UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

# Uma Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio

Março de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Uma Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio

José Vinicius Barreto dos Santos Rosa

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:

1º Membro: Prof. Dr. Paulo Domingos Conejo (Orientador)

2º Membro: Profª Dra. Tatiane Cazarin da Silva

3º Membro: Prof. Dr. Amarildo de Vicente

Cascavel, março de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Rosa, José Vinicius Barreto dos Santos
Uma Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio / José Vinicius Barreto dos Santos Rosa; orientador(a), Paulo Domingos Conejo, 2021.
102 f.

Dissertação (mestrado profissional), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Modalidade Profissional, 2021.

1. Programação Linear. 2. Ensino Médio. I. Conejo, Paulo Domingos. II. Título.

**JOSÉ VINICIUS BARRETO DOS SANTOS ROSA**

Uma Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientador(a) - Paulo Domingos Conejo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Tatiane Cazarin da Silva

Tatiane Cazarin da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão

Amarildo de Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 16 de março de 2021.

# Resumo

Neste trabalho analisamos os conteúdos de Sistemas de Equações e Inequações Lineares ofertados no Ensino Médio, visando trabalhar com Programação Linear. Apresentamos alguns conceitos e resultados teóricos para constatar a solução dos Problemas de Programação Linear em um vértice da região viável. Trazemos uma proposta de apresentar os Problemas de Programação Linear a partir da modificação no enunciado de um problema sobre sistemas de equações proposto ao Ensino Médio. Como parte de um plano de aula, analisamos no espaço $\mathbb{R}^2$ os métodos de resolução gráfica e por exaustão de um Problema de Programação Linear, e apresentamos um tutorial para "uma ferramenta livre disponível no *OpenOffice Calc*, denominada *Solver*" para os casos onde há a impossibilidade de solução gráfica.
Palavras-Chave: Programação Linear, Ensino Médio.

# Abstract

In this work, we analyze the contents about System of Linear Equations and Inequations offered in High School, aiming to work with Linear Programming. We present some concepts and theoretical results to verify the LPP solution in a vertex of the viable region. We bring a proposal to present the LPP from the modification in the statement of a problem about the equation systems proposed to High School. As part of a class plan, we analyze the methods of graphical resolution and exhaustion of a Linear Programming Problem in the $\mathbb{R}^2$ space, and present a tutorial of "a free tool available in *OpenOffice Calc*, named *Solver*", for cases where there is no graphic solution.
Keywords: Linear Programming, High School

# Sumário

# Introdução

Os sistemas de equações e as desigualdades são ferramentas muito utilizadas dentro da Matemática, onde os mesmos são apresentados aos alunos inicialmente no ensino fundamental II, mais precisamente no oitavo ano [14] e em seguida no ensino médio [1, 2]. No primeiro ano o foco é o estudo das desigualdades e no segundo ano os sistemas de equações.

Podemos utilizar a modelagem matemática como uma estratégia no ensino-aprendizagem dos alunos. Segundo [21], sobre modelagem matemática, diz que

"a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [20] abordam o papel da modelagem matemática na metodologia de ensino onde afirma que

"ante uma situação-problema ligada ao mundo real, com sua inerente complexidade, o aluno precisa mobilizar um leque variado de competências: selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado."

Ainda, o artigo 4º da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [14] no inciso 2 nos diz que

"exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.”

Em [22], fala da importância de contextualizar a Programação Linear na análise de situações reais

“um aspecto importante de problemas envolvendo decisões é o de otimização; quando se procura estabelecer quais as maneiras mais eficientes de utilizar os recursos disponíveis para atingir certos objetivos. Em geral trata-se de recursos limitados e a sua utilização criteriosa possibilita melhorar o rendimento ou produtividade do processo em estudo.”

Desta forma, com base nas propostas curriculares para o ensino [14, 20], tomando a BNCC, podemos apresentar aos discentes os conceitos básicos da Programação Linear (PL), com o objetivo de ambientá-los aos problemas desta área que tem forte apelo geométrico e apelo à modelagem matemática.

De fato, há alguns trabalhos na literatura com o propósito de tratar de Problemas de Programação Linear (PPL) no ensino médio. Como exemplo temos [3] que explora o conteúdo de inequações de primeiro grau nos livros didáticos e introduz a Programação Linear com foco no Método Gráfico, relacionando a PL com inequações lineares. Já [5] aborda a teoria básica de Otimização Linear e o Método *Simplex*, propondo um material direcionado aos professores do terceiro ano do ensino médio, utilizando a resolução gráfica e um *Solver* para os casos com dimensões maiores ou iguais a 3. Em [12] é proposto incentivar os próprios estudantes do ensino médio conhecer a PL com a resolução por sistemas lineares e apoio de *Softwares* nos casos com mais de duas variáveis. Em [13] o foco é na aplicabilidade dos conteúdos estudados em Matemática no ensino médio, contextualizando o estudo de equações e inequações, mostrando a possibilidade de apresentar a PL à educação básica, utilizando um *Software* para a resolução gráfica de PPL.

Tendo em vista que existem trabalhos acadêmicos com abordagem semelhante, neste trabalho argumentamos uma forma de associar os PPL ao ensino médio. Apresentamos alguns problemas de otimização como, por exemplo, o problema da dieta, que nos expõe conceitos e processos estudados dentro do ensino médio, já que o objetivo da otimização é a resposta para situações que envolvem maximizar ou minimizar determinada conjuntura. Sugerimos uma transposição didática dos PPL para que possamos introduzir esta abordagem no ensino médio. Analisamos os conteúdos propostos pela BNCC através dos livros didáticos utilizados pelas escolas, para relacionar os conteúdos do ensino médio ao conteúdo de PL. Apresentamos alguns mecanismos para a transposição didática, como o método de resolução de um PPL por exaustão, a resolução gráfica no $\mathbb{R}^2$ e a ferramenta livre *Solver* encontrada no *OpenOffice Calc*.

O trabalho está elaborado da seguinte maneira. No Capítulo 1 abordamos sobre os conteúdos de sistemas de equações e inequações lineares [1, 2, 9, 10] e como eles são apresentados no ensino médio. Já no Capítulo 2, apresentamos alguns Problemas de Programação Linear [3, 4, 5, 6, 7, 8], introduzimos alguns conceitos matemáticos e apresentamos, também, o Método *Simplex* que é um clássico para a Programação Linear. Demonstramos alguns resultados da PL e uma maneira de resolver os Problemas de Programação Linear baseados na resolução gráfica e exaustivamente [12, 13]. Ainda, apresentamos um *Solver* do *OpenOffice Calc* como ferramenta tecnológica. Finalmente, no Capítulo 3 sugerimos uma proposta de plano de aula para ser aplicado ao ensino médio.

# Capítulo 1

# Sistemas de Equações e Inequações Lineares

Os livros didáticos do ensino médio apresentam algumas maneiras de estudarmos tanto sistemas de equações quanto inequações. Nas próximas seções analisamos como são apresentados estes conteúdos aos discentes e como podemos utilizar estas informações para a resolução de Problemas de Programação Linear [1, 2].

## 1.1 Inequações

Quando falamos das inequações, é importante salientar algumas propriedades a respeito das desigualdades. De acordo com o livro [9], a relação de desigualdade $x < y$ entre números reais é fundamental. Por isso é conveniente destacar algumas de suas propriedades, a fim de que saibamos o que estamos fazendo quando operamos com essa relação.

Entendemos que as desigualdades são relações dentro da matemática ministradas desde o ensino fundamental até o ensino médio [14]. No primeiro ano do ensino médio são apresentadas algumas das propriedades envolvendo as desigualdades para o estudo das inequações.

Segundo [1] uma inequação de primeiro grau na incógnita $x$ é definida como *toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo* $ax + b$, *com* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *e o segundo membro é zero.*

No livro [1] também é apresentado o princípio aditivo de equivalência e o princípio multiplicativo das desigualdades, e nos traz como parâmetro o livro *Números e Funções Reais* [9] para descrevermos o princípio aditivo e o multiplicativo das desigualdades algebricamente, pois o livro didático [1] define numericamente apenas.

**Princípio Aditivo de Equivalência das Desigualdades:** Dados os números reais $a$, $b$ e $c$. Se $a < b$, então $a + c < b + c$ (analogamente, $a > b$, $a \geq b$, $a \leq b$).

**Princípio Multiplicativo das Desigualdades:** Sejam os números reais $a$, $b$ e $c$, com $c \neq 0$. Se $a < b$, temos duas situações:

1. Se $c > 0$ então $a \cdot c < b \cdot c$ (analogamente para $a > b$, $a \geq b$, $a \leq b$);

2. Se $c < 0$ então $a \cdot c > b \cdot c$ (analogamente para $a > b$, $a \geq b$, $a \leq b$).

Assim, o livro didático [1] nos traz uma boa definição do uso das desigualdades para o estudo de inequações. No entanto, para os discentes é necessário a construção das definições de forma geral [9] para uma melhor compreensão do funcionamento da ferramenta de desigualdade.

A BNCC sugere o estudo das inequações antes do estudo de sistemas lineares no ensino médio. O estudo de sistemas lineares é reapresentado no segundo ano do ensino médio [14, 20] e é necessário para estudarmos as questões envolvendo Problemas de Programação Linear, pois as restrições neste tipo de problema são sistemas de equações ou inequações lineares.

## 1.2 Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são apresentados inicialmente no oitavo ano do ensino fundamental [14, 20] para a resolução de sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas. No ensino médio, ele é apresentado no segundo ano para a resolução de sistemas lineares com três equações com três incógnitas.

Segundo [2] temos que *um sistema $S$ de equações lineares de $m$ equações com $n$ incógnitas é um conjunto linear do tipo*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

*em que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as incógnitas; $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{mn}$ são os coeficientes reais; e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ são os termos independentes.*

### 1.2.1 Classificação e Representação Matricial dos Sistemas Lineares

Estando bem definido um sistema linear, os livros do ensino médio propõem na sua resolução uma classificação quanto a existência de solução de sistemas com duas ou três incógnitas, por: Sistema Possível e Determinado (SPD) - quando possui apenas uma solução, Sistema Possível e Indeterminado (SPI) - possui infinitas soluções e Sistema Impossível (SI) - quando não possui solução.

Também salientam que, quando os sistemas lineares possuem todos os termos independentes iguais a zero, são denominados como sistemas lineares homogêneos. Generalizando, um sistema homogêneo é do tipo

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

E acrescenta [2]: *Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite a ênupla $(0, 0, \cdots, 0)$ como solução. Essa solução é denominada de solução nula, trivial ou imprópria e qualquer solução diferente de $(0, 0, \cdots, 0)$ para um sistema homogêneo é denominada de não nula, não trivial ou própria.*

Quando aplicamos a definição de multiplicação de matrizes juntamente com matrizes incompletas, podemos redefinir este sistema como uma equação matricial. Segue assim que

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

com, $A$ a matriz dos coeficientes do sistema linear, $X$ a matriz da incógnitas e $B$ a matriz dos termos independentes. Após estas definições, é então apresentado o método de escalonamento de sistemas lineares.

### 1.2.2 Escalonamento de Sistemas Lineares

O escalonamento tem como objetivo reorganizar as equações em um sistema linear através de operações elementares, com a finalidade de obter sua solução. Esta subseção explica o funcionamento do escalonamento e permite classificar um sistema de equação em SPD, SPI e SI.

Segundo [2] *um sistema em que todas equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito escalonado quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo. Assim, são apresentados três operações elementares para realizar o escalonamento:*

1. Invertemos a ordem das equações;

2. Multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número real e não nulo;

3. Substituímos uma equação pela soma dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Dessa forma, para realizar o escalonamento, são utilizadas operações elementares de matrizes [10].

Um exemplo de sistema de equações escalonado utilizando os processos de operações elementares de matrizes é apresentado a seguir.

**Exemplo 1.1.** *Deixe na forma escalonada o sistema linear*

$$\begin{cases} x & & + & z & = 10 \\ & & & z & = 7 \\ 2x & + & y & & = 10. \end{cases}$$

Para deixarmos o sistema na forma escalonada, veja que em (1.1) invertemos a ordem das equações das Linhas 2 e 3,

$$\begin{cases} x & & + & z & = 10 \\ & & & z & = 7 \\ 2x & + & y & & = 10 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x & & + & z & = 10 \\ 2x & + & y & & = 10 \\ & & & z & = 7. \end{cases} \tag{1.1}$$

Após invertermos a ordem das equações, em (1.2) multiplicamos ambos os membros da equação da Linha 1 por 2 (um mesmo número real e não nulo),

$$\begin{cases} x & & + & z & = 10 \\ 2x & + & y & & = 10 \\ & & & z & = 7 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \to 2 \cdot L_1} \begin{cases} 2x & & + & 2z & = 20 \\ 2x & + & y & & = 10 \\ & & & z & = 7. \end{cases} \tag{1.2}$$

Em (1.3) substituímos a equação da Linha 2 pela soma dela com a equação da Linha 1 multiplicada por $-1$ (um número real não nulo), deixando o sistema na forma escalonada,

$$\begin{cases} 2x & & + & 2z & = 20 \\ 2x & + & y & & = 10 \\ & & & z & = 7 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + (-1) \cdot L_1} \begin{cases} 2x & & + & 2z & = 20 \\ & & y & - \; 2z & = -10 \\ & & & z & = 7. \end{cases} \tag{1.3}$$

Assim, temos a equação da Linha 3 com $z = 7$. Substituindo o valor de $z$ na equação da Linha 2 temos

$$y - 2 \cdot 7 = -10 \Longrightarrow y = 4.$$

E, substituindo novamente o valor de $z$ na equação da Linha 1 temos

$$2x + 2z = 20 \Longrightarrow x = 3.$$

Portanto, este sistema é possível e determinado e possui como solução única $S = (3,\ 4,\ 7)$.

O processo de escalonamento no Exemplo 1.1 mostra um sistema possível e determinado (SPD). Tomando um sistema linear $3 \times 3$, ele será considerado possível e indeterminado (SPI), se após o escalonamento, uma ou mais equações ficar na forma $0 = 0$. Para ser considerado impossível (SI), uma ou mais equações deve ficar na forma $0 = k$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como mostram os exemplos a seguir.

**Exemplo 1.2.** *Realize o escalonamento e verifique se os sistemas lineares são SPD, SPI ou SI.*

$$\text{(a)} \begin{cases} x & +y & -z & = 5 \\ & 2y & -3z & = -1 \\ & -2y & +3z & = 1. \end{cases}$$

Realizando o escalonamento neste item temos que

$$\begin{cases} x & +y & -z & = 5 \\ & 2y & -3z & = -1 \\ & -2y & +3z & = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \to L_2 + L_3} \begin{cases} x & +y & -z & = 5 \\ & 2y & -3z & = -1 \\ & & 0 & = 0. \end{cases}$$

Neste caso, temos um sistema linear possível e indeterminado (SPI).

$$\text{(b)} \begin{cases} x & -y & +z & & = 5 \\ & y & +4z & & = 10 \\ -x & & +y & -z & = 12. \end{cases}$$

Realizando o escalonamento neste item temos que

$$\begin{cases} x & -y & +z & & = 5 \\ & y & +4z & & = 10 \\ -x & & +y & -z & = 12 \end{cases} \quad \overset{L_3 \rightarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} x & -y & +z & = 5 \\ & y & +4z & = 10 \\ & & & 0 = 17. \end{cases}$$

Neste caso, temos um sistema linear impossível (SI).

Apresentados os conteúdos do ensino médio que servem como base deste trabalho, enunciaremos o Método *Simplex*, os Problemas de Programação Linear e métodos de resolução no Capítulo 2.

# Capítulo 2

# Programação Linear e Métodos de Resolução

## 2.1 Introdução

Os Problemas de Programação Linear envolvem geralmente questões ligadas a tomadas de decisão, objetivando otimizar estas situações [11]. Seja para a maximização do lucros ou para a redução de gastos por exemplo, sempre visam os obstáculos relativos a quantidade de recursos com objetivo de melhorar tanto a produção, quanto a renda de determinada análise.

Habitualmente, a Programação Linear é uma ferramenta de uso econômico, visa que solucionar problemas que podem ser escritos em forma de sistemas lineares, sendo o usufruto destas de maneira bem simples e aplicável, por tratarmos de equações e inequações lineares.

Assim, a Programação Linear consiste em métodos para maximizar ou minimizar uma função linear, denominada Função Objetivo, que segue o rigor de um conjunto de limites impostos pela situação problema, denominadas restrições do modelo, descritas como desigualdades lineares em um sistema linear. Estas restrições irão nos dizer onde encontramos todas as soluções que são viáveis para o problema. E, finalmente, dentro deste conjunto de soluções viáveis, determinarmos os valores que majoram ou minoram a nossa Função Objetivo.

Neste capítulo definimos um Problema de Programação Linear e apresentamos algo acessível aos alunos do ensino médio utilizando as ferramentas de resolução gráfica no espaço $\mathbb{R}^2$, a resolução por exaustão e o uso de uma ferramenta tecnológica.

Tomamos por base uma proposta de atividade retirada da página 196 do livro [2] (Enunciado 2.1), porém, com algumas adaptações envolvendo a inclusão de custos para a produção de uma dieta com a intenção de otimizá-la.

## 2.2 Programação Linear

A princípio, na Matemática, podemos definir um modelo matemático como a representação simplificada da realidade que preserva, para determinadas situações, uma equivalência adequada. Em outras palavras, dada uma situação ou problema, é uma busca de mostrar com embasamento matemático uma representação da realidade.

Para a Programação Linear, os modelos visam a conversão de sistemas reais a um conjunto de equações e inequações que visam otimizar uma função denominada Função Objetivo, respeitando sempre as devidas restrições impostas pela modelagem que os problemas nos trazem.

Segundo [6] os Problemas de Programação Linear tem como características uma Função Objetivo linear, as restrições lineares e variáveis reais não-negativas. Desta forma, devemos modelar um Problema de Programação Linear seguindo os seguintes passos.

- Seleção das variáveis de decisão;

- Obtenção da Função Objetivo;

- Identificação das Restrições do problema.

Um Problema de Programação Linear pode ser definido sob a forma [4]

$$\text{maximizar} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0 \tag{2.3}$$

em que $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$ e $x_j$ representando as variáveis de decisão.

A função linear a ser maximizada em (2.1) é denominada Função Objetivo, as desigualdades (2.2) são as restrições do problema e, em (2.3) as restrições de não negatividade são conhecidas como triviais, com $m$ sendo o total de restrições em (2.2) e $n$ o total de variáveis do problema. Definimos como Região Viável o conjunto de soluções formadas pelas restrições de um Problema de Programação Linear.

O sinal das variáveis podem assumir valores negativos ou irrestritos e o problema pode ser de maximizar ou minimizar. Tomando o vetor de custos $(c_1, \ldots, c_n)$, o vetor de recursos $(b_1, \ldots, b_m)$ e as variáveis de decisão $(x_1, \ldots, x_n)^t$, a forma geral de um Problema de Programação Linear fica

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar} & F(x_1, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \cdots, n. \end{array} \tag{2.4}$$

A função $F$ de $n$ incógnitas $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é denominada Função Objetivo. As $m$ desigualdades são denominadas restrições. As últimas desigualdades fazem referência à não-negatividade das variáveis $x_j$.

A forma canônica de um Problema de Programação Linear é dada por

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar} & f(x) = cx \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \text{ ou } Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{2.5}$$

E a forma padrão dada por

$$
\begin{array}{ll}
\text{otimizar} & f(x) = cx \\
\text{sujeito a} & Ax = b \\
 & x \geq 0 \\
 & b \geq 0.
\end{array}
\tag{2.6}
$$

As operações para deixar o problema na forma padrão são:

1. Transformar restrições de desigualdade em igualdade;

   (a) Para restrições do tipo $\leq$, insira uma variável de folga $x_{n+1}$. Assim, $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq b \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = b$, $x_{n+1} \geq 0$.

   (b) Para restrições do tipo $\geq$, insira uma variável de excesso $x_{n+1}$. Assim, $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq b \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n - x_{n+1} = b$, $x_{n+1} \geq 0$.

2. Transformar uma variável livre ($x_j \in \mathbb{R}$), em variável não negativa;

   (a) Se $x_j \geq \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$ para algum $j$, escrevemos $x_j - \alpha \geq 0$. Denominamos $x_j - \alpha = y$. Assim, $y \geq 0$;

   (b) Se $x_j \leq 0$ escrevemos $-x_j \geq 0$. Denominamos $-x_j = y$. Assim $y \geq 0$;

   (c) Se $-\infty < x_j < \infty$, ou seja, $x_j$ irrestrito de sinal, escreva $x_j$ como uma diferença de dois números positivos e substitua no modelo $x_j = x_j^+ - x_j^-$ com $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$.

Transformando restrições de desigualdade em igualdade podemos realizar as operações elementares [2, 10], descritas em 1.2.2:

- Multiplicar ambos dos membros da igualdade por um número diferente de zero;

- Multiplicar uma equação por um número real e somar com outra equação.

Finalmente, segundo [11] podemos utilizar a mudança no critério de otimização. Essa mudança pode ser feita através da seguinte propriedade.

- Maximizar $f(x)$ corresponde a minimizar $-f(x)$;

- Minimizar $f(x)$ corresponde a maximizar $-f(x)$.

A Figura 2.1 mostra esta propriedade de equivalência entre minimizar e maximizar uma função.

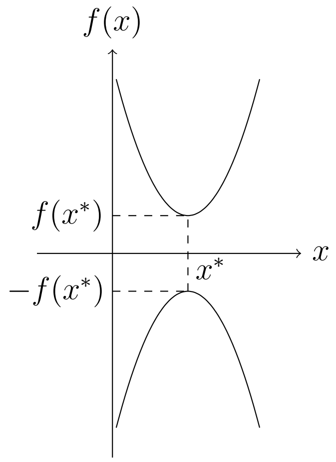



Figura 2.1: Minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$.

A quantidade de soluções de um Problema de Programação Linear que encontramos será de uma quantia imensurável, e este conjunto de soluções são ditas como viáveis. Deste modo, percebemos que para encontrar a melhor solução de um problema devemos nos ater a duas situações que dificultam o processo: Primeiro, como obter as soluções denominadas *Viáveis Básicas* do sistema de equações; Segundo, encontrar um método com a finalidade de otimizar a Função Objetivo. Com estes empecilhos, apresentamos o Método *Simplex* para a resolução de tais modelos envolvendo a Programação Linear [11].

Discutimos a seguir três maneiras de determinar a solução de um Problema de Programação Linear.

## 2.3 Princípios do Algoritmo *Simplex*

Nesta seção apresentamos alguns princípios do algoritmo *Simplex*, este método não será apresentado ao alunos, o apresentamos neste trabalho por ser um método clássico da Programação Linear. Algoritmo é um procedimento que termina em um número finito de operações, e procedimento é uma sequência finita de instruções. Deste modo, o Método *Simplex* é definido como um algoritmo que se sustenta na Álgebra Linear para determinar, por iterações, a solução ótima de um Problema de Programação Linear. Este método tem como ponto de partida uma solução viável e através das iterações vai encontrando soluções melhores. A tempo, é importante embasar o algoritmo dentro de algumas concepções da Álgebra Linear.

O algoritmo *Simplex* foi desenvolvido por George B. Dantzig [11], denominado Método *Simplex*. É um algoritmo que utiliza um ferramental baseado na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear [11].

Importante ressaltarmos algumas definições da Álgebra Linear, com o propósito de embasar o funcionamento do algoritmo *Simplex*. Assim, as Definições 2.1, 2.2, 2.3 a Proposição 2.1 e o Corolário 2.1 foram todos retirados do livro [10], para fundamentar essa base.

**Definição 2.1.** *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_r$ vetores em um espaço vetorial $V$. Dizemos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são linearmente independentes, ou simplesmente independentes, se a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0$ é satisfeita somente quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são linearmente dependentes, ou simplesmente dependentes. O conjunto $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ é dito ser independente ou dependente se os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são independentes ou dependentes, respectivamente.*

Assim, para que os vetores sejam linearmente independentes, um vetor de $S$ não pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores de $S$.

**Definição 2.2.** *Dada uma matriz $A$ de ordem $n$, denominamos de inversa de $A$ a uma matriz quadrada $B$ de ordem $n$ tal que $AB = BA = I_n$. Dada uma matriz $A$ denotamos sua inversa como $A^{-1}$.*

A Proposição 2.1 caracteriza a consequência de ser linearmente independente pois a matriz associada é invertível.

**Proposição 2.1.** *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_r$ vetores em $\mathbb{R}^n$, onde, para cada $i$, com $1 \leq i \leq n$, temos $v_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\}$. Seja $A = [a_{ij}]$. Temos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ é linearmente independente se e somente se, $A$ é invertível.*

Isto é, definindo os vetores em uma matriz, uma forma de determinar se esta matriz é linearmente independente, é verificar se existe a sua inversa.

Outra forma para verificar se os vetores são linearmente independentes vem de um corolário sobre determinantes.

**Corolário 2.1.** *Se os vetores linhas de uma matriz $A$ são linearmente dependentes, então $det(A) = 0$. Em outras palavras, se o determinante de uma matriz for diferente de zero, os vetores serão linearmente independentes.*

Outro conceito importante é a definição de base de um espaço vetorial.

**Definição 2.3.** *Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo $V$. Dizemos que $\alpha$ é uma base de $V$ se $\alpha$ é linearmente independente e gera o espaço vetorial $V$, no sentido de que todo vetor de $V$ é uma combinação linear de $\alpha$.*

### 2.3.1 Definições do Método *Simplex*

Agora apresentamos as definições para compreensão do Método *Simplex*. Estas informações são importantes, pois nos apoiamos nelas para sustentar o uso das ferramentas de iteração do algoritmo para a resolução de Problemas de Programação Linear que veremos adiante [11].

**Definição 2.4.** *Uma base de uma matriz $A_{m \times n}$ é uma matriz quadrada de $m$ vetores coluna linearmente independentes em $\mathbb{R}^m$. As variáveis associadas a esta coluna denominamos de variáveis básicas.*

Em um Problema de Programação Linear na forma padrão como em (2.6), podemos decompor o vetor das variáveis, $x \in \mathbb{R}^n$ em $x = (x_B, x_R)$, com $x_B$ o vetor das variáveis básicas de $m$ componentes e $x_R$ o vetor das restantes $n - m$ variáveis não básicas com $n \geq m$.

Como podemos solucionar o conjunto de equações $m \times m$ somente em função das variáveis básicas, pois uma matriz quadrada de $m$ vetores coluna linearmente independentes torna este sistema linear possível e determinado, temos $x = (x_B, 0)$. Estendendo o raciocínio a uma matriz $A_{m \times n}$, podemos igualmente dividi-la em uma matriz $m \times m$, matriz denominada $B_m$ e outra $m \times (n - m)$ denominada $R_{m \times (n-m)}$.

É importante salientar a seguinte proposição para compreender de maneira satisfatória a Definição 2.5.

**Proposição 2.2.** *Seja $Ax = b$ um sistema linear. Suponhamos que $X_1$ seja uma solução do sistema $Ax = b$ e que $S_h$ seja o conjunto solução do sistema linear homogêneo associado $Ax = 0$. Então, $S = \{X_1 + Z; Z \in S_h\}$ é o conjunto solução do sistema $Ax = b$.*

**Definição 2.5.** *O conjunto $C = \{x \ \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ é denominado Conjunto de Soluções Viáveis.*

**Definição 2.6.** *Seja $B$ uma base associada à matriz $A$. O vetor composto de $x_B = B^{-1}b$ e $x_R = 0$ é denominado de solução básica.*

**Definição 2.7.** *Uma Solução Básica sem componentes negativas é denominada solução básica viável.*

Em resumo, em um Problema de Programação Linear, se o vetor $x$ satisfaz as restrições é denominado como solução viável. Qualquer vetor $x$ que satisfaz a equação $Ax = b$ fixando as variáveis não básicas iguais a zero é denominado solução básica. Se a solução básica for $x \geq 0$, dizemos que a solução é básica e viável.

Como exemplo do que as definições anteriores nos mostram, temos um sistema de equações que constituem um conjunto de restrições impostas por um Problema de Programação Linear, dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2. \end{cases}$$

Na forma padrão, entrando as variáveis de folga $x_3$ e $x_4$ temos,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2. \end{cases}$$

Assim, a decomposição ficará na forma,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Nessa situação temos, $x_B = (x_3, x_4)$, $x_R = (x_1, x_2)$ e a solução básica pode ser escrita como $(0, 0, b_1, b_2)$ e se $b_1, b_2 > 0$, a Definição 2.7 diz que a solução $(0, 0, b_1, b_2)$ é básica e viável.

A Definição 2.8 de conjunto convexo é importante no contexto de Programação Linear, pois serve como base do Teorema 2.1.

**Definição 2.8.** *Um conjunto $X$ de elementos de um espaço vetorial é convexo, se dados $x_1, x_2 \in X$, todos os pontos na forma $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$, pertencem também a $X$. Isto é, tomando dois elementos de um conjunto convexo, baseando-se na geometria, é possível construir um segmento de reta unindo tais pontos, e que, quaisquer pontos tomados deste segmento, irão pertencer a este conjunto.*

A Figura 2.2 mostra geometricamente este conceito.

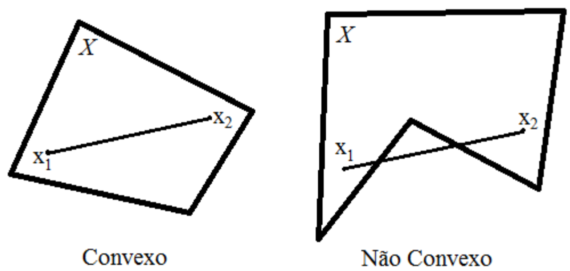



Figura 2.2: Exemplo Geométrico Conjunto Convexo e Não Convexo.

O próximo teorema mostra que o conjunto de soluções viáveis pertencem a um conjunto convexo de um espaço vetorial.

**Teorema 2.1.** *O conjunto $C$ das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

Demonstração:
Seja $C$ o conjunto formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = b$ com $x \geq 0$. Queremos mostrar que, para qualquer conjunto de dois pontos distintos $x_1$ e $x_2$ pertencentes ao

conjunto convexo $C$, o segmento que une os vetores $x_1$ e $x_2$ pertence a $C$, ou seja, a combinação linear convexa desses pontos também pertence a $C$.

$$\{x_1, x_2\} \in C \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

De fato, sejam duas soluções viáveis de $C$, $x_1$ e $x_2$, tais que $x_1 \neq x_2$, então

$$Ax_1 = b \text{ com } x_1 \geq 0 \ \text{ e } \ Ax_2 = b \text{ com } x_2 \geq 0. \tag{2.7}$$

Tome a combinação convexa,

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$
$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Assim, pela linearidade de $A$,

$$Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 \Longrightarrow$$
$$Ax = \alpha b + (1-\alpha)b = b.$$

Ainda $x \geq 0$, pois,

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0 \text{ com, } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad \square$$

O Teorema 2.2 mostra que a solução básica viável é um ponto extremo de um conjunto convexo $C$.

**Definição 2.9.** *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto. Temos que $v \in X$ é um vértice ou ponto extremo de $X$ se não existirem $x_1$ e $x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, tais que $v$ é combinação linear de $x_1$ e $x_2$.*

**Teorema 2.2.** *Toda solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto $C$.*

Demonstração:

Seja $C$ o conjunto formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$Ax = bx \geq 0.$$

Seja, ainda, qualquer $x$ uma solução viável, de dimensão $n$, na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as $m$ primeiras, pelo que nos mostra a Definição 2.6, ou seja

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ com todas componentes } x_i \geq 0.$$

Suponha que $x$ não seja um ponto extremo do conjunto convexo $C$. Então $x$ pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos do mesmo conjunto. Denominando tais pontos de $y$ e $z$, temos

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Como $y, z \in C$, as relações seguintes valem.

$$Ay = b \text{ com } y \geq 0 \ \text{ e } \ Az = b \text{ com } z \geq 0.$$

Escrevendo $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, em termos de coordenadas de cada um dos três vetores, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + (1-\alpha)z_1 \\ x_2 &= \alpha y_2 + (1-\alpha)z_2 \\ &\vdots \\ x_m &= \alpha y_m + (1-\alpha)z_m \\ 0 &= \alpha y_{m+1} + (1-\alpha)z_{m+1} \\ &\vdots \\ 0 &= \alpha y_n + (1-\alpha)z_n. \end{aligned}$$

Por conta das relações $0 \leq \alpha \leq 1$ , $y \geq 0$ e $z \geq 0$ as últimas $(n-m)$ relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos casos a seguir:

- Se $0 < \alpha < 1$, então $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \cdots, n-m$.
  Nesse caso teríamos $x = y = z$, pois tanto $y$ quanto $z$ são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.

- Se $\alpha = 0$, então $z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \cdots, n-m$.
  Por raciocínio análogo ao caso anterior, temos $x = z$. Além disso, como $\alpha = 0$, segue que $x = y = z$.

- Se $\alpha = 1$, então $y_{m+i} = 0$ para $i = 1, \cdots, n-m$.
  Analogamente, $x = y = z$.

Assim, vemos que não há soluções viáveis $y$ e $z$, distintas da solução básica $x$ que satisfaçam a relação $x = \alpha y + (1-\alpha)z$. Por absurdo, demonstramos que $x$ é um ponto extremo do conjunto convexo $C$. $\square$

A relação entre pontos extremos de $C$ e as soluções viáveis básicas de um Problema de Programação Linear é uma correspondência biunívoca. Por outra forma, dentro da geometria, a solução básica seria um ponto que pertence à fronteira do conjunto de soluções viáveis. Deixamos este resultado no teorema a seguir e sem demonstrações pois foge aos propósitos deste trabalho [11].

**Teorema 2.3.** *Um ponto $x$ é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um problema de Programação Linear se, e somente se, $x \geq 0$ for uma solução básica viável.*

Como consequência direta do Teorema 2.3 temos os Corolários:

**Corolário 2.2.** *O conjunto dos pontos extremos de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado em $C_n^m$, com $C_n^m$ sendo o número binomial $\binom{m}{n}$.*

**Corolário 2.3.** *Se existe uma solução viável, então existe uma solução básica viável.*

Para entendermos a teoria, o último amparo necessário a fim de justificar a estratégia do Método *Simplex* diz respeito ao valor ótimo obtido pela Função Objetivo. Assim, o próximo teorema explica como associar os pontos extremos e o valor da Função Objetivo para afirmar a existência do valor ótimo nos pontos extremos de $C$.

**Teorema 2.4.**

- *Se a Função Objetivo em um Problema de Programação Linear possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo $C$, descrito no Teorema 2.1.*

- *Se a Função Objetivo em um Problema de Programação Linear assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

Assim, se encontrada a Solução Ótima em um Problema de Programação Linear, então ela está em um Ponto Extremo do conjunto convexo se, e somente se, ela é uma Solução Básica Viável.

## O Algoritmo

O Algoritmo *Simplex* utiliza um critério para a melhoria de uma Solução Básica, partindo sempre da existência de uma solução básica viável para algum Problema de Programação Linear. Desta forma, segundo o livro [11], vamos supor que exista a solução básica para o Problema de Programação Linear

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = cx \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

com, $A$ uma matriz $m \times n$, com posto $m$ (todas as linhas linearmente independentes). Podemos decompor o vetor $c$ em suas componentes básicas e não básicas, $c = (c_B, c_R)$, e supor que a solução básica viável existente seja representada por um vetor $\overline{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ cujo valor associado é dado pela expressão

$$z_0 = c \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = (c_B, c_R) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B B^{-1} b.$$

Podemos escrever o vetor $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, em função das variáveis básicas e não básicas por

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} \text{ e } b = Ax = Bx_B + Rx_R.$$

Multiplicando por $B^{-1}$ a expressão $b = Ax = Bx_B + Rx_R$ temos

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R = B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1} a_j x_j,$$

com $Rx_R = \sum_{j \in J} a_j x_j$ e $J$ sendo o conjunto de índices das variáveis não básicas a serem analisadas para entrar na base.

Dessa forma, podemos reescrever a expressão $z = cx$ por

$$z = cx$$

$$z = c_B x_B + c_R x_R$$

como $x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1} a_j x_j$ e $x_R = \sum_{j \in J} c_j x_j$ temos

$$z = c_B \left( \sum_{j \in J} B^{-1} a_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$z = z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j, \tag{2.8}$$

com, $z_j = c_B B^{-1} a_j$ e $z_0 = c_B B^{-1} b$ para cada variável não básica.

A Equação (2.8) mostra a possibilidade do estabelecimento de um critério de melhoria de uma solução básica. Quando o valor do termo $z_j - c_j$ é estritamente maior que zero existe a possibilidade de, com a entrada da variável de índice $j$ na base, reduzir o valor da Função Objetivo em $(z_j - c_j)x_j$, desde que essa variável possa assumir um valor positivo. O termo $z_j - c_j$ pode ser interpretado como o coeficiente de utilidade relativa da variável $x_j$, e seu valor negativo $c_j - z_j$ é comumente denominado custo reduzido. Se denominarmos $k$ o índice dessa variável não básica teremos

$$z = z_0 - (z_k - c_k) x_k. \tag{2.9}$$

Examinando a Equação (2.9) é fácil concluir que, de uma forma geral, para o processo de otimização será interessante que a variável $x_k$ seja incrementada ao máximo. Pois com o crescimento de $x_k$, o valor de $z$ diminui na nova solução básica, proporcionalmente ao valor do custo reduzido associado. Como sabemos que

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1} a_k x_k = \overline{b} - y_k x_k \tag{2.10}$$

com

$$y_k = B^{-1} a_k \text{ e } \overline{b} = B^{-1} b, \tag{2.11}$$

denotando as componentes do vetor $x_B$ e $\overline{b}$ respectivamente por, $x_{B_1}, x_{B_2}, \cdots, x_{B_m}, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_m}$, temos, finalmente, a expressão

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k. \tag{2.12}$$

A Equação (2.12) nos mostra que se existir algum elemento de $y_{ik}$, com $y_{ik} \leq 0$, então o $x_{B_i}$ associado pode crescer indefinidamente com o crescimento de $x_k$. Se existir $y_{ik} > 0$, então $x_{B_i}$ decresce com o incremento de $x_k$. Para satisfazer as condições de não negatividade de uma solução básica viável, a nova variável $x_k$ só poderá crescer até que a primeira componente $x_{B_i}$ seja reduzida a zero, o que corresponde ao mínimo entre todos os $\dfrac{\overline{b_i}}{y_{ik}}$ para os valores positivos de $y_{ik}$, ou

$$\frac{\overline{b_s}}{y_{sk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \tag{2.13}$$

com $s$ sendo o índice da variável que deixará a base.

Note que para garantir a independência linear da coluna $k$ com as demais colunas existentes na base é indispensável que $y_{sk} \neq 0$. Pelo critério sugerido na Equação (2.9), a variável $x_k$ seria a que entraria na base melhorando o valor da Função Objetivo, e a variável $x_s$, linearmente dependente de $x_k$, deixaria a base ao ter o seu valor numérico esgotado completamente pelo crescimento de $x_k$.

Em [11], na página 105, é descrito o processo de escolha da base inicial de cálculo, critério de troca de variáveis na base e regra de parada no algoritmo.

Inicialmente determinamos uma solução básica inicial $x_B$. Seja $I$ o conjunto de índices das colunas de $A$ pertencentes à base e $J$ o conjunto dos índices restantes.

**Passo 1**

Calculamos a matriz $Y = (y_j) = (y_{sj})$, $s \in I$ e $j \in J$ e os valores $z_j - c_j \; \forall \; j \in J$, e temos

$Y = B^{-1}R$

$z_j = c_B y_j$, com $\; j \in J$.

- Se $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j \in J$, então a solução básica viável $x_B$ é ótima. Encerramos o processo aqui;

- Caso contrário, fazemos $J_1 = \{j \in J \mid z_j - c_j > 0\}$.

**Passo 2**

- Se $y_i \leq 0$ para pelo menos um $j \in J_1$, não existe solução ótima finita. Encerramos o processo aqui;

- Caso contrário, determinamos $k$ de modo que $z_k - c_k = \max_{j \in J}\{z_j - c_j\}$.

  Na coluna $k$ devemos encontrar a relação

  $$\frac{\overline{b_s}}{y_{sk}} = \frac{\overline{x_s}}{y_{sk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\}.$$

**Passo 3**

Consideramos a nova base $B$ deduzida a partir da anterior pela substituição de $a_s$ por $a_k$.

Assim, temos $B = (B \setminus \{a_s\} \cup \{a_k\})$, e calculamos a nova solução básica viável, dada por

$$x_B = B^{-1}b,$$

$$z_0 = z_0 - (z_k - c_k)\frac{\overline{x}_{B_s}}{y_{sk}}.$$

Atualizamos $R$, $I$ e $J$ por

$$R = (R \setminus \{a_k\}) \cup \{a_s\}$$

$$I = (I \setminus \{s\}) \cup \{k\}$$

$$J = (J \setminus \{k\}) \cup \{s\},$$

e voltamos ao **Passo 1** até finalizarmos o algoritmo.

**Exemplo 2.1.** *Utilize o critério de melhoria no Problema de Programação Linear. (Adaptado) [11].*

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 \leq 4 \\ \text{sujeito a} & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Reescrevemos na forma padrão, considerando a transformação em um Problema de Programação Linear de minimização e acrescentando as variáveis de folga temos,

$$\begin{array}{llllllll} \text{minimizar} & & z = -3x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ & x_1 & +0x_2 & +x_3 & +0x_4 & +0x_5 & = 4 \\ \text{sujeito a} & 0x_1 & +x_2 & +0x_3 & +x_4 & +0x_5 & = 6 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +x_5 & = 18 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

Identificamos a matriz de restrições, dos termos independentes e de custos, respectivamente, por

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ e } c = [-3,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0].$$

Consideramos as variáveis básicas $x_3$, $x_2$ e $x_5$, para compor a base.

$$B = [a_3,\ a_2,\ a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim as variáveis não básicas são $x_1$ e $x_4$. Então, temos $I = \{3,\ 2,\ 5\}$ o conjunto de índices das variáveis básicas e $J = \{1,\ 4\}$ como o índice das variáveis não básicas.

Calculamos a inversa da matriz $B$, dada por

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com a inversa da base, podemos calcular os vetores $x_B,\ x_R$ e $z$ por

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$x_R = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$z = cx = c_B x_B + c_R x_R = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -30.$$

Para melhorarmos a solução $z$, utilizamos o **Passo 1** e calculamos os valores $(z_j - c_j)$ para $j \in J$.
Para $j = 1$ temos que

$$z_1 - c_1 = c_B B^{-1} a_1 - c_1$$

$$z_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - (-3)$$

$$z_1 - c_1 = 3.$$

Para $j = 4$ temos que

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4$$

$$z_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (0)$$

$z_4 - c_4 = -5.$

Pelo critério adotado no **Passo 1** do algoritmo, a variável $x_1$ entra na base, e conforme o **Passo 2** do algoritmo, sai a variável $x_5$ uma vez que $\dfrac{\bar{b}_s}{y_{sk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{mínimo}} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\} = 2$, pois

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ - \\ 2 \end{bmatrix}.$$

De outra forma, para a variável $x_3$, temos que

$$x_3 = \frac{\bar{b}_1}{y_{13}} = \frac{4}{1} = 4.$$

Para a variável $x_5$, temos que

$$x_5 = \frac{\bar{b}_1}{y_{15}} = \frac{6}{3} = 2.$$

A variável $x_2$ não entra no processo de iteração do algoritmo pois precisamos de $y_{ik} > 0$, o que não ocorre para esta variável pois $x_2 = \dfrac{\bar{b}_1}{y_{12}} = \dfrac{6}{0}$ e neste caso temos $y_{ik} = 0$.

Utilizamos o **Passo 3** para a nova base que será formada pelas variáveis $x_3, \ x_2$ e $x_1$, ou seja,

$$B' = [a_3, \ a_2, \ a_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Depois de realizarmos esta etapa, voltamos ao início do algoritmo utilizando a nova base até finalizar o processo.

Segundo [11], há a possibilidade de que a base viável inicial não esteja disponível, ou seja, quando tomada uma base que não atende à exigência de conduzir a uma solução em que todas as variáveis sejam maiores ou iguais a zero. Assim, quando não é possível identificar uma solução básica viável inicial em um Problema de Programação

Linear dado na forma padrão, uma técnica é inserir variáveis artificiais em cada equação onde não foi possível inserir as variáveis de folga, sendo esta tomada como variável básica, de forma que podemos identificar uma solução básica viável. As variáveis artificiais não tem significado no Problema de Programação Linear, é simplesmente um artifício matemático para produção de uma solução básica viável, e desta forma, podermos aplicar o método *Simplex*. Logo, é importante que o *Simplex* elimine rapidamente estas variáveis. Isto pode ser feito com a técnica denominada Big-M ou com o método das Duas Fases.

No Big-M, as variáveis artificiais são fortemente penalizadas na função objetivo, para que sejam anuladas antes das outras variáveis. No método das Duas Fases, o Problema de Programação Linear a ser resolvido na primeira fase consiste em minimizar a soma das variáveis artificiais. Na segunda fase, aplicamos o *Simplex* com uma solução básica viável que sai da fase um. Não apresentamos uma demonstração ou exemplo pois foge do tema proposto do trabalho. Contudo, precisamos verificar outros meios mais próximos da realidade do aluno do ensino médio para resolver um Problema de Programação Linear.

### Outros Métodos de Resolução

O Algoritmo *Simplex* não é o único meio de obtermos uma solução ótima em um Problema de Programação Linear. Desta forma, há outras maneiras de encontrarmos tais resultados. Com isso, relembraremos de alguns resultados obtidos dentro deste capítulo com a finalidade de apresentar outros métodos de resolução [3, 5, 8].

Se firmando ainda na geometria, as soluções básicas viáveis se encontram na fronteira do conjunto convexo $C$ de soluções: arestas e vértices no $\mathbb{R}^2$, faces, arestas e vértices no $\mathbb{R}^3$. E mais, mostramos nos Teoremas 2.2 e 2.4 que a solução ótima estará sempre no vértice do conjunto convexo $C$.

## 2.4 Resolução Gráfica

A proposta para a resolução gráfica de um Problema de Programação Linear é embasada principalmente no Teorema 2.4. Para encontrarmos a solução ótima de um Problema de Programação Linear, basta analisarmos os vértices do conjunto convexo formado pelas restrições de um Problema de Programação Linear e substituir suas componentes na Função Objetivo e verificar se este valor será ótimo (maximizar ou minimizar a Função Objetivo). Em outras palavras, caso encontre dois vértices, se ambos obtiverem o valor ótimo, então há infinitas soluções dentro do segmento de reta formado por estes vértices. Como exemplo observe a Figura 2.3.

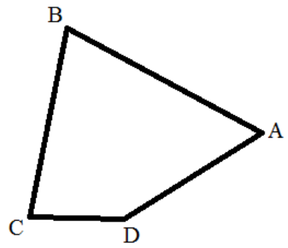



Figura 2.3: Região Viável $ABCD$.

Supondo que o polígono $ABCD$ é o conjunto convexo $C$ de soluções temos então que os vértices $A$, $B$, $C$ e $D$ são os Pontos Extremos do conjunto de soluções e que pelo menos um dos vértices é Solução Ótima deste conjunto. Desta forma, supomos duas situações:

1. **O vértice $A$ é Solução Ótima.**
   Dada uma função $f$ que desejamos maximizar, após substituirmos as coordenadas dos vértices dentro da Função Objetivo observamos que
   $f(A) > f(B)$, $f(A) > f(C)$ e $f(A) > f(D)$.
   Assim, temos que a Solução Ótima está no vértice $A$ e é única. Sendo de maneira análoga caso fôssemos minimizar a função.

2. **Os vértices $A$ e $B$ são Soluções Ótimas.**
   Dada uma função $f$ que desejamos maximizar, após substituirmos as coordenadas dos vértices dentro da Função Objetivo observamos que
   $f(A) = f(B) > f(C)$ e $f(A) = f(B) > f(D)$.

   Assim, temos que a Solução Ótima está tanto no vértice $A$ como no vértice $B$ e, como diz o Teorema 2.4, a Solução Ótima será qualquer ponto $X$ pertencente ao segmento de reta $AB$ tal que $X = \alpha A + (1 - \alpha)B$ com, $0 \leq \alpha \leq 1$, logo, temos infinitas soluções. Sendo de maneira análoga caso fôssemos minimizar a função.

De maneira análoga seguem os casos em que a solução ótima está em um outro vértice ou aresta qualquer.

Assim, um Problema de Programação Linear, quando envolve duas variáveis $x_1$ e $x_2$, pode ser calculado a partir da resolução gráfica no plano cartesiano. Nestas situações, considere que desejamos resolver o problema

$$\text{maximizar } f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{sujeito a } \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \leq b_n \\ x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0. \end{array}$$

Tendo a Função Objetivo e as restrições apenas duas variáveis, e representando $x_1$ no eixo das abscissas e $x_2$ para as ordenadas, podemos colocar estas informações no plano cartesiano. Assim, a intersecção de todas as regiões delimitadas pelas restrições formam a região viável, tal que

- A solução é única e está em um vértice da região viável;

- Há infinitas soluções e estão sobre uma aresta da região viável;

- Não há solução por não termos uma região viável definida ou solução não pertencente a região viável. Como observamos no Exemplo 2.2.

**Exemplo 2.2.** *Observe a Figura 2.4 onde queremos maximizar $f(x, y) = c_1x + c_2y$, com $x, y \geq 0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

Note que não há a intersecção das restrições $R_1$ e $R_2$ no primeiro quadrante. Desta forma, estas restrições não geram uma região viável. Portanto, não há solução para este problema.

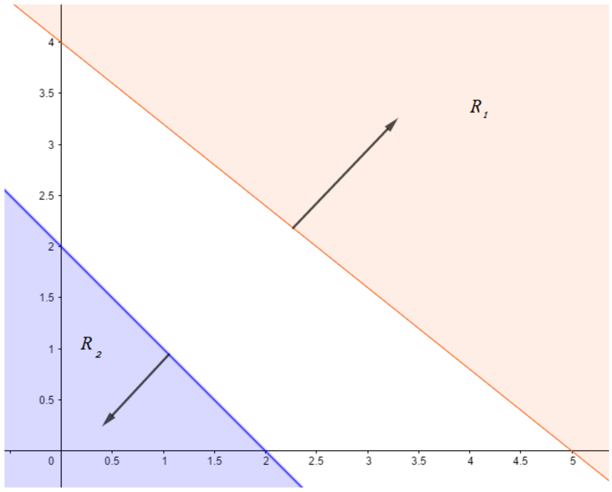



Figura 2.4: Restrições $R_1$ e $R_2$.

Para determinar onde está a solução de forma gráfica, veremos as Definições 2.10 e 2.11 para auxiliar na resolução [16, 17].

**Definição 2.10.** *Seja $f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(x_0, y_0)$. O gradiente de $f$ no ponto $(x_0, y_0)$ denotado por grad $f(x_0, y_0)$ ou $\nabla f(x_0, y_0)$ é um vetor cujas componentes são as derivadas parciais de primeira ordem de $f$ nesse ponto. Ou seja,*
$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Neste caso, de forma geral, tomando $n$ variáveis, podemos denotar o Vetor Gradiente por
$\nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left( \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Como trabalhamos com a Função Objetivo sempre linear, sem perda de generalidade temos sempre uma função do tipo $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Desta forma, fazendo as derivadas parciais temos o Vetor Gradiente dado por

$$\nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (c_1, c_2, \cdots, c_n).$$

O Vetor Gradiente aponta em direção e sentido de maior crescimento da Função Objetivo.

**Definição 2.11.** *Sejam $z = f(x, y)$ uma função e $c$ pertencente ao conjunto imagem de $f$. O conjunto de todos os pontos $(x, y)$ pertencentes ao domínio de $f$ tais que $f(x, y) = c$*

*denomina-se curva de nível de $f$ correspondente ao nível $z = c$. Assim, $f$ é constante sobre cada curva de nível. O gráfico de $f$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de $f$, portanto, do $\mathbb{R}^2$.*

Além disso, o Vetor Gradiente é Normal às Curvas de Nível.

Desta forma, como a Função Objetivo é linear, e as curvas de nível são pertencentes ao domínio em $\mathbb{R}^2$, então, no plano cartesiano, estas curvas são representadas sempre como retas.

Assim, para a resolução gráfica devemos construir a Função Objetivo de tal forma que $f(x_1, x_2) = 0$. Para tanto, precisamos do Vetor Gradiente $\nabla f(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$. Assim, a solução máxima pertence a uma das retas paralelas a Função Objetivo. Estas retas são denominadas Curvas de Nível.

**Exemplo 2.3.** *Dada a função $f(x, y) = 12x + 7y$, sujeito a $2x + 4y \leq 80$ , $3x + 2y \leq 60$ e $x, y \geq 0 \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}$. Qual deve ser o ponto ótimo da função para que a solução seja máxima?*

Modelando como um Problema de Programação Linear temos

$$\text{maximizar} \quad f(x, y) = 12x + 7y \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & 2x + 4y \leq 80 \\ & 3x + 2y \leq 60 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0. \tag{2.16}$$

Plotamos no plano cartesiano as Restrições (2.15) e (2.16), que nos restringem ao primeiro quadrante. As restrições ocorrem na intersecção entre as regiões dos polígonos $AOD$ e $BOE$ resultando no polígono $AOBC$ onde ocorrem as restrições (2.15) e (2.16), como segue a construção da Figura 2.5.

Desta forma, as coordenadas de $AOBC$ são dadas por $A = (0, 20)$, $O = (0, 0)$, $B = (20, 0)$ e $C = (10, 15)$. $AOBC$ é o conjunto convexo de pontos que obedecem a todas restrições dadas.

Agora, para determinar o valor de máximo destes pontos a partir da Função Objetivo dada em (2.14), construímos esta função no plano cartesiano tal que $f(x, y) = 0$

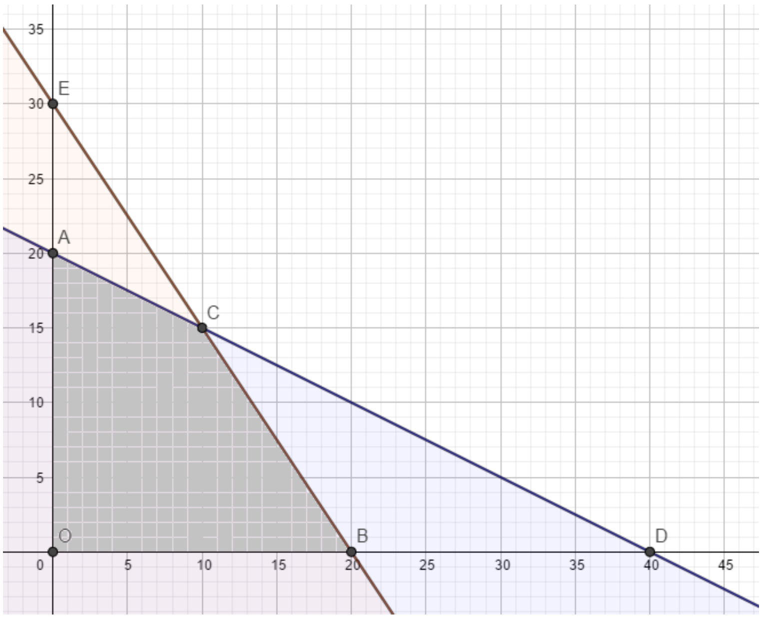


Figura 2.5: Representação gráfica das restrições (2.15) e (2.16).

para que passe pelo ponto $O = (0, 0)$, como mostra a Figura 2.6.

É fácil ver que, se fosse desejado o mínimo da Função Objetivo se daria no marco do plano cartesiano $O = (0, 0)$, pois $f(0, 0) = 0$. Porém, desejamos maximizá-la e para isso, utilizamos as Curvas de Nível que, nada mais são, o conjunto de retas paralelas tomadas a partir da Função Objetivo.

Traçamos o Vetor Gradiente $\nabla f(x, y) = (12, 7)$ e consideramos as Curvas de Nível $c_1$, $c_2$ e $c_3$ perpendiculares ao Gradiente de $f$, como mostra a Figura 2.6.

Através das Curvas de Nível $c_1$, $c_2$ e $c_3$, onde nelas encontramos os vértices do polígono $AOBC$, vemos também que, uma destas curvas, $c_3$, tangencia $AOBC$ e que além disso, é a reta mais distante da reta $f(x, y) = 0$.

Assim, o ponto máximo, ou ótimo, está em um dos vértices de $AOBC$. Analisando, algebricamente, vértice por vértice, temos que

$$A = (0, 20) \Longrightarrow f(0, 20) = 12 \cdot 0 + 7 \cdot 20 = 140,$$

$$B = (20, 0) \Longrightarrow f(20, 0) = 12 \cdot 20 + 7 \cdot 0 = 240,$$

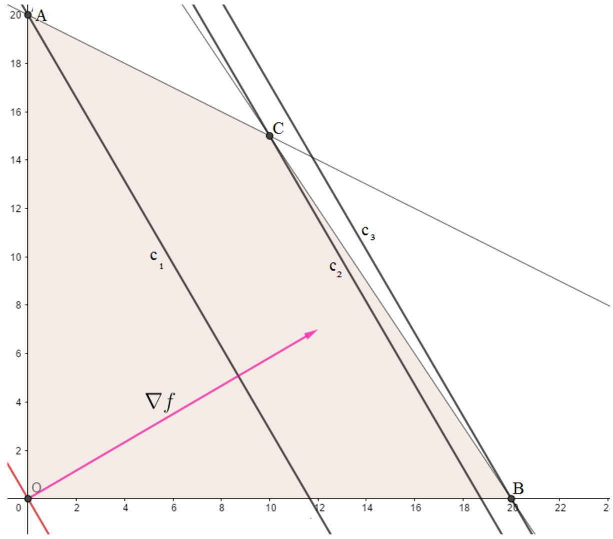



Figura 2.6: Vetor normal $\nabla f$ e as curvas $c_1$, $c_2$ e $c_3$.

$$C = (10, 15) \Longrightarrow f(10, 15) = 12 \cdot 10 + 7 \cdot 15 = 225,$$

$$O = (0, 0) \Longrightarrow f(0, 0) = 12 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0.$$

O vértice $B = (20, 0)$ é o ponto de máximo da função $f(x, y) = 5x + 7y$ e o valor máximo é $f(20, 0) = 240$. O que também pode ser visualizado graficamente, como o ponto mais distante do nível $f(x, y) = 0$ na direção de crescimento de $f$.

Se por acaso fossem encontrados dois vértices, por exemplo $Q$ e $R$, veja que $Q$ e $R$ pertencem a uma aresta $\overline{QR}$ do polígono, isso implicaria que toda a aresta será paralela a Função Objetivo quando $f(x, y) = 0$. Portanto, qualquer combinação convexa dos pontos desta aresta será uma solução ótima, denominando tal ponto de $P$, teríamos que $P = \alpha Q + (1 - \alpha)R$. Logo, todos os pontos da aresta serão pontos ótimos. Caso não houvesse um polígono definido, não teríamos solução definida, por exemplo.

**Exemplo 2.4.** *Otimize o Problema de Programação Linear*

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x, y) = 12x + 7y \\ & \quad 2x + 4y \geq 80 \\ \text{sujeito a} & \quad 3x + 2y \geq 60 \\ & \quad x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

Neste caso temos uma região que não é limitada, como mostra a Figura 2.7. Isto é, tomando uma solução $(x_0, y_0) \in C$, com $C$ sendo o conjunto de soluções, sempre existirá $(x_1, y_1) \in C$ tal que $f(x_0, y_0) < f(x_1, y_1)$. Assim, não temos uma solução definida para este Problema de Programação Linear.

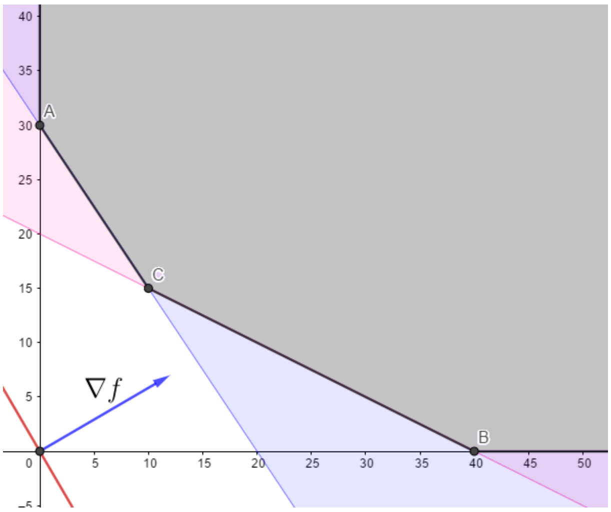



Figura 2.7: Região sem solução definida.

## 2.5 Resolução Por Exaustão

Para encontrarmos a solução ótima, por exaustão, devemos substituir os sinais de desigualdade das restrições ($\geq$ ou $\leq$) pelo sinal de igualdade ($=$), logo, temos que resolver todos os sistemas lineares $n \times n$ possíveis, geometricamente, procuramos possíveis vértices da região viável.

Os seguintes sistemas de equações, são facilmente compreendidos pelos alunos do segundo ano do ensino médio [2, 14], pois o conteúdo de sistemas de equações faz parte da matriz curricular, e como temos sistemas com duas incógnitas, trata-se de um conteúdo ao qual já foi visto no oitavo ano do ensino fundamental [14].

**Exemplo 2.5.** *Otimize o Problema de Programação Linear*

$$\text{minimizar } f(x,y) = 3x + 2y \tag{2.17}$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{aligned} 3x + y &\geq 12 \\ 3x + 4y &\geq 30 \\ 2x + 7y &\geq 28 \\ x,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Substituindo as desigualdades por igualdades nas restrições temos as equações

$$
\begin{aligned}
3x + y &= 12 \\
3x + 4y &= 30 \\
2x + 7y &= 28 \\
x &= 0 \\
y &= 0.
\end{aligned}
$$

Como temos duas incógnitas e cinco restrições, de acordo com o Corolário 2.2, temos que o total de sistemas lineares a se calcular é igual ao número binomial $\binom{m}{n} = \binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ com $m$ o total de restrições e $n$ o total de variáveis.

Os sistemas, que podem ser resolvidos por escalonamento, assim como as suas soluções, são os seguintes:

1.
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30, \end{cases} \tag{2.18}$$
com $S_1 = (2, 6)$.

2.
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + 7y = 28, \end{cases} \tag{2.19}$$
com $S_2 = (2,95; 3,16)$.

3.
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x = 0, \end{cases} \tag{2.20}$$
com $S_3 = (0, 12)$.

4.
$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ y = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$
com $S_4 = (6, 0)$.

5.
$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ 2x + 7y = 28, \end{cases} \tag{2.22}$$
com $S_5 = (7,54; 1,85)$.

6.
$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ x = 0, \end{cases} \tag{2.23}$$
com $S_6 = (0; 7,5)$.

7.
$$\begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ y = 0, \end{cases} \tag{2.24}$$
com $S_7 = (10, 0)$.

8.
$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ x = 0, \end{cases} \tag{2.25}$$
com $S_8 = (0, 4)$.

9.
$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0, \end{cases} \tag{2.26}$$
com $S_9 = (14, 0)$.

10.
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$
com $S_{10} = (0, 0)$.

Notamos que nas operações (2.19), (2.21), (2.23), (2.24), (2.25), (2.27), se tomarmos as soluções, e substituirmos nas Restrições, estas serão inválidas, ou seja, não viáveis. Por exemplo, tomando o sistema (2.19), vemos que não utilizamos a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + 7y = 28, \end{cases}$$

pois temos como solução o par ordenado $(2,95; 3,16)$ e $f(2,95; 3,16) = 3 \cdot 2,95 + 2 \cdot 3,16 = 15,17$, porém se substituirmos o par ordenado na inequação $3x + 4y \geq 30$ temos um absurdo, pois

$$3x + 4y \geq 30 \Rightarrow 3 \cdot 2,95 + 4 \cdot 3,16 = 21,49 < 30.$$

Já os seguintes sistemas (2.18), (2.20), (2.22), (2.26) cujas soluções obedecem todas as Restrições, pertencem ao conjunto de Soluções Básicas Viáveis, deste modo, basta substituirmos estes valores dentro da Função Objetivo (2.17).

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

$$f(S_1) = f(2, 6) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18,$$

$$f(S_3) = f(0, 12) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24,$$

$$f(S_5) = f(7,54; 1,85) = 3 \cdot 7,54 + 2 \cdot 1,85 = 26,25,$$

$$f(S_9) = f(14, 0) = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42.$$

Como queremos minimizar a função, note que, o menor valor encontrado está na solução $S_1 = (2, 6)$ sendo esta a solução ótima a fim de minimizar a Função Objetivo que assume o valor mínimo $f(2, 6) = 18$.

Portanto, em uma apresentação do método por exaustão de resolução para o ensino médio de um Problema de Programação Linear devemos observar que, nem todas as soluções serão viáveis, já que não obedecem as restrições impostas. Torna-se simples analisarmos situações com duas variáveis, por termos uma representação gráfica além da manipulação de sistemas lineares de ordem 2. Entretanto, em casos que não há como representar graficamente, é importante observarmos se as soluções encontradas nas combinações das equações são, de fato, Soluções Viáveis.

## 2.6 Atividade do Ensino Médio com Relação à Programação Linear

Nesta seção, apresentamos uma proposta de atividade, onde trabalhamos com um problema muito similar aos da Programação Linear. As informações foram retiradas do livro [2] página 196 (adaptada). Usaremos ele como base na sequência deste trabalho. Trata-se da elaboração de uma dieta alimentar usando sistemas lineares

**Enunciado 2.1.** *Neste exemplo mostramos que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.*

O leitor já deve ter reparado que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético e as quantidades de carboidratos, gorduras, sódio, proteínas, etc., contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência - VDR - para uma alimentação adequada.

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos a tabela a seguir, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão *in natura*, peito de frango empanado congelado, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

| | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200m$l$) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Energia (kcal) | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 |
| Carboidratos (g) | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 |
| Proteínas (g) | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 |
| Gorduras totais (g) | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 |

Tabela 2.1: Principais Nutrientes de Alguns Alimentos

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades $x_1, \cdots, x_6$ (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear.

$$\begin{cases} 190x_1 & + 100x_2 & + 150x_3 & + 120x_4 & + 130x_5 & + 45x_6 & = 2000 \\ 37x_1 & + 16x_2 & + 8x_3 & + 30x_4 & + 28x_5 & + 0x_6 & = 300 \\ 3x_1 & + 7x_2 & + 13x_3 & + 1x_4 & + 4x_5 & + 0x_6 & = 75 \\ 0x_1 & + 0x_2 & + 6x_3 & + 0x_4 & + 1{,}5x_5 & + 5x_6 & = 55. \end{cases}$$

Observe que o sistema possui quatro equações, correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. Uma maneira de resolver o sistema é por escalonamento, aplicando as três operações elementares previamente e transformando o sistema na forma escalonada reduzida, temos

$$\begin{cases} x_1 & & & & - 0{,}33x_5 & + 0{,}17x_6 & = 0,19 \\ & x_2 & & & + 0{,}07x_5 & - 1{,}68x_6 & = -8,05 \\ & & x_3 & & + 0{,}25x_5 & + 0{,}83x_6 & = 9,16 \\ & & & x_4 & + 1{,}24x_5 & + 0{,}45x_6 & = 11,60. \end{cases}$$

Vemos em sua forma escalonada que o sistema é possível e indeterminado. Assim, tomemos $x_5 = \alpha$ e $x_6 = \beta$, teremos então $x_1 = 0,19 + 0,33\alpha - 0,17\beta$, $x_2 = -8,05 - 0,07\alpha + 1,68\beta$, $x_3 = 9,16 - 0,25\alpha - 0,83\beta$ e $x_4 = 11,60 - 1,24\alpha - 0,45\beta$. Temos então o conjunto solução

$S = \{0,19 + 0,33\alpha - 0,17\beta; -8,05 - 0,07\alpha + 1,68\beta; 9,16 - 0,25\alpha - 0,83\beta; 11,60 - 1,24\alpha - 0,45\beta; \alpha; \beta\}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Porém, como nos referimos a um problema de dieta, temos que $x_5, x_6 \geq 0$. Assim, se tomarmos, como exemplo, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, teremos, $x_2 = -8,05 - 0,07\alpha + 1,68\beta = -8,05 - 0,07 \cdot 1 + 1,68 \cdot 1 = -6,44$.

Logo, nem toda solução matemática é utilizável na situação prática, já que numa dieta é necessário escolher $x_5 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geq 0, \cdots, x_4 \geq 0$.

Faremos uma transposição didática desta atividade no Capítulo 3, introduzindo desigualdades e uma função custo, ou seja, deixando o problema na forma de um Problema de Programação Linear.

A seguir, apresentamos o *Solver* como ferramenta tecnológica para a resolução de Problemas de Programação Linear.

## 2.7 Resolução com o *Solver*

Para os alunos, a ferramenta gráfica para a resolução de Problemas de Programação Linear, quando no $\mathbb{R}^2$, é um bom instrumento pois permite visualizar como encontrar as possíveis soluções ótimas para um Problema de Programação Linear. Porém, os alunos não têm em sua grade o estudo de Geometria Analítica no $\mathbb{R}^3$ e a resolução de sistemas de equações quando a quantidade de variáveis $n$ for maior que 3 [14]. Sendo assim, podemos utilizar ferramentas dentro da computação para a resolução de Problemas de Programação Linear com qualquer número de variáveis, considerando, desta forma, a inclusão de *softwares* como possibilidade de construção do conhecimento.

Neste capítulo apresentamos o *Solver*, uma ferramenta que faz parte do pacote *OpenOffice Calc*, como material para solucionar Problemas de Programação Linear. A escolha de tal instrumento é pelo fato de ser um *software* livre que pode ser utilizado nas escolas públicas.

Contudo, a intenção é estabelecer um vínculo do estudo de sistemas lineares [2] com os Problemas de Programação Linear [11]. Para tanto, é necessário o docente introduzir o funcionamento do *Solver* para os discentes. Então, este trabalho sugere e apresenta um tutorial de como utilizar o *Solver* para tal. É importante destacar que, o Algoritmo *Simplex*, definido no Capítulo 2, é um dos algoritmos utilizados dentro do *software Solver*.

### Como Utilizar o *Solver* (passo-a-passo)

Este tutorial tem como base o uso do Sistema Operacional *Windows 8.1 Pro* e foi instalado o aplicativo *Apache OpenOffice 4.1.7*.

### Localizar o *Solver* no *OpenOffice Calc*

1. Abra o *OpenOffice Calc*;

2. Busque na barra principal por *Ferramentas* e selecione o *Solver* como mostra a Figura 2.8.

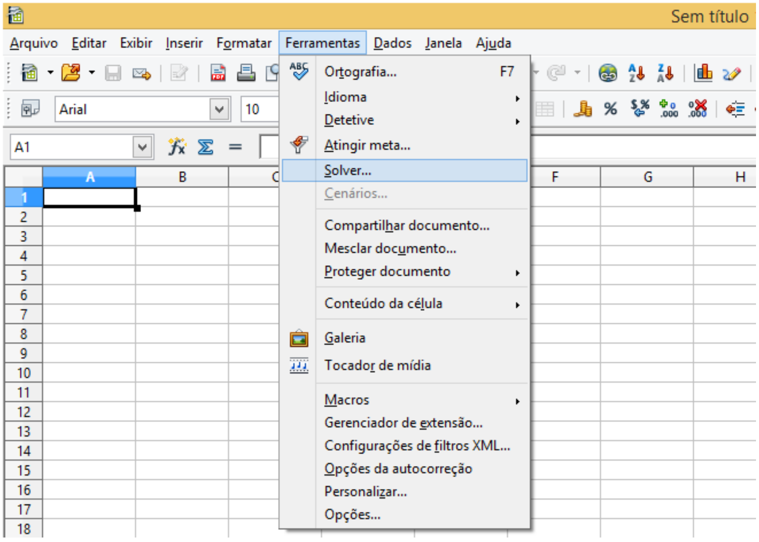



Figura 2.8: Localizando o *Solver*.

### 2.7.1 Utilizando o *Solver* Como Ferramenta Para Resolução de Problemas

#### Problema da Dieta: Proposta de Atividade Para o Ensino Médio

Considere o problema da dieta que foi transposto no Capítulo 2 na Seção 2.6 com todas as variáveis e, agora, juntamente com os custos de cada porção.

| | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200m$l$) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Energia (kcal) | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 |
| Carboidratos (g) | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 |
| Proteínas (g) | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 |
| Gorduras totais (g) | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 |
| Custos | 0,3 | 0,24 | 0,48 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | |

Tabela 2.2: Tabela de Custos

Neste problema, o PPL a ser resolvido é dado por

$$\text{minimizar } f(x_1, \cdots, x_6) = 0,3x_1 + 0,24x_2 + 0,48x_3 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,2x_6. \tag{2.28}$$

$$\text{sujeito a} \quad 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 \geq 2000 \tag{2.29}$$

$$37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 + 0x_6 \geq 300 \tag{2.30}$$

$$3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 1x_4 + 4x_5 + 0x_6 \geq 75 \tag{2.31}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 1,5x_5 + 5x_6 \geq 55 \tag{2.32}$$

$$x_1, \cdots, x_6 \geq 0. \tag{2.33}$$

1. Digite no *OpenOffice Calc* a tabela conforme o enunciado do problema (Tabela 2.2).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200ml) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR | |
| 2 | Energia | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 | |
| 3 | Carboidratos | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 | |
| 4 | Proteínas | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 | |
| 5 | Gorduras Totais | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 | |
| 6 | Custos | 0,3 | 0,24 | 0,48 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | | |
| 7 | | | | | | | | | |

Figura 2.9: Tabela Conforme Enunciado do Problema.

2. Escolha as células onde conterão as fórmulas para a Função Objetivo, as Restrições e as Variáveis (Figura 2.10);

   (a) A célula **B17** contém a Função Objetivo.

   (b) As células **E9, E10, E11, E12 e E13** as Restrições.

   (c) As células **B9, B10, B11, B12, B13 e B14**, contém as variáveis $x_1, \cdots, x_6$.

   (d) As informações que foram colocadas em cada célula:

      i. Para a restrição (2.29) na célula **E9** escreva a fórmula; "=B2*B9+C2*B10+D2*B11+E2*B12+F2*B13+G2*B14";

      ii. Para a restrição (2.30) na célula **E10** escreva a fórmula; "=B3*B9+C3*B10+D3*B11+E3*B12+F3*B13+G3*B14";

      iii. Para a restrição (2.31) na célula **E11** escreva a fórmula; "=B4*B9+C4*B10+D4*B11+E4*B12+F4*B13+G4*B14";

      iv. Para a restrição (2.32) na célula **E12** escreva a fórmula; "=B5*B9+C5*B10+D5*B11+E5*B12+F5*B13+G5*B14";

      v. Para a restrição (2.33) na célula **E13**, deve ter valor zero pois $x_1, \cdots, x_6 \geq 0$;

vi. Para a Função Objetivo (2.28) na célula **B17** escreva a fórmula "=B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14".

B17 =B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200ml) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR |
| 2 | Energia | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 |
| 3 | Carboidratos | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 |
| 4 | Proteínas | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 |
| 5 | Gorduras Totais | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 |
| 6 | Custos | 0,3 | 0,24 | 0,48 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | Variáveis | | | Restrições | | | | |
| 9 | x1 | | | Restrição 01 | 0 | | | |
| 10 | x2 | | | Restrição 02 | 0 | | | |
| 11 | x3 | | | Restrição 03 | 0 | | | |
| 12 | x4 | | | Restrição 04 | 0 | | | |
| 13 | x5 | | | x_n | 0 | | | |
| 14 | x6 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | Função Objetivo | | | | | | | |
| 17 | F = | 0 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |

Figura 2.10: Função Objetivo e Restrições Dispostas na Planilha.

3. Utilizando o *Solver*.

Vá ao *Solver* abrindo assim uma nova janela como na Figura 2.11.

(a) Em *Célula Objetivo*, selecione a célula **B17**, pois é nesta célula que está o valor da Função Objetivo;

(b) Em *Otimizar para*, selecione **Mínimo**, pois neste problema desejamos minimizar;

(c) Em *Células Variáveis* selecione o intervalo de células de **B9 a B14**, pois estas células apresentarão os valores das variáveis;

(d) Como todas nossas restrições da forma ($\geq$), em *Conjunto de restrições*, selecionamos da seguinte maneira nossas operações;

i. Em *Referência de célula* selecione **E9**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H2**;

ii. Em *Referência de célula* selecione **E10**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H3**;

iii. Em *Referência de célula* selecione **E11**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H4**;

iv. Em *Referência de célula* selecione **E12**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **H5**;

v. Em *Referência de célula* selecione o intervalo de células de **B9 a B14**, com *Operador* >=, e *Valor* a célula **E13**.

(e) Clique em *Resolver*.

As células **B9 a B14**, nos mostrarão os valores que as variáveis assumem, já a célula **B17** o valor que assumirá a nossa Função Objetivo (Figura: 2.13).

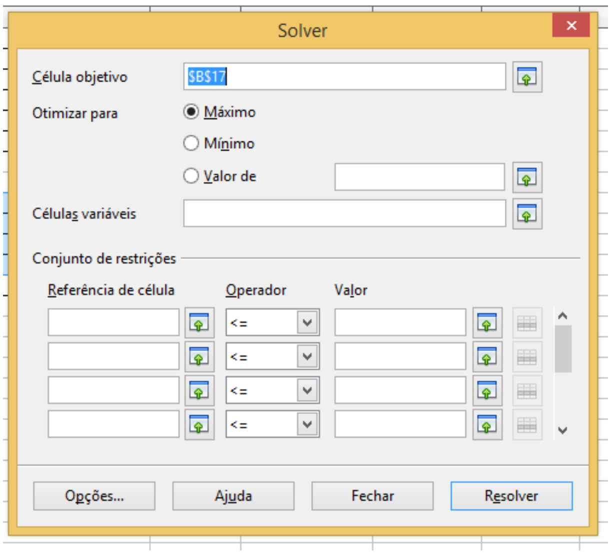



Figura 2.11: Janela de Parâmetros do Solver.

Portanto, para a dieta ter o menor custo, precisamos de $7,22$ porções de arroz, $4,10$ porções de frango e $6,08$ porções de margarina, tendo um custo de R$5,35.

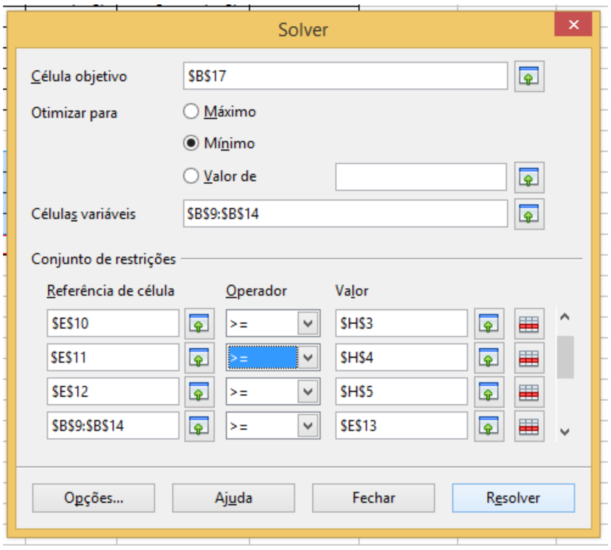
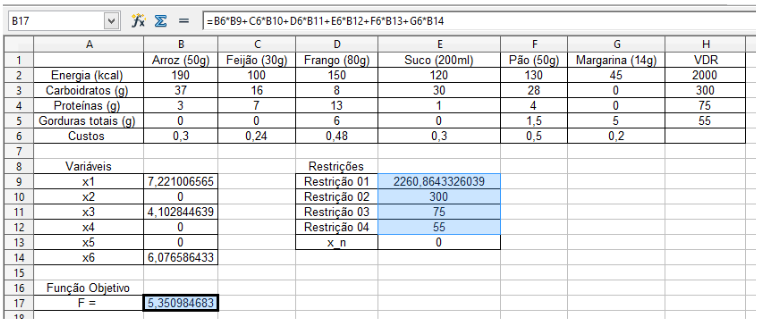



Figura 2.12: Janela após Adicionar as Operações.



B17 =B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200ml) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR |
| 2 | Energia (kcal) | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 |
| 3 | Carboidratos (g) | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 |
| 4 | Proteínas (g) | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 |
| 5 | Gorduras totais (g) | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 |
| 6 | Custos | 0,3 | 0,24 | 0,48 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | Variáveis | | | Restrições | | | | |
| 9 | x1 | 7,221006565 | | Restrição 01 | 2260,8643326039 | | | |
| 10 | x2 | 0 | | Restrição 02 | 300 | | | |
| 11 | x3 | 4,102844639 | | Restrição 03 | 75 | | | |
| 12 | x4 | 0 | | Restrição 04 | 55 | | | |
| 13 | x5 | 0 | | x_n | 0 | | | |
| 14 | x6 | 6,076586433 | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | Função Objetivo | | | | | | | |
| 17 | F = | 5,350984683 | | | | | | |

Figura 2.13: Resultados.

### O *Solver* para Variáveis Inteiras

Se desejamos variáveis inteiras na resolução da atividade seguimos os mesmos passos da Seção 2.7.1 até o Item 3(d)v. Acrescentamos a seguinte informação ao *Solver*.

- Em *Referência de célula* selecione o intervalo de células de **B9 a B14**, com *Operador* **Inteiro**, e *Valor* deixar em branco conforme mostra a Figura 2.14 e clique em *Resolver*.

A Figura 2.15 nos mostra a resolução utilizando variáveis inteiras. Assim, para a dieta ter o menor custo para porções inteiras, precisamos de 7 porções de arroz, 1 porção de feijão, 4 porções de frango e 7 porções de margarina, tendo um custo de R$5,66.

Adaptamos esta atividade com a finalidade de torná-la um Problema de

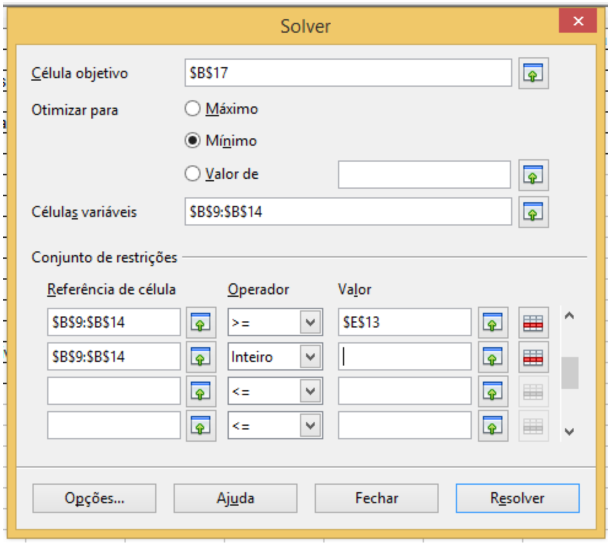



Figura 2.14: Variáveis Inteiras.

B17 =B6*B9+C6*B10+D6*B11+E6*B12+F6*B13+G6*B14

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | Frango (80g) | Suco (200ml) | Pão (50g) | Margarina (14g) | VDR |
| 2 | Energia | 190 | 100 | 150 | 120 | 130 | 45 | 2000 |
| 3 | Carboidratos | 37 | 16 | 8 | 30 | 28 | 0 | 300 |
| 4 | Proteínas | 3 | 7 | 13 | 1 | 4 | 0 | 75 |
| 5 | Gorduras Totais | 0 | 0 | 6 | 0 | 1,5 | 5 | 55 |
| 6 | Custos | 0,3 | 0,24 | 0,48 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | Variáveis | | | Restrições | | | | |
| 9 | x1 | 7 | | Restrição 01 | 2345 | | | |
| 10 | x2 | 1 | | Restrição 02 | 307 | | | |
| 11 | x3 | 4 | | Restrição 03 | 80 | | | |
| 12 | x4 | -0 | | Restrição 04 | 59 | | | |
| 13 | x5 | -0 | | x_n | 0 | | | |
| 14 | x6 | 7 | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | Função Objetivo | | | | | | | |
| 17 | F = | 5,66 | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | |

Figura 2.15: Resultado com as Variáveis Inteiras.

Programação Linear, encaixando-a de tal forma que podemos tratá-la como algo tangível aos estudantes do ensino médio. É o que segue no Capítulo 3.

# Capítulo 3

# Proposta de Aplicação da Programação Linear no Ensino Médio

Este capítulo tem como objetivo mostrar uma maneira de empregar os Problemas de Programação Linear no ensino médio. Não consiste em apresentar todas as definições e resultados sobre Programação Linear, pois foge do escopo de aprendizagem aos discentes, já que não há nada previsto dentro da Base Nacional Comum Curricular [14], como a definição de Vetor Gradiente, por exemplo. Então, sugerimos uma transposição didática para que seja possível aplicar a Programação Linear com conteúdos do ensino médio. Partimos da afirmação de que a solução de um Problema de Programação Linear, quando existe, está em um vértice do conjunto que define as restrições do problema.

Deste modo, este capítulo apresenta uma proposta de plano de aula que pode ser utilizado para o ensino médio embasado nos procedimentos e conhecimentos dos estudantes. Este modelo é adequado aos alunos que estão estudando a partir do fim do segundo ano do ensino médio.

## 3.1 Plano de Aula

**Tema:** Problemas de Programação Linear para o Ensino Médio.

**Objetivo:** Apresentar aos alunos métodos de resolução de Problemas de Programação Linear utilizando as ferramentas já conhecidas por eles.

**Público Alvo:** Alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio e alunos do Segundo Ano do Ensino Médio que já estudaram Sistemas Lineares.

**Competências Específicas:** Na BNCC [14] são apresentadas cinco competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio. Utilizamos duas delas para a construção do plano de aula.

- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

**Habilidades:** Na BNCC [14] é relacionado um conjunto de habilidades que representam as aprendizagens essenciais a serem garantidas. Recorremos a três habilidades.

- Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

**Metodologia:** Utilizaremos a partir daqui uma linguagem menos formal do que a apresentada no texto até o momento, como se o conteúdo estivesse sendo transmitido aos alunos.

## Introdução

Como podemos maximizar os lucros de uma empresa que deseja produzir algo a fim de que seu lucro seja o maior possível, ou também, como podemos minimizar os custos para a elaboração de uma dieta respeitando todos os valores nutricionais necessários básicos?

Sabemos que, no ensino médio é pouco apresentado estas formas de contextualização de um problema onde pretendemos obter um lucro máximo ou ter um gasto mínimo para determinadas situações. Assim, apresentamos um material onde serão abordados os Problemas de Programação Linear.

Mas, o que é um Problema de Programação Linear? Há algum modelo em algum livro do ensino médio? Antes de respondermos a estas perguntas, devemos verificar se já estudamos os conteúdos referentes à inequações, sistemas de equações lineares e esboço de gráficos de funções pois eles servem como base para a resolução destes problemas.

A fim de aprimorar o conteúdo, serão postos como verdadeiros aos estudantes, o fato da solução de um Problema de Programação Linear, após a construção das restrições, estar no vértice da região viável definida pelas restrições do problema. Como mostra a Figura 3.1

Temos na Figura 3.1 a região $ABCO$, este polígono contém os vértices $A$, $B$, $C$ e $O$ que analisamos no método de resolução gráfica. Os outros vértices, $D$ e $E$, que a figura apresenta analisamos junto com os outros vértices na resolução por exaustão.

Vemos que, no livro [2], temos uma proposta de desenvolvimento de um Problema de Programação Linear. Contudo, iremos utilizar uma atividade modificada do

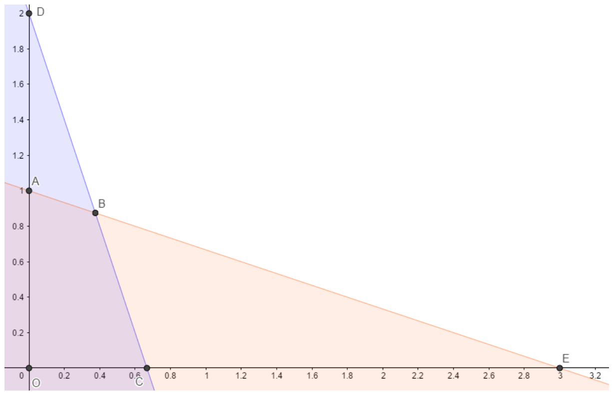



Figura 3.1: Região viável $ABCO$ formada pelas restrições.

exercício da página 196 deste livro, fazendo uma transposição didática e o apresentando como um Problema de Programação Linear, o problema da dieta.

## Atividade

O enunciado original nos apresentava uma tabela com seis alimentos sem as informações dos custos para eles, como mostra a Tabela 2.1.

Desta forma, faremos algumas alterações para facilitar a compreensão dos conteúdos propostos. Suprimos alguns alimentos para termos apenas duas variáveis no exercício e acrescentamos custos a estes alimentos a fim de torná-lo um Problema de Programação Linear. Transpomos o problema da seguinte maneira, modificando valores também por questão didática.

**Enunciado 3.1.** *As embalagens de alimentos trazem informações sobre os carboidratos e proteínas contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência - VDR - para uma alimentação adequada. Montamos a tabela a seguir, que mostra os valores nutricionais do arroz e do feijão in natura e os custos de cada produto proporcional a quantidade das porções. Queremos determinar qual a melhor forma de montar uma dieta com o menor custo possível.*

Neste exercício devemos encontrar uma maneira de fazer com que os gastos com esta dieta sejam mínimos mas nos dando a quantidade suficiente de nutrientes listados. Com isso, vamos analisar e modelar as informações.

**Nutrientes**

| | Arroz (50g) | Feijão (30g) | VDR |
|---|---|---|---|
| Carboidratos (g) | 30 | 15 | 300 |
| Proteínas (g) | 3 | 5 | 58 |
| Custos (R$) | 4,00 | 3,00 | |

Tabela 3.1: Informações do Problema

As quantidades de porções de arroz e feijão denominamos $x$ e $y$, respectivamente.
A quantidade mínima de carboidratos que devemos ter em nossa dieta obedece a inequação $30x + 15y \geq 300$.
A quantidade mínima de proteínas que devemos ter em nossa dieta obedece a inequação $3x + 5y \geq 58$.
Denominamos os custos como $C$, assim temos a equação que definirá nossos custos é dada por $C = 4x + 3y$.
As quantidades de porções não admitem valores negativos, assim temos $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Observamos que uma inequação é mais adequada aqui ao invés de uma equação, como sugerido no problema original. Pois como vimos na resolução do Enunciado 2.1 o resultado do problema obtínhamos valores negativos nas porções da dieta, tornando o uso das igualdades inviável.

Como queremos obter um gasto mínimo com a nossa dieta, então $C$ deve ter o menor valor possível, ou seja, queremos minimizar estes valores. A função custo $C(x, y) = 4x + 3y$ é denominada Função Objetivo e queremos minimizar os custos. Já as desigualdades que temos aqui são denominadas Restrições. Modelando, temos o Problema de Programação Linear

$$\text{minimizar } C(x,y) = 4x + 3y \tag{3.1}$$

$$\text{sujeito a} \quad 30x + 15y \geq 300 \tag{3.2}$$

$$3x + 5y \geq 58 \tag{3.3}$$

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0. \tag{3.4}$$

Agora, apresentamos três métodos de resolução deste problema. Nos dois primeiros, podemos utilizar de ferramentas tradicionais para a resolução, e no terceiro método utilizamos uma ferramenta tecnológica.

**Resolução Gráfica**

O método gráfico consiste em observar os valores dos pares ordenados nos vértices da região viável obtida a partir da construção das restrições no plano cartesiano. Para analisarmos em qual dos vértices encontramos a Solução Ótima, faremos a construção da Função Objetivo quando $f(x, y) = 0$ e construímos retas paralelas a $f(x, y) = 0$, denominadas Curvas de Nível, passando pelos vértices da região viável. Como nosso objetivo é minimizar $f$, devemos tomar a reta paralela mais próxima da reta $f(x, y) = 0$. Plotemos então as restrições no plano cartesiano.

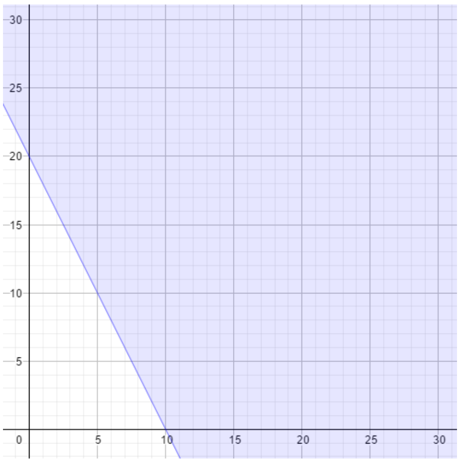



Figura 3.2: Restrição $30x + 15y \geq 300$ (3.2).

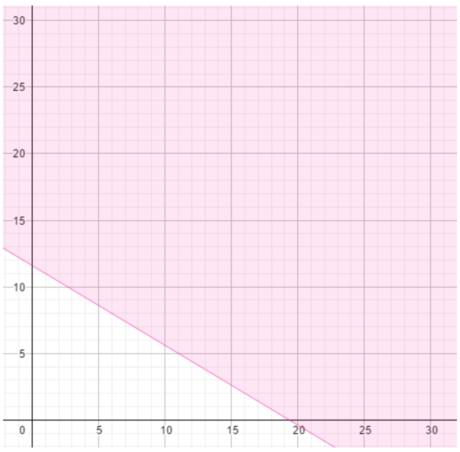



Figura 3.3: Restrição $3x + 5y \geq 58$ (3.3).

As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam as restrições separadamente. Já a Figura 3.4 apresenta mutualmente ambas as restrições. Ficamos restritos ao primeiro quadrante pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Note, na Figura 3.5 que temos no plano cartesiano a região $ABC$, onde qualquer par ordenado contido nesta região é uma solução viável, mas basta analisarmos os vértices dessa região. Assim traçamos as retas paralelas a função objetivo quando

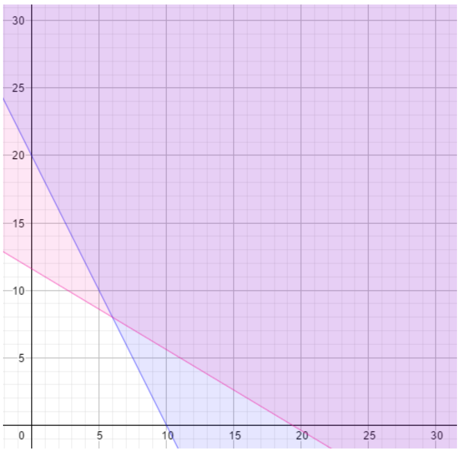


Figura 3.4: Restrições $30x+15y \geq 300$ (3.2.) e $3x+5y \geq 58$ (3.3) postas simultaneamente

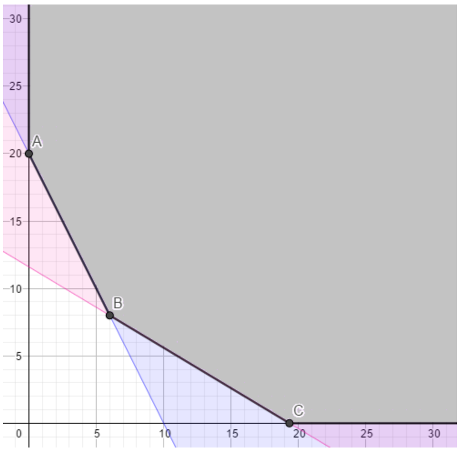


Figura 3.5: Região com as Soluções Viáveis.

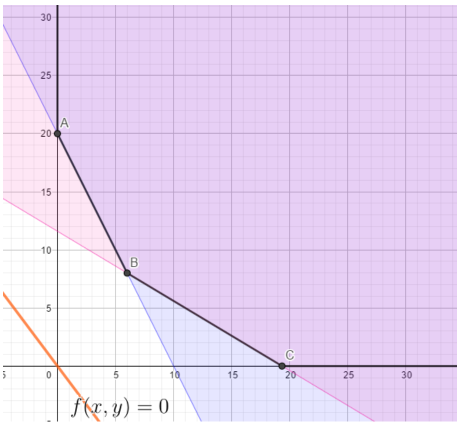



Figura 3.6: A Função Objetivo com $f(x, y) = 0$ (3.1).

$f(x, y) = 0$ como mostra a Figura 3.6 e passando por $A$, $B$ e $C$, um a um, como mostra a Figura 3.7. Note que todo ponto em uma curva de nível tem o mesmo valor na Função Objetivo.

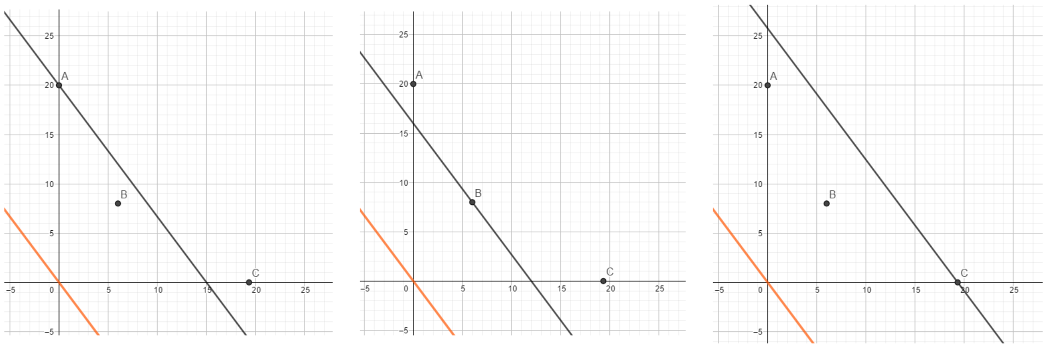



Figura 3.7: Curvas de Nível da Função Objetivo que passam pelos ponto $A$, $B$ e $C$.

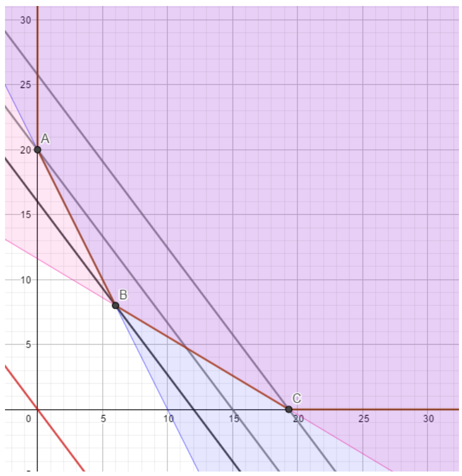



Figura 3.8: Resolução Gráfica.

Na Figura 3.8, devemos analisar que não há um polígono, mas existe uma região onde podemos analisar a existência da solução e analisarmos os vértices desta região para determinar a solução ótima. A reta mais próxima a $f(x, y) = 0$ é a que nos interessa, que é no caso a que passa no ponto $B = (6, 8)$, e assim o custo mínimo será de $C(6, 8) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 48$.

Portanto, precisamos de 6 porções de arroz e 8 de feijão para satisfazer a dieta com o menor custo possível que é de R$ 48,00.

### Resolução por Exaustão

Outro método que podemos utilizar é o de exaustão. Este método consiste em testar todos os vértices oriundos das restrições de um Problema de Programação Linear. Significa que devemos calcular todas as soluções possíveis a partir dos sistemas lineares $n \times n$, até encontrarmos a solução ótima. Os possíveis sistemas lineares que devemos calcular dependem da quantidade de variáveis $n$ e da quantidade de restrições $m$. O número binomial $\binom{m}{n}$ nos permite saber a quantidade de sistemas que precisamos calcular. Outro detalhe é que, todas as restrições devem ser substituídas por igualdades, uma vez que é onde estão os vértices.

Neste problema, a quantia possível de sistemas que podemos calcular é dado pela combinação $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ pois possuímos quatro restrições $m = 4$ dados em (3.2), (3.3), (3.4) e duas variáveis $n = 2$. Substituindo os sinais de desigualdade por sinais de igualdade temos os seguintes sistemas lineares para calcular, que podem ser resolvidos por escalonamento já que os alunos tem conhecimento desta técnica.

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ 3x + 5y = 58 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (6, 8),$$

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = (0, 20),$$

$$\begin{cases} 30x + 15y = 300 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_3 = (10, 0),$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S_4 = \left(0, \frac{58}{5}\right),$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 58 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_5 = \left(\frac{58}{3}, 0\right),$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_6 = (0, 0).$$

Substituindo as soluções $S_i$ encontradas nas resoluções dos sistemas na Função Objetivo $C = 4x + 3y$, em ordem crescente para as imagens, temos
$C(S_6) = C(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0,$
$C(S_4) = C\left(0, \dfrac{58}{5}\right) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot \dfrac{58}{5} = \dfrac{174}{5},$
$C(S_3) = C(10, 0) = 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 40,$
$C(S_1) = C(6, 8) = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 48,$
$C(S_2) = C(0, 20) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 60,$
$C(S_5) = C\left(\dfrac{58}{3}, 0\right) = 4 \cdot \dfrac{58}{3} + 3 \cdot 0 = \dfrac{232}{3}.$

Testando os menores custos, vemos que

$S_6$ é inviável pois $30 \cdot 0 + 15 \cdot 0 < 300$,
$S_4$ é inviável pois $30 \cdot 0 + 15 \cdot \dfrac{58}{5} < 300$,
$S_3$ é inviável pois $3 \cdot 10 + 5 \cdot 0 < 58$.

Testando o custo dado por $S_1$ vemos que ela é viável pois

$30 \cdot 6 + 15 \cdot 8 = 180 + 120 \geq 300$,

$3 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 18 + 30 \geq 58$,

$6 \geq 0$,

$8 \geq 0$.

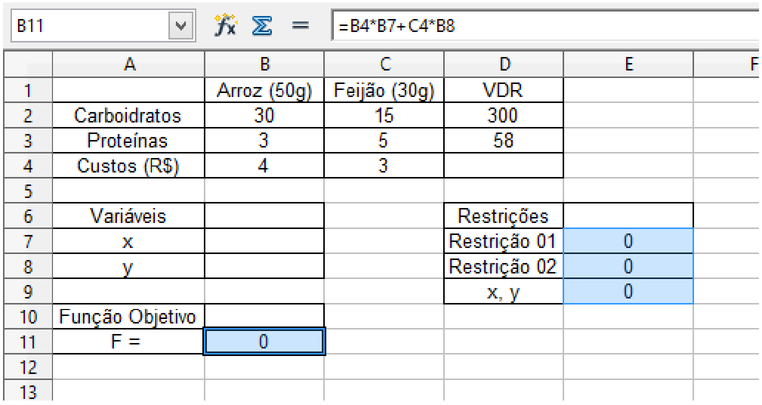
Assim, a Solução Ótima que minimiza a Função Objetivo $C$ é $S_1 = (6, 8)$, pois além de respeitar todas as restrições é um extremo que tem menor valor na Função Objetivo. Devemos observar que, estas coordenadas são as mesmas encontradas na resolução gráfica no vértice $B = (6, 8)$ da região viável apresentada na Figura 3.5.

### Resolução Pelo *Solver*

Utilizamos o tutorial do *Solver* apresentado na Seção 2.7 para resolver o Problema de Programação Linear. Como já temos a Função Objetivo (3.1) e as restrições (3.2), (3.3) e (3.4), construímos a tabela no *OpenOffice Calc* com as informações do Enunciado 3.1, juntamente com as células que contém a Função Objetivo e as restrições, como mostra a Figura 3.9.

1. Na célula **B11** escrevemos a fórmula "=B4*B7+C4*B8", esta célula contém a Função Objetivo (3.1), ela mostrará o valor mínimo da Função Objetivo após a resolução pelo *Solver*.

2. Na célula **E7** escrevemos a fórmula "=B2*B7+C2*B8", esta célula contém a restrição (3.2).



B11 =B4*B7+C4*B8

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | VDR | | |
| 2 | Carboidratos | 30 | 15 | 300 | | |
| 3 | Proteínas | 3 | 5 | 58 | | |
| 4 | Custos (R$) | 4 | 3 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Variáveis | | | Restrições | | |
| 7 | x | | | Restrição 01 | 0 | |
| 8 | y | | | Restrição 02 | 0 | |
| 9 | | | | x, y | 0 | |
| 10 | Função Objetivo | | | | | |
| 11 | F = | 0 | | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | |

Figura 3.9: Tabela com as informações do problema.

3. Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B3*B7+C3*B8", esta célula contém a restrição (3.3).

4. Na célula **E9** atribuímos o valor 0, pois esta célula contém a restrição (3.4) $x$, $y$ $\geq 0$;

5. As células **B7** e **B8** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

6. Abrimos o *Solver* como mostra a Figura 3.10 e colocamos as seguintes informações.

   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B11**, pois esta célula possui o valor da Função Objetivo (3.1);

   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Mínimo*;

   (c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B7** e **B8**, pois estas são nossas variáveis $x$ e $y$;

   (d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos;

      i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E7**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (3.2);

ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "> =" e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (3.3);

iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B7**, com o *Operador* "> =" e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (3.4) para a variável $x$;

iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B8**, com o *Operador* "> =" e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (3.4) para a variável $y$;

7. Clique em *Resolver*.

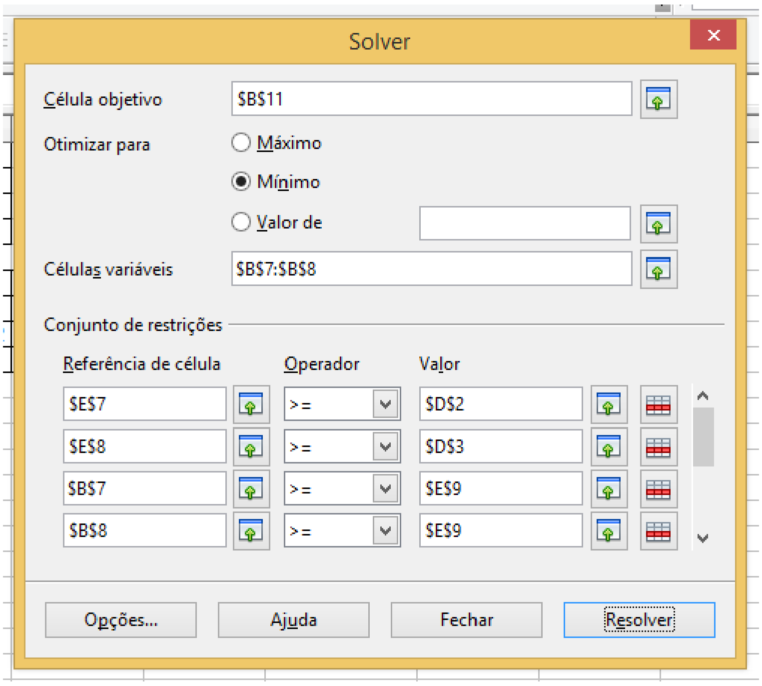
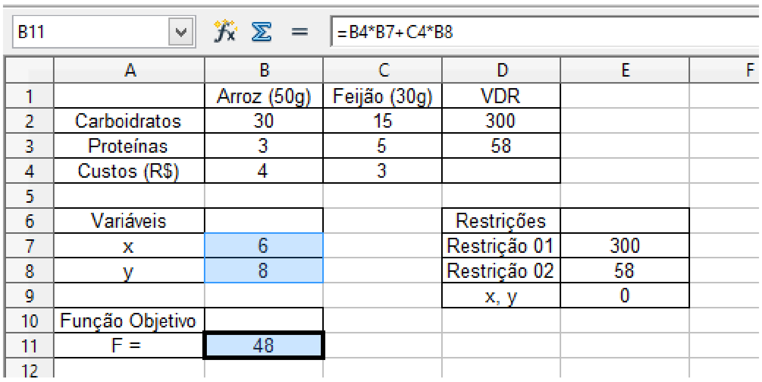



Figura 3.10: *Solver* com as informações do problema.

Vemos que nas células **B7** e **B8**, os resultados são os mesmos encontrados na resolução gráfica e na resolução por exaustão, como mostra a Figura 3.11.

Portanto, precisamos de 6 porções de arroz e 8 de feijão para satisfazer a dieta com o menor custo possível que é de R$ 48,00.



B11 | =B4*B7+C4*B8

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Arroz (50g) | Feijão (30g) | VDR | | |
| 2 | Carboidratos | 30 | 15 | 300 | | |
| 3 | Proteínas | 3 | 5 | 58 | | |
| 4 | Custos (R$) | 4 | 3 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Variáveis | | | Restrições | | |
| 7 | x | 6 | | Restrição 01 | 300 | |
| 8 | y | 8 | | Restrição 02 | 58 | |
| 9 | | | | x, y | 0 | |
| 10 | Função Objetivo | | | | | |
| 11 | F = | 48 | | | | |
| 12 | | | | | | |

Figura 3.11: Resultados do problema.

## Casos Particulares

No entanto, pode ocorrer na resolução gráfica, caso desejarmos minimizar, traçarmos uma reta passando por dois vértices. Se esta reta for a mais próxima da função objetivo, quando $f(x, y) = 0$, implica em uma das arestas do polígono de solução estar contida nesta reta. Com isso, todos os pontos pertencentes a esta aresta são soluções ótimas da Função Objetivo conforme mostra a Figura 3.12, onde os vértice $A$ e $B$ minimizam a função, porém, quando construímos o gráfico, as retas que passam por $A$ e $B$ coincidem. Logo, todo o segmento $\overline{AB}$ minimiza a Função Objetivo.

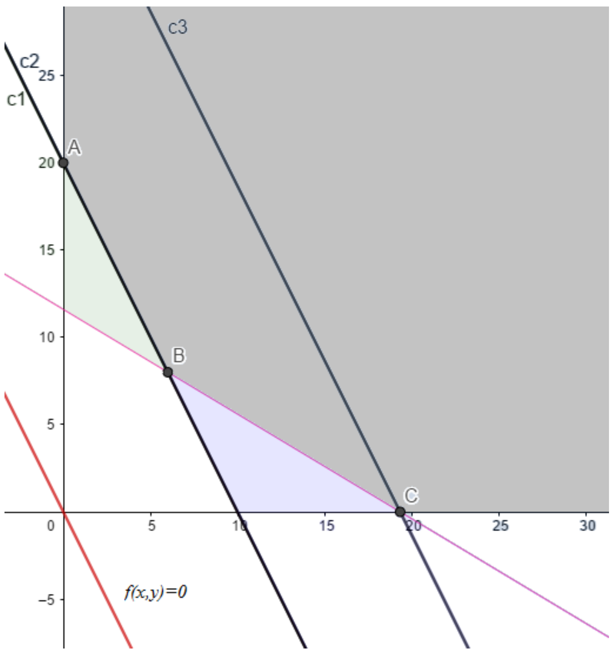



Figura 3.12: Aresta de soluções.

## Considerações

Caso tenhamos três variáveis, ainda é possível encontrar a solução ótima pela resolução gráfica trabalhando com três coordenadas, porém é inviável ao ensino médio, por não ser previsto nas propostas da BNCC [14], mas ainda há a resolução por exaustão, trabalhando com sistemas de equações lineares $3 \times 3$. Entretanto, esta também pode vir a se tornar inviável, pois podemos ter uma quantidade de restrições muito grande o que torna este cálculo maçante. Todavia, podemos utilizar um *Software* livre, o *Solver*, como ferramenta tecnológica, independente da quantidade de variáveis e restrições.

Apresentamos mais de uma maneira de resolvermos um Problema de Programação Linear, pois a BNCC nas competências específicas destaca que

"para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário".

Apresentamos uma lista de exercícios que podemos aplicar aos estudantes do ensino médio com o intuito de avaliar o entendimento a respeito do conteúdo.

# 3.2 Exercícios Propostos

Apresentamos alguns exercícios que podemos utilizar como forma de avaliação diagnóstica e formativa dos alunos, com o intuito de verificar o aprendizado dos estudantes sobre a proposta de trabalhar os Problemas de Programação Linear.

**Enunciado 3.2.** *Problema da Wyndor Glass (adaptado) [18] [19].*

*Uma empresa produz vidros de alta qualidade e pretende produzir dois novos produtos, portas e janelas. Esta empresa possui três fábricas e cada fábrica possui um limite de horas disponíveis para fazer estes produtos. As informações quanto ao lucro destes produtos estão na Tabela 3.2.*

Com estas informações, queremos determinar qual será o maior lucro possível.

| | Porta | Janela | Disponibilidade |
|---|---|---|---|
| Fábrica 1 | 1 hora | 0 | 4 horas |
| Fábrica 2 | 0 | 2 horas | 12 horas |
| Fábrica 3 | 3 horas | 2 horas | 18 horas |
| Lucros por Lote (mil) | R\$3 | R\$5 | |

Tabela 3.2: Disponibilidade das Fábricas

**Modelando o problema**

Denominamos como $x$ os lotes referentes as *portas* e $y$ para as *janelas*. Observe que, a Fábrica 1 leva 1 hora para construir um lote de portas e tem, no máximo, 4 horas de disponibilidade para produzir estes lotes. Já a Fábrica 2 leva 2 horas para produzir um lote de janelas, com uma disponibilidade máxima de 12 horas. Finalmente a Fábrica 3 que leva 3 horas para produzir um lote de portas e 2 horas para produzir um lote de janelas e tem disponibilidade máxima de 18 horas. Assim, deixamos cada uma dessas informações escritas em uma linguagem algébrica.

Para as disponibilidades das Fábricas 1, 2 e 3, temos, respectivamente, as restrições $x \leq 4$, $2y \leq 12$ e $3x + 2y \leq 18$. Lembrando que, estas portas e janelas não podem assumir valores negativos, temos então $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Como queremos o maior lucro possível na fabricação destas portas, estamos buscando o lucro máximo, ou seja, *maximizar* os lucros. Denominando por $L$ o lucro, vemos que cada lote de portas nos dá um lucro de R\$3 mil e que cada lote de janelas um lucro de R\$5 mil, assim, escrevendo novamente em linguagem algébrica temos o Problema de Programação Linear

$$\text{maximizar } L(x, y) = 3x + 5y. \tag{3.5}$$

Agora apresentamos três métodos para a resolução desta atividade, veremos primeiramente o método gráfico.

**Resolução Gráfica do Enunciado 3.2**

O método gráfico consiste em observar os valores dos pares ordenados nos vértices do polígono que obtivermos a partir da construção das restrições no plano cartesiano (Figura 3.13).

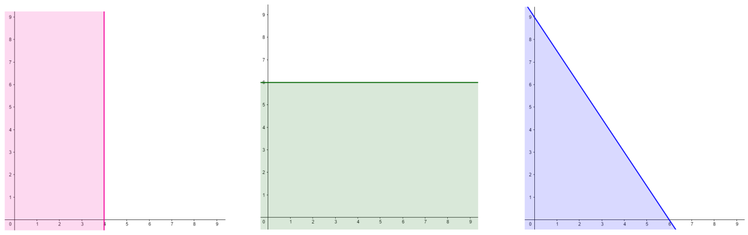


Figura 3.13: Restrições no espaço $\mathbb{R}^2$.

Vemos que obtemos com isso o polígono $ABCDO$ e que, quaisquer dos pontos que tomarmos dentro desta região respeitará as restrições atribuídas. Note também que, nos limitamos ao primeiro quadrante pois não admitimos uma solução negativa (Figura 3.14).

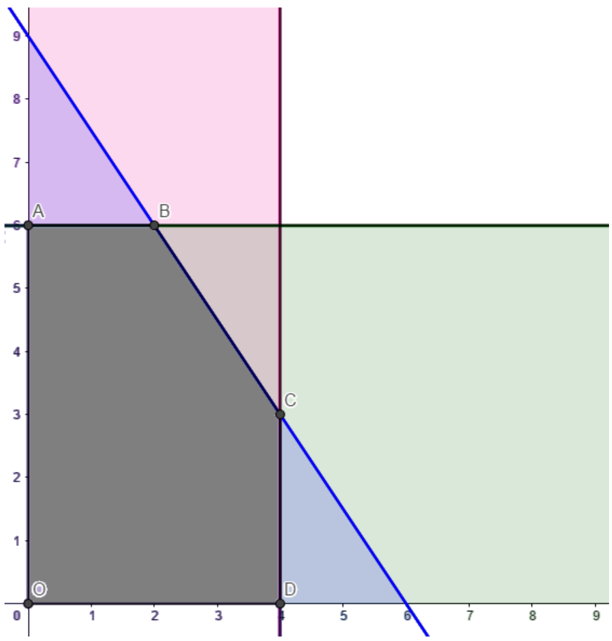



Figura 3.14: Polígono $ABCDO$ formado com as Restrições.

Com isso, para encontrarmos a resposta do problema (3.5), devemos encontrar o ponto mais distante de $L(x, y) = 0$, dentro do polígono $ABCDO$. Para isto, traçamos as denominadas Curvas de nível (Figura 3.15) que são as retas paralelas à reta $L(x, y) = 0$.

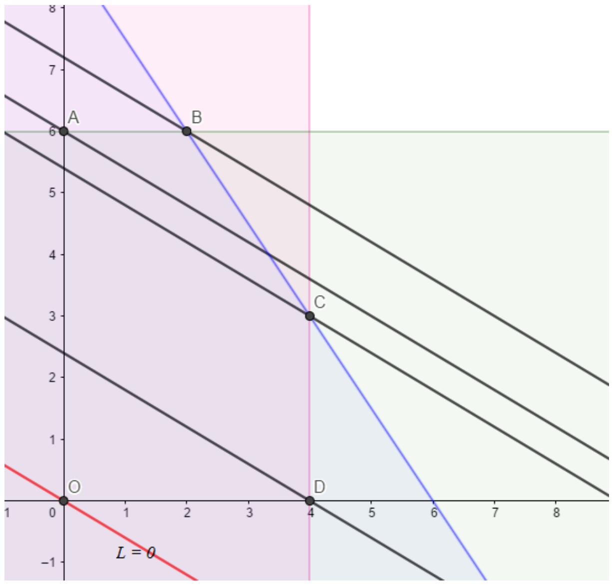



Figura 3.15: Curvas de Nível e a Função Objetivo quando $L(x, y) = 0$.

Veja que, a reta mais distante da reta $L(x, y) = 0$ é a que passa pelo vértice $B$ de nosso polígono. Com isso, basta apenas verificar quais as coordenadas deste vértice. E como podemos observar pelo gráfico, ele é originário da intersecção das Restrições $2y \leq 12$ e $3x + 2y \leq 18$.

Trocando as desigualdades por igualdades, basta encontrarmos os valores do par ordenado onde está este vértice, ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} 2y = 12 \\ 3x + 2y = 18. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos o par ordenado $(2, 6)$. Substituindo o par ordenado encontrado na Função Objetivo temos

$$L = 3x + 5y \Rightarrow L(2, 6) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 36.$$

Portanto, para obtermos um lucro máximo nesta empresa, devemos produzir dois lotes de porta e seis lotes de janelas, gerando um lucro de R\$36 mil.

**Resolução por Exaustão do Enunciado 3.2**

Substituindo as desigualdades por igualdades nas restrições temos
$x \leq 4 \quad \Rightarrow x = 4,$
$2y \leq 12 \quad \Rightarrow 2y = 12,$
$3x + 2y \leq 18 \quad \Rightarrow 3x + 2y = 18,$
$x \geq 0 \quad \Rightarrow x = 0,$
$y \geq 0 \quad \Rightarrow y = 0.$

Assim, seguem os dez sistemas lineares com suas respectivas soluções.

$$\begin{cases} x = 4 \\ 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad S_1 = (4, 6),$$
$$\begin{cases} x = 4 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow \quad S_2 = (4, 3),$$
$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_3 = \emptyset,$$
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_4 = (4, 0),$$
$$\begin{cases} 2y = 12 \\ 3x + 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow \quad S_5 = (2, 6),$$
$$\begin{cases} 2y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_6 = (0, 6),$$
$$\begin{cases} 2y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_7 = \emptyset,$$
$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_8 = (0, 9),$$
$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_9 = (6, 0),$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_{10} = (0, 0).$$

Aplicando a Função Objetivo nas soluções dos sistemas temos
$L(S_1) = L(4, 6) = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 42,$
$L(S_2) = L(4, 3) = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 27,$
$L(S_4) = L(4, 0) = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 12,$
$L(S_5) = L(2, 6) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 36,$
$L(S_6) = L(0, 6) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = 30,$

$L(S_8) = L(0,9) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = 45,$
$L(S_9) = L(6,0) = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 18,$
$L(S_{10}) = L(0,0) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0.$

Perceba que, o maior resultado que encontramos foi com o par ordenado $S_9 = (0,9)$, porém, note que este par não obedece a restrição $2y \leq 12$ pois $2 \cdot 9 = 18 > 12$. O mesmo acontece com o par ordenado $S_1 = (4,6)$ que não obedece a restrição $3x + 2y \leq 18$ pois $3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 24 > 18$.

Assim, como visto no método gráfico, o par ordenado que maximiza a Função Objetivo é $S_5 = (2,6)$ pois tem o maior valor de Função Objetivo, satisfazendo todas as restrições, a saber
$x \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 4,$
$2y \leq 12 \Rightarrow 2 \cdot 6 = 12 \leq 12,$
$3x + 2y \leq 18 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leq 18,$
$x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0,$
$y \geq 0 \Rightarrow 6 \geq 0.$

Portanto, para obtermos um lucro máximo nesta empresa, devemos produzir dois lotes de porta e seis lotes de janelas, gerando um lucro de R$36 mil.

### Resolução Pelo *Solver* do Enunciado 3.2

Utilizamos o tutorial do *Solver*, construímos uma tabela com as informações do problema no *OpenOffice Calc*, além da Função Objetivo e das restrições. Como mostra a Figura 3.16.

$$\text{maximizar } L(x,y) = 3x + 5y \tag{3.6}$$
$$\text{sujeito a } \; x \leq 4 \tag{3.7}$$
$$2y \leq 12 \tag{3.8}$$
$$3x + 2y \leq 18 \tag{3.9}$$
$$x,\ y \geq 0. \tag{3.10}$$

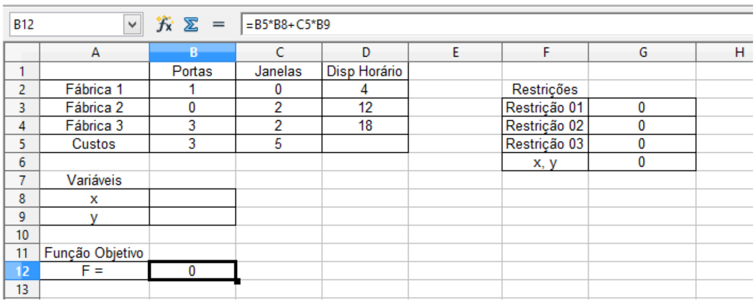



Figura 3.16: Tabela com as informações do problema.

1. Abrimos o *OpenOffice Calc* e colocamos as seguintes informações.

   (a) Na célula **B12** escrevemos a fórmula "=B5*B8+C5*B9", esta célula contém a Função Objetivo (3.6), ela mostrará o valor máximo da Função Objetivo após a resolução pelo *Solver*;

   (b) Na célula **G3** escrevemos a fórmula "=B2*B7+C2*B8", esta célula contém a restrição (3.7);

   (c) Na célula **G4** escrevemos a fórmula "=B3*B7+C3*B8", esta célula contém a restrição (3.8);

   (d) Na célula **G5** escrevemos a fórmula "=B3*B7+C3*B8", esta célula contém a restrição (3.9);

   (e) Na célula **G6** escrevemos o valor 0, pois esta célula contém a restrição (3.10) $x, \quad y \quad \geq 0$;

   (f) As células **B7** e **B8** mostrarão os resultados após a resolução pelo *Solver*.

2. Abrimos o *Solver* e colocamos as informações mostradas na Figura 3.17.

   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B12**, pois esta célula possui a Função Objetivo (3.6);

   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Máximo*;

(c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B8** e **B9**, pois estas são nossas variáveis $x$ e $y$;

(d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos:

i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **G3**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (3.7);

ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **G4**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (3.8);

iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **G5**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D4**, para termos a restrição (3.9);

iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B8**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **G6**, para termos a restrição (3.10) para a variável $x$;

v. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B9**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **G6**, para termos a restrição (3.10) para a variável $y$.

3. Clique em *Resolver*.

Vemos que as células **B8** e **B9**, possuem os resultados encontrados na resolução gráfica e na resolução por exaustão. Como mostra a Figura 3.18.

Portanto, para obtermos um lucro máximo nesta empresa, devemos produzir dois lotes de porta e seis lotes de janelas, gerando um lucro de R$36 mil.

**Enunciado 3.3.** *Otimize o Problema de Programação Linear*

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & f(x,y) = 8x + 4y \\
 & \quad x + 3y \leq 5 \\
\text{sujeito a} & \quad 2x + y \leq 5 \\
 & \quad x,\ y\ \geq 0.
\end{array}
$$

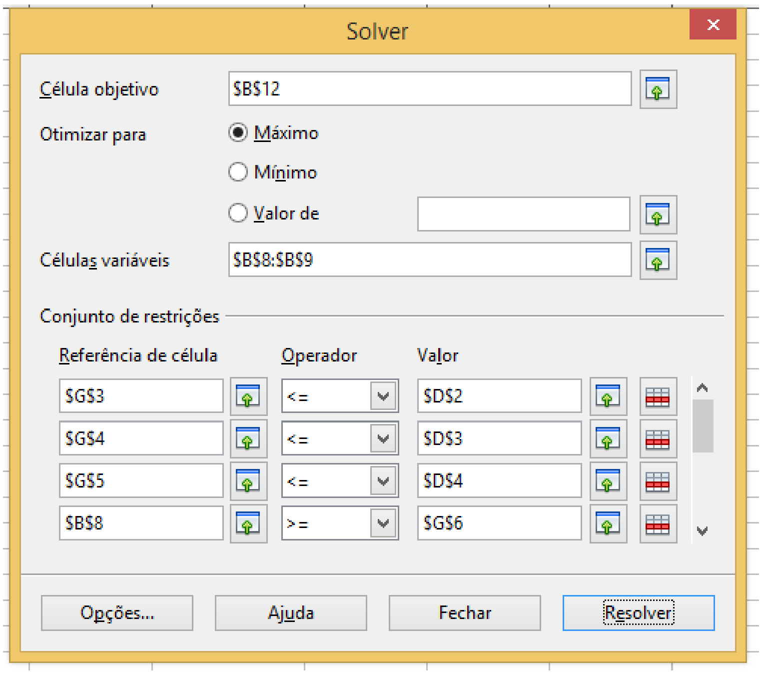
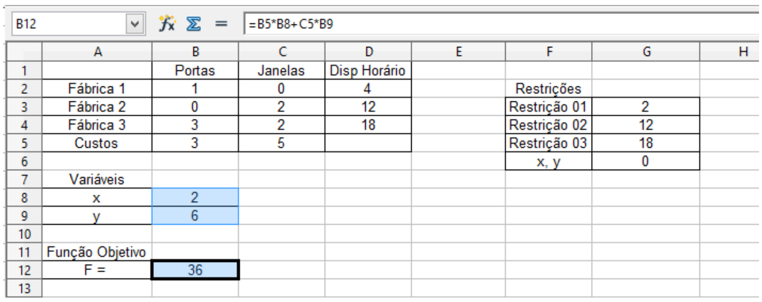



Figura 3.17: *Solver* com as informações do problema.



B12 =B5*B8+C5*B9

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Portas | Janelas | Disp Horário | | | | |
| 2 | Fábrica 1 | 1 | 0 | 4 | | Restrições | | |
| 3 | Fábrica 2 | 0 | 2 | 12 | | Restrição 01 | 2 | |
| 4 | Fábrica 3 | 3 | 2 | 18 | | Restrição 02 | 12 | |
| 5 | Custos | 3 | 5 | | | Restrição 03 | 18 | |
| 6 | | | | | | x, y | 0 | |
| 7 | Variáveis | | | | | | | |
| 8 | x | 2 | | | | | | |
| 9 | y | 6 | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | Função Objetivo | | | | | | | |
| 12 | F = | 36 | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |

Figura 3.18: Resultados do problema.

### Resolução Gráfica do Enunciado 3.3

Na resolução gráfica devemos observar os valores dos pares ordenados nos vértices da região de soluções. As restrições geram o polígono $ABCO$. Nos limitamos ao primeiro quadrante pois $x,\ y\ \geq 0$. Traçamos também a Função Objetivo quando $f(x, y) = 0$. Como mostra a Figura 3.19.

Para encontrarmos a resposta do problema, devemos encontrar o vértice mais distante do polígono $ABCO$ da reta $f(x, y) = 0$. Uma das maneiras que podemos fazer é traçando retas paralelas a $f(x, y) = 0$, as curvas de nível, passando pelos vértices do polígono $ABCO$ como mostra a Figura 3.20.

Porém, observamos que as retas que passam por $B = (2, 1)$ e $C = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

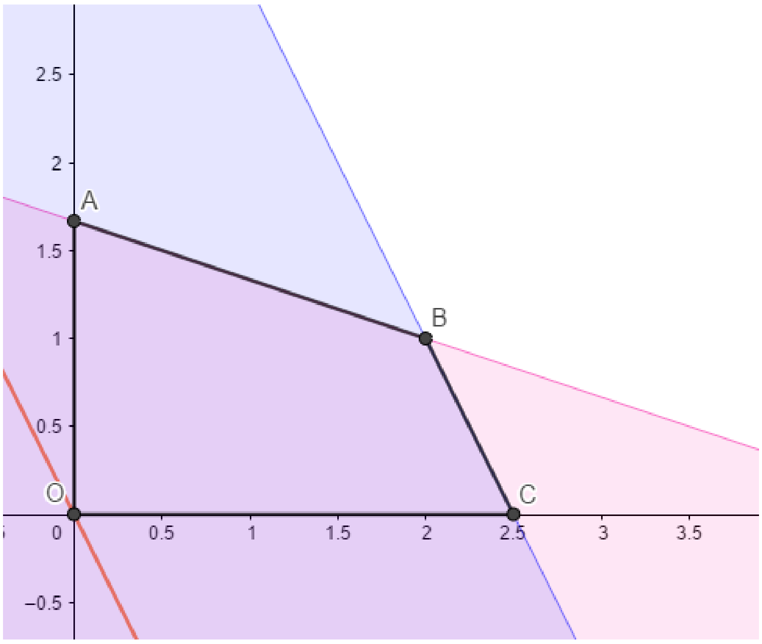



Figura 3.19: Região Viável.

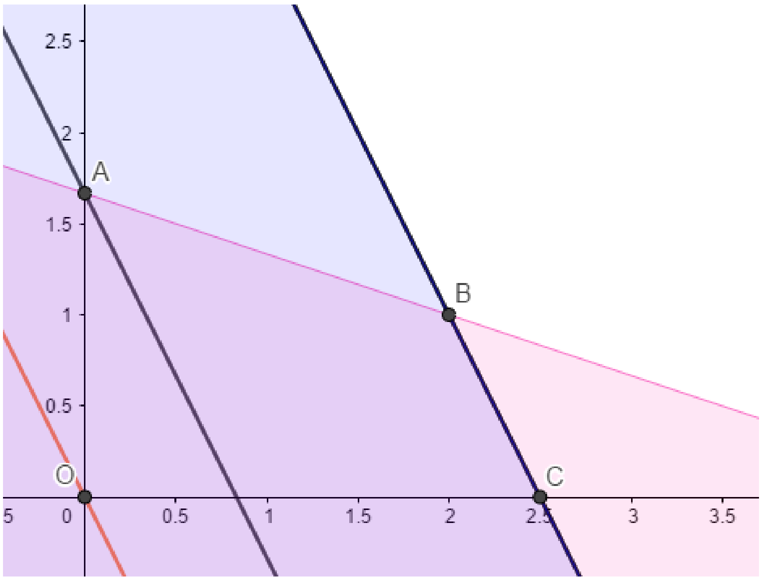



Figura 3.20: Curvas de nível.

coincidem. Portanto, todo e qualquer ponto que pertence a aresta $BC$ do polígono $ABCO$ maximiza a Função Objetivo. Tomaremos os vértices $B$, $C$ e o ponto $D = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pertencente a aresta para justificarmos este resultado.

Para $B = (2, 1)$, substituindo na Função Objetivo temos
$f(2, 1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16 + 4 = 20$.

Para $C = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$, substituindo na Função Objetivo temos
$f\left(\frac{5}{2}, 0\right) = 8 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot 0 = \frac{40}{2} + 0 = 20.$

Para $D = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$, substituindo na Função Objetivo temos
$f\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{9}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{72}{4} + \frac{4}{2} = 18 + 2 = 20.$

Portanto, qualquer ponto $P = (x_0, y_0)$ pertencente da aresta $BC$ maximiza a Função Objetivo $f(x, y) = 8x + 4y$ e seu valor máximo é $f(x_0, y_0) = 20$ .

**Resolução por Exaustão do Enunciado 3.3**

Substituindo os sinais de desigualdade pelos sinais de igualdade, temos as equações
$x + 3y = 5,$
$2x + y = 5,$
$x = 0,$
$y = 0.$

Assim, seguem os seis sistemas de equações com suas respectivas soluções

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Longrightarrow S_1 = (2, 1),$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_2 = \left(0, \frac{5}{3}\right),$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_3 = (5, 0),$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_4 = (0, 5),$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_5 = \left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_6 = (0, 0).$$

Aplicando a Função Objetivo nas soluções dos sistemas, temos
$f(S_1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20,$
$f(S_2) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{20}{3},$
$f(S_3) = 8 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 40,$
$f(S_4) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 20,$
$f(S_5) = 8 \cdot \dfrac{5}{2} + 4 \cdot 0 = 20,$
$f(S_6) = 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0.$

Perceba que o maior resultado que encontramos foi com o par ordenado $S_3 = (5, 0)$, porém, note que este par não obedece a restrição $2x + y \leq 5$, pois $2 \cdot 5 + 0 = 10 > 5$.

Note que temos três pares ordenados com resultados iguais, porém o par ordenado $S_4 = (0, 5)$ não obedece a restrição $x + 3y \leq 5$, pois $0 + 3 \cdot 5 = 15 > 5$.

Assim, temos os pares ordenados $S_1 = (2, 1)$ e $S_5 = \left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ que são, respectivamente, os vértices $B = (2, 1)$ e $C = \left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ encontrados na resolução gráfica.

Uma observação pode ser feita aos alunos nessas situações onde encontramos duas soluções ótimas $S_1$ e $S_2$ na resolução por exaustão. Explicamos que neste caso há infinitas soluções de tal forma que, tomando uma solução $P$ utilizamos a combinação linear para obtermos as outras soluções. Neste caso, a combinação linear é dada por

$P = \alpha S_1 + (1 - \alpha) S_2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e os vértices $B$ e $C$ da resolução gráfica temos

$$P = \alpha B + (1 - \alpha) C$$

$$P = \frac{1}{2}(2, 1) + (1 - \frac{1}{2}) \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$P = \left(2 \cdot \frac{1}{2}, 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}, 0 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$P = \left(1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

$$P = \left(1 + \frac{5}{4}, \frac{1}{2} + 0\right)$$

$$P = \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

O par ordenado $P$ possui as mesmas coordenadas de $D$ da resolução gráfica.

Portanto, qualquer ponto $P = (x_0, y_0)$ oriundo da combinação linear entre $B$ e $C$ maximiza a Função Objetivo $f(x, y) = 8x + 4y$ e seu valor máximo é $f(x_0, y_0) = 20$.

### Resolução Pelo *Solver* do Enunciado 3.3

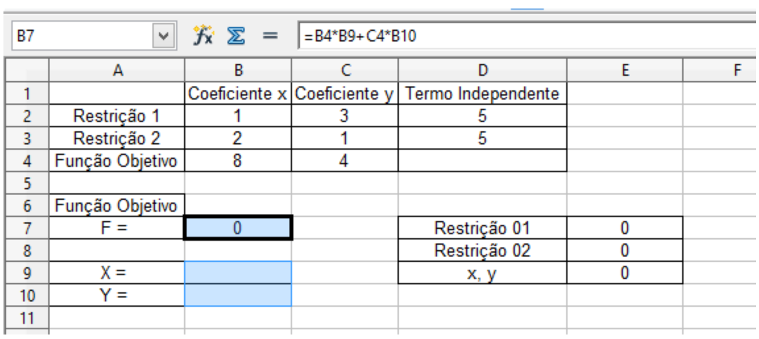
Utilizando o tutorial do *Solver*, construímos uma tabela com as informações do problema, além da Função Objetivo e das restrições. Como mostra a Figura 3.21.

$$\text{maximizar } f(x, y) = 8x + 4y \tag{3.11}$$

$$\text{sujeito a } x + 3y \leq 5 \tag{3.12}$$

$$2x + y \leq 5 \tag{3.13}$$

$$x,\ y \geq 0. \tag{3.14}$$


B7 =B4*B9+C4*B10

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente x | Coeficiente y | Termo Independente | | |
| 2 | Restrição 1 | 1 | 3 | 5 | | |
| 3 | Restrição 2 | 2 | 1 | 5 | | |
| 4 | Função Objetivo | 8 | 4 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Função Objetivo | | | | | |
| 7 | F = | 0 | | Restrição 01 | 0 | |
| 8 | | | | Restrição 02 | 0 | |
| 9 | X = | | | x, y | 0 | |
| 10 | Y = | | | | | |
| 11 | | | | | | |

Figura 3.21: Tabela com as informações do problema.

1. Abrimos o *OpenOffice Calc* e colocamos as seguintes informações.

(a) Na célula **B7** escrevemos a fórmula "=B4*B9+C4*B10", esta célula se refere a Função Objetivo (3.11), ela mostrará o valor máximo da Função Objetivo após a resolução pelo *Solver*;

(b) Na célula **E7** escrevemos a fórmula "=B2*B9+C2*B10", esta célula contém a restrição (3.12);

(c) Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B3*B9+C3*B10", esta célula contém a restrição (3.13);

(d) Na célula **E9** escrevemos o valor 0, pois esta célula contém a restrição (3.14) $x, \quad y \quad \geq 0$;

(e) As células **B9** e **B10** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

2. Abrimos o *Solver* e colocamos as informações mostradas na Figura 3.22.

   (a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B7**, pois esta célula possui a Função Objetivo (3.11);

   (b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Máximo*;

   (c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B9** e **B10**, pois estas são nossas variáveis $x$ e $y$;

   (d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos;

      i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E7**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (3.12);

      ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* "$<=$"e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (3.13);

      iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B9**, com o *Operador* "$>=$"e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (3.14) para a variável $x$;

iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B10**, com o *Operador* “$>=$”e em *Valor* selecionamos a célula **E9**, para termos a restrição (3.14) para a variável $y$.

3. Clique em *Resolver*.

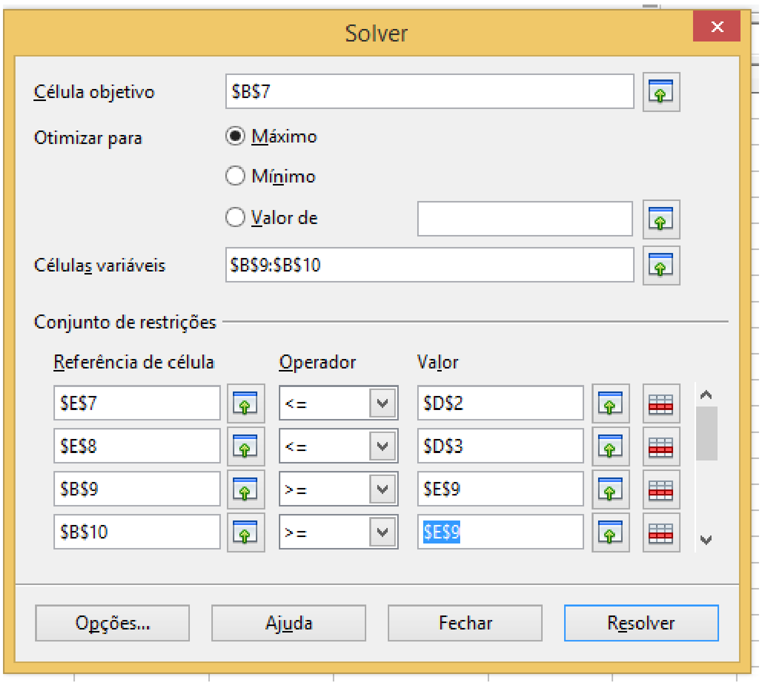
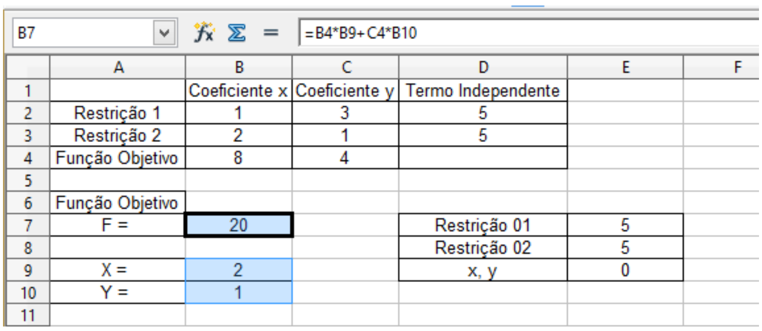



Figura 3.22: *Solver* com as informações do problema.

Vemos que as células **B9** e **B10**, possuem os resultados encontrados na resolução gráfica e na resolução por exaustão, porém mostra apenas o valor de um dos vértices, no caso o vértice $B = (2, 1)$. Como mostra a Figura 3.23.


B7 =B4*B9+C4*B10

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente x | Coeficiente y | Termo Independente | | |
| 2 | Restrição 1 | 1 | 3 | 5 | | |
| 3 | Restrição 2 | 2 | 1 | 5 | | |
| 4 | Função Objetivo | 8 | 4 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | Função Objetivo | | | | | |
| 7 | F = | 20 | | Restrição 01 | 5 | |
| 8 | | | | Restrição 02 | 5 | |
| 9 | X = | 2 | | x, y | 0 | |
| 10 | Y = | 1 | | | | |
| 11 | | | | | | |

Figura 3.23: Resultados do problema.

O *Solver* nos mostra as limitações da ferramenta tecnológica para a resolução de um Problema de Programação Linear, mas como verificamos na resolução gráfica e na resolução por exaustão, há infinitas soluções $P = (x_0, y_0)$ que maximizam a nossa Função Objetivo $f(x, y) = 8x+4y$. E o valor máximo que a Função Objetivo tem é $f(x_0, y_0) = 20$.

**Enunciado 3.4.** *Otimize o Problema de Programação Linear*

$$\begin{array}{lc} \text{minimizar} & f(x,y) = x + y \\ & 2x + 2y \leq 7 \\ \text{sujeito a} & x + 3y \geq 12 \\ & 2x + 3y \geq 15 \\ & x,\ y \geq 0. \end{array}$$

**Resolução Gráfica do Enunciado 3.4**

Nesta situação temos um caso em que através da construção das restrições no plano cartesiano não há uma região viável, como mostra a Figura 3.24. Portanto, o problema não tem solução.

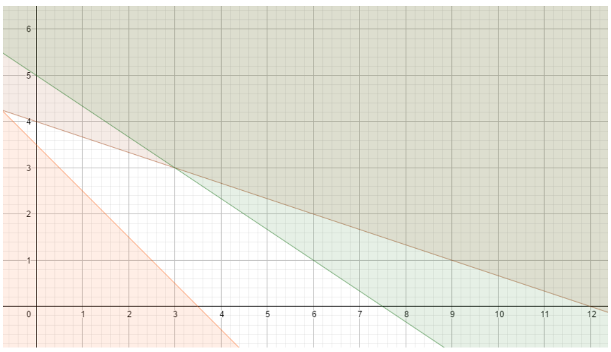



Figura 3.24: Restrições no espaço $\mathbb{R}^2$.

**Resolução por Exaustão do Enunciado 3.4**

Substituindo os sinais de desigualdade pelos sinais de igualdade, temos as equações

$2x + 2y = 7$,

$x + 3y = 12$,

$2x + 3y = 15$,

$x = 0$,

$y = 0$.

Assim, seguem os dez sistemas de equações com suas respectivas soluções

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ x + 3y = 12 \end{cases} \Longrightarrow S_1 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{4}\right),$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Longrightarrow S_2 = \left(-\frac{9}{2}, 8\right),$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_3 = \left(0, \frac{7}{2}\right),$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_4 = \left(\frac{7}{2}, 0\right),$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Longrightarrow S_5 = (3, 3),$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_6 = (0, 4),$$

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_7 = (12, 0),$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_8 = (0, 5),$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_9 = \left(\frac{15}{2}, 0\right),$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_{10} = (0, 0).$$

As soluções $S_1$ e $S_2$ são inviáveis pois $x < 0$.

A solução $S_3$ é inviável pois $0 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} < 12$ e $2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} < 15$.

A solução $S_4$ é inviável pois $\frac{7}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{7}{2} < 12$ e $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot 0 = 7 < 15$.

A solução $S_5$ é inviável pois $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 9 > 7$.

A solução $S_6$ é inviável pois $2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 < 15$ e $2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 > 7$.

A solução $S_7$ é inviável pois $2 \cdot 12 + 2 \cdot 0 = 24 > 7$.

A solução $S_8$ é inviável pois $2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 > 7$.

A solução $S_9$ é inviável pois $\frac{15}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{15}{2} < 12$ e $2 \cdot \frac{15}{2} + 2 \cdot 0 = 15 > 7$.

A solução $S_{10}$ é inviável pois $0 + 3 \cdot 0 < 12$ e $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 15$.

Como nenhuma das soluções dos sistemas de equações respeita a todas as restrições, o problema não tem solução.

### Resolução Pelo *Solver* do Enunciado 3.4

Utilizando o tutorial do *Solver* construímos uma tabela com as informações do problema, além da Função Objetivo e das restrições. Como mostra a Figura 3.25.

$$\text{minimizar } f(x, y) = x + y \tag{3.15}$$

$$\text{sujeito a } \quad 2x + 2y \leq 7 \tag{3.16}$$

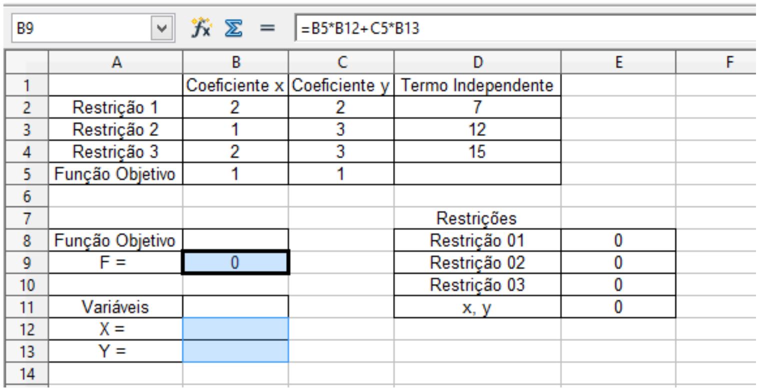
$$x + 3y \geq 12 \tag{3.17}$$

$$2x + 3y \geq 15 \tag{3.18}$$

$$x,\ y \geq 0. \tag{3.19}$$

1. Abrimos o *OpenOffice Calc* e colocamos as seguintes informações.

   (a) Na célula **B9** escrevemos a fórmula "=B5*B12+C5*B13", esta célula contém a Função Objetivo (3.15), ela mostrará o valor mínimo da Função Objetivo após a resolução pelo *Solver*;



B9 =B5*B12+C5*B13

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente x | Coeficiente y | Termo Independente | | |
| 2 | Restrição 1 | 2 | 2 | 7 | | |
| 3 | Restrição 2 | 1 | 3 | 12 | | |
| 4 | Restrição 3 | 2 | 3 | 15 | | |
| 5 | Função Objetivo | 1 | 1 | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | Restrições | | |
| 8 | Função Objetivo | | | Restrição 01 | 0 | |
| 9 | F = | 0 | | Restrição 02 | 0 | |
| 10 | | | | Restrição 03 | 0 | |
| 11 | Variáveis | | | x, y | 0 | |
| 12 | X = | | | | | |
| 13 | Y = | | | | | |
| 14 | | | | | | |

Figura 3.25: Tabela com as informações do problema.

(b) Na célula **E8** escrevemos a fórmula "=B2*B12+C2*B13", esta célula contém a restrição (3.16);

(c) Na célula **E9** escrevemos a fórmula "=B3*B12+C3*B13", esta célula contém a restrição (3.17);

(d) Na célula **E10** escrevemos a fórmula "=B4*B12+C4*B13", esta célula contém a restrição (3.18);

(e) Na célula **E11** escrevemos o valor zero, pois esta célula contém a restrição (3.19) $x, \quad y \quad \geq 0$;

(f) As células **B12** e **B13** mostrarão os resultados das variáveis após a resolução pelo *Solver*.

2. Abrimos o *Solver* e colocamos as informações mostradas na Figura 3.26.

(a) Em *Célula objetivo*, selecionamos a célula **B9**, pois esta célula possui a Função Objetivo (3.15);

(b) Em *Otimizar para*, selecionamos *Mínimo*;

(c) Em *Células variáveis*, selecionamos as células **B12** e **B13**, pois estas são nossas variáveis $x$ e $y$;

(d) Em *Conjunto de restrições*, selecionamos;

i. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* “< =”e em *Valor* selecionamos a célula **D2**, para termos a restrição (3.16);

ii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E9**, com o *Operador* “> =”e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (3.17);

iii. Em *Referência de célula*, selecione a célula **E8**, com o *Operador* “< =”e em *Valor* selecionamos a célula **D3**, para termos a restrição (3.18);

iv. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B12**, com o *Operador* “> =”e em *Valor* selecionamos a célula **E11**, para termos a restrição (3.19) para a variável $x$;

v. Em *Referência de célula*, selecione a célula **B13**, com o *Operador* “> =”e em *Valor* selecionamos a célula **E11**, para termos a restrição (3.19) para a variável $y$.

3. Clique em *Resolver*.

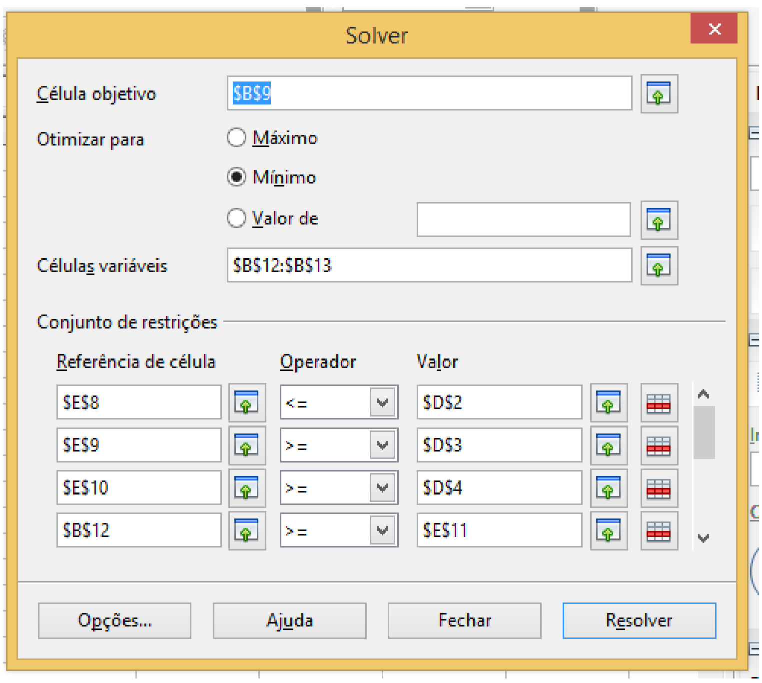
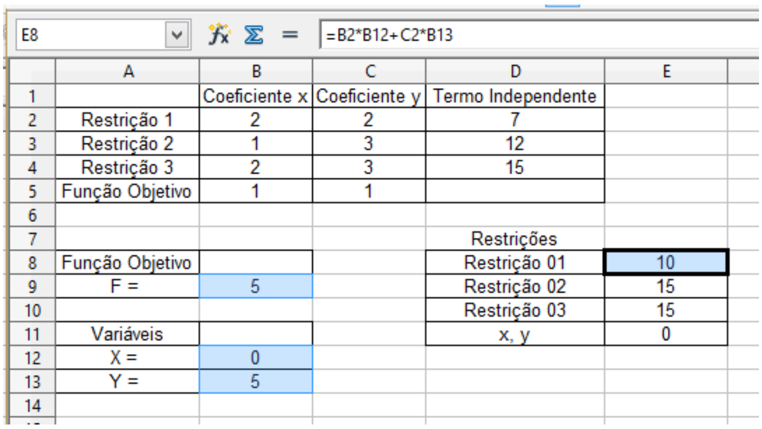



Figura 3.26: Solver com as informações do problema.

Vemos que as células **B12** e **B13**, mostram um dos resultados encontrados na resolução por exaustão $S_8 = (0, 5)$. Como mostra a Figura 3.27.



E8 =B2*B12+C2*B13

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Coeficiente x | Coeficiente y | Termo Independente | |
| 2 | Restrição 1 | 2 | 2 | 7 | |
| 3 | Restrição 2 | 1 | 3 | 12 | |
| 4 | Restrição 3 | 2 | 3 | 15 | |
| 5 | Função Objetivo | 1 | 1 | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | | | | Restrições | |
| 8 | Função Objetivo | | | Restrição 01 | 10 |
| 9 | F = | 5 | | Restrição 02 | 15 |
| 10 | | | | Restrição 03 | 15 |
| 11 | Variáveis | | | x, y | 0 |
| 12 | X = | 0 | | | |
| 13 | Y = | 5 | | | |
| 14 | | | | | |

Figura 3.27: Resultados do problema.

O *Solver* nos apresentou um resultado, porém comparando os resultados da célula **E8** com a célula **D2** temos uma divergência da restrição do problema, observe a Restrição (3.16).

$S_8 = (0, 5) \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10 > 7.$

Este resultado obtido pelo *Solver* esta incorreto, possivelmente o erro se deu pelo motivo dos parâmetros pré definidos no *Solver*. Isto mostra a importância de não nos fiarmos sempre aos resultados apresentados pelas ferramentas tecnológicas. Devemos analisar de maneira crítica o que a solução do problema nos mostra e por situações assim o ideal é termos mais de um método para a resolução de Problemas de Programação Linear.

# Considerações Finais

Observamos que a Programação Linear é uma ótima ferramenta que pode ser utilizada com a finalidade de referendar os conteúdos de sistemas de equações e inequações, a fim de contextualizar estas matérias do ensino médio, algo que sempre é pedido aos professores. O tema abordado neste trabalho, é uma das formas de explicar algumas situações com as quais podemos trabalhar os assuntos abordados na escola juntamente com os Problemas de Programação Linear, que é trabalhado no meio acadêmico.

Deste modo, propomos um meio de propiciar aos alunos os Problemas de Programação Linear, uma ideia que é proposta no livro didático [2], porém pouco aprofundada. No entanto, vemos que há a possibilidade do tema ser abordado, apesar de que, a carga horária para introdução de Problemas de Programação Linear no ensino médio é uma barreira com a qual devemos nos ater. Mesmo que não seja abordado, por exemplo, o Método *Simplex*, observamos que é necessário tempo para introduzir o tema proposto.

Entretanto, independente das limitações, vemos com otimismo adotar a Programação Linear, principalmente utilizando o *Solver*, como um instrumento para abordar e aproximar um conteúdo restrito à academia aos estudantes.

Desejamos assim que esta produção tenha evidenciado uma maneira de unir a Programação Linear ao ensino médio.

# Referências Bibliográficas


[1] LEONARDO, F. M., et al. *Conexões com a Matemática - 1 Ensino Médio*. Editora Moderna, São Paulo, 2016.

[2] LEONARDO, F. M., et al. *Conexões com a Matemática - 2 Ensino Médio*. Editora Moderna, São Paulo, 2016.

[3] CROCOLI, Osmar. *Programação Linear: Uma Abordagem Para o Ensino Médio.* Universidade Estadual de Maringá, 2016.

[4] MACULAN, Nelson., FAMPA, Marcia. H. C. *Otimização Linear.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

[5] LOPES, André L. M. *Otimização Linear: Conceitos e Aplicação nas Aulas de Matemática para o Ensino Médio.* Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2017.

[6] DE SALLES NETO, Luiz L. *Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio.* Polo Universitário do Sul Fluminense - UFF, 2006.

[7] PASSOS, Adão N. P. *Estudos em Programação Linear.* Universidade Estadual de Campinas, 2009.

[8] DORNELLES FILHO, Adalberto A. *Montando uma dieta com sistemas lineares.* Revista do Professor de Matemática, nº 59, 2006.

[9] LIMA, Elon. L. *Números e Funções Reais.* 1 ed., SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[10] HEFEZ, A., FERNANDEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2 ed., SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[11] GOLDBARG, Marco C. *Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos.* 2 ed., Elsevier, Rio de Janeiro, 2005.

[12] DE LYRA, M. S., QUEIROZ, T. A. *Programação Linear: Uma Contextualização a partir de Sistemas Lineares.* Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM - Universidade Federal de Goiás - Pólo Catalão, 2015.

[13] SILVA, Gilmara A. *Programação Linear: uma possibilidade para o Ensino Médio.* Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho.

[14] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.* MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 2017.

[15] VON ZUBEN, Fernando J. *Tópico 1 - Fundamentos Básicos de Álgebra Linear e Otimização.* Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas, 2003.

[16] LEAL, Priscila C. *Um Estudo Sobre Otimização de Funções Reais de Várias Variáveis: Teoria e Aplicações.* USP, São Carlos, 2017.

[17] DE LIMA, José D. *Apostila de Cálculo II.* UTFPR.

[18] HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional. Tradução: Ariovaldo Griesi; Revisão Técnica: João Chang Júnior.* McGraw-Hill, São Paulo, 2006.

[19] FERREIRA, Rodrigo M. *Maximizando Lucros e Minimizando Perdas: Tópicos de Programação Linear com Aplicações e Perspectivas Para o Ensino.* UTFPR, Curitiba, 2017.

[20] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* MEC/SEF, Brasília, 1997.

[21] BERTONI, Ana M. A.; BASSANEZI, Rodney C.; JAFELICE, Rosana S. M. *Modelagem Matemática.* Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.

[22] MARINS, Fernando A. S. *Introdução à Pesquisa Operacional.* Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2011.