conceitos matemáticos. (4;6)	Sobre o contexto puramente matemático.
A Investigação Matemática possibilita conexões de conceitos matemáticos com conceitos extramatemáticos. (4;7)	Sobre o contexto extramatemático.
Na aula com a Investigação Matemática, o professor pode constituir um modelo matemático de modo mais genuíno. (4;8)	Sobre a modelação matemática. Sobre o professor.
Na vertente didática da Investigação Matemática, os conteúdos matemáticos são um dos objetivos da aprendizagem. (4;9)	Sobre os objetivos pedagógicos.
Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, recordar uma noção matemática. (4;10)	Sobre os objetivos pedagógicos.
Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas. (4;11)	Sobre os objetivos pedagógicos.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
Na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas e extramatemáticas. (4;12)	Sobre os objetivos pedagógicos.
Cabe ao professor desafiar, apoiar e avaliar os alunos no trabalho investigativo. (4;13)	Sobre o professor.
Criar um ambiente favorável à Investigação Matemática é um dos aspectos do trabalho do professor (4;14)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o modo de o professor trabalhar com a Matemática deve servir de modelo aos alunos. (4;15)	Sobre o professor.
A professora considera que o seu papel servia para demonstrar aos alunos o que significa saber Matemática. (4;16)	Sobre o professor.
A professora envolvia-se no raciocínio dos alunos e modelava o comportamento deles perante a atividade de Investigação Matemática. (4;17)	Sobre o professor
O professor pode apresentar conceitos, informações, procedimentos e notações matemáticas, à medida que ensina aos alunos como fazer Matemática. (4;18)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor tem a oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos. (4;19)	Sobre o professor.
A professora estimula os alunos a explicarem a relação encontrada. (4;20)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor pode não interferir no trabalho dos alunos ou, se necessário, interferir de forma discreta e ligeira. (4;21)	Sobre o professor.
O fazer investigação do professor pode levar os alunos a aprenderem sobre o modo de conduzir uma investigação. (4;22)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, estabelecer relações entre conceitos é importante (4;23)	Sobre o contexto extramatemático.
Na Investigação Matemática, o estabelecimento das relações entre conceitos depende da cultura matemática do professor. (4;24)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor deve ter a capacidade para decidir quais ligações matemáticas estabelecer. (4;25)	Sobre o professor.
Na aula de Investigação Matemática o professor deve se apoiar no pensamento matemático. (4;26)	Sobre o professor.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
A Investigação Matemática é parte da atividade matemática. (5;1)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
Na Investigação Matemática, há uma identidade entre aprender Matemática e fazer Matemática. (5;2)	Sobre o fazer Matemática.
A Investigação Matemática é encarada como uma forma de gerar conhecimento. (5;3)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são conceitos próximos. (5;4)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza a busca por regularidades. (5;5)	Sobre as regularidades.
A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de generalização. (5;6)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de conjecturar. (5;7)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de testar as conjecturas. (5;8)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de demonstrar. (5;9)	Sobre os processos matemáticos.
As atividades de Investigação Matemática são abertas. (5;10)	Sobre a abertura.
A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são distintas. (5;11)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
A Investigação Matemática se diferencia da Resolução de Problemas por conter questões inicialmente vagas. (5;12)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a abertura.
A formulação dos problemas a serem investigados é essencial na Investigação Matemática. (5;13)	Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, é difícil seguir uma heurística, em decorrência da variedade de possibilidades. (5;14)	Sobre a divergência.
O processo investigativo é mais divergente do que a resolução de um problema. (5;15)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a divergência.
A Investigação Matemática estimula o aluno a justificar e a provar. (5;16)	Sobre os processos matemáticos.
Argumentar e provar são aspectos da capacidade de comunicar-se matematicamente. (5;17)	Sobre os processos matemáticos.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
Na Investigação Matemática, o trabalho do aluno se aproxima do trabalho do matemático. (5;18)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica. Sobre o aluno.
Na aula com a Investigação Matemática, os alunos constituem uma pequena comunidade matemática. (5;19)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, os processos característicos da atividade matemática são o foco do ensino. (5;20)	Sobre os processos matemáticos. Sobre os objetivos de ensino.
Na Investigação Matemática, o aluno pode seguir caminhos inusitados. (5;21)	Sobre a divergência. Sobre o aluno.
As tarefas de Investigação Matemática são abertas. (5;22)	Sobre a abertura.
A generalização é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (5;23)	Sobre os processos matemáticos.
A abstração é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (5;24)	Sobre a abstração.
A justificação das conjecturas é uma componente importante na Investigação Matemática. (5;25)	Sobre os processos matemáticos.
A experiência matemática que a Investigação Matemática proporciona é muito próxima da atividade matemática. (5;26)	Sobre a produção do conhecimento matemático e a prática pedagógica.
A experiência matemática que a Investigação Matemática proporciona é autêntica. (5;27)	Sobre o fazer Matemática.
A Investigação Matemática evidencia a ligação entre conteúdos matemáticos. (5;28)	Sobre o contexto puramente matemático.
Na atividade de Investigação Matemática é frequente surgirem novas questões para serem investigadas. (5;29)	Sobre a abertura.
Na atividade de Investigação Matemática é papel dos alunos colocar novas questões para investigar. (5;30)	Sobre a abertura. Sobre o aluno.
A Investigação Matemática estimula o pensar matematicamente. (5;31)	Sobre os objetivos pedagógicos.
Na Investigação Matemática, é possível escolher questões para investigar. (5;32)	Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, é possível escolher estratégias para investigar as questões. (5;33)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
O contexto exclusivamente matemático é predominante na Investigação Matemática. (5;34)	Sobre o contexto puramente matemático.
Na Investigação Matemática, os alunos podem descobrir relações não pensadas pelo professor. (5;35)	Sobre a divergência. Sobre o aluno.
Na Investigação Matemática, o professor valoriza o trabalho do aluno. (5;36)	Sobre o professor.
A intuição funcionou na atividade de Investigação Matemática. (6;1)	Sobre a intuição.
Formular conjecturas é um objetivo da Investigação Matemática. (6;2)	Sobre os processos matemáticos.
Demonstrar é um objetivo da Investigação Matemática. (6;3)	Sobre os processos matemáticos.
Um problema de crescimento populacional deu origem à investigação. (6;4)	Sobre Matemática e realidade.
A aplicação da Matemática não deve ser excluída da Investigação Matemática. (6;5)	Sobre a aplicação da Matemática.
A modelação matemática não deve ser excluída da Investigação Matemática. (6;6)	Sobre a modelação matemática.
Problemas puramente matemáticos são necessários à Investigação Matemática. (6;7)	Sobre o contexto puramente matemático.
O fazer investigativo aponta para uma demonstração. (6;8)	Sobre os processos matemáticos.
O pensamento intuitivo se faz presente na Investigação Matemática. (6;9)	Sobre a intuição.
A explicação intuitiva reforça a veracidade das conjecturas, mas não as validam. (6;10)	Sobre a intuição.
A demonstração como o objetivo da Investigação Matemática. (6;11)	Sobre os processos matemáticos.
Explorar, Descobrir e *Pôr em questão* são tipos de Investigação Matemática. (7;1)	Sobre Investigações Matemáticas específicas.
As investigações do tipo *descobrir* solicitam a definição de uma regra. (7;2)	Sobre uma Investigação Matemática específica. Sobre os processos matemáticos.
As atividades de Investigação Matemática tendem a ser de natureza aberta. (7;3)	Sobre a abertura.
As atividades de Investigação Matemática podem prosseguir a diversos níveis de profundidade. (7;4)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
As atividades de Investigação Matemática podem conduzir os alunos a territórios matemáticos não preparados pelo professor. (7;5)	Sobre a divergência.
Na Investigação Matemática os alunos devem aprender a mudar uma coisa de cada vez. (7;6)	Sobre a experimentação.
Na Investigação Matemática os alunos precisam observar efeitos das mudanças efetuadas e dizer o que compreendem. (7;7)	Sobre a observação.
Na Investigação Matemática, o professor precisa ter boa base matemática. (7;8)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, a sensibilidade pedagógica do professor não basta. (7;9)	Sobre o professor.
Fazer Investigação Matemática permite que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz e a dedicar-se a atividade de descobrimento. (7;10)	Sobre o aluno.
As investigações do tipo *explorar* têm o objetivo de ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolverem um sentido do território. (7;11)	Sobre uma Investigação Matemática específica. Sobre os objetivos pedagógicos.
Na Investigação Matemática, os alunos têm a oportunidade de vivenciar, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais. (8;1)	Sobre o aluno como matemático.
A Investigação Matemática privilegia a construção de conceitos matemáticos. (8;2)	Sobre os objetivos pedagógicos.
A Investigação Matemática privilegia a aquisição de conhecimentos e técnicas. (8;3)	Sobre os objetivos pedagógicos.
A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a produção de conhecimento matemático. (8;4)	Sobre a atividade científica de criação matemática.
A Investigação Matemática está diretamente relacionada com a natureza da Matemática. (8;5)	Sobre a relação com a Matemática.
A Investigação Matemática é parte da atividade matemática. (8;6)	Sobre a atividade científica de criação matemática.
A Investigação Matemática pode ser comparada com a de Resolução de Problemas. (8;7)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
A Investigação Matemática pode ser caracterizada a partir dos processos matemáticos e das relações entre eles. (8;8)	Sobre os processos matemáticos.
Na Investigação Matemática, o objeto de inquirição é alterado com a formulação de novas questões. (8;9)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
A formulação de questões para investigar é uma característica da Investigação Matemática. (8;10)	Sobre a abertura.
A formulação de questões para investigar permite diferenciar a Investigação Matemática da Resolução de Problemas. (8;11)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Na Investigação Matemática, o objetivo é a exploração da situação. (8;12)	Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, a formulação de questões para investigar cabe ao aluno. (8;13)	Sobre o aluno.
A Investigação Matemática é uma atividade divergente se comparada à Resolução de Problemas. (8;14)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a divergência.
Na Investigação Matemática, o aluno define o método de exploração. (8;15)	Sobre o aluno.
Há uma concepção de que a Investigação Matemática é próxima dos problemas com objetivo aberto (*open-ended*). (8;16)	Sobre a relação com uma classe específica de problemas.
A Investigação Matemática é uma situação aberta. (8;17)	Sobre a abertura.
As tarefas de Investigação Matemática não têm como objetivo chegar a uma resposta certa. (8;18)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a exploração de possibilidades. (8;19)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a formulação de conjecturas. (8;20)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática é uma atividade que envolve a validação das conjecturas. (8;21)	Sobre os processos matemáticos.
A proposta inicial de uma Investigação Matemática tem objetivos pouco precisos e estruturados. (8;22)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática inicia com a formulação de questões para serem investigadas. (8;23)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática requer a formulação e testes de conjecturas. (8;24)	Sobre os processos matemáticos.
Na Investigação Matemática, é pertinente estabelecer argumentos e provas para validar as conjecturas. (8;25)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática pode gerar novas questões para investigar. (8;26)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
A não linearidade da atividade é uma característica importante da Investigação Matemática. (8;27)	Sobre a divergência.
A atividade de Investigação Matemática é caracterizada pelos processos matemáticos. (8;28)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve conjecturas. (8;29)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve testes de conjecturas. (8;30)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática envolve a prova de conjecturas. (8;31)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem solução única. (8;32)	Sobre a multiplicidade de soluções.
A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem a prescrição metodológica do processo de resolução. (8;33)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática não é uma tarefa que tem a intenção de repetir técnicas matemáticas. (8;34)	Sobre a abertura.
No discurso oficial, a Investigação Matemática é a essência da Matemática. (8;35)	Sobre a relação com a Matemática.
No discurso oficial, a Investigação Matemática está relacionada com os padrões. (8;36)	Sobre os padrões.
No discurso oficial, a Investigação Matemática está relacionada com as generalizações. (8;37)	Sobre os processos matemáticos.
No discurso profissional, a Investigação Matemática constitui a verdadeira Matemática. (8;38)	Sobre a relação com a Matemática.
No discurso profissional, a Investigação Matemática tem natureza aberta. (8;39)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática é um processo aberto e criativo exemplificando a verdadeira Matemática. (8;40)	Sobre a abertura.
Diferentes abordagens consideram a Investigação Matemática um exemplo da verdadeira Matemática. (8;41)	Sobre a relação com a Matemática.
O processo de uma atividade de Investigação Matemática segue a sequência conjectura, generalização, demonstração. (8;42)	Sobre o estilo conjectura-teste-demonstração.
A atividade de Investigação Matemática segue um processo indutivo. (8;43)	Sobre a indução.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
O processo indutivo que a atividade de Investigação Matemática segue, inicia com casos particulares. (8;44)	Sobre a indução.
O processo indutivo que a atividade de Investigação Matemática segue, permite identificar padrões. (8;45)	Sobre a indução.
A conjectura é importante na Investigação Matemática. (8;46)	Sobre os processos matemáticos.
A demonstração é importante na Investigação Matemática. (8;47)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática não é descaracterizada se, nas primeiras experiências, envolver tarefas mais estruturadas. (8;48)	Sobre a abertura.
A análise de casos particulares pode ser um bom ponto de partida para a Investigação Matemática. (8;49)	Sobre a análise de casos particulares.
Na Investigação Matemática, os alunos devem descobrir argumentos para validarem suas conjecturas. (8;50)	Sobre os processos matemáticos.
É importante que o enunciado das tarefas de Investigação Matemática indique a necessidade de se validar as conjecturas. (8;51)	Sobre os processos matemáticos.
A prova de conjecturas faz parte da Investigação Matemática. (8;52)	Sobre os processos matemáticos.
A necessidade de provar as conjecturas deve estar vinculada ao enunciado das tarefas de Investigação Matemática. (8;53)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha da situação de partida. (8;54)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha dos problemas a investigar. (8;55)	Sobre a abertura.
A Investigação Matemática propõe a liberdade de escolha do método. (8;56)	Sobre a abertura.
O trabalho investigativo envolve introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final. (8;57)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula.
A tarefa de Investigação Matemática vincula ao seu enunciado a necessidade de elaborar e validar conjecturas. (8;58)	Sobre os processos matemáticos.
O trabalho investigativo se relaciona diretamente com as conjecturas e a demonstração. (9;1)	Sobre os processos matemáticos.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
O trabalho investigativo se relaciona diretamente com a intuição. (9;2)	Sobre a intuição.
O trabalho investigativo se relaciona diretamente com a experimentação. (9;3)	Sobre a experimentação.
A aula de Investigação Matemática engloba os momentos de apresentação da tarefa, a atividade dos alunos e a discussão. (9;4)	Sobre os momentos do trabalho em sala de aula.
Na Investigação Matemática, as conclusões podem ser diversificadas. (9;5)	Sobre a abertura.
Tarefas mais estruturadas permitem maior autonomia para os alunos menos habituados com a Investigação Matemática. (9;6)	Sobre a abertura.
A necessidade de validar as conjecturas é uma referência do currículo português ao trabalho com a Investigação Matemática. (9;7)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o currículo.
O currículo português refere-se à validação das conjecturas como forma de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico. (9;8)	Sobre os processos matemáticos. Sobre o currículo.
A atividade de Investigação Matemática tem seu valor enquanto experiência matemática. (9;9)	Sobre o fazer Matemática.
Na Investigação Matemática as atitudes dos alunos transformam-se por via da informação ou da experiência. (9;10)	Sobre o aluno.
As atitudes do professor como determinantes das atitudes dos alunos. (9;11)	Sobre o professor.
A realização de Investigações Matemáticas constitui uma experiência matemática fundamental. (9;12)	Sobre o fazer Matemática.
A Investigação Matemática assume forte presença nos currículos de Matemática da Inglaterra, da França, de Portugal e nos documentos programáticos norte-americano. (9;13)	Sobre o currículo.
Na Investigação Matemática, é necessário formular problemas para investigar. (10;1)	Sobre a abertura.
A formulação de problemas para investigar diferencia a Investigação Matemática da Resolução de Problemas. (10;2)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Na Investigação Matemática, o aluno define os objetivos. (10;3)	Sobre o aluno. Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, o aluno define as questões a serem investigadas. (10;4)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
A Investigação Matemática tem a divergência da atividade como característica marcante. (10;5)	Sobre a divergência.
Há uma aproximação entre a Investigação Matemática e os *open-ended problems.* (10;6)	Sobre a relação com uma classe específica de problemas.
Há uma aproximação entre a Investigação Matemática e os *problem fields*. (10;7)	Sobre a relação com uma classe específica de problemas.
A formulação de problemas é indissociável do ensino de cunho investigativo. (10;8)	Sobre a abertura.
Introdução, trabalho independente dos alunos e discussão, são fases típicas da atividade de Investigação Matemática. (10;9)	Sobre as fases do trabalho em sala de aula.
O raciocínio didático do professor conduz os alunos na realização de uma investigação. (10;10)	Sobre o professor.
Na atividade de Investigação Matemática, o aluno coloca questões. (10;11)	Sobre o aluno. Sobre a abertura.
Na atividade de Investigação Matemática, o objeto de inquirição muda por quem a conduz. (10;12)	Sobre a abertura.
Os processos envolvidos na Investigação Matemática são fortemente indutivos. (10;13)	Sobre a indução.
A justificação e a prova de conjecturas têm um lugar importante na Investigação Matemática. (10;14)	Sobre os processos matemáticos.
Os processos envolvidos na Investigação Matemática se relacionam com a procura de regularidades. (10;15)	Sobre os processos matemáticos.
Os processos envolvidos na Investigação Matemática se relacionam com a procura, testes, generalização e demonstração de conjecturas. (10;16)	Sobre os processos matemáticos.
A atividade de investigação de problemas é divergente. (10;17)	Sobre a divergência.
O processo de investigação, na Investigação Matemática, é essencialmente amparado em conjecturas, testes e justificações. (10;18)	Sobre os processos matemáticos.
Na Investigação Matemática, o professor orienta a atividade dos alunos. (10;19)	Sobre o professor.
Questionar, conjecturar, testar e validar estão necessariamente presentes na Investigação Matemática. (10;20)	Sobre os processos matemáticos.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
Os processos investigativos envolvidos na criação do conhecimento matemático estão na base da proposta de Polya. (11;1)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Fazer Matemática é fazer Investigação Matemática. (11;2)	Sobre o fazer Matemática.
A Investigação Matemática começa com o colocar questões. (11;3)	Sobre a abertura.
Na Investigação Matemática, é essencial formular conjecturas. (11;4)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática requer testes de conjecturas. (11;5)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática requer a recolha de dados. (11;6)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática requer a argumentação e a prova formal de conjecturas. (11;7)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática fornece vários pontos de partida. (11;8)	Sobre a abertura.
As demonstrações são importantes na Investigação Matemática. (11;9)	Sobre os processos matemáticos.
Avançar para a formalização é importante na Investigação Matemática. (11;10)	Sobre os processos matemáticos.
A definição de questões para investigar é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;11)	Sobre a abertura.
A definição de estratégias de investigação é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;12)	Sobre a abertura.
A validação dos resultados é uma característica distintiva da Investigação Matemática. (11;13)	Sobre os processos matemáticos.
A Investigação Matemática tem interesse nas ideias matemáticas e nas suas relações. (11;14)	Sobre o contexto puramente matemático.
Na Investigação Matemática, a prova de conjecturas está associada a argumentação lógica. (11;15)	Sobre os processos matemáticos.
Na Investigação Matemática, a prova de conjecturas está associada a argumentação plausível. (11;16)	Sobre os processos matemáticos.
As conjecturas advieram da observação de casos particulares. (11;17)	Sobre a observação.
A atividade de Investigação Matemática requereu a observação. (11;18)	Sobre a observação.

Unidades de significado	**Primeiros invariantes**
A professora dirigiu a atenção dos alunos para o caminho. (11;19)	Sobre o professor.
A professora forneceu informações para encontrar uma conjectura. (11;20)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, é papel do professor mostrar a necessidade de justificar as conjecturas. (11;21)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor escolhe as conjecturas a serem provadas. (11;22)	Sobre o professor.
O professor é essencial na seleção da tarefa, na estruturação e condução da aula de Investigação Matemática. (11;23)	Sobre o professor.
O professor intervém na atividade de Investigação Matemática. (11;24)	Sobre o professor.
A atividade de Investigação Matemática envolve a procura de regularidades. (12;1)	Sobre as regularidades.
A atividade de Investigação Matemática envolve a formulação de conjecturas. (12;2)	Sobre os processos matemáticos.
A atividade de Investigação Matemática envolve os testes de conjecturas. (12;3)	Sobre os processos matemáticos.
A atividade de Investigação Matemática envolve a justificação e prova de conjecturas. (12;4)	Sobre os processos matemáticos.
Há grande proximidade entre a atividade de Investigação Matemática e a atividade de Resolução de Problemas. (12;5)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas.
Questões iniciais não completamente formuladas distinguem a atividade de Investigação Matemática da atividade de Resolução de Problemas. (12;6)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a abertura.
A Investigação Matemática tem um processo mais divergente do que a Resolução de Problemas. (12;7)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a divergência.
A atividade de Investigação Matemática pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático. (12;8)	Sobre o aluno como matemático.
A atividade de Investigação Matemática envolve processos iminentemente matemáticos. (12;9)	Sobre os processos matemáticos.
O ponto de partida de uma atividade de Investigação Matemática é a formulação de questões. (12;10)	Sobre a abertura.

Unidades de significado	Primeiros invariantes
A observação é um elemento fundamental na fase inicial de uma Investigação Matemática. (12;11)	Sobre a observação.
A exploração de uma porção de Matemática em todas as direções se destaca na atividade de Investigação Matemática. (12;12)	Sobre a divergência.
A atividade de Investigação Matemática é mais divergente do que os problemas. (12;13)	Sobre a relação com a Resolução de Problemas. Sobre a divergência.
As regularidades realçam a marca distintiva da Investigação Matemática. (12;14)	Sobre as regularidades.
Os padrões realçam a marca distintiva da Investigação Matemática. (12;15)	Sobre os padrões.
Por estimular a exploração e a experimentação, a Investigação Matemática reforça a Matemática como Ciência. (12;16)	Sobre a relação com a Matemática Sobre a experimentação.
A abertura das situações é um dos apelos mais fortes da Investigação Matemática. (12;17)	Sobre a abertura.
A generalização é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (12;18)	Sobre os processos matemáticos.
A abstração é um dos grandes objetivos da Investigação Matemática. (12;19)	Sobre a abstração.
A justificação das conjecturas é uma componente importante da Investigação Matemática. (12;20)	Sobre os processos matemáticos.
O papel do professor na Investigação Matemática é de fazedor de currículo. (12;21)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, os objetivos relacionam-se com o contexto que surge na aula e não podem ser definidos de antemão. (12;22)	Sobre os objetivos de ensino.
Na Investigação Matemática, o professor delineia objetivos, metodologias e estratégias. (12;23)	Sobre o professor.
Na Investigação Matemática, o professor considera o pensar do aluno. (12;24)	Sobre o professor.
O grau de abertura da Investigação Matemática depende da abordagem que é escolhida pelo professor. (12;25)	Sobre o professor. Sobre a abertura.

Fonte: o autor

Esses primeiros invariantes convergiram para vinte grupos de ideias que, embora digam do fenômeno interrogado, não explicitam, necessariamente, as suas características eidéticas (essenciais). Esses grupos foram chamados de *primeiras ideias nucleares* e são como lampejos que iluminam o fenômeno interrogado, ainda nebuloso e obscuro.

Cada conjunto de ideias nucleares construído foi codificado com a sigla I.N.1.X (X representa o número do conjunto de ideias nucleares), assim, por exemplo, o código I.N.1.2 faz menção às primeiras convergências que constituíram o segundo conjunto das primeiras ideias nucleares. As unidades de significado que convergiram para mais de um conjunto de ideias nucleares estão destacadas em negrito. O Quadro 34 apresenta-as com as respectivas unidades de significado convergentes.

Quadro 34: As primeiras ideias nucleares

Codificação	Descrição das primeiras ideias nucleares	Código das unidades de significado
I.N.1.1	Sobre a abertura e a divergência da Investigação Matemática.	**1;3** **1;8** 1;13 1;16 1;17 1;18 1;19 2;1 2;4 2;5 2;6 2;7 **2;8** 2;11 2;12 **2;14** 2;29 3;5 3;11 3;14 3;16 5;10 **5;12** 5;13 5;14 **5;15** **5;21** 5;22 5;29 **5;30** 5;32 5;33 5;35 7;3 7;4 7;5 8;9 8;10 8;12 **8;14** 8;17 8;18 8;19 8;22 8;23 8;26 8;27 8;32 8;33 8;34 8;39 8;40 8;48 8;54 8;55 8;56 9;5 9;6 10;1 **10;3** 10;4 10;5 10;8 **10;11** 10;12 10;17 11;3 11;8 11;11 11;12 **12;6** **12;7** **12;13** 12;10 12;12 **12;16** 12;17 **12;25**
I.N.1.2	Sobre a produção do conhecimento matemático e a Investigação Matemática.	1;2 1;5 **1;6** **1;7** 1;14 **2;26** **3;1** **4;1** 5;1 5;2 5;3 **5;18** **5;19** 5;26 5;27 8;4 8;6 9;9 9;12 11;2
I.N.1.3	Sobre o professor e a Investigação Matemática.	1;43 1;44 1;45 **2;15** 2;17 2;18 2;19 2;21 2;23 2;24 **4;8** 4;13 4;14 4;15 4;16 4;17 4;18 4;19 4;20 4;21 4;22 4;24 4;25 4;26 5;36 7;8 7;9 9;11 10;10 10;19 11;19 11;20 11;21 11;22 11;23 11;24 12;21 12;23 12;24 **12;25**
I.N.1.4	Sobre os processos matemáticos envolvidos na Investigação Matemática.	1;1 **1;3** 1;4 **1;8** 1;9 1;10 1;11 **1;20** 1;21 **1;23** **1;24** **1;25** **1;27** **1;28** 1;30 **1;31** **1;33** **1;34** **1;35** 2;2 **2;9** **2;10** **2;11** **2;20** 2;28 3;8 3;9 **4;3** 5;5 5;6 5;7 5;8 5;9 5;16 5;17 **5;20** 5;23 5;25 6;2 6;3 6;8 6;11 **7;2** 8;8 8;20 8;21 8;24 8;25 8;28 8;29 8;30 8;31 8;37 8;42 8;46 8;47 8;50 8;52 8;53 8;58 9;1 **9;7** **9;8** 10;14 10;15 10;16 10;18 10;20 11;4 11;5 11;6 11;7 11;9 11;10 11;13 11;15 11;16 12;2 12;3 12;4 12;9 12;18 12;20

Codificação	Descrição das primeiras ideias nucleares	Código das unidades de significado
I.N.1.5	Sobre a presença da indução na Investigação Matemática.	**1;38** 8;36 8;43 8;44 8;45 8;49 10;13 12;1 12;14 12;15
I.N.1.6	Sobre as semelhanças e as diferenças entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas.	1;12 2;3 **3;1** 3;10 5;4 5;11 **5;12** **5;15** 8;7 8;11 **8;14** 8;16 10;2 10;6 10;7 11;1 12;5 **12;6** **12;7** **12;13**
I.N.1.7	Sobre o ensino, a prática pedagógica e a Investigação Matemática.	3;3 3;4 3;13 3;15 4;9 4;10 4;11 4;12 **5;20** 5;31 **7;11** 8;2 8;3 12;22
I.N.1.8	Sobre a Matemática e a realidade.	1;36 **1;39** 1;41 1;42 3;2 6;4
I.N.1.9	Sobre a presença dos contextos intra e extramatemático na Investigação Matemática.	**1;29** 3;12 4;6 4;7 4;23 5;28 5;34 6;7 11;14
I.N.1.10	Sobre o aluno e a Investigação Matemática.	1;15 **1;20** **2;8** **2;9** **2;10** **2;11** **2;14** **2;16** 2;22 **2;26** **5;18** **5;19** **5;21** **5;30** 7;10 8;1 8;13 8;15 9;10 **10;3** **10;11** 12;8
I.N.1.11	Sobre a presença da experimentação na Investigação Matemática.	**1;37** 4;5 7;6 9;3 **12;16**
I.N.1.12	Sobre os tipos de Investigação Matemática.	1;22 **1;23** **1;24** **1;25** 1;26 **1;27** **1;28** **1;29** **1;31** 1;32 **1;33** **1;34** **1;35** **1;37** **1;38** **1;39** 1;40 7;1 **7;2** **7;11**
I.N.1.13	Sobre as fases/momentos/etapas da prática pedagógica com a Investigação Matemática.	**2;15** **2;16** **2;20** 2;25 2;27 4;4 8;57 9;4 10;9
I.N.1.14	Sobre a presença da observação na Investigação Matemática.	7;7 11;17 11;18 12;11
I.N.1.15	Sobre a presença da intuição na Investigação Matemática.	6;1 6;9 6;10 9;2
I.N.1.16	Sobre a presença da abstração na Investigação Matemática.	3;6 5;24 12;19
I.N.1.17	Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.	8;5 8;35 8;38 8;41

Codificação	Descrição das primeiras ideias nucleares	Código das unidades de significado
I.N.1.18	Sobre a presença da modelação matemática na Investigação Matemática.	3;7 **4;8** 6;6
I.N.1.19	Sobre a presença da aplicação da Matemática na Investigação Matemática.	**1;39** **4;2** 6;5
I.N.1.20	Sobre a Investigação Matemática e o currículo.	**1;6** **1;7** 1;46 1;47 1;48 1;49 1;50 **4;1** **4;2** **4;3** **9;7** **9;8** 9;13

Fonte: o autor

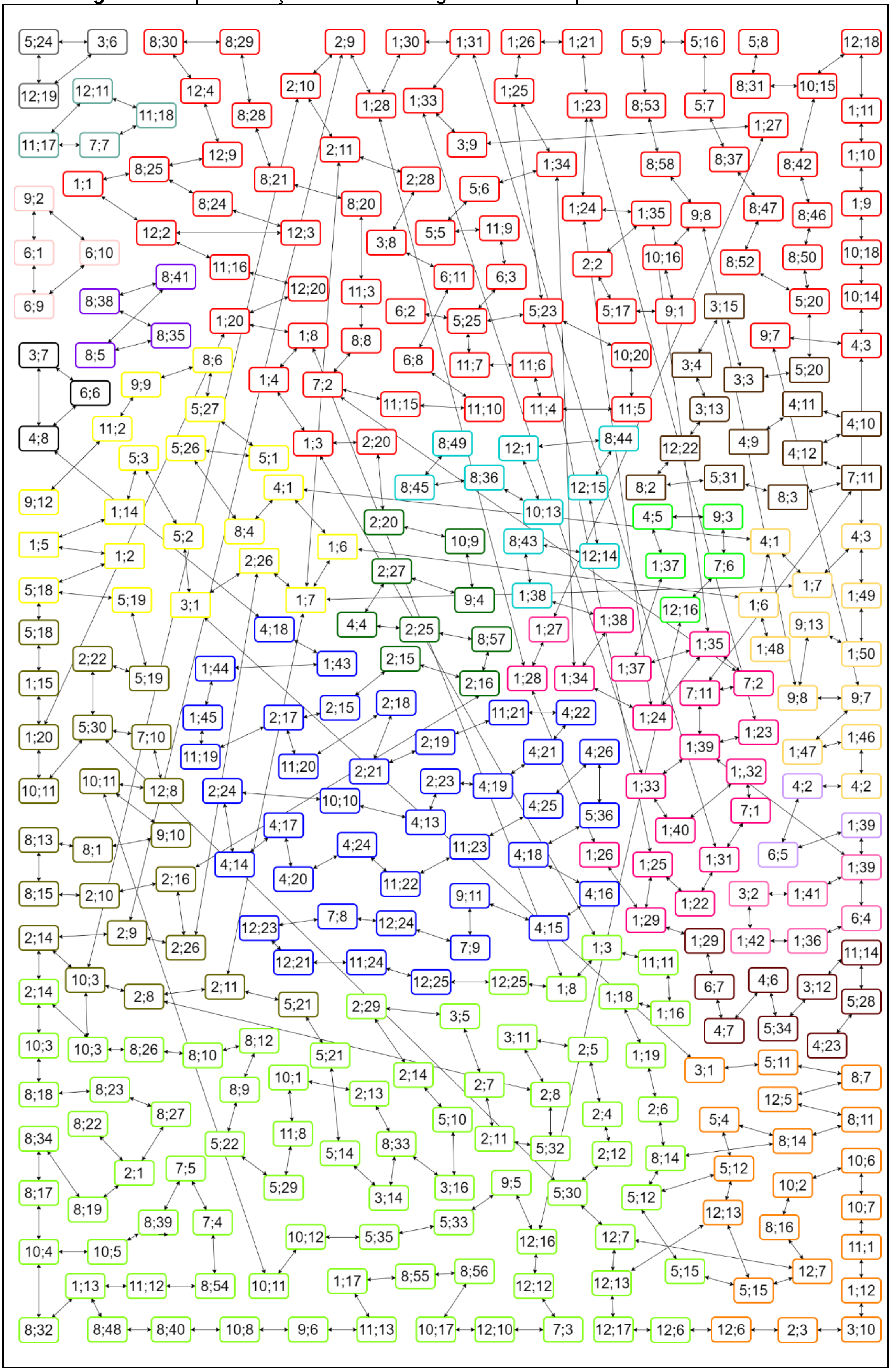
Outro modo de *ex-por* o movimento de articulações realizado na pesquisa é por meio da rede de significados[44], a qual permite visualizar o movimento fenomenológico de convergência entre as unidades de significado em um sistema geral de combinações. Este modo de *ex-por* o pensar metodológico para a construção dos núcleos de ideias, perpassando pelas análises ideográfica e nomotética, mostra o movimento analítico das articulações efetuadas em cada redução fenomenológica. Mostra o entrelaçar-se das unidades de significado e o modo que, com elas, se constituíram as ideias nucleares e os núcleos de ideias.

Na Figura 1[45], *ex-pomos* a rede de significados das primeiras ideias nucleares. Nela estão contidas todas as unidades de significado codificadas na pesquisa, as quais se interligam por flechas duplas, indicando que elas convergem mutuamente e, ao convergirem, revelam sentidos que constituem as primeiras ideias nucleares que, por sua vez, ajudam a compreender o sentido individual de cada unidade de significado articulada.

Dito de outro modo, as unidades de significado não se enquadram em significados a priori, mas convergem umas às outras de modo que o significado expresso no conjunto de ideias articuladas já está presente em cada unidade. É o circulo hermenêutico se fazendo presente no movimento de interpretação.

[44] Cf. Kluth (2011).
[45] Essa figura foi feita com <https://app.diagrams.net/>.

Figura 1: Representação da rede de significados das primeiras ideias nucleares



Fonte: o autor

As cores contidas na Figura 1, conforme legenda apresentada no Quadro 35, indicam os diferentes grupos de primeiras ideias nucleares da pesquisa.

Quadro 35: Legenda da Figura 1

I.N.1.1 Sobre a abertura e a divergência da Investigação Matemática.	I.N.1.6 Sobre as semelhanças e as diferenças entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas.	I.N.1.11 Sobre a presença da experimentação na Investigação Matemática.	I.N.1.16 Sobre a presença da abstração na Investigação Matemática.
I.N.1.2 Sobre a produção do conhecimento matemático e a Investigação Matemática.	I.N.1.7 Sobre o ensino, a prática pedagógica e a Investigação Matemática.	I.N.1.12 Sobre os tipos de Investigação Matemática.	I.N.1.17 Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.
I.N.1.3 Sobre o professor e a Investigação Matemática.	I.N.1.8 Sobre a Matemática e a realidade.	I.N.1.13 Sobre as fases/momentos/etapas da prática pedagógica com a Investigação Matemática.	I.N.1.18 Sobre a presença da modelação matemática na Investigação Matemática.
I.N.1.4 Sobre os processos matemáticos envolvidos na Investigação Matemática.	I.N.1.9 Sobre a presença dos contextos intra e extramatemático na Investigação Matemática.	I.N.1.14 Sobre a presença da observação na Investigação Matemática.	I.N.1.19 Sobre a presença da aplicação da Matemática na Investigação Matemática.
I.N.1.5 Sobre a presença da indução na Investigação Matemática.	I.N.1.10 Sobre o aluno e a Investigação Matemática.	I.N.1.15 Sobre a presença da intuição na Investigação Matemática.	I.N.1.20 Sobre a Investigação Matemática e o currículo.

Fonte: o autor

A Figura 1 é policromática, o que indica o entrelaçamento das primeiras ideias nucleares em volta de certas asserções articuladas. Segundo Kluth (2011, p. 85-86, inserção nossa),

> ao observarmos a *rede de significação*, notamos a formação de núcleos em volta de certas asserções, percebemos o entrelaçar das vivências que descortinam regiões de significação, que se referem às ideias comuns de cada núcleo, bem como aquelas falas [excertos] que aparecem em outros núcleos indicando uma intersecção nuclear. Esses núcleos eidéticos repletos de significações advindas dos sentidos dos quais são portadoras, constituem as denominadas *categorias abertas* [núcleos de ideias], que revelam a estrutura do fenômeno estudado.

Na Figura 1, é possível observar a intersecção nuclear da qual nos fala Kluth (2011), por exemplo, nas unidades de significado 1;20 e 2;15, as quais convergem para mais de um grupo de primeiras ideias nucleares, indicando a possibilidade de uma nova convergência de sentidos e exigindo a continuidade do movimento de redução fenomenológica. Aqui, mostra-se o envolvimento do pesquisador com o interrogado seguindo com a análise nomotética, que permite transcender o individualmente manifestado pela análise ideográfica, em direção aos núcleos de ideias. *Ex-pomos* esse novo momento no subcapítulo 4.3.

4.3 As segundas ideias nucleares

Essa nova redução permitiu construir grupos de ideias mais abrangentes, denominados de *segundas ideias nucleares*, as quais são denotadas pela sigla I.N.2.X (X é o número do conjunto de ideias nucleares), ou seja, I.N.2.3 diz respeito ao terceiro conjunto de ideias nucleares construído na segunda convergência.

Nos diferentes modos de dizer expostos pela linguagem, revelaram-se invariantes que dizem sobre a atividade científica de criação matemática, sobre os processos matemáticos envolvidos nessa atividade e sobre o fazer Matemática, os quais dizem da relação entre a Investigação Matemática e a produção do conhecimento em Matemática (I.N.2.1). Outras ideias nucleares evidenciaram as características de abertura e de divergência, as fases/momentos/etapas da atividade investigativa, os contextos e os objetivos de ensino. Além disso, evidenciaram que o aprender Matemática é inspirado na produção do conhecimento matemático, bem como evidenciaram o papel dos alunos e dos professores na aula com a Investigação Matemática. Tal como interpretamos, esses invariantes dizem de diferentes características da prática pedagógica com a Investigação Matemática (I.N.2.2).

Revelou-se, também, que a Investigação Matemática se relaciona com a Resolução de Problemas de modo muito próximo e tem nela o seu ponto de partida, mas se difere dela pela inclusão da formulação dos problemas e por conter questões inicialmente vagas, as quais disparam um processo mais divergente. Além disso, a Investigação Matemática se mostrou possível em torno de problemas abertos, com objetivos indefinidos, ou definidos e métodos indefinidos. Esses aspectos se mantiveram em torno de uma ideia que diz da relação entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas (I.N.2.3).

Algumas ideias nucleares evidenciaram que a Investigação Matemática não exclui as aplicações da Matemática e a modelação matemática, convergindo com a ideia de relação entre a Investigação Matemática e a aplicação da Matemática (I.N.2.4). Os invariantes que dizem da Investigação Matemática como exemplo da essência da Matemática e da verdadeira Matemática, bem como ligada a natureza da Matemática evidenciaram uma relação entre a Investigação Matemática e a Matemática (I.N.2.5). Outros invariantes mostraram a presença da indução, da intuição e da abstração. A observação e a experimentação também se mostraram presentes, mas apareceram diretamente associadas ao processo indutivo. Isso diz da presença de diferentes tipos de raciocínio na Investigação Matemática, o que implica a construção do conjunto de segundas ideias nucleares (I.N.2.6).

Duas obras acadêmicas significativas revelaram certa classificação para diferentes tarefas de Investigação Matemática. Em uma delas, afirma-se que existem três tipos de investigação e, na outra, a afirmação da existência de diferentes tipos de Investigação Matemática não foi enfática e objetiva, sendo feita com exemplos de investigação numérica, investigação geométrica e investigação em estatística. Portanto, percebemos que há, intrinsecamente, uma diferenciação entre as situações de Investigação Matemática o que permite-nos falar dos tipos de Investigação Matemática (I.N.2.7). O conjunto (I.N.2.8) congrega ideias sobre o currículo escolar e sobre diferentes compreensões acerca da Investigação Matemática como perspectiva de ensino.

Este modo de convergência que a nós se mostrou constituinte das segundas ideias nucleares, segue no Quadro 36.

Quadro 36: As segundas ideias nucleares

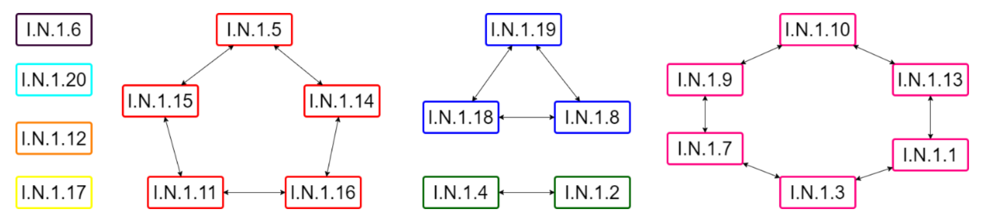
Codificação	Descrição das segundas ideias nucleares	Código das primeiras ideias nucleares
I.N.2.1	Sobre a Investigação Matemática e a produção do conhecimento em Matemática.	I.N.1.2 I.N.1.4
I.N.2.2	Sobre a prática pedagógica com a Investigação Matemática.	I.N.1.1 I.N.1.3 I.N.1.7 I.N.1.9 I.N.1.10 I.N.1.13

Codificação	Descrição das segundas ideias nucleares	Código das primeiras ideias nucleares
I.N.2.3	Sobre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas.	I.N.1.6
I.N.2.4	Sobre a Investigação Matemática e a aplicação da Matemática.	I.N.1.8 I.N.1.18 I.N.1.19
I.N.2.5	Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.	I.N.1.17
I.N.2.6	Sobre os tipos de raciocínio presentes na Investigação Matemática e no fazer Matemática.	I.N.1.5 I.N.1.11 I.N.1.14 I.N.1.15 I.N.1.16
I.N.2.7	Sobre Investigações Matemáticas específicas.	I.N.1.12
I.N.2.8	Sobre a Investigação Matemática e o currículo.	I.N.1.20

Fonte: o autor

A articulação dos significados expressos pelas primeiras ideias nucleares se configura em rede, conforme mostramos na Figura 2[46]. Assim como na Figura 1, as cores, conforme legenda, representam os diferentes grupos de segundas ideias nucleares da pesquisa. Por exemplo, a cor vermelha representa o conjunto das segundas ideias nucleares que diz sobre os tipos de raciocínio presentes na Investigação Matemática e no fazer Matemática.

Figura 2: Representação da rede de significados das segundas ideias nucleares



- I.N.2.1 Sobre a Investigação Matemática e a produção do conhecimento em Matemática.
- I.N.2.5 Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.
- I.N.2.2 Sobre a prática pedagógica com a Investigação Matemática.
- I.N.2.6 Sobre os tipos de raciocínio presentes na Investigação Matemática e no fazer Matemática.
- I.N.2.3 Sobre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas.
- I.N.2.7 Sobre Investigações Matemáticas específicas.
- I.N.2.4 Sobre a Investigação Matemática e a aplicação da Matemática.
- I.N.2.8 Sobre a Investigação Matemática e o currículo.

Fonte: o autor

[46] Essa figura foi feita com <https://app.diagrams.net/>.

As ideias nucleares articuladas nesse movimento de redução ainda deixaram transparecer significados mais abrangentes e que indicavam ideias mais estruturais, solicitando nova redução, a qual instituiu os *núcleos de ideias*. A *ex-posição* deste momento é conteúdo do subcapítulo 4.4.

4.4 Os núcleos de ideias

O movimento aqui realizado é um movimento de transição, que permitiu a saída das ideias nucleares para os núcleos de ideias. Bicudo e Klüber (2011) dizem, em nota, que

> o termo 'núcleo de ideias' refere-se à convergência de sentidos e significados que se entrelaçam de maneira a fazer emergir um significado mais abrangente que carrega consigo os primeiros significados e aponta um espectro de sentidos mais amplo, ao mesmo tempo em que mantém a articulação das ideias essenciais desse núcleo abertas a possibilidades de mais compreensões (p. 907).

Desse modo, nesta tese, a expressão *núcleo de ideias* é utilizada para dizer das ideias que permaneceram invariantes em cada ideia nuclear e, portanto, *ex-põem* os diferentes modos de dizer em uma unidade de ideias. São assim chamados, porque trazem as generalidades dos invariantes percebidos nas descrições das obras acadêmicas significativas e articulados nas ideias nucleares, ou seja, os núcleos de ideias não *ex-põem* uma unidade, mas uma multiplicidade de unidades que dizem de um mesmo aspecto do fenômeno. Desse modo, eles se constituem em grandes regiões ontológicas sobre as quais se predica, por meio da linguagem, a compreensão da Investigação Matemática na Educação Matemática.

Este movimento de redução se deu com as segundas ideias nucleares, as quais convergiram do seguinte modo: I.N.2.1, I.N.2.4, I.N.2.5 e I.N.2.6 revelaram a Investigação Matemática na Educação Matemática como um modo de fazer Matemática, invariante que compõe o núcleo de ideias N.1. A ideia nuclear contida em I.N.2.1 explicita o invariante que dá nome a esse núcleo, porém consideramos convergente a ela, a ideia nuclear I.N.2.4, uma vez que a aplicação, a modelação e a relação com a realidade dizem da produção de conhecimento em Matemática Aplicada; I.N.2.5, dado que ela diz das relações estabelecidas com a Matemática; e I.N.2.6, por evidenciar a presença do raciocínio do tipo indutivo (associado à observação e à experimentação), intuitivo e abstrato no fazer Matemática.

A ideia nuclear I.N.2.2 evidencia o trabalho científico de produção do conhecimento matemático como inspirador para a prática pedagógica com a Investigação Matemática. A ideia nuclear I.N.2.3 diz da relação da Investigação Matemática com a atividade de Resolução de Problemas. Assim, os sentidos que articulam ambos se estabelecem do ponto de vista da atividade de ensino, o que justifica a convergência. Também consideramos convergente, a ideia nuclear I.N.2.7 por explicitar os tipos de Investigações Matemáticas enquanto tarefas, cuja diferenciação leva em consideração as possibilidades de ensino, e a ideia nuclear I.N.2.8, porque diz do currículo e dos modos de conceber a Investigação Matemática enquanto perspectiva de ensino. Estes conjuntos de ideias nucleares explicitaram características que dizem de um modo de ensinar Matemática que, ao estar amparado na Investigação Matemática, conduz a interpretação no sentido de vê-la como o próprio modo, ou seja, a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática, invariante que compõe o núcleo de ideias N.2.

Desse movimento, desencadearam-se os núcleos de ideias, com os quais a compreensão do fenômeno foi se tornando clara. Esses núcleos estão dispostos no Quadro 37.

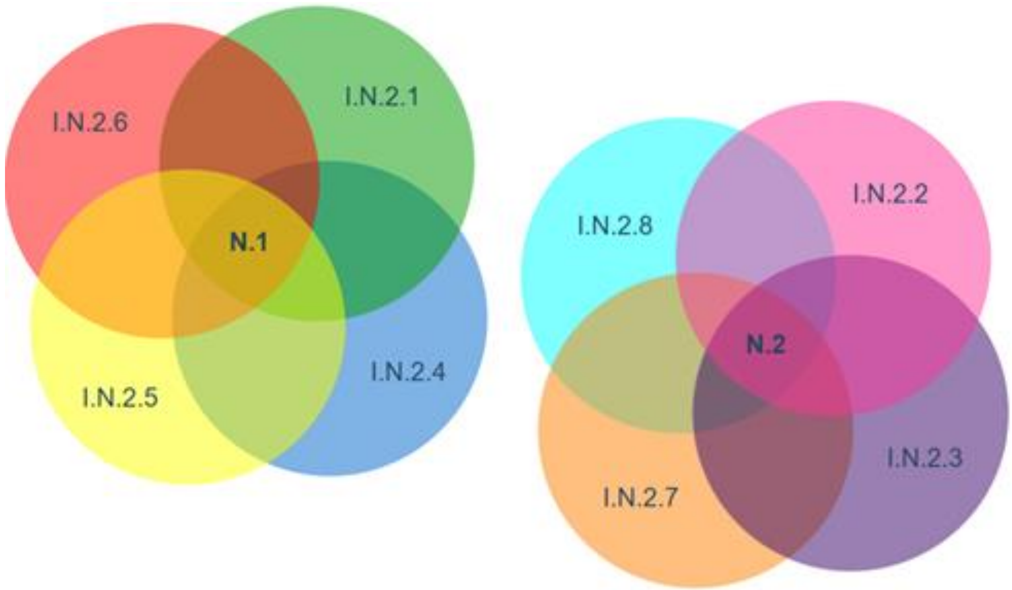
Quadro 37: Os núcleos de ideias

Codificação dos núcleos de ideias	**Descrição dos núcleos de ideias**	**Código das segundas ideias nucleares**
N.1 – A Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática	Este núcleo revela os invariantes que dizem dos aspectos epistemológicos da Investigação Matemática na Educação Matemática.	I.N.2.1 I.N.2.4 I.N.2.5 I.N.2.6
N.2 – A Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática	Este núcleo revela os invariantes que dizem dos aspectos didáticos da Investigação Matemática na Educação Matemática.	I.N.2.2 I.N.2.3 I.N.2.7 I.N.2.8

Fonte: o autor

Na figura 3[47], apresentamos os núcleos de ideias com a articulação entre as segundas ideias nucleares. As intersecções indicam que esses grupos de ideias não são isolados e tampouco iguais, mas expressam sentidos comuns e, ao mesmo tempo, diferentes, os quais configuram a compreensão do fenômeno interrogado.

Figura 3: Representação dos núcleos de ideias



- I.N.2.1 Sobre a Investigação Matemática e a produção do conhecimento em Matemática.
- I.N.2.2 Sobre a prática pedagógica com a Investigação Matemática.
- I.N.2.3 Sobre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas.
- I.N.2.4 Sobre a Investigação Matemática e a aplicação da Matemática.
- I.N.2.5 Sobre a Investigação Matemática e a Matemática.
- I.N.2.6 Sobre os tipos de raciocínio presentes na Investigação Matemática e no fazer Matemática.
- I.N.2.7 Sobre Investigações Matemáticas específicas.
- I.N.2.8 Sobre a Investigação Matemática e o currículo.

Fonte: o autor

No Quadro 38, *ex-pomos*, da esquerda para a direita, a configuração do movimento de redução fenomenológica desde as unidades de significado aos núcleos de ideias.

[47] Essa figura foi feita com <https://app.diagrams.net/>.

Quadro 38: Redução fenomenológica: das unidades de significado aos núcleos de ideias

Unidades de significado	Primeiras ideias nucleares	Segundas ideias nucleares	Núcleos de ideias
1;2 1;5 **1;6** **1;7** 1;14 **2;26** **3;1** **4;1** 5;1 5;2 5;3 **5;18** **5;19** 5;26 5;27 8;4 8;6 9;9 9;12 11;2	I.N.1.2	I.N.2.1	N.1 – A Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática.
1;1 **1;3** 1;4 **1;8** 1;9 1;10 1;11 **1;20** 1;21 **1;23** **1;24** **1;25** **1;27** **1;28** 1;30 **1;31** **1;33** **1;34** **1;35** 2;2 **2;9** **2;10** **2;11** **2;20** 2;28 3;8 3;9 **4;3** 5;5 5;6 5;7 5;8 5;9 5;16 5;17 **5;20** 5;23 5;25 6;2 6;3 6;8 6;11 **7;2** 8;8 8;20 8;21 8;24 8;25 8;28 8;29 8;30 8;31 8;37 8;42 8;46 8;47 8;50 8;52 8;53 8;58 9;1 **9;7** **9;8** 10;14 10;15 10;16 10;18 10;20 11;4 11;5 11;6 11;7 11;9 11;10 11;13 11;15 11;16 12;2 12;3 12;4 12;9 12;18 12;20	I.N.1.4		
1;36 **1;39** 1;41 1;42 3;2 6;4	I.N.1.8	I.N.2.4	
3;7 **4;8** 6;6	I.N.1.18		
1;39 **4;2** 6;5	I.N.1.19		
8;5 8;35 8;38 8;41	I.N.1.17	I.N.2.5	
1;38 8;36 8;43 8;44 8;45 8;49 10;13 12;1 12;14 12;15	I.N.1.5	I.N.2.6	
1;37 4;5 7;6 9;3 **12;16**	I.N.1.11		
7;7 11;17 11;18 12;11	I.N.1.14		
6;1 6;9 6;10 9;2	I.N.1.15		
3;6 5;24 12;19	I.N.1.16		
1;3 **1;8** 1;13 1;16 1;17 1;18 1;19 2;1 2;4 2;5 2;6 2;7 **2;8** 2;11 2;12 **2;14** 2;29 3;5 3;11 3;14 3;16 5;10 **5;12** 5;13 5;14 **5;15** **5;21** 5;22 5;29 **5;30** 5;32 5;33 5;35 7;3 7;4 7;5 8;9 8;10 8;12 **8;14** 8;17 8;18 8;19 8;22 8;23 8;26 8;27 8;32 8;33 8;34 8;39 8;40 8;48 8;54 8;55 8;56 9;5 9;6 10;1 **10;3** 10;4 10;5 10;8 **10;11** 10;12 10;17 11;3 11;8 11;11 11;12 **12;6** **12;7** 12;10 12;12 **12;13** **12;16** 12;17 **12;25**	I.N.1.1	I.N.2.2	N.2 – A Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática.
1;43 1;44 1;45 **2;15** 2;17 2;18 2;19 2;21 2;23 2;24 **4;8** 4;13 4;14 4;15 4;16 4;17 4;18 4;19 4;20 4;21 4;22 4;24 4;25 4;26 5;36 7;8 7;9 9;11 10;10 10;19 11;19 11;20 11;21 11;22 11;23 11;24 12;21 12;23 12;24 **12;25**	I.N.1.3		
3;3 3;4 3;13 3;15 4;9 4;10 4;11 4;12 **5;20** 5;31 **7;11** 8;2 8;3 12;22	I.N.1.7		
1;29 3;12 4;6 4;7 4;23 5;28 5;34 6;7 11;14	I.N.1.9		
1;15 **1;20** **2;8** **2;9** **2;10** **2;11** **2;14** **2;16** 2;22 **2;26** **5;18** **5;19** **5;21** **5;30** 7;10 8;1 8;13 8;15 9;10 **10;3** **10;11** 12;8	I.N.1.10		
2;15 **2;16** **2;20** 2;25 2;27 4;4 8;57 9;4 10;9	I.N.1.13		
1;12 2;3 **3;1** 3;10 5;4 5;11 **5;12** **5;15** 8;7 8;11 **8;14** 8;16 10;2 10;6 10;7 11;1 12;5 **12;6** **12;7** **12;13**	I.N.1.6	I.N.2.3	
1;22 **1;23** **1;24** **1;25** 1;26 **1;27** **1;28** **1;29** **1;31** 1;32 **1;33** **1;34** **1;35** **1;37** **1;38** **1;39** 1;40 7;1 **7;2** **7;11**	I.N.1.12	I.N.2.7	
1;6 **1;7** 1;46 1;47 1;48 1;49 1;50 **4;1** **4;2** **4;3** **9;7** **9;8** 9;13	I.N.1.20	I.N.2.8	

Fonte: o autor

CAPÍTULO 5

A HERMENÊUTICA QUE *EX-PÕE* A COMPREENSÃO DO *ISTO* INTERROGADO

Neste capítulo, *ex-pomos* aquilo que na pesquisa foi visto e sentido, de modo a cintilar as estruturas gerais do fenômeno interrogado. Aquilo que se mostrou significativo sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática com os núcleos de ideias N.1 e N.2, agora se abrem à interpretação hermenêutica à luz da interrogação: *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática?* Avançamos com a compreensão, visando expressar os sentidos do *isto* que interrogamos na dimensão do fazer Matemática e do ensinar Matemática.

Pontuamos que não negamos a existência de uma epistemologia por detrás do ensinar, o que poderia diluir o ensinar Matemática na dimensão do fazer Matemática. Contudo, o fenômeno é multifacetado e constituído por dois aspectos que, tal como compreendemos, são inseparáveis, mas dintiguínveis entre si, são eles: os epistemológicos e os didáticos. Isso justifica a construção dos dois núcleos de ideias.

As frases destacadas com *itálico* e entre “aspas duplas” acompanhadas da referência (AUTOR, ano, página), são excertos destacados tal como estão escritos nos textos das obras acadêmicas significativas, e as frases que se encontram em *itálico* e entre “aspas duplas” acompanhados do cógido (x;y), correspondem às unidades de significado, trazidas com a intenção de mostrar o solo em que as compreensões explicitadas se assentam.

5.1 Núcleo de ideias N.1: a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática

Este núcleo evidencia, sobretudo, que a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática. O termo *fazer* destaca uma dimensão epistemológica que diz da gênese, das condições, da legitimidade e da estruturação que a Matemática se mostra e se presentifica na Investigação Matemática. Enquanto um modo de produção do conhecimento matemático, uma das expressões do fazer encontra-se na própria Matemática, manifestando-se como exemplo da sua natureza e essência, e constituinte da verdadeira Matemática, tal como sugerem as seguintes unidades de significado: *“a Investigação Matemática está diretamente relacionada com a natureza da Matemática” (8;5); “no discurso oficial, a Investigação Matemática é a essência da Matemática” (8;35); “no discurso profissional, a Investigação Matemática constitui a verdadeira Matemática” (8;38); “diferentes abordagens consideram a Investigação Matemática um exemplo da verdadeira Matemática” (8;41).*

Com elas, vemos a presença de um discurso sobre o fazer Matemática que considera a natureza, a essência e uma verdadeira Matemática como alicerces para a Investigação Matemática. Esse modo de enunciá-la repousa sobre uma concepção de Matemática que é própria de quem discursa, o que nos faz perguntar: o que é a verdadeira Matemática? Qual é a sua natureza? E a sua essência?

De acordo com Inwood (2002), *essência* “é a ‘natureza interna ou princípio’ de uma coisa. [...] ‘sua natureza básica’, ‘sua natureza essencial’, ‘ser interior’” (p. 54). Pode ser entendida como a substantivação do verbo *wesen*, que originariamente significa modos de ser e, portanto, refere-se ao *ser-o-que* e ao *ser-como* de algo, isto é, “se indagamos acerca da ‘essência’ no sentido usual da questão, a questão é sobre o que ‘faz’ um ente ser o que ele é, portanto sobre o que perfaz seu ser-o-que” (INWOOD, 2002, p. 55).

Para Aristóteles, a verdadeira essência de um Ser ou de uma coisa, a qual chama de essência necessária ou substância, diz daquilo que o Ser ou a coisa não podem não ser (ABBAGNANO, 2010). Em conformidade, São Tomás entende a essência como “a ‘qüididade’ ou ‘natureza’ que compreende tudo o que está expresso na definição da coisa” (ABBAGNANO, 2010, p. 362). Com esses entendimentos, interpretamos que a *essência* diz do modo de ser, das características imanentes de algo; está ligada à natureza dos entes, enquanto estado que institui os modos de ser *o que* e *como* são.

A palavra *natureza* “vem do latim *natura*, ‘nascimento, característica, ordem natural etc.’, e esta, por sua vez, de nasci, ‘ser nascido, crescer, ser produzido’” (INWOOD, 2002, p. 125). Esse significado alude para as qualidades inatas de um Ser, ou de algo, ao nascer, isto é, *natureza* designa uma condição própria de existência, convergindo com o entendimento de *essência*, antes exposto. Além disso, está associada ao nascer como condição onde o Ser se constitui e encontra significado.

Portanto, a natureza de um Ser ou de uma coisa pode ser compreendida como a essência que diz do seu *ser-o-que* e do seu *ser-como*, ao nascer; em outras palavras, é o modo de ser, do Ser, ao nascer. Assim, ao dizer que o fazer Matemática está ligado à natureza da Matemática, a ideia enunciada o conecta a essência da Matemática, ao modo de ser da Matemática em seu estado nascente, em sua origem. Heidegger (2005) nos diz que "origem significa aquilo a partir do qual e através do qual uma coisa é o que é, e como é. Ao que uma coisa é como é, chamamos a sua essência. A origem de algo é a proveniência da sua essência" (p. 11). Com isso nos perguntamos *o que é* e *como é* a verdadeira Matemática que a Investigação Matemática exemplifica?

Vemos, em diferentes asserções articuladas, que o trabalho investigativo se relaciona diretamente com a experimentação de tal maneira que as ideias matemáticas emergentes são frutos das tentativas de compreensão experimentadas pelos alunos. De igual modo, a observação também se mostra presente no fazer Matemática e é fundamental na fase inicial para suscitar alguma conjectura, bem como para os alunos dizerem o que compreendem ao estarem a fazer Matemática (4;5) (9;3) (7;7) (11;17) (12;11).

Observar e experimentar são ações intimamente ligadas ao nosso modo de ser no mundo, e ao que pese ao fazer Matemática, ajudam a estabelecer intuições que levam à formulação de conjecturas. Todavia, na Investigação Matemática, é necessário validá-las por meio da demonstração conforme depreendemos das seguintes unidades de significado: *"demonstrar é um objetivo da Investigação Matemática" (6;3); "o fazer investigativo aponta para uma demonstração" (6;8); "as demonstrações são importantes na Investigação Matemática" (11;9); "fazer Investigação Matemática envolve a demonstração" (3;9); "a Investigação Matemática é uma atividade que enfatiza o processo de demonstrar" (5;9).* O sentido expresso por essas unidades, mostra certa desvalorização do aspecto experimental do fazer Matemática em detrimento do aspecto dedutivo. Ao que nos parece, a observação e a experimentação disparam o fazer Matemática, mas são abandonadas pelo fazer que demonstra e generaliza.

Com as obras acadêmicas significativas, vemos, também, se revelar a presença do pensamento intuitivo na Investigação Matemática (6;9). Essa ideia é corroborada por outras unidades de significado, como: *"o trabalho investigativo se relaciona diretamente com a intuição" (9;2); "a explicação intuitiva reforça a veracidade das conjecturas, mas não as validam" (6;10)* e *"a intuição funcionou na atividade de Investigação Matemática" (6;1).* Este invariante solicitou um esclarecimento do sentido do termo *intuição*[48].

Para a Psicologia Analítica, a intuição é uma função psíquica associada ao campo do irracional e "trata-se de uma apreensão perceptiva dos fenômenos [...] pela via inconsciente" (RAMOS, 2005, p. 141). Com esse entendimento, a intuição se mostra um visar súbito e inconsciente do Ser, é uma clarividência sem recorrência a qualquer recurso inteligível, cuja apreensão dos fenômenos é um dar-se imediato na esfera do sensível e peculiar apenas para aquele que se olha.

Ao longo da história da Filosofia, a intuição foi entendida como "uma forma de conhecimento superior e privilegiado" (ABBAGNANO, 2007, 581), cuja relação entre o sujeito e o objeto é caracterizada pela imediação. Para Descartes, a intuição é uma faculdade mental que "estende-se às coisas [...] e a tudo o que o intelecto experimenta com precisão em si mesmo ou na imaginação" (ABBAGNANO, 2007, p. 581). Desse modo, ela é uma forma de pensamento particular e privilegiada da consciência humana, sob a qual as verdades são apreendidas pelo intelecto por si mesmas, isto é, o objeto do conhecimento está imediatamente presente.

Para Kant (2001), a intuição é uma forma pura de pensamento através da qual o espírito percebe, organiza e compreende, não como uma faculdade passiva, mas como um modo da ação criativa. Ele acreditava que a intuição opera como um conhecimento a priori, fundamentado na razão e independente da experiência, e que a Matemática

> oferece-nos um exemplo brilhante de quanto se pode ir longe no conhecimento *a priori*, independente da experiência. É certo que se ocupa de objetos e de conhecimentos, apenas na medida em que se podem representar na intuição. Mas facilmente se deixa de reparar nesta circunstância, porque essa intuição mesma pode ser dada *a priori* e, portanto, mal se distingue de um simples conceito puro (KANT, 2001, p. 67).

[48] Advertimos que a intuição não está, aqui, sendo compreendida no sentido fenomenológico, como ato intencional que visa o percebido em atos de consciência, mas como ato não intencional que apreende um objeto sem recorrer a qualquer recurso inteligível.

Com as palavras de Kant (2001), vemos que a intuição independe da experiência e, no que tange à Matemática, os objetos do conhecimento são sempre juízos intuitivos puros a priori e, portanto, não empíricos. Por isso, para Kant (2001), a Matemática é o exemplo mais brilhante de uma razão pura. Mas, de que intuição (ou entendimento de intuição) nos falam os textos das obras acadêmicas significativas? Seria a intuição uma faculdade psicológica? Seria a faculdade mental irracional de Descartes? Seria a razão pura de Kant?

Em um retorno às obras acadêmicas significativas, encontramos uma analogia entre a intuição e um dos sentidos do corpo humano – o faro – conforme sugere o excerto: *“o ‘faro’ (ou intuição) é um dos principais amigos do investigador; sem ele, não vai longe. Como se adquire? Não sei, mas sei que a experiência do nosso trabalho e do trabalho alheio ajuda a desenvolvê-lo” (BRAUMANN, 2002, p. 24).*

Interrogando esse excerto, compreendemos que ao ser perguntado: *como se adquire?*, já se elimina toda a possibilidade de a intuição ser um pensar súbito inconsciente, tal como compreende a Psicologia Analítica. De igual modo, as ideias cartesianas e kantianas, que a concebem como uma forma pura de pensamento independente da experiência, em que a Matemática se apresenta pelo espírito, também não se sustentam.

Além disso, ao ser respondido que a experiência com o próprio trabalho e com o trabalho alheio ajudam a desenvolvê-la, evidencia-se que a intuição “é uma qualidade psíquica [...] mas que, em um qualquer instante, se consubstancia no acervo de atitudes derivadas da experiência matemática” (WILDER, 1967, p. 606). Essa ideia de intuição é favorecida pelos relatos biográficos de Poicaré; a exemplo deste que segue:

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que depois vim a chamar funções fuchsianas. Estava, então, na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia como me escapavam até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica (POICARÉ, 1996, p. 9).

Outro aspecto que constitui esse núcleo evidencia que a Investigação Matemática envolve a abstração (3;6). O sentido léxico do termo *abstração* remete para o que não é concreto, pertencente ao plano do irreal. No contexto da Filosofia, designa “a operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc, e isolada de outras coisas com que está em uma relação qualquer” (ABBAGNANO, 2007, p. 4). Vemos aqui dois sentidos para a abstração: o primeiro como algo não concreto e o segundo como separação, enquanto resultado de uma operação de escolha.

O termo *isolar* implica em separar, romper (FERREIRA, 2010). Neste mesmo sentido, Japiassú e Marcondes (2001) esclarecem que a abstração é a “operação do espírito que isola, para considerá-Io à parte” (p. 7). Também, a abstração pode ser definida como o “processo pelo qual o espírito se desvincula das significações familiares do vivido e do mundo das percepções para construir conceitos” (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001, p. 7). Com isso, vemos um terceiro sentido para a abstração e, tal como o compreendemos, a abstração é uma operação (mas não de escolha) que rompe com as relações entre coisas, enfocando-as isoladamente.

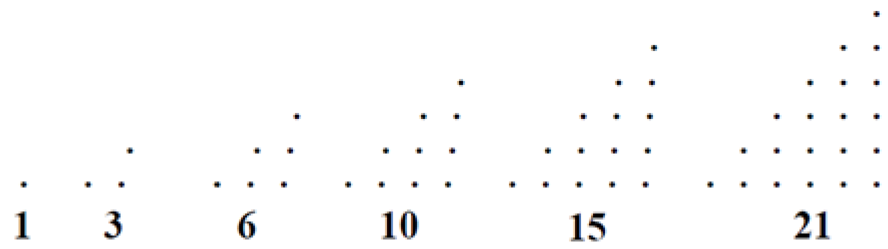
Vejamos o relatado em uma obra acadêmica significativa: *“representemos por $N = N(t)$ o tamanho da população no instante $t \geq 0$ e seja $N(0) = N_o > 0$ a população inicial. Neste modelo supõe-se que a taxa instantânea (velocidade) de crescimento do tamanho da população, isto é, a derivada $dN(t)/dt = rN(t)$, onde r é a constante de proporcionalidade” (BRAUMANN, 2002, p. 10)*. Esse excerto evidencia que a situação que disparou a Investigação Matemática em questão, deriva da realidade, porém os dados são destituídos de seus significados extraídos do real e explorados como elementos puramente matemáticos, isto é, são abstraídos (separados) do mundo físico no evento do fazer.

Isso aponta para um modo de fazer Matemática situado na fronteira entre o mundo real e o mundo ideal da Matemática, cujo conhecimento matemático produzido é uma representação que apenas reflete essas outras coisas com as quais a Matemática está relacionada, em uma linguagem própria, ou seja, a escrita matemática é o mecanismo para representar as coisas do mundo real e evadir do concreto.

O pensamento indutivo também se revela presente nesse modo de fazer Matemática e se expressa por meio de afirmações que convergem, em sentido, com a seguinte unidade de significado: *“os processos envolvidos na Investigação Matemática são fortemente indutivos” (10;13)*. Como exemplo desse pensar, consideremos a situação apresentada no Quadro 39.

Quadro 39: Tarefa de Investigação Matemática

Os números triangulares podem “escrever-se” formando triângulos. Por exemplo:



- Escreve os cinco números triangulares que se seguem ao 21.
- Investiga um processo rápido de descobrir se um número qualquer é triangular ou não.
- Regista as tuas conclusões.

Fonte: Ponte et al. (1998, p. 49)

Seria arduamente trabalhoso construir essa sequência de modo a registrar, por exemplo, o centésimo número triangular, utilizando-se de bolinhas, e para ela fazer alguma inferência. Igualmente, seria para os demais números triangulares. Porém, a observação dos casos particulares trazidos no enunciado da situação, e talvez de mais alguns, sugere certo padrão que é identificado, via de regra, por meio de um processo indutivo (8;45). Recorrendo-se à generalização, é possivel ampliar as características explicitadas pelo padrão, para os casos inobserváveis e afirmar que *todo número triangular é...*, ou seja, se revela um fazer capaz de “estabelecer uma proposição geral com base no conhecimento de dados singulares” (FERREIRA, 2010, p. 422). Desse modo, o processo indutivo inicia com casos particulares em direção ao caso geral (8;44).

Com Bicudo (2013), compreendemos que um dos aspectos desse modo de fazer Matemática vai “da multiplicidade dos aspectos percebidos na empiria, para a unidade visível na multiplicidade [...] que transcende os dados empíricos e reúne aspectos do visto em uma síntese articuladora” (p. 21-22). Dito de outro modo, o fazer Matemática da Investigação Matemática não só envolve a generalização, como a enfatiza e para ela se orienta. (1;25) (3;8) (5;6) (5;23) (8;37) (12;18). Hermeneuticamente, abre-se a compreensão de que essa esquematização epistemológica que orienta a indução, “implica a generalização sobre a base de observações causais, e pretende validez enquanto não apareça alguma instância contrária” (GADAMER, 1999, p. 515) sustentando, assim, a inferência do *vale sempre*; ou como evocam Japiassú e Marcondes (2001), é um fazer que “procede à generalização a partir da repetição e da observação de uma regularidade em um certo número de casos” (p. 103).

Ao ser analisada uma prática de ensino com a tarefa apresentada no Quadro 39, afirma-se que *“os alunos tendem a recorrer muito mais a processos intuitivos e informais do que a usar conceitos formais” (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 51).* Com isso, compreendemos que a busca de generalidade na construção dos números triângulares pode ser intuitiva no sentido de ir buscando-se o padrão geométrico, vendo o que se configura como uma geometria de forma.

Segundo Abbagnano (2007), *generalizar* significa “ampliar um domínio com a introdução de novos símbolos, de tal modo que as leis válidas no domínio originário continuem valendo no domínio mais amplo” (p. 478) e “algumas vezes também se dá o nome de G. [generalização] à *indução*” (p. 478, inserção nossa). Em Japiassú e Marcondes (2001), encontramos a seguinte definição para o termo *generalizar*: “operação mental que consiste em estender a toda uma classe de seres ou de fenômenos aquilo que é constatado em alguns seres” (p. 85).

O termo *objetivo* é um substantivo do verbo transitivo direto *objetivar* que significa “ter por fim; pretender” (FERREIRA, 2010, p. 539). Ao ser adjetivado como *grande*, há uma imposição de intensidade que indica uma transcendência de parâmetros, ou seja, é um objetivo mais amplo se comparado com outros. Portanto, a generalização se destaca para além de intuir e abstrair e se revela como propósito desse fazer, ainda que intuitivo e abstrato, e revela um fazer que preza por uma sistematização expressa em linguagem matemática.

Em uma obra acadêmica significativa, afirma-se que *“ao desenvolverem-se actividades de investigação em diversas áreas da Matemática, encontram-se, frequentemente, regularidades e padrões, sendo portanto, realçada essa sua marca distintiva” (OLIVEIRA, 1998, p. 16-17).* Com isso, compreendemos que observar e estudar regularidades e padrões são ações que configuram, também, esse modo de fazer Matemática e, mais que isso, destacam a sua marca. O termo *marca* significa o “sinal distintivo de um objeto [...] qualidade” (FERREIRA, 2010, p. 488). Tal possibilidade leva-nos a questionar: seria esse fazer que permite diferenciar a Investigação Matemática de outras perspectivas, no contexto da Educação Matemática?

Nas obras acadêmicas significativas, em geral, os padrões e as regularidades associam-se à generalização, enquanto possibilidade de reunir os aspectos observados na multiplicidade em uma unidade, geralmente algebrizada, isto é, propõem um esforço para *ver* a regra que está implicitamente presente nos casos particulares e que os une em uma representação única. Assim, ser regular é atender a uma condição indispensável que permite ser percebido "numa única representação e determinar a multiplicidade em sua forma" (ABBAGNANO, 2007, p. 841). Isso mostra um modo de fazer Matemática que busca por um padrão que possa expressar as regularidades observadas em uma determinada linguagem – a da Matemática. No contexto da Educação Matemática, é um modo de construir essa linguagem no campo algébrico e suas representações simbólicas e, portanto, essencialmente abstrato.

Vemos, também, que na Investigação Matemática, o conhecimento matemático é finalmente constituído pela demonstração ao se afirmar que *"o fazer investigativo aponta para uma demonstração" (6;8)*, uma vez que *"em Matemática, porém, só se pode dar como certo aquilo que se prova" (BRAUMANN, 2002, p. 15).* Isso aponta para um fazer que é validado somente se houver prova. Com isso, nos perguntamos sobre o que é a demonstração/prova matemática no texto das obras acadêmicas significativas e, junto a elas, encontramos excertos como:

"*Contudo, é essencial partilhar significados, promover a utilização de uma linguagem matemática mais correcta, compreender a importância das demonstrações — em suma, avançar para a formalização" (PONTE; FERREIRA; BRUNHEIRA; OLIVEIRA; VARANDAS, 1999, p. 17).*

"O principal problema do ensino da Matemática não é propriamente o dos conteúdos curriculares, mas o de não desenvolver a capacidade de dedução matemática" (BRAUMANN, 2002, p. 21).

"Há quem diga que Matemática é demonstração. Não fujamos das demonstrações. Elas são essenciais para se perceber a essência da Matemática e não podem ser substituídas por exemplos ou ilustrações (fazê-lo induz os estudantes a pensar que tal é um método de demonstração logicamente

aceitável)" (BRAUMANN, 2002, p. 5).

"Passando no teste haverá que demonstrar a sua veracidade para deixar de ser 'apenas' uma conjectura, e tornar-se uma propriedade estabelecida pelo método matemático" (OLIVEIRA, 1998, p. 15).

"Perto do final da aula, a professora reafirma que seria necessário demonstrar matematicamente a veracidade da conjectura" (OLIVEIRA, 1998, p. 183).

Nesses diferentes dizeres, há indícios de que uma demonstração é um processo que avança para a formalização do fazer Matemática, por meio de deduções e argumentos lógicos. A verdade enunciada na demonstração é, então, uma propriedade derivada do próprio modo produtor e, tal como dita a racionalidade da Ciência ocidental, é comunicada em enunciados proposicionais que a cristalizam *ad aeternum.* Para Bicudo e Garnica (2011), a demonstração carrega em si "o caráter mítico da Matemática, sempre alimentado por uma proliferação desmedida da ideologia da certeza, pelas significações unívocas de seus conceitos e por ser caráter de eternidade espaço temporal" (p. 85).

No texto de Braumann (2002), vemos a necessidade de desenvolver, nos e com os alunos, a capacidade de dedução matemática, ao ser afirmado que *"isso exige, entre muitas outras coisas, que não expulsemos as demonstrações do ensino da Matemática e que proporcionemos ao estudante oportunidade de construir ele próprio demonstrações" (BRAUMANN, 2002, p. 21).* Com esse excerto, compreendemos que é o aluno quem deve construir as demonstrações que, por sua vez, se associam ao pensamento dedutivo. Entretanto, nos perguntamos: os alunos devem construí-las a seus modos, ou ao modo dedutivo? Assim, compreendemos que se faz necessário esclarecer a diferença entre o aluno construir, ele próprio, demonstrações ao modo dedutivo, e construir, ele próprio, demonstrações, não necessariamente ao modo dedutivo.

Uma segunda possibilidade compreensiva das demonstrações mostrou-se, implicitamente, em alguns excertos que as apontam, no contexto escolar, como justificativas que se utilizam de argumentos plausíveis (11;15) (11;16) e, explicitamente, em uma única obra, conforme segue: "*o foco, ao nível do ensino da Matemática, se deve deslocar do conceito de provas/demonstrações rigorosas, para um conceito de prova/demonstração como argumento convincente" (BROCARDO, 2001, p. 118).* Com isso, vemos indícios de as demonstrações serem flexibilizadas, ao nível do investigador, retirando o peso do rigor e da formalização Matemática, sem retirar a sua importância enquanto capacidade de comunicação matemática na atividade de Investigação Matemática.

É verdade que a intuição opera no processo de criação da Matemática, como revelam os relatos de Connes em Gravina (2001), Braumann e Andrew Wiles em Singh (2014), todavia, “os matemáticos odeiam fazer uma declaração falsa. É claro que eles empregam a intuição e a inspiração, mas declarações formais precisam ser absolutas” (SINGH, 2014, p. 8). Nas obras acadêmicas significativas, vemos a afirmação de Singh (2014) se presentificar em unidades de significado que evidenciam que o trabalho investigativo se relaciona diretamente com a intuição, porém, nele, a explicação intuitiva não é suficiente para validar a veracidade das conjecturas, sendo necessária a argumentação e a prova formal (6;10) (9;2) (11;7).

Considerando que a conjunção *mas* na estrutura do texto tem a função de introduzir uma frase que exprime oposição ou restrição ao que foi dito (FERREIRA, 2010), destacamos da unidade de significado (6;10), que a intuição e a demonstração se contrastam de modo que as declarações formais absolutas, entendidas como demonstrações, não se restringem à explicações intuitivas. Com esse pensar, vemos se atualizar a afirmação de Poincaré com referência à Bernard: “demonstra-se com a lógica, mas só se inventa com a *intuição*” (ABBAGNANO, 2007, p. 583).

Isso coloca em voga a questão da verdade do conhecimento matemático e, com aquilo que tem permanecido invariante nos diferentes modos de dizer, nas obras acadêmicas significativas, compreendemos que a verdade se instaura por demonstrações e, portanto, reside na correspondência entre o enunciado na demonstração e o ente que se enuncia. Para Heidegger (2015) essa é a concepção clássica de verdade que se resume em uma adequação entre o intelecto e o ente (*adaequatio intellectus et rei*), literalmente traduzido como “conformidade da(s) coisa(s) e do intelecto” (INWOOD, 2002, p. 196), cujo pronunciamento da verdade está no enunciado, no qual o ente é apenas representado. Heidegger (2015) nos adverte que isso “é a indicação de que a ‘verdade’ pertence ao enunciado, a indicação de que, em seu modo de ser, o enunciado é um descobrimento” (p. 300) e que, muitas vezes, a verdade não tem esse conteúdo e não se expressa em enunciados válidos.

Com o dito nas obras acadêmicas significativas, compreendemos que a Investigação Matemática na Educação Matemática visa a generalização, buscando a validação para as conjecturas construídas, ou seja, o modo de fazer Matemática caminha para a demonstração, de modo que o aluno seja capaz de utilizar uma linguagem simbólica sistematizada. Contudo, o entendimento sobre o que vem a ser a demonstração não é explícito nas obras acadêmicas significativas, tampouco abre-se uma discussão do rigor com que ela deva ser feita (ou requerida) nos diferentes níveis de escolaridade. Essa ausência constitui-se em uma demanda de pesquisas e debates no campo da Investigação Matemática na Educação Matemática.

Além disso, vemos que *"o processo de uma atividade de Investigação Matemática segue a sequência conjectura, generalização, demonstração" (8;42).* Embora antes das conjecturas haja *insights*, imaginações, suposições turvas, intuições, experimentações e, entre as conjecturas e os testes, haja incertezas e, entre os testes e as demonstrações, mais incertezas, recuos, erros, falseamentos e, só depois de vencer o abismo entre o *insight* do resultado e a demonstração é que a conjectura se torna válida, os dados evidenciam que o fazer Matemática se revela *standard;* um fazer cujo *"estilo conjectura-teste-demonstração é uma forte característica" (1;1).* Nessa afirmação, nos salta aos olhos o termo *estilo*, que, em Abbagnano (2010), é assim definido: "conjunto de características que distinguem determinada forma de expressão [...] uma unidade de formas, de tônicas e de atitudes dominantes, numa complexa variedade de formas e conteúdos" (p. 375).

Ao ser dito que as conjecturas, os testes e as demonstrações compõem o estilo desse modo de fazer Matemática, revela-se a singularidade da sua configuração; as características que lhe conferem especificidade e que o distinguem de outros. Mesmo que essa adjetivação (estilo) não apareça nas demais obras, a presença dessas características é afirmação recorrente, estando, necessariamente, presentes na Investigação Matemática e, junto à generalização, são adjetivadas como *fundamentais* e *importantes* (2;28) (10;14) (10;20). Esse modo de caracterizar a Investigação Matemática na Educação Matemática revela que as conjecturas, os testes, as demonstrações e as generalizações estão em seu cerne enquanto um modo de fazer Matemática. Ao estar no cerne, significa que são o âmago do processo que produz conhecimento matemático.

Com Vilela (2007), compreendemos que esse caráter abstrato e genérico, favorecido pelo procedimento que conjectura, testa, generaliza e demonstra, contribui para a idéia da pureza da Matemática. Ainda segundo Vilela (2007, p. 196), "a pureza também é promovida pelo instrumento de prova do trabalho matemático", isto é, pela demonstração, o que nos faz perguntar: seria essa a verdadeira Matemática, da qual nos falam os textos das obras acadêmicas significativas, ao dizerem que *"para os educadores progressistas, a Investigação Matemática se restringe ao contexto da Matemática Pura" (3;12)*?

Buscando o sentido pelo qual o termo *puro* pode ser considerado, encontramos no dicionário de Filosofia a seguinte definição:

> O que não está misturado com coisas de outra natureza, ou, com mais exatidão, o que é constituído de modo rigorosamente conforme à própria definição. [...] Na linguagem comum, chama-se P. [pura] uma ciência ou uma disciplina tratada teoricamente, sem consideração de suas possíveis aplicações (ABBAGNANO, 2007, p. 813-814, inserção nossa).

Ao referir-se à Matemática, o adjetivo *puro* revoga toda possibilidade de inserção de elementos de natureza não matemática. Condiciona a existência da Matemática a ela mesma, preocupada tão somente com o seu desenvolvimento teórico e não com a sua aplicabilidade, concebendo a ideia de uma Matemática teórica, sem misturas e, portanto, pura. Isso alude a um fazer centrado nas estruturas e nas propriedades de sistemas matemáticos, atribuindo-lhe um caráter metamatemático.

Vemos a ideia de pureza da Matemática se revelar em unidades de significado como: *"a investigação Matemática possibilita conexões entre conceitos matemáticos" (4;6); "o contexto exclusivamente matemático é predominante na Investigação Matemática" (5;34)* e *"problemas puramente matemáticos são necessários à Investigação Matemática" (6;7).* Contudo, também afirma-se que *"a aplicação da Matemática não deve ser excluída da Investigação Matemática" (6;5).*

Com a unidade de significado (6;5), a aplicação da Matemática se revela, também, uma possibilidade de fazer Matemática, retirando a sua exclusividade do contexto da Matemática Pura e trazendo a possibilidade de produzir conhecimentos na relação entre a Matemática e a realidade e entre a Matemática e outros campos científicos. No excerto associado à unidade de significado (6;5), a relação entre a Matemática e outros campos científicos se mostra simbiótica. *Simbiose* reflete uma interação de coisas que coexistem. Do ponto de vista biológico, é um mutualismo obrigatório, uma relação funcional estreita entre dois organismos que interagem (CHATELARD; CERQUEIRA, 2015). Esta *ex-posição* nos remete ao pensamento de Braumann (2002, p. 6):

> Dizer que a Matemática é demonstração é verdade, uma verdade essencial, mas só uma pequena parte da verdade. [...] Uma outra parte da Matemática é a de construir teorias ou modelos matemáticos para estudar certas realidades ou fenómenos da natureza.

Ao considerar a aplicação da Matemática presente na Investigação Matemática, há a implicação de um fazer que extrapola os limites da própria Matemática e alcança outros contextos, seja para nutri-los ou para deles se nutrir, e que enfatiza as aplicações e relações da Matemática no e com o mundo.

No léxico, o termo *fazer* significa "dar existência ou forma a; criar [...] dar origem a; produzir" (FERREIRA, 2010, p. 342) e o termo *aplicar* significa "pôr em prática; empregar" (FERREIRA, 2010, p. 54). Em primeira análise, esses verbos parecem indicar ações distintas, mas interrogando-os à luz da nossa interrogação de pesquisa, abre-se a possibilidade de compreendê-los de modo análogo. O primeiro, designa o fazer enquanto um aplicar Matemática no contexto interno, e o segundo designa o fazer enquanto um aplicar Matemática no contexto externo a ela. Portanto, mesmo que denotem ações com finalidades distintas, eles se fundem nas ações de fazer Matemática.

Epistemologicamente, ambos os modos de fazer se revelam possíveis. O fazer que aplica Matemática no contexto intramatemático abre a possibilidade de fazer Matemática nova, que, por sua vez, pode se prestar a um novo fazer, em uma circularidade entre o fazer e o aplicar. O fazer que aplica Matemática em contextos extramatemáticos, de acordo com o que nos mostra a história da Matemática, pode acontecer de duas maneiras: na primeira, o contexto extramatemático serve de inspiração, a exemplo dos problemas de área, volume e comprimento que originaram o cálculo integral; e na segunda, o contexto extramatemático serve de aplicação, a exemplo do sigilo de informações confidenciais assegurado pelo desenvolvimento da teoria dos números e criptografia.

Ainda no bojo dessa discussão, evidencia-se que fazer Investigação Matemática envolve a modelação e a constituição de um modelo matemático (3;7) (4;8). O termo *modelação* pode ser utilizado para referenciar o processo de constituição de um modelo matemático, o qual "é uma descrição simplificada de uma situação real, realizada através de conceitos, relações e representações matemáticas" (PONTE; QUARESMA, 2017, p. 254) e, portanto, se mistura com a aplicação, de tal maneira que a realidade serve de *inspiração para o* e de *aplicação do* fazer Matemática que "não só emerge do mundo da vida, mas também repercute sobre ele, convertendo-o em um mundo impregnado cientificamente" (HUSSERL, 2002, p. 34).

A presença da aplicação e da modelação matemática nos leva a perguntar: esse modo de fazer Matemática estaria ligado ao campo da Matemática Aplicada? Seria essa a verdadeira Matemática da qual nos falam os textos das obras acadêmicas significativas? Esses questionamentos, juntamente com as considerações tecidas a respeito da Matemática Pura, parecem resgatar o dizer de Ponte (2003) sobre "a existência de lacunas e pontos em aberto, relativos, em especial, à ancoragem deste conceito [Investigação Matemática] na matemática pura ou aplicada" (p. 1, inserção nossa).

Todavia, ao nos voltarmos às obras acadêmicas significativas vemos que o termo *modelação* é utilizado em referência ao processo que visa a abstração, ou seja, embora o fazer Matemática possa ser disparado por uma situação real, a intenção é a construção do modelo matemático que abstrai a Matemática da realidade. Assim, em algum momento desse fazer, a relação entre a Matemática e o mundo é rompida – desmundanizada – por abstração, e a produção do conhecimento matemático se dá como produto de relações e propriedades internas à Matemática.

Decorrente desse momento, como se fosse possível um *des-abstrair*[49] ou, mundanizar a Matemática, o conhecimento produzido é transposto para a realidade e devolve aos dados os seus significados reais. Com Ponte e Quaresma (2017), compreendemos que o movimento efetuado nesse modo de fazer Matemática se trata de uma versão simplificada do ciclo de modelação

[49] Heidegger utiliza formas derivas de algumas palavras separando o prefixo da palavra base por um hífem para evidenciar que há uma relação essencial entre a estrutura particionada, como é o caso do *des-abstrair*. Cf. Heidegger (2015).

matemática, no qual “parte-se de uma situação da ‘realidade’ expressa no enunciado do problema, traduz-se essa situação numa representação matemática [...], efetua-se essa operação e procura-se interpretar o resultado à luz da situação de partida” (p. 257). Isso indica momentos distintos no fazer Matemática como tarefa de Investigação Matemática que, ora enfoca as relações entre objetos matemáticos e ora enfoca as relações destes com outros, não matemáticos; e revela uma crença em mundos disjuntos – o mundo matemático e o mundo real.

Compreendemos, assim, que há uma distinção ontológica entre o mundo matemático, no qual os objetos da Matemática encontram significado, e o mundo real, no qual eles encontram seu conteúdo, o que mostra que, mesmo admitindo a realidade como uma possibilidade de manifestação da Matemática, o fazer Matemática que se revela na Investigação Matemática no contexto da Educação Matemática é sustentado pelo purismo da Matemática. Vemos essa distinção entre o fazer Matemática como aplicação, modelação e investigação se reafirmar nas palavras de Ponte (2017, p. 127, grifos nossos):

> - Para que os alunos se apercebam de modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquandradas em ***contextos de realidade*** **(tarefas de aplicação e de modelação).**
> - No entanto, os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em ***contextos matemáticos*** (**investigações**, problemas, explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais.

O título desse núcleo é: *a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de fazer Matemática*. Essa afirmação não é nova, porém, olhando-a com a interrogação de pesquisa, as reflexões que emergem incidem sobre os modos que esse fazer se manifesta e que Matemática ele produz, ou seja, incidem sobre *o que é* e *como é* a verdadeira Matemática que a Investigação Matemática se constitui como exemplo, aspectos destacados pelas unidades de significado (8;5) (8;35) (8;38) (8;41) e questionados no início dessa *ex-posição* interpretativa.

Dizer que é um modo, pressupõe outras possibilidades, pressupõe a existência de outros modos de fazer. Todavia, compreendemos com as obras acadêmicas significativas que o modo pelo qual o fazer Matemática se expressa na Investigação Matemática, no contexto da Educação Matemática, converge com o fazer Matemática do matemático. Diante disso, nos perguntamos: somente por meio desse modo de fazer se faz Matemática? Não há outros, legítimos e não investigativos? Os aspectos da produção de conhecimentos matemáticos que emergiram de investigações elementares se mostram também na Investigação Matemática? Somente se passou a existir Matemática depois da formalização?

Com o exercício hermenêutico até aqui *ex-posto*, compreendemos que o *como* do fazer Matemática com a Investigação Matemática valoriza o conjunto de processos característicos da produção do conhecimento em Matemática – as conjecturas, os testes, as generalizações e as demonstrações – como seu *modus operandi*. Isso indica uma visão cartesiana do fazer Matemática por meio de um método previamente definido. Há um modelo hierárquico que acaba por fornecer um conjunto de procedimentos.

Com Machado e Silva (2017), vemos que, nesse fazer, já está decidido, de antemão, a meta (demonstração) e o método (conjecturar, testar, generalizar, demonstrar) do fazer Matemática. Além disso, embora considere a experiência empírica "tanto em termos de experiências realizadas pelas pessoas, como em termos de aplicação" (BICUDO, 2013, p. 22), não a valoriza e desfoca-a da mira científica no modo de produzir Matemática. Do ponto de vista ontológico, compreendemos que essa orientação do fazer é problemática porque "não tira o modo de ser dos entes deles mesmos" (MACHADO; SILVA, 2017, p. 40), mas de uma racionalidade que tem, exclusivamente, no método, o seu modo produtor.

5.2 Núcleo de ideias N.2: a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática

Esse núcleo evidencia que a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática. O termo *ensinar*, do grego *didaktiké*, compõe a etimologia do termo *didática* que, por sua vez, alude aos elementos envolvidos no processo de ensino. Com esse entendimento, ao dizer que a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática, destacam-se os invariantes que a expressam como atividade de sala de aula.

Um primeiro aspecto evidenciado pelos dados da pesquisa é que, enquanto um modo de ensinar, a Investigação Matemática na Educação Matemática se assenta em um modelo orientado pela introdução, desenvolvimento do trabalho e finalização, conforme exemplificam as seguintes unidades de significado: *“introdução, trabalho independente dos alunos e discussão, são fases típicas da atividade de Investigação Matemática” (10;9); “as etapas fundamentais do trabalho investigativo são a formulação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a conclusão” (4;4).*

Ao enfocar a dinâmica da aula com a Investigação Matemática, aqui compreendida como a atividade que *“engloba os momentos de apresentação da tarefa, a atividade dos alunos e a discussão” (9;4)* e não como atividade restrita ao espaço e ao tempo, os textos das obras acadêmicas significativas apresentam ora o termo *fase*, ora o termo *momento* e ora o termo *etapa*. Para esses termos, o léxico nos dá as seguintes definições: *fase* significa “cada uma das distintas partes de um sucessão de modificações, de um percurso, desenvolvimento ou ciclo” (FERREIRA, 2010, p. 341); *etapa* significa “cada uma das partes em que pode-se dividir o desenvolvimento dum negócio” (FERREIRA, 2010, p. 324); e *momento* significa “cada uma das fases que podemos distinguir num desenvolvimento qualquer” (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001, p. 132). Portanto, transitivamente, pode-se compreender que os termos *momentos*, *fases* e *etapas* designam partes de um desenvolvimento qualquer e, por isso, utilizaremos o termo *partes* para nos referirmos a eles.

Ao se revelar estruturado em introdução, desenvolvimento e finalização, compreendemos que o modo de ensinar Matemática possui uma orientação dada a priori, com finalidades específicas. Conforme nos mostram os dados, a parte introdutória dispara a atividade investigativa com a apresentação da tarefa e é acompanhada de uma discussão inicial que, se porventura não for realizada, implicará na necessidade de maior apoio aos alunos durante a parte do desenvolvimento (2;15).

“A fase de desenvolvimento deve centrar-se na atividade dos alunos” (2;16) como um trabalho independente (10;9). É nessa parte da aula que a Investigação Matemática enquanto um modo de fazer Matemática se efetiva, ou seja, *“a formulação de questões para investigar, bem como a formulação de*

conjecturas, os testes e a demonstração, são etapas que acontecem durante a fase do desenvolvimento da Investigação Matemática" (2;20). Ao que concerne à parte da finalização, os dados revelam que ela acontece com a discussão e a reflexão conjunta do trabalho realizado, mostrando-se um elemento indispensável a esse modo de ensinar Matemática e, junto à formulação da tarefa e o desenvolvimento do trabalho, é uma etapa fundamental (2;25) (2;27) (4;4).

Com essa *ex-posição*, compreendemos que as partes que orientam esse modo de ensinar Matemática revelam um modelo de aula genérico e podem, também, ser orientadoras de outros modelos. Pensemos no modelo de aula tradicional: comumente, a introdução ocorre com a exposição de definições, teoremas e exemplos, avançando para o desenvolvimento, em que o aluno resolve exercícios similares aos exemplos apresentados, finalizando com a correção destes.

Porém, ao se revelar que no desenvolvimento da atividade de Investigação Matemática é requerida a participação ativa do aluno, há uma adjetivação dessa parte da aula como *independente*, e, portanto, pelo próprio significado do termo, há razões para supor que o aluno age com autonomia, ainda que seja destacada a intervenção do professor (2;18) (4;21) (11;24). Nesse aspecto, reside uma diferença entre o modelo de aula proposto pela Investigação Matemática e o modelo de aula tradicional que, embora contenha uma parte que requer a participação ativa do aluno, não é independente, mas influenciada pelo modo de fazer exemplificado pelo professor. Todavia, essa diferença não é esclarecida pelo próprio modelo de aula, mas por uma característica formulada teoricamente, própria da Investigação Matemática.

Essa generalidade com que o modelo de aula se apresenta, na Investigação Matemática, é insuficiente para diferenciá-lo de outros e esclarecê-lo na dinâmica da própria atividade. Em seu acontecer cotidiano, o ensinar nem sempre requer uma introdução e, por vezes, a finalização pode se apresentar útil como introdução para a atividade seguinte. Isso evidencia uma visão ingênua e procedimental que precisa ser superada em termos de prática de ensino, caso contrário pode-se incorrer no risco de balizar e orientar o modo de ensinar Matemática da Investigação Matemática na Educação Matemática.

Outro invariante que emerge com esse núcleo diz sobre a característica de abertura, a qual se revela como *"um dos apelos mais fortes da Investigação Matemática" (12;17)*. A título de exemplo, convergem para esse invariante as seguintes unidades de significado: *"na Investigação Matemática as situações iniciais são abertas" (1;13); "na Investigação Matemática é importante elaborar questões suficientemente abertas para disparar a atividade" (2;12); "as tarefas de Investigação Matemática são abertas" (5;22); "as atividades de Investigação Matemática tendem a ser de natureza aberta" (7;3); "na Investigação Matemática o aluno define as questões a serem investigadas" (10;4)* e *"a Investigação Matemática fornece vários pontos de partida" (11;8).*

Enquanto substantivo, o termo *abertura* significa "ato ou efeito de abrir; abrimento [...] fenda, frincha; orifício" (FERREIRA, 2010, p. 3). Uma fenda mostra-nos o que está do outro lado, abre um espaço de visão que antes não existia; é, portanto, destruição que restitui o que não se podia ver. Dessa forma, a abertura permite ao aluno *ver* de outra perspectiva e além dela, implica na constituição de diferentes espaços de visões de modo que os cenários visados dependem do modo como cada um se põe com a situação, abre espaços de aprendizagem que permitem acessar outros modos de *ver* a Matemática.

Tal como se revela com os dados da pesquisa, a Investigação Matemática busca levar em conta os modos de pensar dos alunos ao requerer que eles formulem as questões para serem investigadas, elaborem e testem conjecturas e elaborem demonstrações (2;8) (2;9) (2;10) (2;11). Com isso, compreendemos que ela propõe a liberdade de escolha da situação de partida e do método, implicando na não prescrição metodológica e na não repetição de técnicas (8;33) (8;34) (8;54) (8;56) e, portanto, o modo de ensinar Matemática adjetiva-se como *aberto*, termo que, em sentido filosófico, é empregado para indicar possibilidades (ABBAGNANO, 2007).

Vemos, então, que *"a Investigação Matemática é uma atividade que envolve a exploração de possibilidades" (8;19)* e *"permite que o aluno aprenda como ser um investigador perspicaz e a dedicar-se a atividade de descobrimento" (7;10).* Isso nos direciona a compreender que o ensinar não parte de uma tomada de conhecimento em termos conceituais e a Matemática pode ser compreendida em uma relação que é do aluno para com ela e, por isso, "a compreensão projeta possibilidades, porque compreender é o modo de ser da existência considerada em seu *poder-ser*" (HERMANN, 2002, p. 35).

A abertura das situações iniciais, também adjetivadas nas obras acadêmicas significativas como *tarefas*, implica na necessidade de serem formuladas questões para serem investigadas. Essa ação se mostra indissociável da Investigação Matemática, revelando-a emancipadora (1;3) (1;8) (3;11) (3;16) (8;10) (8;23) (10;8). *Emancipar* significa tornar independente, libertar. Pode-se dizer que emancipado é aquele que não está mais preso ao outro. Junto a isso e aos dados da pesquisa, significa que esse modo de ensinar liberta os alunos de toda ação que, porventura, possa os condicionar e mostra-lhes outras possibilidades.

Compreendendo a abertura na totalidade das afirmações anteriores, há, de modo oculto, a presença do autor das tarefas, o que implica pensar que o grau de abertura é para alguém e dele também depende. Qualquer autor de tarefas as cria com um objetivo pedagógico, mesmo que subjacente ao enunciado. Na ausência explícita destes objetivos e, até mesmo na não ausência, são os leitores que interpretam e atribuem significado ao que leram e, de certo modo, se tornam autores, podendo modificar o sentido que está sendo expresso, segundo a sua interpretação (PALMER, 2018). Pontuamos que, embora o autor supramencionado discuta a interpretação sob as vias da Hermenêutica, pensamos que o argumento se faz válido para um contexto de sala de aula, uma vez que há interpretação ao estar, o aluno, com uma tarefa que deseja compreender, e porque interpretar é um fenômeno ontológico.

Com os textos das obras acadêmicas significativas, vemos que a situação inicial de uma Investigação Matemática fornece vários pontos de partida ao ter objetivos pouco precisos e pouco estruturados, cabendo ao aluno defini-los junto às questões e às estratégias para investigar (5;33) (8;22) (8;54) (8;55) (8;56) (10;3) (10;4) (11;8). Além disso, *"o grau de abertura da Investigação Matemática depende da abordagem que é escolhida pelo professor" (12;25).*

Vemos que a abertura das situações iniciais depende, também, do sujeito para o qual elas se dirigem. Portanto, as situação que disparam a investigação são interpretadas, no mínimo, pelo professor, pelo aluno e pelo seu autor, o que pode implicar no estabelecimento de objetivos diferentes, abrindo a possibilidade de o ensinar Matemática ser desencadeado a partir do modo que o sujeito as interpreta e as compreende, bem como a partir do modo que as investiga, isto é, os objetivos da aula emergem no seu acontecer, e não por pré-determinação.

Esse aspecto nos leva a compreender a Investigação Matemática na Educação Matemática como uma atividade imprevisível (1;16).

Os textos das obras acadêmicas significativas expressam que “*nas actividades de investigação o leque de possibilidades é de tal maneira vasto” (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 10).* Segundo o dicionário, o termo *leque* significa “abano semicircular [...] ajustado a uma armação com varetas que se abre e fecha [...] conjunto de coisas a se escolher” (FERREIRA, 2010, p. 463). Assim como as astes se multiplicam ao abrí-lo; desdobram-se em uma, duas, três..., também as possibilidades de investigação se fazem múltiplas e apontam caminhos que orientam, mas não determinam a compreensão na unicidade das formas de compreender.

Além disso, afirma-se que a Investigação Matemática na Educação Matemática se mostra acolhedora de tarefas que *“pela sua natureza, tendem a ser de certo modo abertas – podem ser prosseguidas a vários níveis de profundidade” (GOLDENBERG, 1999, p. 13)*. Destarte, a abertura da tarefa implica diretamente em um *mergulho* a níveis de exploração que se direcionam *pro-fundo*. Da perspectiva filosófica, Abbagnano (2007) nos diz que *profundo* significa:

> o que possui significado oculto e inexprimíveí (sic). Esse termo adquiriu significado técnico na filosofia e na psicologia contemporânea para indicar aquilo que fica fora da formulação explícita dos problemas, constituindo uma esfera que pode ser ‘sentida’ ou ‘intuída’ de alguma maneira, portanto interpretada ou expressa metaforicamente; indica também aquilo que, em algum campo de indagação, foge ao alcance de seus procedimentos, mas manifesta sua presença de modo obscuro (p. 798).

Na citação anterior, destaca-se que a profundidade traz significados ocultos, mas presentes na estrutura enunciativa das situações iniciais, e desvendá-los depende da imersão nos diferentes níveis de profundidade que *“podem pois conduzir os alunos para um território matemático impreparado” (GOLDEMBERG, 1999, p. 13)*. Há, então, a possibilidade de o aluno adentrar em novos territórios, nos quais a Matemática se situa, se revela e pode ser ensinada. Com o *ex-posto*, compreendemos que a Investigação Matemática enquanto um modo de ensinar Matemática abre possibilidades de o aluno lançar-se no aberto, em territórios impreparados. Em sentido fenomenológico, isso pode ser compreendido como um *pro-jetar-se* no qual

> o ente se abre em sua possibilidade. O caráter de possibilidade sempre corresponde ao modo de ser de um ente compreendido. O ente intramundano em geral é projetado para o mundo, ou seja, para um todo de significância em cujas remissões referenciais a ocupação se consolida previamente como ser-no-mundo. Se junto com o ser da presença o ente intramundano também se descobre, isto é, chega a uma compreensão, dizemos que ele tem *sentido* (HEIDEGGER, 2015, p. 212).

Ainda que não em sua totalidade, as unidades de significado revelam que essa abertura é característica das tarefas que disparam a atividade e, por sua vez, a profundidade com que se investiga, delas depende. Contudo, compreendemos que essas situações apresentam-se de modos distintos para os alunos, sujeitos que, com o professor, estão envolvidos com a Investigação Matemática. Portanto, esse modo de ensinar Matemática (aberto) depende, também, dos modos que os alunos compreendem as tarefas e não somente de uma característica interna a elas. Esse modo de compreender a abertura e a profundidade de uma situação de Investigação Matemática se mostra uma conformação ao enunciado dessas situações que ajustam a Matemática em um *como é* e em um *como fazer*, de modo que o ensinar Matemática não preserva efetivamente o *abrir-se para*.

Pensamos, provisoriamente, na abertura e na profundidade, do ponto de vista das situações iniciais. À medida que nos direcionamos *pro-fundo*, há um movimento que nos impõe dificuldades não existentes na superfície o que nos leva a perguntar: isso significa mais dificuldades à medida que o grau de abertura é maior? Significa maiores dificuldades? Significa diferentes dificuldades?

No escopo dessa discussão, Ponte (2017) afirma que “duas dimensões fundamentais das tarefas são o grau de desafio matemático e o grau de estrutura” (p. 112). Segundo esse autor, o grau de desafio diz da percepção da dificuldade e o grau de estrutura diz da abertura das tarefas, variando entre *aberto* e *fechado*. Em outro momento, esse autor afirma que o grau de abertura (grau de estrutura) e o grau de dificuldade (grau de desafio), quando combinados geram diferentes tipos de tarefas, e apresenta as do tipo exploratório e do tipo investigativo (PONTE, 2003).

Conforme as lemos e as interpretamos, ainda que abertas, as tarefas exploratórias se apresentam relativamente estruturadas. Em conformidade, Gravina e Santarosa (1999) destacam que, nesse tipo de tarefa, “ao aluno é apresentado um modelo já pronto, o qual deve ser explorado, entendido, analisado. Não são suas idéias que ali estão representadas, e portanto existe o desafio intelectual de compreendê-las" (p. 81).

De um ponto de vista pragmático, o grau de abertura desse tipo de tarefa é menor em relação às tarefas investigativas, as quais se apresentam mais genéricas, oportunizando aos alunos exteriorizar e concretizar suas ideias. Ponte (2017) reconhece que "nem todas as tarefas abertas comportam um elevado grau de desafio" (p. 114), mas considera que as tarefas exploratórias são fáceis e as tarefas investigativas são difíceis, indicando uma relação de causa e efeito entre a abertura e a profundidade, que culmina em dificuldades. Porém, *"pode ser difícil distinguir de modo significativo (e rigorosamente) extensões pertinentes" (GOLDEMBERG, 1999, p. 13)* a essa profundidade, isto é, determinar o grau de dificuldade que uma tarefa pode conter esbarra em complexidades para além da sua abertura.

Nesse sentido, mergulhar a diferentes níveis de profundidade em uma tarefa de Investigação Matemática não significa mais ou maiores dificuldades, mas, tão somente, dificuldades diferentes, uma vez que os alunos têm modos específicos e peculiares de se dirigir aos objetos que se lhes apresentam, isto é, o que se apresenta como dificuldade para um, pode não se apresentar para outro, inclusive em profundidades distintas.

Com o *ex-posto,* compreendemos que a abertura e a profundidade do ensinar Matemática não depende exclusivamente das situações iniciais, mas dos modos como essas características se mostram para os alunos; de um encontro entre aquilo que o aluno já sabe e, portanto, já compreende, e aquilo que a tarefa, enquanto um texto que se *ex-põe*, sugere. Essa compreensão carrega consigo o prévio, aquilo que se sabe, mas, também, o que pode ser despertado pela tarefa, de modo que o ensinar passe a ser uma abertura para o devir. A superação das dificuldades vai se dando com a escuta daquilo que a tarefa vai significando para o aluno, de modo a ser *"a própria experiência dos alunos que deve mostrar-lhes se os caminhos que estão seguindo são frutíferos" (2;22)*. Portanto, atribuir essas características somente à estrutura enunciativa das tarefas, é um problema epistemológico a ser superado no campo da Investigação Matemática na Educação Matemática.

Em uma obra acadêmica significativa, reconhece-se que *"o grau de abertura das situações depende não só (e talvez, não primariamente) do tipo de* *questão a investigar mas também da abordagem que é escolhida pelo professor" (OLIVEIRA, 1998, p. 20)*. Essa afirmação retira das situações iniciais e projeta na figura do professor a condição de abertura que faz *ver* as possibilidades para investigar, não observando que, embora a abertura dependa de todos os sujeitos envolvidos com as situações iniciais (aluno, professor e autor), é do lugar ocupado pelo aluno que ela assume sua forma. Dito de outro modo, a estrutura enunciativa da situação inicial, o modo que o professor conduz a aula, dentre outros elementos, abrem espaços de aprendizagem, porém, o *ver* "em direção ao que pode emergir" (INWOOD, 2002, p. 91) se dá, em última instância, no espaço de visão do aluno, pois é para ele e com ele que o mundo e a Matemática devem se constituir.

Ainda que a abertura das situações iniciais tenha se revelado uma característica da Investigação Matemática, nas obras acadêmicas significativas revela-se, também, o entendimento de que a estruturação dessas situações não as desqualifica como tarefas de Investigação Matemática e permite maior autonomia para os alunos menos habituados com o trabalho investigativo. Isso indica que a abertura das tarefas pode se caracterizar como um fechamento e tolher possibilidades nas primeiras experiências tidas com a Investigação Matemática e, portanto, compreendemos que a autonomia dada ao aluno para escolher a posição para *ver* em função do espaço de visão fornecido é, paradoxalmente, maximizada à medida que este espaço diminui. Dito de outro modo, nas primeiras experiências com a Investigação Matemática, as possibilidades de compreensão da Matemática podem aumentar, diminuindo-se a abertura das situações iniciais. A maior autonomia dada ao aluno ao *estar-com* tarefas mais estruturadas mostra a sua não habitualidade com um modo de ensinar que o solicita lançar-se no aberto e mergulhar a diferentes níveis de profundidade.

A característica de abertura aparece, também, diretamente relacionada com a divergência nos modos de proceder à investigação que, por sua vez, enfatiza um modo de ensinar Matemática voltado para a exploração de todos os caminhos que surgem como interessantes, conforme evidenciam as unidades de significado: *"a atividade de Investigação Matemática é divergente" (1;19); "na Investigação Matemática é importante a exploração da Matemática em todas as direções" (2;4); "na Investigação Matemática importa a exploração de todos os* *caminhos" (2;5),* inclusive os *"caminhos inusitados" (5;21).*

Ao ser possível trilhar diferentes caminhos, abre-se a possibilidade de movimentar-se para diferentes direções que se apartam e conduzem para diferentes lugares. Do ponto de vista do ensinar Matemática, isso significa que o processo investigativo conduz para lugares nos quais as conclusões podem ser diversificadas (9;5). Assim sendo, compreendemos que a Investigação Matemática na Educação Matemática se mostra enxertada de variados percursos de inquirição e acolhedora de diversas conclusões, desconstruindo a ideia em torno da exatidão da conclusão correta como sinônimo do ensinar Matemática.

Essa conclusão correta pode ser, também, a demonstração. Isso nos faz pensar que a característica de abertura, que faz trilhar diferentes caminhos e aponta diferentes direções, vai na contra mão da ideia de ter sempre que demonstrar. Há, então, um entendimento que contradiz a ideia do fazer Matemática orientado na sequência conjectura-teste-generalização-demonstração, e em algumas obras acadêmicas significativas é ilustrado, metaforicamente, conforme os excertos:

"Uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A ideia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino" (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 4).

"A metáfora geográfica é também aplicada ao processo de investigação matemática. A ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem, não o destino" (ERNEST, 1996, p. 30).

"É também bem conhecida uma metáfora geográfica utilizada para descrever as investigações e que tem origem num provérbio chinês 'a estrada é o objectivo' [...] 'o objectivo é a jornada, não o destino'" (PONTE; FERREIRA; VARANDAS; BRUNHEIRA; OLIVEIRA, 1999, p. 12).

"Essa distinção tem sido explicada, por diversos autores com base no provérbio chinês 'A estrada é o objectivo' [...] que aplicam ao propósito das actividades de investigação" (OLIVEIRA, 1998, p. 15).

Entretanto, excertos extraídos das mesmas obras, respectivamente, evidenciam que as Investigações Matemáticas:

"Valorizam todo um conjunto de processos característicos da actividade

matemática como formular, testar e provar conjecturas e argumentar" (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 4).

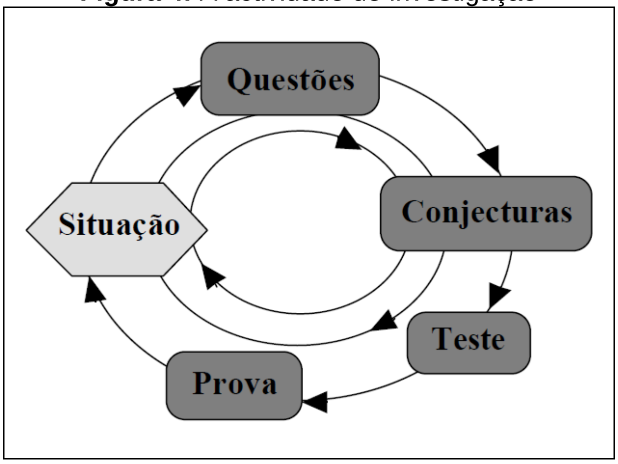
"Tem uma forma especial, com as suas próprias componentes características de abstracção, representação, modelação, generalização, demonstração" (ERNEST, 1996, p. 31).

"Se relacionam, porém, com diversos processos matemáticos que são utilizados nas investigações: procurar regularidades, interpolar, extrapolar, conjecturar, testar, generalizar e provar" (PONTE; FERREIRA; VARANDAS; BRUNHEIRA; OLIVEIRA, 1999, p. 14-15).

"Pretende aproximar a actividade do aluno à do matemático, envolve por isso processos iminentemente matemáticos" (OLIVEIRA, 1998, p. 14).

O último excerto, na obra que o contém, é seguido da representação ilustrada na Figura 4, sobre a qual se adverte: "esta é, contudo, uma representação muito simplificada e algo redutora dado que é difícil abarcar num esquema toda a riqueza desta actividade" (OLIVEIRA, 1998, p. 14).

Figura 4: A actividade de investigação



Fonte: Oliveira (1998, p. 15)

Avançando nessa discussão, retomemos a metáfora geográfica: *o objetivo é a viagem e não o destino*. Interpretando-a junto com os excertos anteriores, pensamos que viajar por esse caminho passa, necessariamente, pela situação inicial, pelo estabelecimento de questões, de conjecturas, de testes e pela demonstração, que é o destino; de modo que os demais aspectos citados são mais importantes do que demonstrar. Assim, ainda que a partida da viagem se dê em diferentes direções, no percurso do viajar todos os caminhos trilhados, inclusive os inusitados, conduzem para o mesmo lugar.

Essa não convergência epistemológica acerca do modo de fazer Matemática na Investigação Matemática nos mostra uma tensão: por um lado, a atividade investigativa aponta para diferentes direções, modos de proceder e conclusões e, por outro, valoriza e segue um ciclo que conduz para a demonstração. Interpretamos que isso pode indicar a presença de diferentes modos de compreender a Investigação Matemática na Educação Matemática, mas, também, um relativismo teórico. Essa tensão implica diretamente na prática docente investigativa ao não ficar claro até onde o professor deve ir na justificação das conjecturas apresentadas pelos alunos e resgata a seguinte questão: “o professor deve satisfazer-se com justificações informais ou pedir aos alunos provas matemáticas das suas afirmações?” (PONTE, 2003, p. 57).

Arrolada à abertura e à divergência, está a relação entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas. Algumas unidades de significado revelam que *“a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são conceitos próximos” (5;4); “a Investigação Matemática se relaciona de muito perto com a Resolução de Problemas” (1;12); “a Resolução de Problemas é o ponto de partida para a Investigação Matemática” (2;3).*

Com isso vemos que a relação entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas é adjetivada pelas expressões *muito próxima* e *a partir de*, portanto, a relação que se estabelece é de proximidade, de procedência e de diferença. Contudo, compreendemos com Heidegger (2015) que a possibilidade de distanciar-se, aproximar-se e partir, é dada apenas ao Ser e não ao ente e, sendo a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas entes intramundanos, elas não podem distanciar-se ou encontrar-se por meio de um aumento ou encurtamento de distâncias. Nesse sentido, a proximidade e o distanciamento expressos nos textos das obras acadêmicas significativas são, por nós compreendidos, como semelhanças e diferenças, respectivamente, ainda que a interpretação que segue se dê, metaforicamente, em um sentido de espacialidade.

Ao nos voltarmos para o sentido do termo *proximidade*, com Ferreira (2010), vemos que ele se refere à noção de espaço. Estar *próximo* significa localizar-se na vizinhança de algo ou alguém, com algum distanciamento. Estar *muito próximo* significa localizar-se na vizinhança, porém com um distanciamento menor que o existente ao estar próximo e, desse entendimento, o advérbio de intensidade *muito* sinaliza um encurtamento de distância.

Além disso, o termo *partir* designa "tomar por base ou como referência ou ponto de partida [...] pôr-se a caminho; ir-se" (FERREIRA, 2010, p. 566). O movimento de partida inicia-se em algum lugar (ponto de partida) e no seu acontecer faz aumentar a distância entre quem partiu e a referência da partida. Os dados revelam que a Investigação Matemática tem na Resolução de Problemas o seu ponto de partida e, em conformidade, Ponte, Quaresma e Branco (2017) evocam que "o trabalho com tarefas de investigação e exploração na sala de aula constitui uma orientação curricular atual muito importante que tem as suas raízes na perspectiva de resolução de problemas" (p. 213).

Como complemento, os textos das obras acadêmicas significativas expressam, ainda, que a Investigação Matemática difere da Resolução de Problemas por conter questões inicialmente vagas e por ter um processo mais divergente (3;10) (5;12) (12;7). Nas unidades de significado que convergem, em sentido, com o *ex-posto*, permanece invariante a ideia de que na Investigação Matemática o processo é divergente e as situações iniciais são abertas, admitindo a possibilidade de o aluno formular os problemas, enquanto que, na Resolução de Problemas, os problemas estão postos de antemão e o processo de resolução empreendido é convergente.

De acordo com Ferreira (2010), o termo *convergir* significa "tender ou dirigir-se (para o mesmo ponto) [...] concorrer, afluir (ao mesmo ponto) [...] tender (para um mesmo fim)" (p. 198). Nota-se que o termo adjetiva a ação de mover-se para o mesmo ponto ou mesmo fim e, portanto, para um lugar comum. Com isso, compreendemos que o processo empreendido na Resolução de Problemas visa um lugar de convergência para *com-partilhar*, isto é, partilhar algo com aqueles que, neste lugar, se encontrarão. Esse lugar de convergência pode ser a solução do problema, enquanto conhecimento matemático *com-partilhado*.

Ao que pese à Investigação Matemática, embora se afirme que o caminho é mais divergente se comparada à Resolução de Problemas, compreendemos que ao seguir *"a sequência conjectura, generalização, demonstração" (8;42)*, o fazer se envereda pelas mesmas vias, isto é, o caminho a seguir se revela não só único como, também, conhecido. Ao se revelar um fazer padrão, há uma convergência implícita que direciona o processo para a demonstração, enquanto conhecimento matemático *com-partilhado* e, portanto, o lugar de chegada, assim como na Resolução de Problemas, é visado a priori. Essa compreensão se sustenta em unidades de significado que evidenciam que *“o fazer investigativo aponta para uma demonstração” (6;8)* “*como o objetivo da Investigação Matemática” (6;11)* e, quando não é o objetivo, faz parte da atividade como uma ação necessária e importante (1;11) (3;9) (8;47) (8;52) (8;53) (10;47) (11;7).

A convergência e a divergência atribuídas à Resolução de Problemas e à Investigação Matemática, respectivamente, mostram-se como consequências da estrutura das situações iniciais. Para nós, parece haver o entendimento de que o processo será divergente à medida que a situação inicial que o desencadeia for aberta, caso contrário convergirá para o objetivo em que se fecha, ainda que os modos de alcançá-lo sejam variados. Esse aspecto é corroborado por Lamonato e Passos (2011) que dizem:

> a resolução de problemas e a exploração-investigação matemática diferenciam-se nos enunciados das tarefas, sendo o início de uma investigação de caráter mais aberto do que a resolução de problemas, ainda que ambos os processos sejam entendidos na perspectiva da inquirição (p. 69).

Tal como compreendemos, essa base de diferenciação – tarefa e processo – além de desconsiderar as possibilidades compreensivas dos alunos, desconsidera os modos que eles se relacionam com a tarefa, ou seja, há uma pressuposição de que todos irão agir ao mesmo modo – convergente ou divergentemente – a depender da abertura da situação com que se depararem. São ingênuas as afirmações que apenas as diferenciam ou as assemelham com base em características das situações iniciais e do processo empreendido, as quais, embora clarifiquem alguns aspectos, não dão conta da totalidade de diferenças e semelhanças existentes, pois

> a natureza relativa da atividade iniciada pela tarefa, resulta da interação, das posturas, dos interesses, da necessidade e das condições de todos os envolvidos, fazendo com que os pontos de aproximação e distanciamento da resolução de um problema ou da exploração-investigação de uma situação proposta não sejam determinados pela tarefa, mas pelos demais aspectos mencionados (LAMONATO; PASSOS, 2011, p.68).

Nessa perspectiva, Trindade (2008) também reconhece que as diferenças e as semelhanças entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas “dependem da pessoa que resolve o problema ou realiza a investigação” (p. 155). Para essa autora, “não basta ter uma tarefa para termos um problema e nem mesmo termos um problema para termos uma atividade investigativa. Tudo dependerá da relação que o aluno estabelece com essa atividade” (p. 156). Ainda no bojo dessa discussão, com as obras acadêmicas significativas vemos que as diferenças e as semelhanças entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas são enunciadas a partir da perspectiva de Polya, conforme revelam os seguintes excertos:

“Outra distinção diz respeito às estratégias a seguir. Enquanto que na resolução de problemas faz sentido sugerir heurísticas gerais (como as de Pólya, 1945) [...] nas actividades de investigação o leque de possibilidades é de tal maneira vasto que se torna difícil fazer semelhante sistematização” (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 9-10).

“A nível mundial, a resolução de problemas remonta pelo menos a Brownell (1942) e a Pólya (1945), e provavemente muito antes” (ERNEST, 2006, p. 28).

“As novas perspectivas da filosofia da Matemática dão ênfase à actividade matemática e chamam a atenção para os processos investigativos envolvidos na criação do conhecimento matemático (Davis e Hersh, 1980; Ernest, 1991; Lakatos, 1976; Tymoczkco, 1986). No entanto, a ideia não é nova. Ela está na base da proposta de Pólya de fazer da resolução de problemas um elemento essencial da experiência matemática dos alunos” (PONTE; FERREIRA; BRUNHEIRA; OLIVEIRA; VARANDAS, 1999, p. 1).

“O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as ideias de Pólya. [...] Esta noção de problema foi sendo progressivamente enriquecida [...]. Chegamos assim às actividades de exploração e de investigação matemática” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 4).

Polya inicia seu trabalho voltando-se para a solução de problemas matemáticos estruturalmente definidos e fechados, com o objetivo de propor alguns métodos heurísticos gerais para resolvê-los. Na sua proposta, a ideia de problema está relacionada a situações que possuem um objetivo explícito, que requerem uma solução correta e que não se deixam resolver com certa imediaticidade, por não disporem, de antemão, um procedimento que possibilite a resolução (POLYA, 1995).

Embora a sua proposta se assente, inicialmente, sobre um conceito de problema um tanto quanto estreito, Polya o amplia ao reconhecer a possibilidade de haver problemas que requerem ser formulados ou reformulados antes de serem resolvidos, que desencadeiam outros problemas e que colocam a observação, as conjecturas e os argumentos indutivos num papel proeminente: a estes problemas, chama de *problemas de investigação* (TRINDADE, 2008).

Dada as especificidades com que Polya perspectivou a Resolução de Problemas, somos direcionados a pensar que qualquer tentativa de diferenciar a Resolução de Problemas da Investigação Matemática requer, antes, um esclarecimento dos solos teóricos em que se assentam; requer um posicionamento que permita identificar as perspectivas que orientam determinadas afirmações. Com isso, perguntamos: como se revelam as semelhanças e as diferenças entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas vistas de outras perspectivas de Resolução de Problemas? E de outras perspectivas de Investigação Matemática?

Outro invariante que vemos se revelar nesse núcleo nos diz que o valor da Investigação Matemática enquanto um modo de ensinar Matemática está na experiência matemática autêntica, a qual é muito próxima da atividade científica em Matemática e traz para a sala de aula a atividade matemática genuína promovendo, assim, uma identidade entre o aprender e o fazer Matemática (1;14) (5;2) (5;26) (5;27) (9;9).

No léxico, o adjetivo *autêntico* diz daquilo que é fidedigno ao autor a quem se atribui; é sinônimo de genuíno, legítimo, puro (FERREIRA, 2010). De acordo com Abbagnano (2007), ele indica aquilo que é próprio do Ser, "em contraposição à perda de si mesmo ou de sua própria natureza, que é a inautenticidade" (p. 95). Em Inwood (2002), o termo encontra-se definido como uma derivação do termo grego *autos* que significa *si mesmo*. Para Heidegger (2015), é uma derivação do substantivo puro, que indica o modo de ser, do *ser-aí*.

Autenticidade indica uma tomada de consciência e o descobrimento dos modos originais de ser, pelo próprio Ser, pois, "ser autêntico é fazer sua própria coisa, não o que o impessoal prescreve" (INWOOD, 2002, p. 12). Assim, ao compreender o ensinar Matemática como uma experiência matemática autêntica, pressupõe-se que os alunos descubram seus modos peculiares de *ser-com* a Matemática e envolvam-se em um fazer "feito por suas próprias mãos" (INWOOD, 2002, p. 11).

Ao se evidenciar que *"a experiência matemática que a Investigação Matemática proporciona é muito próxima da atividade matemática" (5;26)*, compreendemos que a característica de autenticidade mostra-se como algo dado em si, desconsiderando as possibilidades de os sujeitos que experienciam a experiência para ela se abrirem. Em outras palavras, esse modo de ensinar Matemática parece desconsiderar as possibilidades de os alunos aprenderem regidos por maneiras de pensar e agir que lhes são próprias, e incentivar aquelas regidas pela tradição do fazer Matemática e, ainda que o discurso se dirija à autonomia dos alunos, a autênticidade não é, por nós, vislumbrada.

Vemos se revelar a presença da impessoalidade do fazer, o que nos direciona a pensar sobre o estado de inautenticidade dessa experiência. Para exemplificar a conexão entre o inautêntico e o impessoal, recorremos a seguinte citação: "a conexão entre a absorção em seu negócio corrente e a sujeição ao impessoal reside em que alguém, tratando de seus negócios, deve ver as coisas como eles as interpretam, não de seu *próprio* modo" (INWOOD, 2002, p. 12). Conforme nos diz Palmer (2018), compreender é experienciar, porém

> a experiência não é um subesquema no interior do contexto da dicotomia sujeito-objeto; não é um tipo de conhecimento a-histórico, atemporal, abstrato, fora do tempo e do espaço [...]. A experiência é algo que acontece aos seres humanos possuidores de vida e de história (p. 308).

Nesse sentido, ao se revelar um modo de ensinar Matemática muito próximo da atividade do matemático, a qual segue as configurações ditadas pela tradição de uma comunidade científica própria, a Investigação Matemática na Educação Matemática parece não levar em consideração o fenômeno da compreensão e toma apenas uma faceta da relação causa (fazer Matemática) e efeito (ensinar Matemática), aceitando o que essa tradição diz, conduzindo a possibilidade de a experiência com o fazer Matemática, enquanto um modo de ensinar Matemática, ser inautêntica.

Evidencia-se, para nós, que a autenticidade da experiência do fazer está relacionada ao fazer do matemático que, conforme *ex-pusemos* em 5.1, tem procedimentos próprios e mantidos pelo caráter objetivo da tradição. Isso mostra certa impregnação de objetividade na experiência, que acaba por reduzi-la a um experimento, o qual é sempre regido por algum método e passível de reprodutibilidade e, portanto, “a experiência suspende em si mesma sua própria história e a extingue” (GADAMER, 1999, p. 513). Essa abertura hermenêutica nos direciona a perguntar: até que ponto é possível o aluno fazer uma experiência matemática autêntica, ou fazer com suas próprias mãos, procedendo segundo princípios metodológicos de outros?

Ao ser esperado que o aluno viva uma experiência muito próxima da atividade matemática (5;26), compreendemos que parece haver uma projeção do mundo idealizado da experiência científica do matemático sobre a experiência original que acontece no *mundo-vida*, de modo que a ele “não lhe é dado voar como quiser. Vê-se obrigado a ir ascendendo *gradatim* (passo a passo)” (GADAMER, 1999, p. 515) *“a graus progressivos de generalização e de abstracção” (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 17)*. Em outras palavras, a experiência se mostra como um direcionamento que vai do estabelecimento de questões a serem investigadas à generalização e à abstração, perpassando pela criação, testes e refinamentos de conjecturas e pela demonstração.

Outra questão que suscita discussões sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática é disparada pelo seguinte excerto: *“pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de Matemática?” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 9).* O termo *inspirar* significa influenciar (FERREIRA, 2010) e, portanto, aquele que inspira exerce certa influência sobre o inspirado. Considerando que o ensinar Matemática proposto pela Investigação Matemática se revela inspirado no trabalho científico dos matemáticos, estaria ele em uma relação de subserviência ao fazer Matemática?

Em conformidade com os dados, *“na Investigação Matemática, as ações dos alunos são como as do matemático profissional” (1;15)* ou, de modo mais enfático, *“o aluno é chamado a agir como um matemático” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23).* Isso reforça a aproximação entre a atividade desenvolvida pelo aluno no contexto escolar e a desenvolvida pelo matemático no contexto científico, as quais possuem natureza equivalente (2;26) e, portanto, nesse modo de ensinar Matemática, tal como vem se revelando com os dados da pesquisa, *“os alunos têm a oportunidade de vivenciar, ao seu nível* *de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais" (8;1)*. Ao dizer *um matemático* ou *dos matemáticos*, remete-se à referência da ação para o outro e não para o Ser que, ao estar no mundo, pode fazer Matemática.

Com isso que dissemos, vemos que o ensinar Matemática é um convite ao aluno para o fazer Matemática do matemático, de tal maneira, que *"na aula com a Investigação Matemática, os alunos constituem uma pequena comunidade matemática" (5;19)* e espera-se que eles *"utilizem os processos característicos da atividade investigativa em Matemática" (1;20).*

Segundo Gravina (2001, p. 17, inserção nossa), "o processo de criação matemática é complexo. [Nele] acontece o 'pensar matemático', caracterizado por experimentar, interpretar, visualizar, abstrair, conjecturar, errar e demonstrar". Portanto, o modo de fazer Matemática do matemático é, em sentido macro, homogêneo; todos agem ao mesmo modo, trilham o mesmo caminho, ainda que com passos próprios.

Em se tratando do contexto escolar, parece-nos que o aluno é, também, chamado a trilhar o caminho que inicia com o experimentar e termina com o demonstrar. Conforme compreendemos, se esse caminhar não for vivenciado a partir dos modos originais de o aluno *estar-com* a Matemática compreendendo-a, os conteúdos dessa Ciência não lhes dizem nada, porque o fazer Matemática não foi "feito por suas próprias mãos" (INWOOD, 2002, p. 11).

Compreendemos que a diretividade pedagógica em sala de aula é, em algum nível, inevitável e, junto às obras acadêmicas significativas, vemos que essa condução se mostra, por um lado, feita por atitudes orientadoras, indicadoras, apoiadoras, estimuladoras e fornecedoras de informações (2;21) (2;24) (4;20) (10;19) (11;20). Conduzir, portanto, assume o sentido de moderar o trabalho interferindo discreta e ligeiramente (4;21); é "dar direção a" (FERREIRA, 2010, p. 257). Por outro, a condução revela-se no sentido de estar no controle, de modo que ao professor cabe escolher as conjecturas a serem provadas e as situações que julga serem desafiadoras para os alunos (1;43) (11;22). Dessa última possíbilidade, mostra-se que *"a professora envolvia-se no raciocínio dos alunos e modelava o comportamento deles perante a atividade de Investigação Matemática" (4;17)* tendo *"as atitudes do professor como determinantes das atitudes dos alunos" (9;11).*

Ainda que como uma atitude moderadora *"na Investigação Matemática, o* *professor tem a oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos" (4;19)* e, assim, valorizar os seus modos de pensar, pode ser que esse *dar a direção* se preste a satisfazer os anseios próprios do professor, os quais *"dependem igualmente de forma decisiva do modo como ele encara a educação, o currículo e a aprendizagem" (PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA; VARANDAS, 1999, p. 25).*

Nos textos das obras acadêmicas significativas, afirma-se que o professor precisa ter boa base matemática, além da sensibilidade pedagógica, já que o modo de ele trabalhar com a Matemática serve de modelo para os alunos aprenderem a investigar e a fazer Matemática (1;45) (4;15) (7;9) (10;10). Com isso compreendemos que o *ver* dos alunos fica condicionado ao *ver* do professor; e, ainda que se reconheça que as atitudes dos alunos se transformam a medida que se confrontam com a informação ou por vias da sua experiência com o fazer (9;10), o professor é quem determina essa transformação (9;15), uma vez que *"implicitamente, ele fornece informação e estrutura experiências que constituem a base das concepções dos alunos acerca da Matemática" (VARANDAS, 2000, p. 38).*

Em outras palavras, o fazer do aluno é regido pelo fazer do professor, que fornece informações, estrutura a experiência do fazer e, consequentemente, estrutura as concepções dos alunos acerca da Matemática. Com essas considerações, evidencia-se que "o papel do professor de matemática consiste, então, em fazer com que o aluno compartilhe a visão a que ele já acessou, para voltar a mente do aluno – «o olho da alma», como disse Platão, – para o mundo matemático" (BKOUCHE; CHARLOT; ROUCHE, 1991, p. 175, tradução nossa).

Compreendemos que os invariantes que dizem das ações dos alunos em atividades de Investigação Matemática reafirmam a transposição da epistemologia do fazer Matemática para o ensinar Matemática e trazem outra figura além do matemático, a saber, a figura do professor. Desse modo, o comportamento dos alunos na aula com a Investigação Matemática fica circunstanciado nos limites impostos pelo professor e pela tradição científica da Matemática e enquadrado por dois modos produtores – o do matemático e o do professor.

Ao ser esperado que o aluno se inspire no trabalho dos matemáticos e tenha o raciocínio didático e matemático do professor como modelo, pode-se tolher a possibilidade de ele abrir-se para a atividade investigativa e compreender a Matemática como algo não simplismente dado. No bojo dessa discussão, retomamos a seguinte unidade de significado: *“na Investigação Matemática as ideias matemáticas são frutos de tentativas de compreensão experimentadas pelos alunos” (4;5).*

Essa afirmação sugere uma compreensão mediada por tentativas experimentadas pelos alunos, todavia, conforme já *ex-posto*, é o trabalho do professor ou do matemático que serve de modelo para eles. Com isso, parece-nos que os alunos apenas experimentam as experiências anteriores sob o princípio da reprodutibilidade, o que aponta para a objetividade da experiência que deixa de ser autêntica e passa a ser *experimento*, cujo valor filosófico específico é o de “experiência controlada ou dirigida” (ABBAGNANO, 2007, p. 414).

Vê-se certa objetividade na experiência “garantida pelo fato de que as experiências que jazem ali poderiam ser repetidas por qualquer pessoa” (GADAMER, 1999, p. 513), livrando-a do Ser que a experiencia e da historicidade da própria experiência em nome da esquematização epistemológica do fazer Matemática do professor ou do matemático. Com essa interpretação, identificamos uma segunda tensão no discurso sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática: pressupõe-se autonomia ao aluno dentro dos limites do fazer Matemática do professor e do matemático.

Conforme *ex-posto* em 5.1, as generalizações, as conjecturas, os testes e as demonstrações se expressam, de modo enfático, características essenciais do fazer Matemática. Do significado mais comum, ser *essencial* é ser importante que, por sua vez, remete ao que é fundamental. Segundo Abbagnano (2007), o termo *fundamental* é relativo à causa, no sentido de razão de ser, isto é, aquilo que se mostra fundamental, o é para alguma coisa ou para algum outro, enquanto condição de existência, “pois não só permite compreender a ocorrência de fato da coisa, mas também o seu ‘não poder ser de outra maneira’” (ABBAGNANO, 2007, p. 475).

Compreendemos, portanto, que essas características dizem do modo de fazer Matemática, são fundantes da sua existência e, mais que isso, dizem que ele não pode ser de outra maneira. Isso aponta para a possibilidade de a Investigação Matemática na Educação Matemática enquanto um modo de ensinar Matemática ser, ontologicamente, conjecturar, testar, generalizar e demonstrar.

Nas obras acadêmicas significativas, essas características aparecem associadas aos termos *foco* (5;20), *objetivo* (5;23) (6;2) (12;18) e *importante* (5;25) (8;46) (10;14) (11;9) (12;20) e sequenciam e amparam a atividade de Investigação Matemática (8;42) (10;18). Compreendemos que isso pode ser um indicativo de serem estas as características nucleares que impõem à Investigação Matemática na Educação Matemática um modo de ser mais ou menos delineado e hierarquizado e, retrospectivamente, vemos que, tal como na Resolução de Problemas, o ensinar Matemática se dá por meio de um fazer que se envereda por um caminho conhecido, ainda que esse *caminhar* seja passível de recuos e retrocessos.

Interpretamos que as unidades de significado anteriores revelam um discurso sobre o fazer Matemática que avança para um estruturalismo matemático. Ao passo que esse modo de compreender o fazer Matemática se revela inspirador da prática de ensino; se revela o foco, o objetivo e a ela dita o como proceder, o ensinar Matemática avança pelas mesmas vias, e ainda que haja espaço para uma justificação informal e que *“a prova de conjecturas está associada a argumentação plausível” (11;16), “avançar para a formalização é importante na Investigação Matemática” (11;10).*

Isso traz indícios de que o modo de pensar o ensinar Matemática que prevalece nas obras acadêmicas significativas parece não considerar importante o desenvolvimento do pensamento humano e da própria Matemática em sua gênese histórica. As relações estabelecidas com a atividade de produção do conhecimento matemático revelam uma inclinação do ensinar para a cientificidade da Matemática e uma transposição do método de pesquisa em Matemática. Com isso, entendemos que cabe repensar essa relação e ponderar em que medida o trabalho dos matemáticos tem espaço na Escola contemporânea brasileira, bem como quais são os objetivos dessa Escola: formar pesquisadores em Matemática?

Ainda que de forma mitigada, revela-se a presença de problemas reais (1;36) (3;2) (6;4) na Investigação Matemática, cujas relações entre a Matemática e esses problemas são, também, objetivos de aprendizagem (4;12). Vemos, com os dados da pesquisa, que esse modo de ensinar Matemática se manifesta no contexto extramatemático, enfocando a interpretação e a transposição dos conteúdos matemáticos no domínio de outras Ciências, promovendo uma compreensão que não limita o conhecimento matemático nele mesmo, mas que avança na direção das relações que lhe podem ser estabelecidas.

Retomemos a seguinte unidade de significado: *"na vertente didática, a Investigação Matemática tem como um dos objetivos de aprendizagem, estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas" (4;11).* Com ela, vemos que um dos objetivos da Investigação Matemática é estabelecer relações entre ideias ou representações matemáticas e, portanto, *"problemas puramente matemáticos são necessários à Investigação Matemática" (6;7).* Da nossa compreensão, ser necessário é uma condição indispensável, mas que, por si só, é insuficiente. Essa condição de necessidade *versus* insuficiência da presença da Matemática Pura na Investigação Matemática parece ser reconhecida nos textos das obras acadêmicas significativas quando se afirma que "o *contexto exclusivamente matemático é predominante na Investigação Matemática" (5;34).*

Todavia, explicitam os dados, a Investigação Matemática evidencia a ligação entre conteúdos matemáticos, cujo interesse reside nas relações entre as ideias matemáticas (1;29) (4;6) (5;28) (11;14), de modo que *"[...] a Investigação Matemática se restringe ao contexto da Matemática Pura" (3;12).* Interpretamos que ao se restringir, o ensinar Matemática "se mantém dentro de limites" (FERREIRA, 2010, p. 664) exclusivamente matemáticos, que definem e determinam estritamente as condições. Ao se revelar que o contexto exclusivamente matemático é predominante (5;34), compreendemos que ele *pre+domina* e, portanto, ele é anterior e exerce "autoridade, poder, influência ou domínio sobre" (FERREIRA, 2010, p. 256) outros contextos.

Essa *ex-posição* sobre os contextos intra e extramatemáticos revela uma terceira tensão no tocante ao entendimento da Investigação Matemática como um modo de ensinar Matemática. Por um lado, vemos com as obras acadêmicas significativas, um discurso que defende a predominância do contexto puramente matemático, restringindo a Investigação Matemática a ele; e por outro, um discurso que acolhe a possibilidade de ela ocorrer em outros contextos, não matemáticos, considerando as relações entre a Matemática e a realidade, bem como entre a Matemática e outros campos científicos. Com isso apontamos para a necessidade de esclarecimentos de perguntas como: qual contexto predomina na Investigação Matemática? Há exclusividade de um ou de outro contexto?

Ao nos voltarmos à unidade de significado (1;29), vemos que ela faz alusão às *investigações numéricas*, pois diz: *"as investigações numéricas estabelecem conexões matemáticas" (1;29).* Junto às *investigações geométricas* (1;32) e às *investigações em estatística* (1;40), mostram-se, para nós, Investigações Matemáticas específicas. Todavia, há outros campos da Matemática não contemplados como, por exemplo, a Álgebra, o que nos direciona a perguntar a respeito dos critérios que regem essa classificação.

Vemos, intrinsicamente, que a especificação das Investigações Matemáticas parece considerar a área da Matemática intencionada com a investigação como, por exemplo, as propriedades e relações numéricas na Aritmética; a visualização espacial e o aspecto experimental e indutivo na Geometria; e a manipulação de dados quantitativos na Estatística. Os códigos (1;29), (1;32) e (1;40), nessa sequência, estão associados aos excertos a seguir, extraídos da obra acadêmica significativa 1.

"As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver essa compreensão global dos números e operações. [...] Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem à descoberta de fatos, propriedades e relações entre conjuntos de números. Podem investigar aspectos relacionados com as dízimas, os dividores ou os múltiplos de diferentes números" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 55).

"A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. [...] a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas [...] desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 71).

"O ensino de Estatística assume uma perspectiva investigativa quando o seu objetivo fundamental é o desenvolvimento da capacidade de formular e conduzir investigações recorrendo a dados de natureza quantitativa" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 105).

Entretanto, outras potencialidades são reveladas, a exemplo das investigações numéricas, que contribuem para desenvolver a capacidade de analisar padrões e regularidades (1;27) (1;28) e, junto às investigações geométricas, contribuem para desenvolver a capacidade de generalizar (1;25) (1;35). A ideia de generalização é essencialmente algébrica, o que nos leva a pensar que há, também, em uma investigação numérica ou em uma investigação geométrica, a possibilidade de adentrar o campo da Álgebra e intencionar objetos matemáticos, bem como o desenvolvimento de capacidades que lhe são próprias. Portanto, compreendemos que admitir Investigações Matemáticas específicas e classificá-las tacitamente, impõe limites que não se mantém em uma perspectiva que tem se mostrado, nessa pesquisa, pretensamente aberta.

No escopo dessa discussão, a obra acadêmica significativa 7 apresenta três tipos de Investigação Matemática de acordo com as funções que desempenham na aula, a saber, investigações do tipo *explorar, descobrir* e *pôr em questão* (7;1). Com ela vemos que as investigações do tipo *explorar* camuflam a exploração e fornecem uma primeira ideia do que é a Investigação Matemática, suscitando investigações em nível exploratório; elas "*têm o objetivo de ajudar os alunos a estabelecer intuições e a desenvolverem um sentido do território" (7;11)*.

As investigações do tipo *descobrir* têm o objetivo de *"conduzir a atividade para uma descoberta matemática específica" (7;12)*. E, as investigações do tipo *pôr em questão*, prestam-se a discutir ideias e fatos matemáticos já conhecidos e suas relações circunvizinhantes; elas *"são focadas na definição, domínio e restrições do fato matemático" (7;13)* e caracterizam-se pelo *saber porquê* das coisas. Além de suas funções específicas, esses tipos de Investigação Matemática têm a função de ensinar os alunos a investigar (7;14).

Esses tipos (explorar, descobrir e pôr em questão) e as especificações (investigações numéricas, investigações geométricas e investigações em estatística) não se sustentam na totalidade dos discursos expostos nas obras acadêmicas significativas, mas se revelam uma característica idiossincrásica da Investigação Matemática na Educação Matemática. Para nós, isso mostra a necessidade de esclarecimentos sobre a epistemologia que sustenta tal classificação, bem como sobre a necessidade de fazê-la.

Outro invariante que compõe esse núcleo de ideias diz do modo que a Investigação Matemática é tratada no currículo escolar. Junto às obras acadêmicas significativas, vemos que "o *currículo americano aponta claramente* *que fazer Matemática é fazer Investigação Matemática" (1;6); "no programa francês, a Investigação Matemática é significativa para habituar os alunos à atividade científica, com referência clara ao processo de descoberta" (4;1); "o currículo inglês inclui no trabalho investigativo a aplicação da Matemática" (4;2); "o programa português inclui a investigação como um modo de realizar exploração, pesquisa e elaborar conjecturas" (4;3); "a necessidade de validar as conjecturas é uma referência do currículo português ao trabalho com a Investigação Matemática" (9;7); "o currículo português refere-se à validação das conjecturas como forma de desenvolver o raciocínio e o pensamento científico" (9;8).*

Embora essas unidades também revelem significados concernentes aos processos matemáticos envolvidos na Investigação Matemática, a nossa interpretação, neste momento, centra-se na origem dos currículos que a Investigação Matemática aparece como um modo de ensinar Matemática, e assim, vemos que ela *"assume forte presença nos currículos de Matemática da Inglaterra, da França, de Portugal e nos documentos programáticos norte-americano" (9;13).*

Ao que pese ao currículo brasileiro, especificamente aos Parâmetros Curriculares Nacionais[50], a obra acadêmica significativa 1 evidencia que eles *"dão uma significativa importância à realização de atividades de investigação" (1;46)*, destacando-as *"na perspectiva da Matemática como contexto de trabalho" (1;47)*, no estudo dos conteúdos matemáticos (1;49), na utilização da Matemática em contextos diversos (1;48) e na vida real (1;50).

Com essas unidades de significado, vemos que, a depender do país, a Investigação Matemática se presta a diferentes objetivos, a exemplo do currículo francês que sublinha a importância de habituar os alunos à atividade científica em Matemática; e do currículo inglês que relaciona o trabalho investigativo com a aplicação da Matemática. Em tese, o currículo é um instrumento de manifestação de identidades políticas, sociais, econômicas, culturais e históricas que reflete um conjunto de planos e diretrizes em conformidade com os contextos em que essas identidades se manifestam.

Ao passo que a Investigação Matemática se revela com fins específicos e

[50] Este documento vigorou, no Brasil, entre os anos de 1998 a 2016.

distintos em cada um dos currículos mencionados, compreendemos que ela parece dar conta da multiplicidade das identidades próprias de cada contexto (país) e, tal como interpretamos, se na sua dimensão epistemológica a Investigação Matemática na Educação Matemática enfatiza o *vale sempre*, na sua dimensão didática parece enfatizar o *tudo vale*. Assim, perguntamos: é possível dar conta dessa totalidade (distinta) com um modo específico de fazer e ensinar Matemática, tal como vem se revelando, nessa pesquisa, a Investigação Matemática?

Neste capítulo, *ex-pusemos* os invariantes que, pelo movimento de interpretação hemenêutica, se abriram para os aspectos epistemológicos do modo de produção do conhecimento matemático e da própria Matemática, bem como para os aspectos didáticos relacionados ao ensinar Matemática, como modos de compreender *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação Matemática*.

Agora, lidando com os atos objetivantes que envolveram a reflexão, a imaginação e a visualização, perguntamos o que isso significa à luz da interrogação de pesquisa, ou seja, a pergunta que fizemos é: o que isto que se revelou na abertura hermenêutica diz sobre a Investigação Matemática na Educação Matemática? Esse é, pois, um novo momento no movimento do pesquisar e compõe o conteúdo do capítulo 6.

CAPÍTULO 6

UM DESFECHO COMO ABERTURA

O título deste capítulo anuncia a intenção de *ex-por* as compreensões a que chegamos nessa pesquisa como (in)conclusões. O prefixo *in* sugere a noção de ausência e privação (FERREIRA, 2010), e tem a função de advertir ao leitor que as inferências aqui *ex-postas* são incompletas, o que não significa um inacabamento da tese.

Tampouco, ela se finda ao acabar, mas se finda como uma etapa da compreensão do fenômeno, abrindo-se a outras; condição possível pela própria atitude fenomenológica-hermenêutica. O aqui *ex-posto* resulta de um olhar que *olha para trás* e reflete sobre o modo de proceder na pesquisa e sobre as compreensões que se abriram com os núcleos de ideias em busca da totalidade do revelado. É, portanto, uma nova tomada de consciência sobre o efetuado e uma reabertura *para-com* a interrogação da pesquisa.

No movimento do pesquisar, nos atentamos, também, para alguns dados objetivos das obras acadêmicas significativas e, ainda que não derivem de uma atitude fenomenológica-hermenêutica, eles nos mostram que as obras acadêmicas significativas são, majoritariamente, de origem portuguesa, com autoria centrada em um grupo de pesquisadores, o que indica uma circulação intracoletiva de ideias em um círculo esotérico[51] que, por sua vez, constitui um coletivo de pensamento[52] que compartilha de um estilo de pensamento[53] próprio.

Considerando que, em um primeiro momento, elas se revelaram significativas para as pesquisas *stricto sensu* brasileiras, há razões para supor que as ideias sobre a Investigação Matemática que circulam no Brasil, com implicações nas pesquisas e na Escola, são estranjeiras. Na Educação Matemática, isso não é exclusividade da Investigação Matemática e não se mostra problemático se essas ideias circularem intercoletivamente com diferentes estilos de pensamento e não forem assumidas tacitamente e transpostas em sentido *ad hoc* ao adentrarem outros contextos.

Ao interrogarmos *o que é isto; a Investigação Matemática na Educação*

---

[51] Cf. Fleck (1986).
[52] Idem nota 51.
[53] Idem nota 51.

Matemática?, vimos se abrir a possibilidade de compreendê-la como *um modo de fazer Matemática* e como *um modo de ensinar Matemática*, revelando-a na dimensão epistemológica e na dimensão didática, respectivamente. Há uma projeção da dimensão epistemológica – que carrega uma concepção específica sobre *o que é* e *como é* a Matemática – na dimensão didática da Investigação Matemática na Educação Matemática.

Em certo sentido, isso é previsível e vem ao encontro com o pensamento de Steiner (1987, p. 8, tradução nossa): "conceitos para o ensino e aprendizagem de matemática [...] levam ou repousam sobre (frequentemente de forma implícita) visões filosóficas e epistemológicas particulares da matemática". Em conformidade, Silva (1999) noz diz que "não há prática ou teoria pedagógica que não seja, de modo consciente ou não, influenciada, quando não determinada, por uma concepção filosófica sobre a natureza da matemática" (p. 57).

Isso nos conduz a ver, implicitamente, que posições filosóficas e epistemológicas concernentes à Matemática podem ter influenciado o dito nas obras acadêmicas significativas e, ainda que seja possível identificar um movimento de transitoriedade que busca distanciar o modo de fazer e ensinar Matemática das filosofias nascidas na crise dos fundamentos, a Investigação Matemática na Educação Matemática ainda não conseguiu se despreender totalmente das ideias por elas arraigadas.

Como desdobramentos da interrogação de pesquisa, perguntamos: o que o modo de fazer Matemática e o modo de ensinar Matemática, quando articulados, dizem da Investigação Matemática na Educação Matemática? Junto ao que interpretamos e *ex-pusemos* no capítulo 5, vemos que, na Investigação Matemática, o professor serve de modelo para os alunos aprenderem a investigar e a fazer Matemática, que o aluno é chamado a agir como um matemático e que, ao *estar-com* a Investigação Matemática, faz uma experiência matemática autêntica. Quando afirmado que o modo de raciocinar e trabalhar do professor serve de modelo para os alunos e que deles se espera agirem como um matemático, evidencia-se a presença de um *outro* como "inspiração ou ideal a ser imitado ou copiado" (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001, p. 132).

No léxico, o termo *modelo* diz de algo a ser reproduzido e, ao passo que esse algo é reproduzido à semelhança de, tem-se a ação do imitar (FERREIRA, 2010). Abbagnano (2007) reporta a definição de imitação à estética, que por sua vez, “designa-se a ciência (filosófica) da arte e do belo” (p. 367). Essas considerações abrem-se hermeneuticamente e clarificam a compreensão de que, na Investigação Matemática, o fazer do aluno é como a passividade da imitação artística, na qual

> o pintor só faz reproduzir a aparência do objeto construído pelo artesão [...]; o poeta só faz copiar a aparência dos homens e de suas atividades, sem aperceber-se realmente das coisas que imita e sem a capacidade de realizá-las [...]. Desse ponto de vista, ao artista cabe, quando muito, o mérito da escolha oportuna do objeto imitado, mas, uma vez escolhido o objeto, não pode fazer mais do que reproduzi-lo em suas características próprias. Pouco importa se o objeto imitado é uma coisa natural ou uma entidade transcendente ou inteligível: a passividade da imitação permanece (ABBAGNANO, 2007, p. 368).

Com isso e com as unidades de significado que dizem que *“na Investigação Matemática há uma identidade entre aprender Matemática e fazer Matemática” (5;2)* e que *“fazer Matemática é fazer Investigação Matemática” (11;2),* interpretamos que a arte do fazer Matemática como um fazer Investigação Matemática está subordinada ao objeto que reproduz, a saber, a Matemática. Daqui decorre a seguinte interpretação hermenêutica: quando os textos das obras acadêmicas significativas dizem o que é a Investigação Matemática na Educação Matemática, expressam-na como um *imitar*, um *agir como* o professor ou um *agir como* o matemático.

Todavia, há razões para supor que o agir do professor e o agir do matemático também se desdobram em um *imitar* que imita o fazer da tradição pedagógica e da tradição científica, respectivamente. Assim, a imitação parece ter um efeito transitivo que faz com que alunos, professores e matemáticos se percam na cotidianidade do mundo. Ao dizer *cotidianidade*, não nos referimos aos acontecimentos do dia a dia, mas a um modo de ser do *ser-aí* que conduz às estruturas da presença como um *ser-com*; nos referimos ao “modo como a presença ‘vive o seu dia’” (HEIDEGGER, 2015, p. 461).

“O ‘com’ é uma determinação da presença” (HEIDEGGER, 2015, p. 174). Ao afirmar isso, Heidegger nos diz que o mundo é sempre lugar compartilhado com os outros entre os quais se está e, portanto, a presença do *Ser-em-si* é, também e sempre, copresença. Nisto funda-se “o modo cotidiano do ser-em-si mesmo” (HEIDEGGER, 2015, p. 169). Esse modo de ser cotidiano é prescrito pelo *impessoal*, traduzido da língua alemã por *Man*. Em nota, Heidegger (2015) esclarece que o *Man* exprime uma impessoalidade no sentido de “despersonalização de pessoas” (p. 571) e indica a ação impessoal de um verbo, diz de um Ser *des-qualificado*.

Com esse pensar, descortina-se outra abertura hermenêutica: quando os textos das obras acadêmicas significativas dizem o que é a Investigação Matemática na Educação Matemática, implicitamente, expressam-na como um modo de ensinar e fazer Matemática *impessoal* que “prescreve a disposição e determina o quê e como se ‘vê’” (HEIDEGGER, 2015, p. 233). O modo de fazer Matemática se revela sustentado por uma lógica de produção específica que repousa sobre um sistema de crenças justificadas sobre *o que é* e *como é* a Matemática, ou seja, sobre os seus modos de ser. O discurso que prevalece assenta o fazer Matemática sobre a esquematização epistemológica de conjecturar, testar, generalizar e demonstrar.

Sob a égide dessa concepção, repousa a crença de que a Investigação Matemática é capaz de reunir características essenciais do fazer Matemática para todo e qualquer sujeito que com ela se deparar. Isso implica em assumir a possibilidade de esse fazer ser reproduzido a um nível bastante satisfatório em diferentes níveis de escolarização, tanto para professores quanto para alunos, como se fosse possível nivelar todos os modos de ser dos diferentes sujeitos que com ela estiverem.

Com essas considerações, vemos que as afirmações sobre o modo de ser da Investigação Matemática na Educação Matemática (fazer e ensinar Matemática) dizem, sobretudo, de uma imitação que conduz à impessoalidade. O fazer do aluno é imitação do fazer do professor ou do matemático; o fazer do professor pode ser imitação da tradição pedagógica que, por sua vez, pode ser imitação do fazer do matemático; o fazer do matemático é imitação da tradição científica que lhe é própria; o fazer da tradição é imitação de um modo fazedor predominante. Esse “fazer o que as pessoas fazem na maior parte das vezes” (INWOOD, 2002, p. 25-26) dissolve-as na cotidianidade da própria presença, de modo que as ações são realizadas “por alguém de quem se deve dizer que não é ninguém” (HEIDEGGER, 2015, p. 185).

Outro aspecto que se mostra do movimento de descrição e interpretação dos núcleos de ideias e, neste momento, ganha relevo é a experiência matemática autêntica possibilitada pela Investigação Matemática. Compreendemos que a autenticidade da experiência matemática é anunciada de um postura naturalística nas obras que se mostraram significativas nessa pesquisa. Ao nos voltarmos em sentido de escuta para os textos que as compõem, a autenticidade se abriu, hermeneuticamente, para a inautenticidade.

Ainda que a característica de autenticidade concirna à experiência do sujeito com a Matemática e não ao próprio sujeito, o qual é “nem autêntico nem inautêntico, encontrando-se num estado de *Indifferenz* [indiferença]” (INWOOD, 2002, p. 12, inserção nossa), as considerações tecidas nos levaram a considerar que a experiência inautêntica do fazer e ensinar é, também, um modo derivado do impessoal e recai na cotidianidade.

A inautenticidade da experiência se revela, implicitamente, à medida que o fazer Matemática, por parte dos alunos, não é feito com suas próprias mãos, mas ao modo que o impessoal prescreve. Esse fazer “o que se espera que seja feito” (INWOOD, 2002, p. 26), os dissolve na cotidianidade da própria presença. Destarte, a maneira como a presença vive a experiência do fazer “está sujeita ao impessoal e é inautêntica” (INWOOD, 2002, p. 26).

A cotidianidade é constituição existencial originária do *ser-aí*; ela é inevitável e determina a presença. Com isso, compreendemos que não é possível subtraí-la do *Ser-em-si* e “na medida em que Dasein é a entidade que eu sou, determinando-se também no ser-um-com-o-outro [...] as possibilidades de meu Dasein encontram-se sob o controle teimoso do impessoal” (INWOOD, 2002, p. 96). Dessa máxima, perguntamos: como é possível a Investigação Matemática ser, para o aluno, um fazer autêntico, a partir da sua imersão ontológica na impessoalidade? Será possível mover-se da inautenticidade para a autenticidade do fazer, ainda que impessoal?

Parece que esse modo de ser (impessoal) acaba por controlar toda e qualquer ação dos alunos. Contudo, uma vaga possibilidade de desvencilhar-se da impessoalidade é vislumbrada quando Heidegger (2015) fala sobre aproximar-se de si e abrir-se para si mesmo, ainda que o decaimento na impessoalidade da cotidianidade seja condição originária do Ser. Nas suas palavras,

> quando a presença descobre o mundo e a aproxima de si, quando abre para si mesma o seu próprio ser, este descobrimento de ‘mundo’ e esta abertura da presença se cumprem e realizam como uma eliminação das obstruções, encobrimentos, obscurecimentos, como um romper das distorções em que a presença se tranca contra si mesma (HEIDEGGER, 2015, p. 187).

Essa possibilidade centelhada[54] em *Ser e Tempo* (2015) foi o estopim para Ericksen (2018) avançar e interpretar o modo de *ser-com* os outros como *insolente*; como um modo existencialmente autêntico dentro da impessoalidade cotidiana. A insolência diz da condição própria mais autêntica de ser e tal como posto em Ericksen (2018, p. 83)

> é uma forma de ser aquilo que se é possível ser autenticamente, é a insolência que serve de combustível para se sair da inautenticidade em busca da própria autenticidade. É um 'finitizar' independente de qualquer prescrição normativa do impessoal, é um olhar afastado daquilo que afasta, é o contraponto da determinação previamente dada em confluência com aquilo que pode ser descoberto na abertura de ser-si mesmo e para si-mesmo. Em síntese, é o modo de ser que se alcança o si mesmo mais autêntico e mais próprio do *Dasein* em sua saída eruptiva da impessoalidade reinante na cotidianidade, é a diapasão existente entre a cotidianidade e a autenticidade mais própria do *Dasein*.

A abertura hermenêutica que resulta dessas considerações mostra que há um carácter de autenticidade na impessoalidade e, portanto, aponta-se para uma resposta afirmativa quando perguntado sobre a possibilidade de, na Investigação Matemática, mover-se da inautenticidade para a autenticidade do fazer, ainda que impessoal. Ao ser perguntado como isso é possível, encontramos com Ericksen (2018) um modo, a saber, pela insolência. Tal como faz o autor supracitado, há de se explicar que a insolência, diferentemente da impessoalidade cotidiana, não é um estado permanente, mas intermediário e, portanto, ser insolentemente autêntico é apenas uma modificação no modo de ser do impessoal. Mas, o que isso diz, no contexto dessa pesquisa, quando voltamos o olhar para os dados produzidos?

Retomando algumas unidades de significado, vemos se explicitar que o agir do aluno é como o de um matemático; que eles, juntamente ao professor, constituem uma pequena comunidade matemática e que o fazer hegemonicamente consensual presente na Investigação Matemática se caracteriza pelo estilo conjectura-teste-demonstração (1;1) (1;15) (1;20) (5;19) (8;1) (8;42). Decorrente disso, há razões para supor que, tanto os alunos quanto o professor se perdem na cotidianidade do fazer Matemática do matemático que, por sua vez, se perde na cotidianidade do fazer Matemática da tradição. Isso mostra uma permanência no impessoal, em um estado de não insolência que

[54] O mesmo que faíscas, que quando alimentadas "podem tornar-se fogueiras, disparadores de debates e reflexões" (MIARKA, 2011, p. 45).

não lhes permite atrever-se, no sentido genuíno da palavra, a fazer Matemática; o que coloca em decadência os modos autênticos de serem sujeitos investigadores ao *estarem-com* a Investigação Matemática na Educação Matemática.

Por outro lado, com as obras acadêmicas significativas, vemos implícita a ideia de que *estar-com* a Investigação Matemática na Educação Matemática requer que o fazer Matemática seja fruto de tentativas experimentadas pelos próprios alunos, de forma independente (4;5). Isso indicia a intenção de a Investigação Matemática ser esse lugar no qual a insolência, enquanto condição própria mais autêntica de ser encontra espaço e passa a ser o fim último do ensinar Matemática.

Embora as situações iniciais se configurem como entes intramundanos, elas são *para-com* os alunos e os professores elementos dispostos na cotidianidade da sala de aula. Nesse sentido, evidencia-se que elas também contribuem para a imersão do fazer na impessoalidade, quando se afirma que é importante trazer em seus enunciados indicações de como proceder à investigação (8;51) (8;53).

Contrariamente, também se afirma que elas devem permitir ampla margem de escolhas pessoais em relação às questões a estudar e às estratégias a seguir (2;12) (8;54) (8;55), o que remete para uma possibilidade de promover a insolência e desvencilhar o fazer das amarras do impessoal. Independente dessa dubiedade deve-se considerar que ser insolente, em última instância, é uma condição decisória do *ser-aí* (ERICKSEN, 2018) e, portanto, a estrutura das tarefas, por si só, não determina tal condição.

A interpretação *ex-posta* no capítulo 5 revelou, também, que, ao *estar-com* a Investigação Matemática, o professor tem a oportunidade de *ver* sob a persperctiva dos alunos e, por outro lado, que o *ver* do professor condiciona o *ver* dos alunos. Retomando esse aspecto, neste momento da pesquisa, nos demos conta de que os alunos e os professores são *seres-si-mesmo* ao mesmo tempo que são *seres-outros* e exercitam seus modos de *ser-com* esses outros no cotidiano mais imediato da sala de aula. Isso nos mostra que ambos os modos de *ver*, quando condicionados por um *ver* absoluto, se revelam problemáticos à medida que decaem na impessoalidade.

Em outras palavras, o professor, ao *ver* sob o ver do aluno, e o aluno ao *ver* sob o *ver* do professor, colocam-se em um lugar cujo campo de visão não é autêntico – o lugar do outro. Esse lugar pode ser compreendido como *horizonte* que Inwood (2002) define como sendo "um ponto privilegiado, de onde se podem enxergar certos problemas, perguntar e responder questões que lhes são apropriadas" (p. 90) e se configura com a historicidade do sujeito que se coloca a *ver*. Com essa compreensão, revela-se a impossibilidade de *ver* sob o *ver* do outro, de colocar-se em um lugar que é do outro enquanto um *estar-aí* histórico. A intropatia pretendida entre professor e aluno não se sustenta, dado que hermeneuticamente compreendemos ser possível *ver* com os mesmos atos que o outro, mas nunca sob ou como o outro vê.

Para além dessa abertura hermenêutica, em sentido quantitativo, a figura do professor na sala de aula é singular, enquanto que a figura do aluno é plural. Isso impõe problemas categoriais ao desejar que o *ver* do professor esteja em concordância, no sentido de ser o mesmo, com os diferentes modos de *ver* dos alunos; e, de igual modo, ao se desejar que os diferentes modos de *ver* dos alunos convirjam para o *ver* do professor. Há uma generalização da figura do professor que não leva em conta as particularidades inerentes ao seu próprio modo de ser um professor, isto é, o professor é *práxis*, cada um, é um. De igual modo, esse pensar se estende para a figura do aluno.

Movendo-nos em direção a uma síntese articuladora dos sentidos *ex-postos* e hermeneuticamente interpretados, enunciamos que *a Investigação Matemática na Educação Matemática é um modo de ensinar Matemática que subjaz a impessoalidade cotidiana da epistemologia do fazer Matemática do matemático, valorizando-o*. Com isso, nos perguntamos: como fazer valer, ao *estar-com* a Investigação Matemática na Educação Matemática, o que se revela pela compreensão do aluno para a *pro-dução* do conhecimento matemático? Até que ponto o movimento do fazer não revela, mas enquadra compreensões pelo modo de ensinar Matemática que se mostrou nessa tese?

GENERALIDADES QUE ENCERRAM O DISCURSO

Foi um privilégio ter podido construir esta pesquisa! A vejo como uma forma de, em suas devidas proporções, ser contributo à Educação Matemática e à Investigação Matemática. Também a vejo como um modo de retornar à Escola, que tantas vezes me recebeu como aluno, estagiário, professor e pesquisador, o conhecimento constituído e os frutos produzidos durante os anos de vida escolar pública.

Ao me lançar na busca pela compreensão da Investigação Matemática na Educação Matemática, carregava comigo uma compreensão prévia que direcionava as minhas ações nos âmbitos da docência e da pesquisa, e colocá-la em suspensão foi tarefa essencial para poder me abrir a outras compreensões. Aliás, tarefa complexa, sobre a qual ficam dúvidas a respeito do seu efetivo cumprimento. A única certeza que tenho é do esforço depreendido em realizá-la. Isso me acalenta!

Essa preocupação se justifica por entender que toda pesquisa científica requer seriedade, sensatez e honestidade do pesquisador *para-com* os dados. O respeito que tenho pelos autores das obras acadêmicas significativas com as quais me coloquei em investigação, olhando-os como sujeitos que enunciaram ideias de seus horizontes compreensivos particulares, as quais são frutos de um momento histórico e expressões de um contexto social, cultural e político que lhes são próprios, também justifica o meu cuidado e preocupação de fidedignidade com a pesquisa aqui apresentada. Além disso, adentrei em um campo da Educação Matemática pelo qual tenho particular afeto e desejo contribuir com o que de melhor eu possa fazer.

No itinerário da constituição dessa pesquisa, as ideias arquitetadas em outras pesquisas realizadas durante os dez anos de dedicação à Investigação Matemática na Educação Matemática foram lembranças constantes. Com elas e com as ideias que aqui emergiram, fui me dando conta dos desafios superados no percurso percorrido e, mais importante, dos que estão por vir no percurso que tenho a percorrer. Muitas ideias se fortaleceram, outras se desconstruíram e outras ainda permaneceram carentes de esclarecimentos.

Dei-me conta de que por muitas vezes recaí, também, na impessoalidade do fazer Matemática ao *estar-com* a Investigação Matemática em trabalhos científicos ou em trabalhos docentes. Com isso, pergunto-me se ficam invalidadas as ideias construídas e compartilhadas anteriormente a essa pesquisa, e concluo: *não*. Compreendo que, do ponto de vista científico, elas permanecem válidas na historicidade do processo de *pro-dução* do conhecimento e, junto àquelas que aqui permaneceram obscuras, garantem *vida* ao campo da Investigação Matemática na Educação Matemática, porque, uma vez desconstruídas, inauguram um novo processo de reconstrução, encetando outras pesquisas. Do ponto de vista docente, elas se constituíram em ensinamentos, ainda que com algum prejuízo, inevitavelmente. Certamente, isso traz implicações para o meu modo de ser professor e pesquisador com a Investigação Matemática.

À comunidade de Educação Matemática, acredito que a tese traz duas interpretações como principais contribuições, são elas: i) a Investigação Matemática na Educação Matemática idealiza para a sala de aula a experiência científica do matemático e, como consequência, direciona o ensinar Matemática para um fazer que conjectura, testa, generaliza e demonstra; ii) ainda que, em princípio, a Investigação Matemática na Educação Matemática seja pretensamente aberta, ela incorre no fechamento do processo investigativo ao atribuir a característica de abertura somente às situações iniciais e ao pressupor um único modo fazedor.

As considerações aqui tecidas abrem caminhos para outros modos de pensar a constituição da Investigação Matemática na Educação Matemática e centelham a necessidade de fortalecê-la enquanto campo de pesquisa. Isso não significa definí-la e impôr a ela compreensões cristalizadas, mas constituir compreensões que se colocam em uma condição de abertura e em um diálogo mais efetivo entre os pares.

Acredito que o potencial da Investigação Matemática na Educação Matemática é permitir a *pro-dução* do conhecimento matemático como um fazer de possibilidades que conduz ao devir, em sintonia com o modo de ser das coisas. Mas, para isso ela precisa se reinventar, se distanciar da epistemologia do fazer Matemática do matemático e se constituir em um modo de ensinar em que professores e alunos *pro-duzam* Matemática com suas próprias mãos e em seus autênticos modos de ser um sujeito investigador.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. (Trad.) Ivone Castilho Benedetti. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa fenomenológica em Educação: possibilidades e desafios. **Revista Paradigma**, n. 41, p. 30-56, 2020.

BICUDO, M. A. V. Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: Flores, C. R. E.; Cassiani, S. (Org.). **Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua (da educação matemática) prática pedagógica e produção de conhecimento**. Campinas: Mercado das Letras, 2013, p. 17-40.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: Bicudo, M. A. V. et al. (Org). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011a, p. 11-28.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: Bicudo, M. A. V. (Org). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011b, p. 29-40.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análises. In: Bicudo, M. A. V. (Org). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011c, p. 41-52.

BICUDO, M. A. V. Análise fenomenológica estrutural e variações interpretativas. In: Bicudo, M. A. V. (Org). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011d, p. 53-74.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. **Filosofia da Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte. Editora: Autêntica, 2011.

BICUDO, M. A. V.; KLUBER, T. E. A questão da pesquisa sob a perspectiva da atitude fenomenológica de investigação. **Filos. Educ.**, Caxias do Sul, v.18, n.3, p.24-40, 2013.

BICUDO, M. A. V.; KLUBER, T. E. Pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de Pesquisa**, v. 41, n.144, p. 904-927, 2011.

BKOUCHE, R.; CHARLOT, B.; ROUCHE, N. **Faire des mathématiques:** le plaisir du sens. Paris. Editora: Armand Colin, 1991.

BONOTTO, A. K. **Ensino e aprendizagem da função exponencial por meio de atividades investigativas e do uso de objeto de aprendizagem**.125 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BRAGAGNOLO, F. Atitude natural e atitude fenomenológica: a relação existente entre as diferentes atitudes a partir do ato intuitivo. Porto Alegre, **Intuitio**, v. 7, n. 2, p.73-88, 2014.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação Matemática e o seu papel na aprendizagem de Matemática. In: Ponte, J. P. et al. **Atividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002, p. 5-24.

BROCARDO, J. **As Investigações na aula de Matemática:** Um projecto curricular no 8º ano. 2001. 641 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

BRUYNE, P.; HERMAN, J.; SCHOUTHEETE, M. **Dinâmica da pesquisa em ciências sociais:** os polos da pratica metodológica. (Trad.) Ruth Joffily. Rio de Janeiro: F. Alves, 1977.

CALHAU, M. E. S. **Investigação em sala de aula:** uma proposta de atividade em salas de aula do ensino fundamental. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2007.

CHATELARD, D. S.; CERQUEIRA, A. C. O conceito de simbiose em psicanálise: uma revisão de literatura. **Ágora**, Rio de Janeiro, v. 18, n. 2, p. 257-271, 2015.

CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno:** uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

CRISTÓVÃO, E. M. **Investigações Matemáticas na recuperação de ciclo II e o desafio da inclusão escolar**. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

ERICKSEN, L. Autenticidade e insolência perante a impessoalidade: um estudo heideggeriano. **AUFKLÄRUNG**, João Pessoa, v.5, n.1, 2018, p.77-88.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: Abrantes, P.; Cunha L.; Ponte, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender Matemática:** textos seleccionados. Lisboa: projecto matemática para todos e associação de professores de matemática, 1996, p. 25-47.

ESPÓSITO, V. H. C. Hermenêutica: estudo introdutório e o trabalho do professor de Matemática. **Cadernos da sociedade de estudos e pesquisas qualitativos**. São Paulo, v.2, n. 2, p. 85-112, 1991.

FERREIRA, A. B. O. **Mini Aurélio:** o dicionário da Língua Portuguesa. 8 ed. Curitiba: Positivo, 2010.

FIOCRUZ. **Sistema de Informação em Biossegurança**. Disponível em: <http://www.fiocruz.br/biosseguranca/Bis/infantil/bemtevi.htm>. acesso em: 17/04/2021.

FLECK, L. **La génesis y el desarrollo de un hecho científico**. Madrid: Alianza Universidad, 1986.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e aula de Matemática**. Lisboa: APM, 1999.

GADAMER, H. G. **Verdade e método**. (Trad.) Flávio Paulo Meurer. Petrópolis: Vozes, 1999.

GIORGI, A. Sobre o método fenomenológico utilizado como modo de pesqusia qualitativa nas ciências humanas: teoria, prática e avaliação. In: Poupart, J. et al. **A pesquisa qualitativa:** enfoques epistemológicos e metodológicos. (Trad.) Ana Cristina Nasser. 4 ed. Petrópoles: Vozes, 2014, p. 396-409.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In: Abrantes, P. et al. (Org.). **Investigações Matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 35-49.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Revista brasileira de informática na Educação**, v. 2, n.1, p. 73-88, 1999.

GUERRA, S. H. R. **Investigação Matemática: uma proposta de ensino de estatística para o 8° ano do ensino fundamental**. 133 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

HEGEL, G. W. F. **Fenomenologia do Espírito**. (Trad.) Paulo Menezes. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2005.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo.** (Trad.) Marcia Sá Cavalcante Schuback. 10 ed. Petrópolis: Vozes, 2015.

HEIDEGGER, M. **A origem da obra de arte**. (Trad.) Maria da Conceição Costa. Lisboa: Edições 70, 2005.

HERMANN, N. **Hermenêutica e Educação**. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

HUSSERL, E. **A crise da humanidade europeia e a Filosofia.** (Trad.) Urbano Zilles. 2 ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HUSSERL, E. **Investigações lógicas:** sexta investigação. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

HUSSERL, E. **A idéia de fenomenologia**. (Trad.) Artur Mourão. Rio de Janeiro: Edições 70, 1989.

INWOOD, M. J. **Dicionário Heidegger**. (Trad.) Luísa Buarque de Holanda. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de Filosofia.** 3 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. (Trad.) Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 2012. 396 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KLUTH, V. E. A rede de significação: um pensar metodológico de pesquisa. In: Bicudo, M. A. V. (Org). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011, p. 75-98.

LAMONATO. M. **A exploração-investigação matemática:** potencialidades na formação contínua de professores. 2011. 256 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

LAMONATO. M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 51-74, 2011.

MACHADO, I. M.; SILVA, E. Heidegger, Descartes e a metafísica matemática. **Cadernos Zygmunt Bauman**. v. 7, n. 14, p. 35-45, 2017.

MACHADO, O. V. M. Pesquisa Qualitativa: modalidade fenômeno situado. In Bicudo, M. A. V.; Espósito, V. H. **Pesquisa qualitativa em Educação**. São Paulo: Editora da UNIMEP, 1994.

MARTINS, J. A ontologia de Heidegger. In: Martins, J.; Bicudo, M. A. V. **Estudos sobre Existencialismo, Fenomenologia e Educação**. 2 ed. São Paulo: Centauro, 2006a.

MARTINS, J. O existencialismo de Kierkegaard. In: Martins, J.; Bicudo, M. A. V. **Estudos sobre Existencialismo, Fenomenologia e Educação**. 2 ed. São Paulo: Centauro, 2006b.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. **Estudos sobre Existencialismo, Fenomenologia e Educação**. 2 ed. São Paulo: Centauro, 2006.

MELO, A. J. F. **O ensino de potências e raízes com o auxílio da calculadora:** uma experiência investigativa em sala de aula. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2008.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. (Trad.) Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

MIARKA, R. **Etnomatemática:** do ôntico ao ontológico. 2011. 427 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

MOURA, C. A. R. de. **Crítica da razão na fenomenologia**. São Paulo: Nova Stela, 1989.

NÓBREGA. T. P. Corpo, percepção e conhecimento em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**, v. 13, n. 2, p. 141-148, 2008.

OLIVEIRA, C. M. S. **A investigação matemática com o geogebra no estágio com pesquisa do curso de licenciatura em matemática da UEG/IPORÁ**. 276 f. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Jataí, 2015.

OLIVEIRA, H. M. **Actividades de investigação na aula de Matemática:** aspectos da prática do professor. 271 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1998.

PALMER, R. E. **Hermenêutica**. (Trad.) Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70, 2018.

PEREIRA, G. N. **Proposta de oficinas didáticas para o ensino de análise combinatória utilizando traços da Investigação Matemática como método de ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

POINCARÉ, H. A invenção matemática. In: Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 1996, P. 7-14.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. (Trad.) Heitor Lisboa de Araújo. 7 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: Ponte, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 103-142.

PONTE, J. P. Investigações sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação,** v. 2, p. 93-169, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. M. **Investigações Matemáticas em sala de aula**. 3 ed. São Paulo: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P.; FERREIRA, C.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. M.; VARANDAS, J. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In: Abrantes, P. et al (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM, 1999, p. 133-152.

PONTE, J. P.; FERREIRA, C.; VARANDAS, J. M.; BRUNHEIRA, L.; OLIVEIRA, H. **A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas**. Lisboa: APM, 1999.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. In: Actas do Prof Mat 99. Lisboa: APM, 1999. p. 01-28.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. In: Ponte, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 213-252.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. In: Ponte, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 253-280.

RAMOS, L. M. A. Os tipos psicológicos na Psicologia Analítica de Carl Gustav Jung e o inventário de personalidade “Myersbriggs Type Indicator (MBTI)”: contribuições para a Psicologia Educacional, Organizacional e Clínica. **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 6, n. 2, p. 137-180, jun. 2005.

RODRIGUES, M. U. **Narrativas no ensino de funções por meio de Investigações Matemáticas**. 305 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

ROSA, C. P. **Investigação Matemática:** contribuições para o ensino de sequências e padrões para alunos do ensino fundamental. 140 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

SANTANA, J. R. **Educação Matemática:** favorecendo investigações matemáticas através do computador. 430 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.

SANTOS, M. C. C. **Investigação Matemática em sala de aula:** uma proposta para a inclusão do aluno surdo no ensino regular.154 f. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Jataí, 2015.

SEIBT, C. L. Considerações sobre a fenomenologia hermnêutica de Heidegger. **Rev. Nufen: Phenon. Interd.**, Belém, v. 10, n. 1, p. 126-145, 2018.

SCHMIDT, L. **Hermenêutica**. (Trad.) Fábio Ribeiro. 3 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

SILVA, J. J. Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 45-58. 1999.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as mais brilhantes mentes do mundo durante 358 anos. (Trad.) Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

SOKOLOWSKI, R. **Introdução à Fenomenologia**. (Trad.) Alfredo de Oliveira Moares. 3 ed. São Paulo: Loyola, 2012.

STEINER, H. J. Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**. Quebec, v. 7, n. 1, p.7-13, 1987.

TRINDADE, A. F. P. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas - que fronteiras?.** 2008. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

VARANDAS, J. **Avaliações de investigações matemáticas:** uma experiência. 2000. 263 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2000.

VILELA. D. S. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem:** Ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. 260 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

WICHNOSKI, P. **Uma Metacompreensão da Investigação Matemática nas produções do Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná – PDE**. 2016. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2016.

WICHNOSKI, P. **Atividades de Investigação Matemática a partir do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.** 2012. 77 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2012.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. Uma hermenêutica da produção sobre Investigação Matemática no Brasil. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.17, n.2, p.173-190, 2015.

WILDER, R., L. **O papel da intuição**. (Trad.) Marcelo Papini. v. 156, p. 605-610, 1967. Disponível em: <http://www.mat036.ufba.br/WILDER.pdf>. Acesso em: 17/04/2021.

GLOSSÁRIO[55]

Atitude fenomenológica-hermenêutica: é a atitude que visa os essenciais dos objetos em um movimento de compreensão intencional e enxertado pelo contexto histórico do Ser que experiencia a compreensão. Com essa atitude, as coisas do mundo não são concebidas como objetos, mas como fenômeno.

Atitude natural: é a atitude primeira pela qual nos dirigimos ao mundo. É uma atitude irrefletida que visa as coisas do mundo como elas são, sem interrogá-las.

Círculo esotérico: refere-se a um grupo formado por sujeitos com maior domínio intelectual em determinado campo do conhecimento.

Coletivo de pensamento: designa a troca de ideias entre dois ou mais sujeitos.

Compreensão existencial: a compreensão existencial resulta como *afetividade*, *compreensão* e *expressão*, chamadas por Heidegger de *existenciálias*. Contudo, ela não se constitui hierarquicamente como um sentir, compreender e expressar o compreendido, mas, sentindo, compreendendo e expressando o compreendido, na mesma prioridade, em um estado de abertura para a experiência vivida do *ser-aí*.

Consciência: é o ato intencional de voltar-se para o fenômeno e atribuir-lhe sentido. Na fenomenologia é sinônimo de intencionalidade.

Corpo próprio: é uma personificação corpórea pela qual vivemos a experiência do nosso corpo e, com ele, todas as outras experiências. Ele é, ao mesmo tempo, constituído e constituinte e, portanto, foi, é, e já não é mais o que acabou de ser, colocando-se em movimento de transformação de si mesmo junto às transformações do *mundo-vida*. É na experiência desse corpo e com ele que percebemos os objetos, os quais são apenas significações vividas por ele.

***Dasein*:** na tradução da língua portuguesa significa *Ser-aí* e refere-se à existência do Ser como uma abertura para a experiência no mundo. Diz do modo de o Ser ser no mundo com os outros e com o próprio mundo.

***Epoché*:** é o ato de colocar o fenômeno em suspensão e abster-se de todo juízo, crença, valores e pré-conceitos sobre ele.

[55] Esse glossário não tem o objetivo de definir, mas tão somente de *ex-por* o modo que compreendo e atribuo sentido aos termos.

Essência: diz das maneiras características pelas quais o fenômeno se mostra. Ela não é um fato e, tampouco está nele, mas se institui pela consciência que, no fato, a reconhece como um aspecto essencial da sua manifestação.

Estar-aí: designa o estar presente do Ser em seu modo de ser como constituição ontológica, no mundo.

Estar-com: significa estar junto a..., ao existir no mundo e diz da abertura do modo de o Ser ser para outros entes.

Estilo de pensamento: diz de um modo de perceber intelectiva e objetivamente dirigido.

Evidência apodítica: são verdades incontestáveis; referem-se a coisas que não podem ser de outra maneira.

Experiência vivida: é a experiência vivenciada não no sentido psíquico de fazer experiência de algo, mas como vivência intencional.

Ex-por: expressa o movimento que externaliza a compreensão sobre as regiões circundantes da pesquisa, as essências percebidas do fenômeno interrogado e o modo como construímos os procedimentos metodológicos.

Fenômeno: designa todas as coisas intencionadas pela consciência e, portanto, carrega em seu significado a revelação das essências, não das coisas em sim, mas do em si da coisa em sua revelação.

Imanência: diz dos aspectos próprios do fenômeno, que faz parte da sua natureza. A Imanência é aquilo que pertence ontologicamente ao fenômeno.

Intencionalidade: é a essência da consciência que a faz dirigir-se e abrir-se para as coisas do mundo para além da mera aparição.

Intuição: é o ato pelo qual o fenômeno revela suas essências e ganha sentido, diferentemente da intuição psicológica que apreende um objeto sem recorrer a qualquer recurso inteligível, a intuição fenomenológica é um ato intencional que visa o percebido em atos de consciência.

Mundo-vida: é o mundo elaborado intersubjetivamente e visto e configurado com a nossa consciência; é o mundo em que o Ser é.

***Noema*:** é a representação do objeto na consciência; compreende àquilo que é pensado.

Noesis**:** é um ato de pensamento que visa o objeto intencional.

Ôntico: refere-se à compreensão oriunda da atitude natural.

Ontológico: refere-se à compreensão transcendental, oriunda da abertura diante do mundo e das coisas, formulada de modo inteligível.

Percepção: é uma totalidade dos sentidos que se dá no corpo próprio, por meio da qual a intuição acontece.

Pro-dução: concebe o *pro-duzir* como um lançar à frente, e que tem correspondência com o *des-encobrimento* pelo envolvimento. Em sintonia ao modo de ser das coisas, diz de uma produção pelo ver, pelo demorar-se contemplativo, conduzindo o *vir-a-ser*. Heidegger usa *pro-dução*, por entender que esse processo está no cerne da constituição da pessoa e por que o prefixo *pro* já diz do lançar-se em possibilidades.

Pro-jeto: refere-se modos de o Ser constituir-se, temporal e historicamente, junto ao mundo.

Redução eidética: é o ato de redução fenomenológica que visa as essências.

Ser-com: traz a ideia de intersubjetividade; significa que a presença é sempre com alguém, ao estar em um mundo compartilhado.

Ser-em-si: significa a movimentação temporal e espacial para a constituição ontológica-existencial do Ser em seu próprio si-mesmo.

Ser-no-mundo: é o encontro entre o Ser e as coisas do mundo.

Transcendência: diz dos aspectos externos ao fenômeno, que se mostram além dos aspectos imanentes.

Vir-a-ser: é a constituição futura do Ser junto ao mundo, pelas ações dirigidas pela consciência.