Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

LISIANE CRISTINA AMPLATZ

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

CASCAVEL
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

LISIANE CRISTINA AMPLATZ

CASCAVEL – PR

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

LISIANE CRISTINA AMPLATZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Dra. Veridiana Rezende

CASCAVEL – PR

2020

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Amplatz, Lisiane Cristina
O estudo da função afim a partir da interpretação global de propriedades figurais : uma investigação com estudantes do Ensino Médio / Lisiane Cristina Amplatz; orientador(a), Veridiana Rezende, 2020.
207 f.

Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2020.

1. Ensino de Matemática. 2. Função Afim. 3. Smartphone. 4. Formação de Docentes. I. Rezende, Veridiana. II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LISIANE CRISTINA AMPLATZ

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO.

Esta dissertação foi aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Nível de Mestrado e Doutorado, área de Concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE.

Veridiana Rezende

____
Professora Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) Orientadora

Por videoconferência

____
Professor Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - (UNIOESTE)/(UTFPR)
Membro Efetivo da Instituição

Por videoconferência

____
Professora Dra. Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Membro Convidado

Por videoconferência

____
Professora Dra. Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Membro Convidado

Cascavel, 08 de setembro de 2020

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE LISIANE CRISTINA AMPLATZ, ALUNA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ - UNIOESTE, E DE ACORDO COM A RESOLUÇÃO DO PROGRAMA E O REGIMENTO GERAL DA UNIOESTE.

Ao(s) 8 dia(s) do mês de setembro de 2020 às 14h00min, de modo remoto, síncrono e por videoconferência, realizou-se a sessão pública da Defesa de Dissertação da candidata Lisiane Cristina Amplatz, aluna do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - nível de Mestrado, na área de concentração em Educação em Ciências e Educação Matemática. A comissão examinadora da Defesa Pública foi aprovada pelo Colegiado do Programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Integraram a referida Comissão os Professores Doutores: Veridiana Rezende, Mariana Moran, Rodolfo Eduardo Vertuan e Claudete Cargnin. Os trabalhos foram presididos pela professora Veridiana Rezende. Tendo satisfeito todos os requisitos exigidos pela legislação em vigor, a aluna foi admitida à Defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, intitulada: "O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO". A Senhora Presidente declarou abertos os trabalhos, e em seguida, convidou o(a) candidato(a) a discorrer, em linhas gerais, sobre o conteúdo da Dissertação. Feita a explanação, o(a) candidato(a) foi arguido(a) sucessivamente, pelos(as) professores(as) doutores(as): Mariana Moran, Rodolfo Eduardo Vertuan e Claudete Cargnin. Findas as arguições, o(a) Senhor(a) Presidente suspendeu os trabalhos da sessão pública, a fim de que, em sessão secreta, a Comissão expressasse o seu julgamento sobre a Dissertação.

Veridiana Rezende

Orientadora - Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PPGECEM

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE LISIANE CRISTINA AMPLATZ, ALUNA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ - UNIOESTE, E DE ACORDO COM A RESOLUÇÃO DO PROGRAMA E O REGIMENTO GERAL DA UNIOESTE.

Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

LAmplatz

Lisiane Cristina Amplatz
Aluna

Coordenador do Programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

DEDICATÓRIA

Ao meu amado esposo, Josué, companheiro em todos os momentos. Ao meu filho, Samuel, para que nunca desista dos seus sonhos.

Aos meus pais, Werner e Nelci (*in memorian*), por todo amor, incentivo e pelo alicerce construído.

AGRADECIMENTOS

A Deus, razão da minha existência e sabedoria, por me guiar em todas as etapas da minha vida.

Ao meu esposo, Josué, que sempre acreditou em mim e esteve ao meu lado em muitas situações. Ao meu filho, Samuel, por compreender a minha ausência durante tantos dias de estudo. As minhas irmãs, Marcia e Katia, e sobrinhos, Matheus e Thiago, por tornarem minha caminhada mais alegre. Amo todos vocês!

A professora Doutora Veridiana Rezende, por toda orientação durante esta trajetória, pela paciência dedicada, ensinamentos dados, discussões realizadas, apoio nos momentos de incerteza e por me proporcionar crescimento intelectual e profissional.

Aos professores Doutora Clélia Maria Nogueira Ignatius, Doutora Mariana Moran e Doutor Rodolfo Vertuan, pelas sugestões e colaborações, fundamentais para o enriquecimento desta pesquisa.

A todos os colegas da Turma de Mestrado e Doutorado PPGECEM – 2018, em especial, as amigas Francieli Antunes, Sibeli Pacheco e Tamires Calado, pela amizade construída, pelas risadas, viagens, desabafos, artigos escritos, incentivo e pelo apoio nos momentos de dificuldade. Vocês são demais!

A todos os membros do Grupo de Estudo GEPeDiMa, pelas contribuições em todas as discussões que enriqueceram este trabalho.

Aos meus queridos e queridas estudantes da turma do 1º Ano do Curso de Formação de Docentes - 2019 do Colégio Estadual Eron Domingues por terem sido os principais colaboradores deste trabalho. Obrigada pela parceria e por acreditarem que a Matemática pode ser diferente! Desejo sucesso a todos vocês!

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução deste trabalho.

AMPLATZ, Lisiane Cristina. **O Estudo da Função Afim a partir da Interpretação Global de Propriedades Figurais**: uma investigação com estudantes do Ensino Médio. 2020. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

RESUMO

A presente investigação foi fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, idealizada por Raymond Duval, o qual concebe que a aprendizagem de um conceito matemático ocorre principalmente a partir da articulação entre diferentes registros de representação semiótica. Uma das vertentes dessa teoria é a interpretação global de propriedades figurais, que diz respeito à articulação entre os registros simbólico algébrico e gráfico de uma função, com vistas a identificar as modificações nas variáveis visuais no registro gráfico e as suas respectivas unidades simbólicas no registro simbólico algébrico, e vice e versa. Sendo assim, a presente pesquisa objetivou *analisar a aprendizagem de estudantes sobre a função afim a partir de uma sequência didática relacionada à interpretação global de propriedades figurais*. Para tanto, com o suporte da Teoria das Situações Didáticas, e nos moldes da Engenharia Didática, foi elaborada uma sequência de atividades sobre função afim relacionada à interpretação global das propriedades figurais. Tal sequência contemplou a realização de um experimento, a resolução de problemas, aspectos da investigação matemática e o uso dos aplicativos *Desmos* e *GeoGebra* (*Graphing Calc*) para *smartphones*. A pesquisa foi desenvolvida com uma turma de estudantes do 1º Ano do curso de Formação de Docentes, de um colégio público do interior do Paraná. As análises mostraram que os participantes da pesquisa passaram a reconhecer a função afim em diferentes registros de representação e a transitar entre eles, além de manifestarem o desenvolvimento de uma visão integrada entre as variáveis visuais de representação no registro gráfico e as suas respectivas unidades simbólicas significativas no registro simbólico algébrico.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Função Afim; Registros de Representação Semiótica; Smartphone; Formação de Docentes.

AMPLATZ, Lisiane Cristina. **The Study of the Linear Function from the Global Interpretation of the Properties of Images**: an investigation with High School students. 2020. 207 s. Dissertation (Master in Science Educacion and Mathematics Education) – Graduate Program in Science Educacion and Mathematics Education, State University of Western Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

ABSTRACT

The present investigation was based on Theory of Semiotic Representation Registers, idealized by Raymond Duval, which conceive that the learning of a math concept happens mainly from the articulation between differents semiotic representations registers. One of the aspects of this theory is the global interpretation of the properties of images that concerns articulating between register algebraic symbolic and graphic of a function, in order to identify the modifications on visual variables on the graphic register and their respectively symbolic units on algebraic symbolic register. Thus, the present research had the objective to analyze the students learning about linear function from didactic studies in relation to the global interpretation of the properties of images. Therefore, with the support of the Theory of Didactical Situations, and along the lines of Didactic Engineering, it was developed a linear function didactic studies related to global interpretation of the properties of images. This studies included the realization of an experiment, the problem solving, aspects of mathematical investigation and the use of *Desmos* and *GeoGebra* (*Graphing Calc*) applicants to smartphones. This research was developed by students form the 1st Teachers Training course class, in a public school in Paraná. The analyses showed that the research students started to recognize the linear function between differents representations registers and to transit between them, besides manifesting the development of a integrated vision between the visual variables of representation on the graphic register and their significant symbolic unit on the algebraic symbolic register.

Key-words: Math Learning; Linear Function; Semiotic Representation Registers; Smartphones; Teachers Training.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná
GEPeDiMa	Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática
LN	Língua Natural
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PPGECEM	Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
PRPGEM	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
RSN	Registro Simbólico Numérico
RSA	Registro Simbólico Algébrico
RGRA	Registro Gráfico
SEED	Secretaria de Estado da Educação do Paraná
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
UNIOESTE	Universidade Estadual do Oeste do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A motivação para a realização desta pesquisa se deu durante os 17 anos em que atuei[1] como professora de Matemática na Educação Básica na rede pública estadual de educação do Paraná, ao observar as diversas dificuldades que permeavam o processo de aprendizagem dos estudantes durante o trabalho com o conteúdo de função.

No ano de 2018, a partir do meu ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, iniciei a minha participação como membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa[2], que tem como principal intenção mapear o campo conceitual[3] da função afim. Por esse motivo, para agregar conhecimentos às pesquisas realizadas no âmbito do referido grupo de pesquisa, e também permear as dificuldades em relação a este conceito observadas em meus estudantes, optamos[4] por direcionar a presente investigação ao conceito de função afim.

Ao realizar uma busca avançada pelas palavras-chave função afim ou função polinomial de 1º grau, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD[5] nos títulos e resumos dos trabalhos, encontrei pesquisas acadêmicas (SANTOS, 2002; SCANO, 2009; REIS, 2011; QUEIROZ, 2014; SELINGARDI, 2015; TOZO, 2016; ROMANELLO, 2016; GOMES, 2017) que corroboravam com as minhas observações realizadas enquanto docente. Tais pesquisas explicitam diferentes dificuldades apresentadas pelos estudantes durante o processo de aprendizagem da função afim, entre elas: dificuldades em interpretar situações que envolvem expressões algébricas ou em generalizar um problema; diferenciar os significados de equação e de função;

---

[1] Optei por escrever o texto da introdução na primeira pessoa do singular, porque alguns trechos se referem às minhas impressões e experiência profissional. A partir do primeiro capítulo, o texto está escrito na primeira pessoa do plural, pois diz respeito à pesquisa como um todo, na qual contei com o auxílio da orientadora desta dissertação.
[2] Informações do grupo no site https://prpgem.wixsite.com/gepedima.
[3] Um campo conceitual é um conjunto de situações, propriedades, teoremas, símbolos, representações, relações interligadas a um mesmo conceito (VERGNAUD, 1990).
[4] Ao utilizar a primeira pessoa do plural, refiro-me às decisões tomadas entre pesquisadora e orientadora desta pesquisa.
[5] http://bdtd.ibict.br.

interpretar gráficos de funções e identificar nestes a variação entre as grandezas; reconhecer que o gráfico de uma função afim é uma reta e relacionar os seus coeficientes às suas características (crescimento e decrescimento, por exemplo). Além disso, observei que diversos trabalhos acadêmicos (SANTOS, 2002; SCANO, 2009; REIS, 2011; QUEIROZ, 2014; GOMES, 2017) enfatizam a importância da utilização de *diferentes formas de representação para a compreensão de um conceito*, neste caso, da função afim.

A respeito das diferentes representações para a compreensão de um conceito, Duval (2003; 2009) salienta que as representações semióticas são indispensáveis para o desenvolvimento da atividade matemática, uma vez que, para este pesquisador, o acesso aos objetos matemáticos só ocorre por meio de suas representações. Além de considerar os quatro grandes tipos de registros em matemática, a saber, Língua Natural, Simbólico (numérico e algébrico), Gráfico e Figural, Duval (2011b) também enfatiza a importância do trânsito entre eles, que consiste em transformações, como tratamentos e conversões[6], consideradas necessárias para que ocorra a compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Especificamente para o estudo da função afim, Duval (2011b; 2012) menciona que, para a compreensão desse conceito, especialmente a partir dos registros de representação simbólico algébrico e gráfico, é necessária uma abordagem de *interpretação global de propriedades figurais* que permite ao estudante associar as variáveis visuais de representação no registro gráfico com as respectivas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica.

A respeito de pesquisas sobre a interpretação global de propriedades figurais específicas para a função afim, nossas buscas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES[7] e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, identificaram apenas uma pesquisa (SANTOS, 2002) que trata sobre o referido tema.

Sendo assim, e considerando que as diferentes representações semióticas são essenciais para o estabelecimento do campo conceitual da função afim, e considerando os interesses das pesquisas desenvolvidas pelos membros do GEPeDiMa, optamos por desenvolver a presente pesquisa com o propósito de

---

[6] Os tratamentos e conversões são conceitos estabelecidos por Duval e que são abordados no capítulo 2 desta dissertação.
[7] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses.

responder a seguinte questão: *quais as contribuições de um ensino baseado na interpretação global de propriedades figurais para a aprendizagem da função afim*? Para tanto, estabelecemos como objetivo geral desta investigação *analisar a aprendizagem de estudantes sobre a função afim a partir de uma sequência didática relacionada à interpretação global de propriedades figurais.*

Para responder a essa questão, elaboramos uma sequência didática, envolvendo o conceito de função afim e os elementos taxa de variação e coeficiente linear. Tal sequência contemplou atividades de cunho experimental, a resolução de problemas, aspectos da investigação matemática e o uso dos aplicativos *Desmos* e *GeoGebra* (*Graphing Calc*) para *smartphones,* tendo como foco a abordagem de interpretação global de propriedades figurais uma vez que, especialmente os aplicativos, permitem a visualização dos registros de representação simbólico algébrico e gráfico da função afim, simultaneamente. A sequência didática foi elaborada nos moldes da Engenharia Didática, cujas fases auxiliaram a organização e o desenvolvimento desta pesquisa. As atividades que compõem a sequência didática foram elaboradas a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2009; 2011b; 2012) e da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996), que também fundamentou a ação da pesquisadora em sala de aula.

Após a realização dos estudos preliminares relacionados a aspectos históricos, matemáticos, de documentos curriculares e de pesquisas associados ao conceito de função afim, e sobre a fundamentação teórica e metodológica desta pesquisa, elaboramos a sequência didática e suas análises *a priori*. A investigação ocorreu em ambiente de sala de aula, com uma turma de estudantes de 1º Ano de Ensino Médio do curso de Formação de Docentes, vinculada à rede pública estadual de educação. Após o desenvolvimento da sequência didática com os estudantes, realizamos as análises *a posteriori*, por meio da qual buscamos subsídios para responder à questão de pesquisa.

Salientamos que a escolha da turma de estudantes para aplicação da sequência didática se deu em virtude dos seguintes aspectos: 1) a pesquisadora é também a professora regular da turma escolhida[8]; 2) o tempo destinado à aplicação de acordo com a proposta dos conteúdos no plano de trabalho docente da professora/pesquisadora; e 3) a importância de um entendimento eficaz do conteúdo de função afim para futuros professores de Educação Infantil e Anos Inicias do Ensino Fundamental, pois entendemos, assim como Nogueira (2014), Pavan (2010) e BRASIL (2018), que ideias de função devem ser trabalhadas desde os anos inicias, de modo informal, para que as crianças possam construir uma aprendizagem fortalecida ao longo do processo escolar.

Sendo assim, o texto desta dissertação está estruturado em cinco capítulos. Na introdução explanamos sobre as motivações e caminhos trilhados que conduziram a formulação da pergunta norteadora e o objetivo geral deste trabalho. Também, apresentamos a justificativa e uma breve apresentação do contexto e procedimentos teórico e metodológico, bem como a organização da pesquisa.

O primeiro capítulo dedicamos aos estudos preliminares sobre a função afim, contemplando aspectos históricos e matemáticos, e a apresentação desse conceito em documentos curriculares (nacional e estadual). Além disso, contemplamos as pesquisas sobre este objeto de estudo, as quais serviram de base para o direcionamento desta pesquisa.

O referencial teórico e metodológico, no capítulo dois, serviu de embasamento durante todo desenvolvimento da pesquisa. Para isso, aprofundamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e também as discussões de Raymond Duval sobre o ensino da função afim, a partir da *abordagem de interpretação global* pertinente à teoria. Também, apresentamos aspectos da Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática, que respaldaram tanto a elaboração da sequência didática quanto a ação da pesquisadora em sala de aula.

No terceiro capítulo detalhamos as escolhas metodológicas da pesquisa, características gerais dos sujeitos e como se deu a coleta de informações. Apresentamos, ainda, as atividades que foram utilizadas no teste diagnóstico e os seus resultados.

[8] Quando utilizarmos o termo “pesquisadora” durante essa dissertação, estamos nos referindo à autora deste trabalho, a qual também era a docente da turma no momento da investigação.

As atividades da sequência didática, bem como a variável didática estabelecida para esta pesquisa, junto às análises *a priori*, estão no quarto capítulo. No capítulo 5 apresentamos as análises *a posteriori* de cada atividade que compõem a sequência didática. Ao final, apresentamos as considerações finais, discutindo os resultados obtidos e ideias para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 1

O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE PRELIMINAR

Neste capítulo apresentamos os estudos realizados sobre a função afim, no qual buscamos apresentar aspectos históricos e matemáticos desse conceito, bem como as orientações de documentos curriculares (nacional, estadual e o documento específico da escola em que esta pesquisa foi desenvolvida) para o ensino da função afim na Educação Básica. Finalizamos o capítulo com uma apresentação de pesquisas sobre função afim, que serviram de direcionamento para a realização desta dissertação.

1.1 Aspectos históricos de função

Função é um dos conceitos mais importantes na Matemática (FONSECA; SANTOS; NUNES, 2013). Indicativos de funções foram percebidos desde a época antiga e teve diferentes contribuições de cientistas e filósofos ao longo da história para se constituir como conceito matemático. Nogueira (2014) menciona que o conceito de função se originou de problemas práticos, como, por exemplo, no estudo das leis naturais, permitindo representar fenômenos móveis para explicar a realidade, tais como "[…] o movimento dos corpos, a vaporização da água, a germinação de uma semente […] fenômenos que relacionam 'causa-efeito', ou em linguagem matemática, a dependência entre variáveis" (NOGUEIRA, 2014, p. 1). Deste modo, a referida pesquisadora entende que este conceito dá mobilidade à Matemática.

Fonseca, Santos e Nunes (2013) apresentam o desenvolvimento do conceito de função a partir de três períodos históricos: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno. Segundo estes autores, os primeiros indicativos de função foram encontrados nos registros da civilização Babilônica, em suas tábuas sexagesimais, por volta do ano 2000 a.C. Estas tábuas continham, em forma de tabela, resultados de quadrados, de cubos, bem como raízes quadradas e cúbicas para valores de $n = 1, 2, \ldots, 30$. Foram utilizadas para compreender as efemeridades do Sol, da Lua e dos planetas, e revelam, de forma implícita, a ideia funcional de correspondência. Para Ciani, Nogueira e Berns (2019), nestes primeiros registros observa-se uma compreensão intuitiva para o conceito de função.

Durante o período da Idade Média, os estudos se voltaram para a compreensão de fenômenos naturais, como o calor, a distância e a velocidade, as quais envolviam variáveis dependentes e independentes. Neste contexto, destaca-se o Bispo Nicolau de Oresme (1323-1382), filósofo e matemático francês, que desenvolveu a teoria geométrica das latitudes e longitudes. Conforme Fonseca, Santos e Nunes (2013), Oresme representou gráfica e geometricamente a velocidade em função do tempo, a partir do estudo de um móvel com aceleração constante. Seu estudo trouxe contribuições importantes à representação gráfica de uma função, uma vez que, na sua construção geométrica, “[...] percebe-se a representação do gráfico de uma função afim, velocidade em relação ao tempo” (FONSECA; SANTOS; NUNES, 2013, p. 7).

A partir do final do século XVI, historicamente Período Moderno, outros nomes trouxeram contribuições para a construção do conceito de função. François Viète (1540-1603) foi o primeiro matemático a utilizar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Esta notação “[...] possibilitou, pela primeira vez, a representação de uma equação algébrica e de expressões envolvendo números desconhecidos, por meio de símbolos algébricos” (FONSECA; SANTOS; NUNES, 2013, p. 8). No entanto, foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês, que aperfeiçoou as ideias de Viète, convencionando que as primeiras letras do alfabeto deveriam representar as constantes e as últimas, as incógnitas. Além disso, foi ele quem introduziu a utilização de um sistema cartesiano para localizar pontos e representar graficamente equações. Ciani, Nogueira e Berns (2019) consideram que as ideias de Descartes estão mais próximas ao conceito atual de função “[...] ao estabelecer a interdependência entre os valores de um número x e qualquer potência de x, como x, x^2, x^3, o que este caracteriza como *matematização inicial*” (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 43).

Foi Gottfried Wilhein Leibniz (1646-1716), em 1694, que utilizou pela primeira vez o termo “função” para “[...] expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva” (EVES, 2004, p. 660). Porém, apenas em 1718 o termo função foi definido por Johann Bernoulli (1667-1748) como sendo “[...] a quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constante” (CARAÇA, 1951, p. 209). Esta definição foi utilizada durante muito tempo, mas, com o avanço das ciências, mostrou-se insuficiente. Então, Leonhard Euler (1707-1783), ex-aluno de Bernoulli, reapresentou, em 1750, a definição de função “[...] não exigindo que uma função fosse expressa por uma expressão analítica, mas podendo ser representada por uma curva, por exemplo” (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 44). A notação $f(x)$ para as funções, utilizadas até os dias atuais, foi contribuição de Euler.

Pires (2016) considera que a definição de função apresentada por Euler trouxe grande evolução. No entanto, retrata que novas discussões foram motivadas após o surgimento de controvérsias sobre este conceito, as quais envolveram alguns filósofos, como: Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783), cujas pesquisas contribuíram para as áreas da física matemática e análise matemática; Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que propôs que uma função deveria ser representada por uma série de potências; e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), o qual defendeu que toda função, num intervalo finito, poderia ser representada por uma série trigonométrica.

Assim, mais uma vez, a definição de função foi ampliada, agora por Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), que apresentou “[...] se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x” (EVES, 2004, p. 661). Para Pires (2016), este matemático definiu a função a partir de uma correspondência entre variáveis e, também, passou a ser compreendida como “[...] uma relação entre dois conjuntos, de modo que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente” (PIRES, 2016, p. 8).

A evolução do conceito de função ainda se deu pelos estudos de Georg Cantor (1845-1918) e pelo desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos. Cantor apresentou a definição para uma função a partir de pares ordenados de elementos, sejam eles números ou não. Além disso, observamos a contribuição de Nicolas Bourbaki, um pseudônimo dado por um grupo de jovens matemáticos da França, que tinha por objetivo repensar e organizar as definições da matemática conhecidas até o momento.

A partir de 1935, o grupo passou a publicar uma série de livros, sendo que, no primeiro volume, apresentou o conceito de função a partir da relação entre conjuntos numéricos e não numéricos, conforme o trecho a seguir.

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
> Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p. 6 *apud* PIRES, 2016, p. 10).

A partir deste breve panorama histórico, observamos que diferentes ideias, respaldadas no pensamento científico e filosófico, exerceram influência no caminho trilhado para a formulação do conceito de função que temos nos dias atuais. Além disso, Nogueira (2014) complementa que este conceito evoluiu a partir das próprias necessidades internas da matemática e “[...] atingiu o grau de generalidade atual” (NOGUEIRA, 2014, p. 15).

A seguir, apresentamos alguns aspectos matemáticos da função afim, conforme apresentados e considerados atualmente pela comunidade acadêmica de matemáticos e educadores matemáticos. Tais aspectos foram considerados para a realização desta investigação, especialmente no que diz respeito à elaboração e implementação da sequência didática proposta nesta pesquisa.

1.2 Aspectos matemáticos da função afim

A função afim é definida por Lima *et al*. (2016) como sendo uma função $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, com $a, b \in \mathcal{R}$, tais que $f(x) = a.x + b$ para todo $x \in \mathcal{R}$. O número a ou coeficiente a especifica a taxa de variação da função e o número b ou coeficiente b é denominado coeficiente linear da função, o qual, em algumas situações, pode ser chamado, também, de valor inicial da função, uma vez que $b = f(0)$ (LIMA *et al.*, 2016). Lima *et al*. (2016) apresentam a função identidade $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, f(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{R}$; as translações $f(x) = x + b$; as funções lineares $f(x) = a.x$ e as funções constantes $f(x) = b$, em que a e b são números reais, como casos particulares da função afim.

Miranda (2019) menciona a importância de compreender a taxa de variação a partir da relação entre as variáveis x e y, segundo a autora, graficamente, cada unidade de variação em x corresponde a uma variação de a unidades em y. Assim, a taxa de variação pode ser determinada a partir de dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ distintos, sendo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ e f uma função afim definida por $f(x) = a.x + b$, conforme a Figura 1. Sabendo que

$f(x_1) = a.x_1 + b$ e $f(x_2) = a.x_2 + b,$ a taxa de variação média é dada por

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}.$$

Miranda (2019) também menciona que, para a função afim, "[...] a taxa de variação média é sempre a mesma, por isso é denominada somente de taxa de variação da função" (MIRANDA, 2019, p. 32).

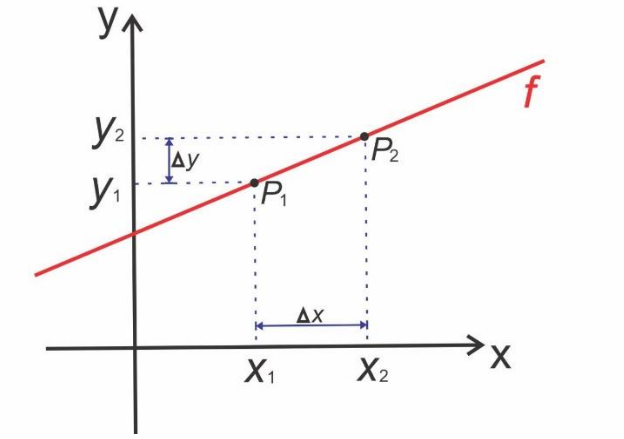


Figura 1: Gráfico de uma função afim para obter o valor do coeficiente a
Fonte: Autora

O gráfico de uma função afim é sempre uma linha reta (LIMA *et al*., 2016). Os autores provam esta afirmação demonstrando que três pontos quaisquer, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, com $x_1 < x_2 < x_3$; $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_3)$ e f uma função afim definida por $f(x) = a.x + b$, são colinerares. Para tanto, é suficiente verificar que a maior das três distâncias entre os pontos é igual à soma das outras duas distâncias, ou seja, $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$.

A partir da fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano dada por

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

obtemos:

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [f(x_3) - f(x_1)]^2}$$

$$d(P_1,P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(a.x_3 + b) - (a.x_1 + b)]^2}$$

$$d(P_1,P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2}$$

$$d(P_1,P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Analogamente, concluímos que $d(P_1,P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_2,P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$. Portanto, somando as duas distâncias obtemos:

$$d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3) =$$

$$(x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} =$$

$$(x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} =$$

$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1,P_3)$$

ou seja, dados quaisquer três pontos distintos que satisfazem uma função afim $f(x) = a.x + b$, se esses são colineares, então pertencem à mesma reta.

A partir destas considerações, Lima *et al*. (2016) afirmam que toda reta “[...] não vertical r é o gráfico de uma função afim” (LIMA *et al*., 2016, p. 94). Desta forma, na representação gráfica de uma função afim, o coeficiente a “[...] chama-se *a inclinação*, ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo horizontal *OX*)” (LIMA *et al*., 2016, p. 92) e “[...] b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f \to ax + b$, intersecta o eixo OY” (LIMA *et al*., 2016, p. 92). Neste tipo de representação gráfica, é possível visualizar o crescimento e decrescimento da função afim, uma vez que uma “[...] função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (dada pelo coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$” (LIMA *et al*., 2016, p. 91), como observamos na Figura 2 a seguir.

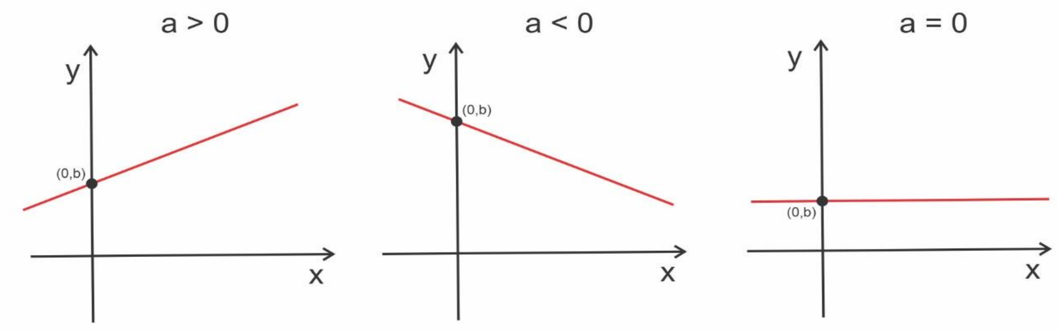


Figura 2: Gráficos da função afim para diferentes valores do coeficiente a
Fonte: Autora

O coeficiente a é o elemento da função afim que nos permite realizar previsões quanto às características do gráfico, tanto em relação ao seu crescimento ou decrescimento: “[...] quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente” (LIMA *et al*., 2016, p. 92), quanto em relação a sua posição: “[...] quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal” (LIMA *et al*., 2016, p. 92).

Lima *et al.* (2016) mencionam que “[...] não é adequado chamar o número a de *coeficiente angular* da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento)” (LIMA *et al*., 2016, p. 95). Segundo estes autores, o ângulo que o gráfico de uma função f faz com o eixo horizontal depende das unidades que foram escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Por isso, é correto dizer que uma função possui taxa de variação e uma reta possui coeficiente angular. Além disso, esses mesmos autores mencionam que função não possui grau. “O que possui grau é um polinômio'' (LIMA *et al*., 2016, p. 95). Ou seja, a terminologia função de primeiro grau não é adequada, a denominação correta é função afim.

Uma função linear, dada pela fórmula $f(x) = a.x$ cujo $a \in \mathcal{R}^*$, é um caso específico de função afim e está relacionada aos problemas de proporcionalidade. Lima *et al*. (2016) conceituam que “[...] duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número” (LIMA *et al.*, 2016, p. 96). Esta função caracteriza-se por ter o coeficiente linear nulo, ou seja, o gráfico deste tipo de função passa pela origem do plano cartesiano. O coeficiente a, neste caso, chamado de constante de proporcionalidade, pode ser determinado a partir de um ponto $P(x, y)$, sendo $y = f(x)$ e f uma função afim definida por $f(x) = a.x$, pertencente ao gráfico da função. Portanto, se $y = a.x$ então $a = \frac{y}{x}$, para $x \neq 0$.

A compreensão deste conceito pelos estudantes em fase escolar pode ser complexo e demorado. Campiteli e Campiteli (2006) argumentam que o ensino de funções, em geral, não tem sido adequado, pois as práticas metodológicas não enfatizam a matemática com a realidade. Ao contrário, as funções são introduzidas levando-se em consideração seus aspectos algébricos “[...] sem se levar em conta se os alunos estão ou não em condições de tirar proveito delas” (CAMPITELI;

CAMPITELI, 2006, p. 15). Para esses autores, ainda prevalece a ideia de que os estudantes precisam apenas aprender as técnicas e algoritmos e que a aplicação desses conhecimentos fica por conta própria, inclusive em outras disciplinas.

Dando continuidade aos estudos preliminares que deram base para a realização desta pesquisa, apresentamos, no tópico a seguir, aspectos sobre o ensino das funções, em especial da função afim, a partir de documentos curriculares nacionais e estaduais, que orientam a prática dos professores para o ensino deste conteúdo em sala de aula.

1.3 A função afim nos Documentos Curriculares

Propostas pedagógicas de ensino e aprendizagem vêm sendo discutidas pela comunidade de pesquisadores em Educação Matemática no Brasil, desde o final da década de 1980 e início dos anos 1990 (IGLIORI, 2004). A implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN (BRASIL, 2002) e, posteriormente, a delimitação das Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008), a construção da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) e atualmente o documento Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Fundamental (PARANÁ, 2018) fomentaram essas discussões em diferentes épocas e contextos com professores de Matemática.

Nesta seção apresentamos aspectos sobre a função afim na perspectiva dos documentos curriculares do Estado do Paraná, pois esta investigação foi realizada em um colégio vinculado à Secretaria de Educação do referido Estado. Para tanto, também recorremos ao estudo dos documentos curriculares específicos da instituição escolhida para a pesquisa, como o Projeto Político Pedagógico e a Proposta Pedagógica Curricular, a fim de que pudéssemos desenvolver uma sequência didática em conformidade aos referidos documentos.

O conteúdo de função afim é um dos temas das discussões entre professores de matemática e pesquisadores devido às diferentes dificuldades apresentadas pelos estudantes nos processos de ensino e aprendizagem. Os PCN para o Ensino Médio, após discussões ocorridas no final da década de 1990, já enfatizavam que o estudo das funções se faz importante, pois permite ao estudante

> [...] adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

Após as discussões entre os professores vinculados à Secretaria de Estado da Educação do Paraná, entre os anos de 2003 a 2008, fora implementado, a nível estadual, o documento das DCE, da disciplina de Matemática, cujo objetivo fora fundamentar o trabalho pedagógico nas comunidades escolares. Este documento enfatiza o ensino das funções na Educação Básica, pois elas

> [...] estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam matematicamente situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades. As Funções devem ser vistas como construção histórica e dinâmica, capaz de provocar mobilidade às explorações matemáticas, por conta da variabilidade e da possibilidade de análise do seu objeto de estudo e por sua atuação em outros conteúdos específicos da matemática (PARANÁ, 2008, p. 59).

Para tanto, no Ensino Fundamental, os estudantes devem “[...] conhecer as relações entre variável independente e dependente, os valores numéricos de uma função, a representação gráfica das funções afim e quadrática, observar a diferença entre função crescente e decrescente” (PARANÁ, 2008, p. 59) a partir da prática da resolução de problemas. O estudante, ao chegar no Ensino Médio, deve ampliar e aprofundar estes conhecimentos de modo que

> [...] consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. O estudo das Funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que favorece a compreensão do significado das variações das grandezas envolvidas (PARANÁ, 2008, p. 59).

Anos mais tarde, a partir da aprovação do documento normativo BNCC para a Educação Básica (BRASIL, 2018), que apresenta um conjunto progressivo de aprendizagens essenciais, que são os conhecimentos e competências a serem desenvolvidos ao longo da Educação Básica, reforçou-se a ideia de uma visão mais integrada da Matemática, aplicada à realidade e com outras áreas do conhecimento. Para isso, o documento enfatiza que os estudantes

> [...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 529).

A proposta da BNCC para o Ensino Médio é articular as competências gerais da Educação Básica com as da área da matemática do Ensino Fundamental, a fim de garantir o desenvolvimento das competências específicas para esta etapa de estudos e de indicar novas habilidades a serem alcançadas. A BNCC apresenta cinco competências específicas da matemática para o Ensino Médio, a saber:

> 1) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2) Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identifcando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Nestas competências específicas identificamos cinco habilidades que estão relacionadas à função afim, conforme apresentadas no Quadro 1.

Código BNCC	Etapa de Ensino	Anos	Compe-tência	Habilidade
EM13MAT101	Ensino Médio	1º ao 3º ano	1	1) "Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e de fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 533).
EM13MAT302	Ensino Médio	1º ao 3º ano	3	2) "Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º e 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 536).
EM13MAT401	Ensino Médio	1º ao 3º ano	4	3) "Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539).
EM13MAT501	Ensino Médio	1º ao 3º ano	5	4) "Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau" (BRASIL, 2018, p. 541).
EM13MAT507	Ensino Médio	1º ao 3º ano	5	5) "Identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 541).

Quadro 1: Habilidades referentes a função afim da BNCC para o Ensino Médio
FONTE: Autora com base em Brasil (2018)

As habilidades citadas no Quadro 1, relativas ao conceito da função afim, direta ou indiretamente, foram contempladas nas atividades da sequência didática desenvolvida para esta pesquisa. Procuramos elaborar problemas: A) contextualizados para que o estudante pudesse interpretar criticamente situações que envolviam a variação de grandezas, conforme a habilidade 1 do Quadro 1; B) que permitissem generalizações a partir de diferentes representações semióticas da função afim, conforme a habilidade 2 do Quadro 1; C) que levassem o estudante à conversão entre diferentes registros de representação pertinentes à função afim, de acordo com as habilidades 3 e 4 do Quadro 1; D) para estudar funções afim com domínios discretos, pois descrevem situações do cotidiano, pertinente à habilidade 5 do Quadro 1; e E) interpretar de forma global a função afim em seus registros de representação simbólico algébrico e gráfico.

O Estado do Paraná, tendo como suporte a BNCC (BRASIL, 2018), reorganizou os conteúdos escolares por série/ano no documento Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Fundamental (PARANÁ, 2018), no qual os estudantes, a partir do 9º ano, devem aprofundar o estudo da função afim tendo vistas para: a observação de regularidades para estabelecer leis matemáticas que expressam as relações de dependência; a compreensão do seu conceito, identificação de variáveis e lei de formação; a construção de tabelas que correspondam a uma função; reconhecer domínio e as funções constantes; representar gráficos da função afim em planos cartesianos com ou sem auxílio de tecnologias.

Outro documento que levamos em consideração para o desenvovimento desta pesquisa é a Proposta Pedagógica Curricular do curso de Formação de Docentes, inserida no Projeto Político Pedagógico da instituição de ensino escolhida para esta pesquisa. Tal documento orienta que o conteúdo de função afim seja trabalhado com estudantes do 1º Ano do Ensino Médio (PARANÁ, 2019). Assim, o Plano de Trabalho Docente da professora de matemática da turma de Formação de Docentes para o ano de 2019, e autora desta dissertação, abrange o estudo da função afim a partir do 2º trimestre do ano letivo, após contemplar o estudo dos números reais, medidas de informática e noções de funções (variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização; conceitos de domínio, contradomínio e imagem, construção e interpretação de gráficos de diferentes funções). Na continuidade do estudo da função afim, são contemplados os conteúdos de funções quadrática, exponencial e logarítmica.

A fim de que as dificuldades que permeiam o ensino da função afim possam ser minimizadas, a BNCC sugere que, no Ensino Médio, os estudantes possam desenvolver habilidades a partir "[...] de processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 529). Então, para desenvolver as competências e habilidades necessárias que garantam a aprendizagem dos conceitos, o documento enfatiza a ação de *representar* objetos matemáticos, ou seja, a utilização de registros de representação, pois é na área de Matemática que identificamos a "[...] importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas" (BRASIL, 2018, p. 529). Assim,

> [...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática [...] e ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2018, p. 529).

É neste contexto que a BNCC mostra a importância da utilização de diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático[9], fato que vai ao encontro das ideias da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, descrita no capítulo 2, que fundamenta o desenvolvimento desta pesquisa.

Apresentamos na próxima seção algumas pesquisas acadêmicas que tiveram como objeto de estudo a função afim, as quais também respaldaram a elaboração de nossa pesquisa.

1.4 Pesquisas acadêmicas sobre a função afim

Diversas pesquisas (SANTOS, 2002; SCANO, 2009; REIS, 2011, QUEIROZ, 2014; SELINGARDI, 2015; ROMANELLO, 2016; GOMES, 2017) apontam para a complexidade no estudo das funções, em especial da função afim, pois envolve diferentes conceitos, propriedades, símbolos e representações os quais implicam, na maioria dos casos, incompreensão por parte dos estudantes e até de alguns professores (BERNARDINO; GARCIA; REZENDE, 2019).

Santos (2002) justifica a sua pesquisa de mestrado a partir das suas observações realizadas ao longo dos anos como professor e menciona que seus estudantes sempre apresentaram dificuldades ao lidarem com a representação algébrica e gráfica da função afim, "[...] confundindo equação com função, não admitindo que ela pudesse ser representada por mais de uma sentença na sua forma algébrica, não compreendendo a conversão da sua representação gráfica para a algébrica" (SANTOS, 2002, p. 11), entre outras situações. Para atingir o objetivo da sua pesquisa, de estudar a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da equação $y = ax + b$, por meio da articulação entre os registros de representação

[9] A BNCC não faz referência explícita ao uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, mas enfatiza a importância do trabalho com as diferentes representações dos objetos matemáticos e o trânsito entre elas, tema abordado nesta pesquisa.

simbólico algébrico e gráfico, Santos (2002) desenvolveu uma sequência didática para o 2º ano do Ensino Médio, baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aplicada com auxílio do *software Funcplus* do tipo jogo, desenvolvido pelo próprio pesquisador. Em suas considerações, relata que houve evolução da compreensão dos estudantes participantes da pesquisa, referente à construção de significados dos coeficientes das representações algébrica e gráfica da função afim, a partir da perspectiva da interpretação global.

Scano (2009), assim como Santos (2002), enfatiza a dificuldade, inclusive de estudantes do 3º ano do Ensino Médio, na compreensão da função afim. O pesquisador, após analisar os resultados das provas do SARESP – Sistema de Avaliação de Rendimentos Escolar do Estado de São Paulo, nos anos de 2005 e 2007, destaca que poucos estudantes identificam a equação que representa uma reta a partir do seu gráfico ou reconhecem o seu gráfico dado a sua forma algébrica. Além disso, tendem a apresentar dificuldades em dar significado aos coeficientes de uma função afim. Para tanto, Scano (2009) desenvolveu uma sequência didática para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental para contribuir no desenvolvimento da capacidade de expressar, algébrica e graficamente, a dependência entre duas variáveis de uma função afim, mediada pelo uso do *software GeoGebra*.

Além das dificuldades indicadas por Santos (2002) e Scano (2009), Reis (2011) apresenta que os estudantes possuem dificuldades concernentes à passagem de problemas em língua natural para a linguagem algébrica, ou seja, na transcrição de problemas para suas respectivas generalizações. Reis (2011) salienta, em sua pesquisa de mestrado, que no ensino de funções ainda se privilegia a representação algébrica, como consta na maioria dos livros didáticos. Para o pesquisador, é necessário que o professor conduza o trabalho pedagógico no qual o estudante possa perpassar por diferentes representações, pois “[...] estimula a formulação de conjecturas e a coordenação de diversas representações de conceitos como a função afim. Desta forma, é possível que novas aprendizagens sejam construídas em uma sala de aula” (REIS, 2011, p. 22). Assim, Reis (2011) desenvolveu uma sequência didática diagnóstica sobre função afim para um 1º Ano de Ensino Médio e, posteriormente, outra sequência baseada nos erros dos estudantes cometidos na primeira, apoiado ao *software GeoGebra*, o qual apresentou, em suas análises, resultados positivos alusivos à compreensão dos estudantes sobre a função afim e reflexões para novos estudos.

As três pesquisas acadêmicas mencionadas anteriormente apresentam, em comum, o uso de *softwares* para computador como ferramentas auxiliares no processo de aprendizagem da função afim. Nesta perspectiva, destacamos, também, o trabalho de mestrado de Romanello (2016), cujo objetivo foi "[...] investigar o uso do aplicativo Matemática[10] para celulares inteligentes no desenvolvimento de conceitos de função em sala de aula" (ROMANELLO, 2016, p. 13). A pesquisadora, para responder a questão diretriz "[...] quais as potencialidades do uso do celular inteligente na sala de aula, quando conceitos de função são trabalhados?" (ROMANELLO, 2016, p. 16), desenvolveu atividades de cunho investigativo com o aplicativo *Matemática* para introduzir conceitos de função afim e quadrática, com estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental. Sua ideia principal foi explorar gráficos a fim de sistematizar tais conceitos, discutindo como os elementos pertinentes às expressões algébricas das funções interferem no seu comportamento gráfico.

Romanello (2016), fundamentada no Construcionismo de Papert, aponta resultados positivos de sua pesquisa, concernente aos conhecimentos de função afim. Ao longo da aplicação das atividades, os estudantes puderam concluir que: o gráfico de uma função afim $f(x) = a.x + b$, com $a, b \epsilon \mathcal{R}$, é sempre uma reta composta por infinitos pontos; há uma relação de dependência entre os valores de x e y no gráfico; há relações funcionais em dados dispostos em tabelas e que obedecem a uma lei de formação; as funções algébricas que apresentam soma ou subtração de um valor independente b, seus gráficos não passam pela origem; e quando os valores para o coeficiente a são positivos, então a reta é crescente, e quando são negativos, decrescente. Com base nestas considerações, a pesquisadora conclui que aplicativos para *smartphones* podem contribuir para a produção de conhecimento dos conceitos matemáticos, pois permitem "[…] que os alunos testem suas conjecturas à medida que são tomados pela curiosidade, incentivando a busca pelo conhecimento durante a aula" (ROMANELLO, 2016, p. 11).

[10] Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=de.daboapps.mathematics apenas para *smartphones* com sistema operacional *Android*.

Segundo Romanello e Maltempi (2016), os estudantes sentem-se motivados em trabalhar com objetos que fazem parte do seu cotidiano, dando a eles uma sensação de dinamicidade nas aulas. Além disso, os autores destacam a importância de "[...] apresentar aos alunos que o *smartphone* pode ir além da interação social, proporcionando mudanças no ensino" (ROMANELLO; MALTEMPI, 2016, p. 9), ou seja, há uma ruptura quando os estudantes percebem o *smartphone* também como uma ferramenta para a produção de conhecimento.

Queiroz (2014), em sua pesquisa de mestrado, elencou dificuldades dos estudantes em todos os níveis de ensino, após a sua observação enquanto docente em sala de aula. Para o pesquisador, essas dificuldades permeiam "[...] desde a elaboração de uma expressão algébrica, bem como argumentar sobre as características de uma representação gráfica, mesmo já tendo contato com esse conceito" (QUEIROZ, 2014, p. 21). Para tanto, propôs a realização de uma pesquisa que pudesse contribuir na aprendizagem do conceito de função, para estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da elaboração e aplicação de uma sequência didática que possibilitasse a mobilização de diferentes registros e conversões, bem como a articulação entre a álgebra com a geometria analítica. A pesquisa teve como aportes teóricos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Ao final, o pesquisador ressalta avanços dos estudantes envolvidos, uma vez que conseguiram "[...] observar a variação entre grandezas e a relação entre elas para construir diferentes estratégias de resolução, que só foram possíveis graças à mobilização de diferentes representações para o conceito matemático envolvido" (QUEIROZ, 2014, p. 21). Também, destaca que um ensino de função, a partir da articulação entre a álgebra e a geometria analítica, levou os estudantes a perceberem as relações entre as variáveis no registro tabular[11] e gráfico.

Ainda, identificamos a pesquisa de Selingardi (2015), a qual elenca, inicialmente, diversas dificuldades dos estudantes durante o processo de aprendizagem das funções, entre elas: problemas na interpretação de situações que envolvem expressões algébricas, dificuldade em determinar os valores para os

[11] A pesquisadora deste trabalho, junto a sua orientadora, considera que as tabelas no ensino de funções pertencem ao registro de representação simbólico numérico e, portanto, não fazemos uso do termo "registro tabular".

coeficientes de uma função afim e, consequentemente, apresentar a generalização de uma situação, não conseguem compreender o conceito de variável, confundem os significados de função frente a uma equação e não demonstram habilidades em interpretar e construir gráficos de funções no plano cartesiano. Com base nessas considerações, Selingardi (2015) desenvolveu uma sequência didática com atividades de cunho experimental da área de química, cujos problemas são modelados por funções afim. Durante a aplicação das atividades para uma turma de 1º ano do ensino médio, utilizou um *software* de planilha eletrônica para estudo de gráficos da função afim, a partir da plotagem de pontos. A pesquisadora apresenta em suas conclusões avanços dos estudantes quanto à compreensão da função afim frente à determinação das expressões algébricas expressas a partir de suas representações gráficas.

Gomes (2017) desenvolveu uma pesquisa, tendo como aporte teórico os Registros de Representação Semiótica, para investigar quais representações semióticas os estudantes possuem maior habilidade em converter e tratar no que diz respeito ao conceito de função. Para isso, desenvolveu e aplicou uma sequência didática, voltada para a resolução de problemas, em uma turma de 1º ano do ensino médio técnico. Após a análise da aplicação, constatou que

> [...] os alunos conseguem tratar a representação algébrica da função afim; [...] reconhecem a representação [...] (gráfica) da função afim; conseguem tratar a função afim através de sua representação na linguagem natural, mas apresentam problemas em converter para a representação algébrica, possuindo ainda maiores problemas para converter para a representação gráfica; possuem habilidades em tratar a função em sua representação tabular, mas não conseguem converter para a representação algébrica; não conseguem converter a representação gráfica para algébrica, mas alguns convertem para a representação tabular e, a partir daí, convertem para a representação algébrica (GOMES, 2017, p. 72).

Birgin (2012), PHD em Educação Matemática pela Universidade Técnica de Karadeniz, na Turquia, explica que a maioria destas dificuldades, como as citadas anteriormente pelos pesquisadores Santos (2002), Scano (2009), Reis (2011) e Queiroz (2014), provém do fato de que os estudantes não conseguem associar diferentes formas de representação das funções e, assim, podem não compreender estes conceitos de forma eficaz e global. Este autor ainda enfatiza que a compreensão do conceito de função em apenas um tipo de representação não garante o entendimento dos mesmos conceitos em um outro tipo de representação. Por isso destaca que os estudantes “[...] precisam ser capazes de compreender as informações presentes nos diferentes formatos e para executarem transições entre as várias representações[12]" (BIRGIN, 2012, p. 141, tradução nossa).

Segundo Pires (2016), os estudantes "[...] não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações de função: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos" (PIRES, 2016, p. 2). O autor aponta que estas dificuldades impedem o estudante de avançar na compreensão de novos conhecimentos. Essas dificuldades "[...] se constituem em elementos ligados a forma de idealizar um objeto no passado que impedem que o indivíduo avance no processo de concepção do conhecimento" (PIRES, 2016, p. 2).

De acordo com Damm (1999), em Matemática, a comunicação acontece a partir das representações dos objetos de estudo, sejam eles "[...] conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações" (DAMM, 1999, p. 135). Assim, é importante considerar, no ensino da Matemática, em seu rol de conteúdos, as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, pois "[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação" (DAMM, 1999, p. 137).

Por meio dos estudos das pesquisas mencionadas nessa seção, foi possível:

- confirmar, com respaldo científico, as dificuldades dos estudantes em relação à compreensão do conceito de função afim, tais como: reconhecer e dar significado à taxa de variação e coeficiente linear em diferentes registros de representação semiótica; diferenciar equação de 1º grau e função afim; generalizar situações dadas em língua natural; interpretar e construir gráficos de função afim. Essas dificuldades também foram observadas pela autora desta dissertação, em seus estudantes, no decorrer de 17 anos atuando como professora de Matemática na Educação Básica;
- identificar dificuldades específicas dos estudantes em realizar conversões (em ambos os sentidos) entre diferentes registros de representação semiótica da função afim, entre eles: registros simbólicos algébrico e numérico, registro gráfico e registro em língua natural;

[12] "[...] Students need to be able to understand information presented in these diferents formats and to perform transitions among the various representations" (BIRGIN, 2012, p. 141).

- notar que, embora algumas pesquisas (SCANO, 2009; REIS, 2011) sinalizem a importância do trabalho em sala de aula relativo à articulação entre os registros simbólico algébrico e gráfico da função afim, apenas a pesquisa de Santos (2002) trata especificamente da interpretação global das propriedades figurais para o conceito de função afim; e
- identificar que, embora algumas pesquisas (SANTOS, 2002; SCANO 2009; REIS, 2011; ROMANELLO 2016) façam uso de recusos tecnológicos para o ensino de função afim, não identificamos na literatura brasileira uma pesquisa específica sobre o uso de aplicativos para *smartphones* e o estudo da função afim por meio da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, proposta por Duval (2011), na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Por esses motivos elencados, justificamos que o desenvolvimento deste trabalho se difere das demais pesquisas apresentadas pelo fato de:

- considerar como instrumento de pesquisa uma sequência didática sobre o conceito de função afim, baseada na interpretação global de propriedades figurais, juntamente com a articulação entre os demais registros de representação semiótica (língua natural, gráfico, simbólico algébrico e numérico) e o uso de aplicativos para *smartphones*;
- a sequência didática elaborada teve a intenção principal de analisar a aprendizagem de estudantes sobre a função afim. Porém, é preciso considerar, também, as intenções didáticas da pesquisadora, ou seja, a partir da resolução das atividades propostas esperava-se que os estudantes pudessem compreender o conceito de função afim do ponto de vista de Duval (2011), considerando as diferentes conversões entre registros e, principalmente, a partir do estudo da interpretação global das propriedades figurais; e
- os sujeitos da pesquisa são estudantes do Curso de Formação Docentes – Modalidade Ensino Médio (nenhuma das pesquisas mencionadas tem como sujeitos estudantes desta modalidade de ensino) os quais, futuramente, poderão exercer a docência na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Os conhecimentos adquiridos pelos participantes desta pesquisa podem auxiliar e dar respaldo para suas ações docentes futuras, especialmente

para aqueles que irão atuar nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os quais podem se deparar com o trabalho em sala de aula com as ideias de função.

No capítulo seguinte apresentamos a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa, dentre as quais contemplamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aspectos da Teoria das Situações Didáticas e aspectos da Engenharia Didática.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Este capítulo tem por objetivo apresentar aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que fundamenta teoricamente esta pesquisa, bem como as discussões sobre o ensino da função afim sob a perspectiva desta teoria. Também, aspectos da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, a qual respalda as ações didáticas da pesquisadora tanto para a organização da sequência didática quanto para a organização do ambiente didático (sala de aula) em que a investigação foi desenvolvida. Ainda neste capítulo apresentamos aspectos da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa cujo objetivo é proporcionar suporte para a elaboração e análise de uma sequência didática aplicada em sala de aula, preocupando-se tanto com o conteúdo matemático quanto com os aspectos didáticos envolvidos nesta pesquisa.

2.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

No decorrer de suas pesquisas em psicologia cognitiva desde os anos de 1970, Raymond Duval salientou que não há estudo de fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer às representações, pois "[...] não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação" (DUVAL, 2009, p. 29). Em matemática, o autor destaca que as representações semióticas[13] são, além de indispensáveis para a comunicação, totalmente necessárias para o desenvolvimento da atividade matemática. Neste caso, segundo o autor, é importante não só considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, mas sobretudo o trânsito entre elas.

[13] Compreendemos que uma representação recobre um conjunto de imagens de um objeto, por exemplo, um desenho de uma cadeira é uma representação do objeto cadeira. Representação Semiótica "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (DUVAL, 2012, p. 269), por exemplo, uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma expressão algébrica ou um gráfico são representações semióticas em registros diferentes.

A noção de representação foi tomada como representação semiótica a partir dos estudos sobre a aquisição dos conhecimentos matemáticos e sobre os problemas que sua aprendizagem poderia originar. A especificidade das representações semióticas

> [...] consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e podem ser convertidas em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza (DUVAL, 2009, p. 32).

Atualmente, há uma maior exigência na formação dos estudantes, a fim de prepará-los para um mundo onde a tecnologia está cada vez mais complexa. Para tanto, Duval (2003) salienta a necessidade de uma abordagem cognitiva,

> [...] pois o objetivo do ensino de matemática, em formação inicial, não é formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2003, p. 11).

O autor menciona que a originalidade de uma abordagem cognitiva “[...] não está em partir dos erros para tentar determinar as concepções dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra” (DUVAL, 2003, p. 12), por exemplo, mas está em descrever o funcionamento cognitivo que permita o estudante “[...] compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino” (DUVAL, 2003, p. 12).

A atividade matemática do ponto de vista cognitivo de Duval (2003) deve pautar-se em duas características: 1) a importância das representações semióticas, as quais foram essenciais para a evolução do pensamento matemático, pois, primeiro, “[...] há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático [...] dependem do sistema de representação utilizado” (DUVAL, 2003, p. 13) e, segundo, que os objetos matemáticos “[...] não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (DUVAL, 2003, p. 14), ou seja, seu acesso está ligado diretamente à utilização de um sistema de representação; e 2) a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática apresentadas no Quadro 2 a seguir.

	REGISTROS DISCURSIVOS	REGISTROS NÃO DISCURSIVOS
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	**LÍNGUA NATURAL** - **As línguas.** Três operações incluídas: designação de objetos, enunciação e raciocínio. Modalidades de produção: oral e escrita.	**FIGURAL** - **Icônica**: produções à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. - **Configurações Geométricas**: figuras planas ou em perspectivas (dimensão 0, 1, 2 e 3). Três operações independentes: construção instrumental, divisão e reconfiguração e desconstrução dimensional das formas.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	**SIMBÓLICO** - **Escrita Simbólica:** sistema de numeração, escrita algébrica e línguas formais. Operações de substituições ilimitadas. Modalidade de produção: escrita.	**GRÁFICO** - **Gráficos Cartesianos.** Três operações: zoom, interpolação e mudança de eixos. - **Esquemas**.

Quadro 2: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático
Fonte: Autora com base em Duval (2003; 2011a)

Para Raymond Duval, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica há quatro grandes tipos de registro: Língua Natural, Simbólico, Gráfico e Figural, e estes classificam-se em discursivos e não discursivos. Duval (2011a) explica que os registros discursivos, língua natural (materna oral ou escrita) e simbólico, são aqueles cuja linearidade é fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização das expressões. Os registros não discursivos, figural e gráfico, trazem uma apreensão simultânea de uma organização bidimensional. No Quadro 2, apresentamos também, os tipos de transformações cabíveis, exclusivamente, a cada registro, pois cada "[...] um desses registros favorece um tipo de transformação das representações que os outros registros não permitem e que são as operações próprias desse registro" (DUVAL, 2011a, p. 117).

Duval (2003; 2011a) também classifica os registros em multifuncionais e monofuncionais. Os registros multifuncionais, língua natural e figural, cujas transformações não podem ser determinadas por um algoritmo, são aqueles utilizados fora da matemática e exercem "[...] funções de comunicação, de objetivação, e não primeiramente, ou mesmo raramente, para uma função de tratamento" (DUVAL, 2011a, p. 117). Os registros monofuncionais, simbólico e o gráfico, são próprios da matemática e suas transformações podem ser determinadas por algoritmos.

Moretti (2002), ao apresentar a teoria de Duval, argumenta sobre a importância do docente proporcionar aos estudantes meios de abranger a variedade de registros de representação. O autor cita três justificativas: 1) a economia de tratamento, ou seja, o estudante tendo conhecimento dos vários registros de representação pode discernir entre aquele que pode ser mais econômico e vantajoso durante a resolução de um problema; 2) a complementaridade dos registros, pois "[...] uma representação é parcial em relação àquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados" (MORETTI, 2002, p. 347); e 3) a conceitualização implica uma coordenação de diferentes registros de representação, ou seja, a diversificação das formas de representação de um mesmo objeto "[...] aumenta as capacidades cognitivas do sujeito e consequentemente potencializa as suas representações mentais" (MORETTI, 2002, p. 348).

Para Duval (2003), a "[...] originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (DUVAL, 2003, p. 14). Para Duval (2003), na resolução de um problema, um registro pode aparecer mais que outro de forma explícita e privilegiada, porém sempre deve haver a possibilidade de passar de um registro a outro. Assim, o pesquisador tem como hipótese que "[...] a compreensão matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" (DUVAL, 2003, p. 15).

Portanto, para que ocorra a compreensão de conhecimentos matemáticos, Duval (2003) argumenta sobre a necessidade de realizar transformações entre essas representações semióticas, tais transformações são classificadas pelo pesquisador em dois tipos: *tratamentos* e *conversões*. Um tratamento em uma representação, segundo Duval (2009), "[...] é uma transformação de representação interna a um registro de representação" (DUVAL, 2009, p. 57), ou seja, acontece no próprio registro em que ela foi formada. Já a conversão de uma representação é "[...] transformar a representação de um objeto ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58), ou seja, é uma transformação externa ao registro de partida.

O tratamento permanece no mesmo registro semiótico e corresponde a procedimentos de justificação (DUVAL, 2003; 2011a). A conversão permite a passagem de um registro semiótico a outro, mas conservando a referência aos mesmos objetos. Do ponto de vista matemático, a conversão é uma atividade de transformação que intervém somente na escolha do registro no qual o tratamento possa ser mais econômico e eficaz, ou ainda, para obtermos um segundo registro que dê suporte aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Assim, para Duval (2003), “[...] a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo” (DUVAL, 2003, p. 16). Entretanto, do ponto de vista cognitivo, a conversão é considerada uma “[...] atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (DUVAL, 2003, p. 16).

Na transformação de conversão, Duval (2003) estabelece a existência de dois tipos de fenômenos, a saber: A) *as variações de congruência e de não congruência*; e B) a *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão*.

Quando analisamos a resolução de uma atividade em que houve uma conversão, duas situações podem ocorrer ao compararmos a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada:

> Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (DUVAL, 2003, p. 19).

Para Duval (2012), quando há congruência entre os registros de partida e chegada, a conversão é trivial, comparada intuitivamente a um simples código. No entanto, quando há não congruência, a conversão pode se tornar custosa em relação ao tempo de tratamento e pode “[...] criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente” (DUVAL, 2012, p. 284).

Duas representações são congruentes quando satisfazem os três critérios estabelecidos por Duval (2009): 1) *correspondência semântica*; 2) *univocidade semântica terminal*; e 3) *organização de unidades significativas*.

Duval (2009) explica que a possibilidade de uma correspondência semântica entre duas representações em registros diferentes ocorre quando cada unidade significativa do registro de partida relaciona-se a uma unidade significativa no registro de chegada. O segundo critério estabelecido por Duval (2009) é a univocidade semântica terminal, a qual dispõe que cada unidade significativa do registro de partida deve corresponder a apenas uma unidade significativa no registro de chegada. Por fim, o último critério, organização de unidades significativas, é relativo à ordem em que as unidades significativas compõem cada uma das duas representações comparadas. A análise destes três critérios permite determinar o grau[14] de não congruência de uma conversão a ser realizada entre duas representações semióticas diferentes.

Tendo por referência os exemplos apresentados por Travassos (2018) em sua pesquisa, exemplificamos a congruência semântica a partir de uma frase dada em língua natural “x *é maior que 23*” para o registro simbólico algébrico $x > 23$.

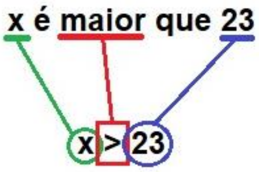


Figura 3: Exemplo de congruência semântica
Fonte: Autora com base em Travassos (2018)

Esta conversão caracteriza-se por ter congruência semântica, uma vez que os três critérios supracitados são satisfeitos. Como podemos observar na Figura 3, há uma correspondência termo a termo entre as unidades significativas dos dois registros envolvidos, ou seja, os termos matemáticos no registro de partida (x, maior, 23) são associados a um único símbolo no registro de chegada (x, >, 23). Também há univocidade semântica terminal, uma vez que, para cada unidade significativa no registro de partida, há somente uma unidade significativa no registro de chegada. Além disso, há ordem na organização das unidades significativas, ou seja, a leitura realizada da esquerda para a direita no registro de partida se dá também no registro de chegada.

[14] A não congruência entre representações pode ser classificada em menor ou maior grau. Duval (2009) salienta que a “[...] dificuldade da conversão depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada” (DUVAL, 2009, p. 69).

No entanto, a conversão da frase em língua natural “*x não é maior que 23*” para o registro simbólico algébrico “$x \leq 23$” caracteriza-se por não ter congruência semântica, uma vez que dois critérios não são satisfeitos: 1) não há correspondência semântica, pois a unidade significativa “*não é maior*” não apresenta correspondência com a unidade significativa “≤”; 2) não há univocidade semântica terminal, pois a unidade significativa no registro de partida “*não é maior*” pode implicar outras três unidades significativas no registro de chegada, menor “<”, igual “=” ou menor/igual “≤”.

Duval (2009) explica que as conversões entre representações congruentes são, em geral, imediatas entre os estudantes, diferente das conversões entre as representações nas quais há não congruência, pois, neste caso,

> [...] não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença (DUVAL, 2009, p. 66).

O segundo fenômeno estabelecido por Duval (2009), a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, refere-se à importância da ida e volta nos sentidos de conversão, uma vez que “[...] as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada” (DUVAL, 2009, p. 61). Desse modo, nota-se a importância de se considerar a conversão em ambos os sentidos, pois, além do fato de cada representação conter conteúdos diferentes para um mesmo objeto matemático, o sentido da conversão de uma representação para outra pode ser mais dificultoso do que seu sentido inverso.

No que se refere ao ensino da Matemática, Duval (2009) menciona que, geralmente, apenas um sentido de conversão é privilegiado em sala de aula, e parece existir a “[...] ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido” (DUVAL, 2003, p. 20). Duval (2003) ainda salienta que essas dificuldades associadas à conversão limitam a capacidade dos estudantes tanto na utilização dos conhecimentos já adquiridos como nas possibilidades em adquirir novos conhecimentos, minimizando, consequentemente, a capacidade de compreensão em matemática.

Na seção seguinte apresentamos um estudo específico que associa o conceito de função afim, objeto matemático de estudo desta investigação, e a Teoria dos

Registros de Representação Semiótica, e que está atrelado ao que Duval denomina como *interpretação global das propriedades figurais*.

2.2 A Função Afim e a Interpretação Global de Propriedades Figurais

Dentre as dificuldades apresentadas pelos estudantes associadas ao conceito de função afim, destacamos aquelas citadas por Duval (2011b) que permeiam as conversões especialmente entre as representações semióticas simbólica – algébrica e gráfica. O autor destaca que "[...] o ensino […] atém-se à passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto, esquece-se que é a passagem inversa que traz problema" (DUVAL, 2011b, p. 97), ou seja, a maioria das atividades pedagógicas, sejam de livros didáticos ou materiais afins, voltam-se para a correspondência entre a representação algébrica ou tabular para a representação gráfica, sem operar o processo inverso, tornando as representações gráficas "[...] obscuras para a maioria dos alunos" (DUVAL, 2011b, p. 98).

Duval (2011b) expõe três tipos de abordagens para a representação gráfica da função afim, sendo que estas não operam com os mesmos dados visuais do gráfico, são elas: o sentido de inclinação do gráfico; os ângulos formados entre o gráfico e os eixos x e y e a posição do gráfico em relação à origem do eixo vertical. A *abordagem ponto a ponto*, mais comum entre as atividades realizadas em sala de aula, introduz e define as representações gráficas a partir da associação de um par de números a um ponto no gráfico e vice-versa. Ela favorece a construção do gráfico da função afim a partir da leitura de determinados pontos específicos, como, por exemplo, os pontos de intersecção com os eixos coordenados.

Moretti (2003) enfatiza que este procedimento é o que mais aparece em livros didáticos, ou seja, atividades que permeiam a obtenção de pontos por meio da substituição na expressão da função, os quais são posteriormente localizados em um sistema de eixos graduados para que, na sequência, seja traçado o gráfico (reta, curva, entre outros) por meio da junção destes pontos. Para o referido autor, nesta forma de atividade não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Além disso, este tipo de abordagem permite a origem de diversos problemas, uma vez que "[...] se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente" (MORETTI, 2003, p. 151). Concordamos que a

> [...] prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado no ensino uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas (DUVAL, 2011b, p. 99).

A *abordagem de extensão do traçado efetuado*, segundo Duval (2011b), refere-se a uma ampliação da abordagem ponto a ponto, e "[...] não se atém mais sobre um conjunto finito de pontos marcados […]; esta extensão se apoia em um conjunto infinito de pontos potenciais, quer dizer, no fundo homogêneo da folha, nos intervalos entre pontos marcados" (DUVAL, 2011b, p. 98). Estas duas abordagens citadas consideram prioritariamente os dados do traçado e "[...] não as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica" (DUVAL, 2011b, p. 99). Assim, "[...] o tratamento se mantém orientado na busca de valores particulares sem se ocupar com a forma da expressão algébrica" (DUVAL, 2011b, p. 99).

Em situações cujo objetivo é partir da representação gráfica para a representação algébrica correspondente, Duval (2011b) privilegia a *abordagem de interpretação global de propriedades figurais*, ou seja, é uma abordagem que requer a articulação entre os registros de representação simbólico algébrico e gráfico da função afim.

Moretti (2003) complementa que este tipo de procedimento permite o estudante identificar as modificações possíveis na imagem gráfica e na expressão algébrica conjuntamente. Para Duval (2011b), neste tipo de abordagem busca-se perceber a associação de uma *variável visual de representação* com sua *unidade simbólica significativa da expressão algébrica*, prática que não ocorre nas abordagens anteriores, visto que tiram a atenção das variáveis visuais. As unidades significativas, em uma expressão algébrica, correspondem a cada um dos símbolos, por exemplo, >, <, =, variável, símbolos de operações e sinais +, -, entre outros. O objetivo central desta abordagem é "[...] corresponder variáveis visuais pertinentes do gráfico com unidades significativas da expressão algébrica" (DUVAL, 2011b, p. 100).

Duval (2011b) apresenta as variáveis visuais da representação de uma reta no plano cartesiano no Quadro 3 a seguir:

Variáveis Visuais	Valores das variáveis visuais
- O sentido de inclinação do traçado;	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita.
- Os ângulos traçados com os eixos;	- há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido**; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical.
- A posição do traçado em relação à origem do eixo vertical;	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Quadro 3: Variáveis visuais e seus respectivos valores na função afim
Fonte: Duval (2011b)

As variáveis visuais podem assumir valores diferentes como observamos no Quadro 4, sendo que a primeira variável visual apresenta dois valores, a segunda, três valores e a terceira, também três valores, perfazendo oito variáveis visuais associadas à representação gráfica da função afim. “A cada uma dessas oito variáveis visuais particulares corresponde uma unidade significativa na expressão algébrica da reta: o que importa na expressão $y = ax + b$ é o coeficiente a e a constante b” (DUVAL, 2011b, p. 101), conforme o Quadro 4 a seguir:

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido de inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença de sinal -
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coeficiente variável = 1 coeficiente variável < 1 coeficiente variável > 1	não há coeficiente escrito há coeficiente escrito há coeficiente escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acréscimo constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Quadro 4: Valores e variáveis visuais para a função afim
Fonte: Duval (2011b)

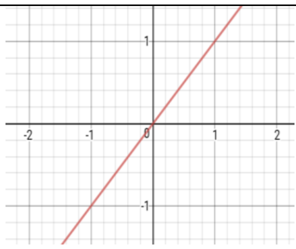
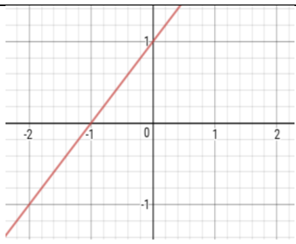
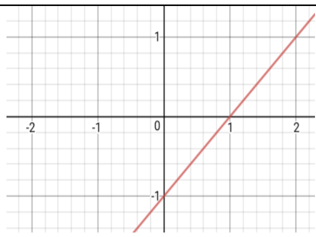
A primeira variável visual apresentada no Quadro 4 se refere ao sentido da inclinação do traçado, e está relacionado a duas unidades simbólicas significativas: coeficiente $a > 0$, que corresponde ao traçado cuja “[...] linha sobe da esquerda para a direita” (DUVAL, 2011b, p. 101), ou coeficiente $a < 0$, que corresponde ao traçado cuja “[...] linha desce da esquerda para a direita” (DUVAL, 2011b, p. 101).

A segunda variável visual (Quadro 4) está relacionada aos ângulos dos traçados com os eixos, os quais estão relacionados ao valor do coeficiente a (taxa de variação), a saber: quando a é igual a 1 há uma partição simétrica; quando a é maior que 1 e menor que -1, “[...] o ângulo formado com o eixo horizontal é maior que o ângulo formado com o eixo vertical” (DUVAL, 2011b, p. 101); e quando a é menor que 1 e maior que -1, mas diferente de 0 “[...] o ângulo formado com o eixo horizontal é menor que o ângulo formado com o eixo vertical” (DUVAL, 2011b, p. 101).

A terceira variável visual (Quadro 4) está relacionada à posição do traçado em relação à origem do eixo vertical, a qual corresponde a três unidades simbólicas significativas: quando há acréscimo de uma constante, ou seja, há um coeficiente linear positivo, “[...] o traçado passa acima da origem” (DUVAL, 2011b, p. 101); quando se subtrai uma constante, ou seja, há um coeficiente linear negativo, “[...] o traçado passa abaixo da origem” (DUVAL, 2011b, p. 101); e, por fim, quando o coeficiente linear é nulo, “[...] o traçado passa pela origem” (DUVAL, 2011, p. 101).

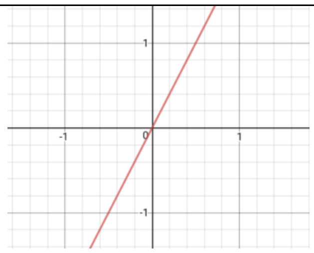
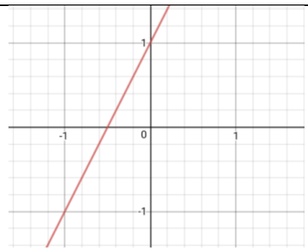
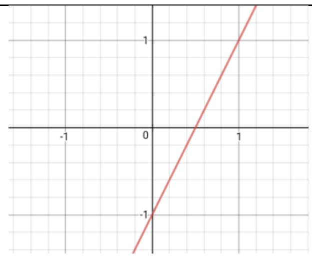
Nesta perspectiva, reorganizamos as informações apresentadas por Duval (2011b) relacionadas à interpretação global das propriedades figurais, e também com base nos Quadros 3 e 4 apresentados anteriormente, e explicitamos as dezoito diferentes representações gráficas da função afim e suas respectivas unidades simbólicas significativas. Esse estudo detalhado da articulação entre as representações gráfica e algébrica da função afim auxiliou na elaboração da sequência didática, especialmente no que diz respeito às atividades 3, 4, 5 e 6 que compõem tal sequência.

O Quadro 5, a seguir, apresenta as variáveis visuais quando o coeficiente a assume valores positivos, o qual corresponde ao sentido da inclinação da reta, e também igual a 1, condizente com o ângulo da reta do gráfico formado com o eixo x, o qual, neste caso, será igual a 45º. Elencamos as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 e menor que 0. Para cada Quadro, na sequência desse capítulo, apresentamos as unidades simbólicas na expressão algébrica e exemplos de função afim em seu registro de representação gráfico e simbólico algébrico.

VARIÁVEIS VISUAIS			UNIDADES SIMBÓLICAS	EXEMPLOS	
Sentido da Inclinação	**Ângulo com o eixo x**	**Posição da reta em relação a origem**	**Expressão Algébrica**	**Gráfico**	**Algébrico**
$a > 0$ Reta ascendente	$a = 1$ Reta com partição simétrica ou α = 45°	$b = 0$ Reta intercepta na origem	$y = x$		$y = x$
		$b > 0$ Reta intercepta o eixo y acima da origem	$y = x + b$		$y = x + 1$
		$b < 0$ Reta intercepta o eixo y abaixo da origem	$y = x - b$		$y = x - 1$

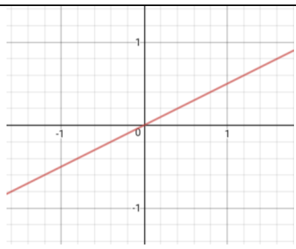
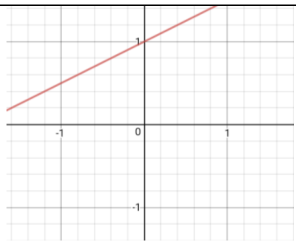
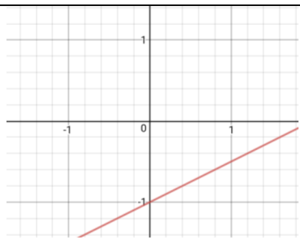
Quadro 5: Variáveis visuais da função afim quando $a = 1$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

No Quadro 6, os valores para o coeficiente a são positivos e maiores que 1, indicando que, neste caso, o ângulo α formado entre a reta do gráfico e o eixo x será maior que o ângulo β formado entre a reta do gráfico e o eixo y. Para este caso são apresentadas as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 ou menor que 0.

VARIÁVEIS VISUAIS			UNIDADES SIMBÓLICAS	EXEMPLOS	
Sentido da Inclinação	**Ângulo com o eixo x**	**Posição da reta em relação a origem**	**Expressão Algébrica**	**Gráfico**	**Algébrico**
$a > 0$ Reta ascendente	$a > 1$ Reta apresenta ângulo α com o eixo horizontal **maior** que o ângulo β formado com o eixo vertical	$b = 0$ Reta intercepta na origem	$y = ax$		$y = 2x$
		$b > 0$ Reta intercepta o eixo y acima da origem	$y = ax + b$		$y = 2x + 1$
		$b < 0$ Reta intercepta o eixo y abaixo da origem	$y = ax - b$		$y = 2x - 1$

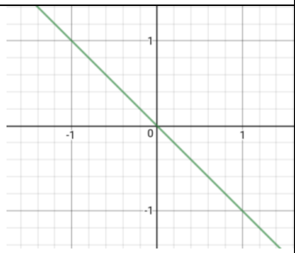
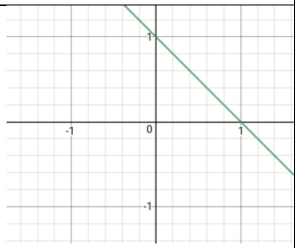
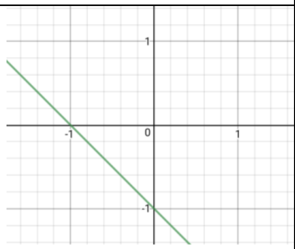
Quadro 6: Variáveis visuais da função afim quando $a > 1$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

O Quadro 7 consiste de valores do coeficiente a positivos, mas menores que 1, indicando que, neste caso, o ângulo α formado entre a reta e o eixo x será menor que o ângulo β formado entre a reta e o eixo y. Novamente são apresentadas as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 ou menor que 0.

VARIÁVEIS VISUAIS			UNIDADES SIMBÓLICAS	EXEMPLOS	
Sentido da Inclinação	**Ângulo com o eixo x**	**Posição da reta em relação a origem**	**Expressão Algébrica**	**Gráfico**	**Algébrico**
$a > 0$ Reta ascendente	$a < 1$ Reta apresenta ângulo α com o eixo horizontal **menor** que o ângulo β formado com o eixo vertical	$b = 0$ Reta intercepta na origem	$y = ax$		$y = \frac{x}{2}$
		$b > 0$ Reta intercepta o eixo y acima da origem	$y = ax + b$		$y = \frac{x}{2} + 1$
		$b < 0$ Reta intercepta o eixo y abaixo da origem	$y = ax - b$		$y = \frac{x}{2} - 1$

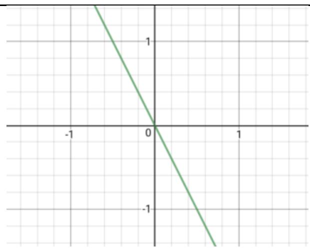
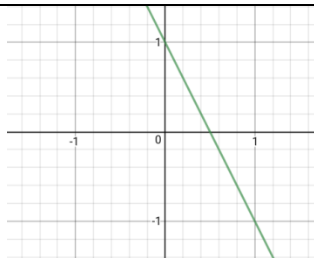
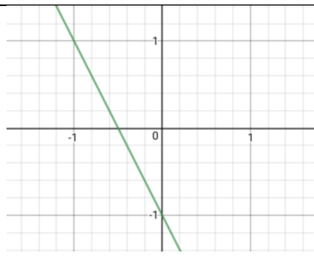
Quadro 7: Variáveis visuais da função afim quando $0 < a < 1$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

Na sequência, apresentamos o Quadro 8 com valores para o coeficiente a negativo, neste caso para quando o coeficiente a é igual a -1. Assim, o ângulo α formado entre a reta e o eixo x é igual ao ângulo β formado entre a reta do gráfico e o eixo y, ou seja, ambos com 45º, caso semelhante para o coeficiente a igual a 1. De forma análoga aos quadros anteriores, são apresentadas as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 ou menor que 0.

VARIÁVEIS VISUAIS			UNIDADES SIMBÓLICAS	EXEMPLOS	
Sentido da Inclinação	**Ângulo com o eixo x**	**Posição da reta em relação a origem**	**Expressão Algébrica**	**Gráfico**	**Algébrico**
$a < 0$ Reta descendente	$a = -1$ Reta com partição simétrica ou α = β = 45°	$b = 0$ Reta intercepta na origem	$y = -x$		$y = -x$
		$b > 0$ Reta intercepta o eixo y acima da origem	$y = -x + b$		$y = -x + 1$
		$b < 0$ Reta intercepta o eixo y abaixo da origem	$y = -x - b$		$y = -x - 1$

Quadro 8*:* Variáveis visuais da função afim quando $a = -1$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

O Quadro 9 organiza as possibilidades para a posição da reta que tem por valores do coeficiente a negativos, mas menores que -1. Este caso é semelhante quando o coeficiente a é maior que 1, ou seja, o ângulo α formado entre a reta do gráfico e o eixo x será sempre maior que o ângulo β formado entre a reta do gráfico e o eixo y. Novamente são apresentadas as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 ou menor que 0.

VARIÁVEIS VISUAIS			UNIDADES SIMBÓLICAS	EXEMPLOS	
Sentido da Inclinação	**Ângulo com o eixo x**	**Posição da reta em relação a origem**	**Expressão Algébrica**	**Gráfico**	**Algébrico**
$a < 0$ Reta descendente	$a < -1$ Reta apresenta ângulo α com o eixo horizontal **maior** que o ângulo β formado com o eixo vertical	$b = 0$ Reta intercepta na origem	$y = -ax$		$y = -2x$
		$b > 0$ Reta intercepta o eixo y acima da origem	$y = -ax + b$		$y = -2x + 1$
		$b < 0$ Reta intercepta o eixo y abaixo da origem	$y = -ax - b$		$y = -2x - 1$

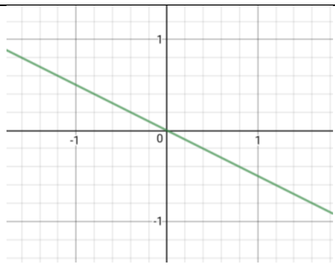
Quadro 9: Variáveis visuais da função afim quando $a < -1$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

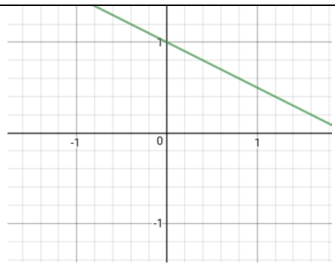
Já o Quadro 10 contém os valores para o coeficiente a negativos, mas pertencentes ao intervalo $-1 < a < 0$, indicando que, neste caso, o ângulo α formado entre a reta do gráfico e o eixo x será menor que o ângulo α formado entre a reta do gráfico e o eixo y, caso semelhante quando o coeficiente a assume valores no intervalo $0 < a < 1$. São apresentadas, mais uma vez, as possibilidades para a posição da reta em relação à origem, correspondente ao valor dado para o coeficiente b, que pode ser igual a 0, maior que 0 ou menor que 0.

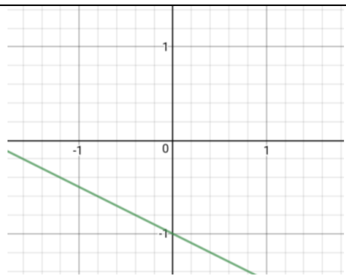
<table>
<tr><th colspan="3">VARIÁVEIS VISUAIS</th><th>UNIDADES SIMBÓLICAS</th><th colspan="2">EXEMPLOS</th></tr>
<tr><th>Sentido da Inclinação</th><th>Ângulo com o eixo x</th><th>Posição da reta em relação a origem</th><th>Expressão Algébrica</th><th>Gráfico</th><th>Algébrico</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$a < 0$

Reta descendente</td><td rowspan="3">$a > -1$

Reta apresenta ângulo α com o eixo horizontal menor que o ângulo β formado com o eixo vertical</td><td>$b = 0$

Reta intercepta na origem</td><td>$y = -ax$</td><td></td><td>$y = \frac{-x}{2}$</td></tr>
<tr><td>$b > 0$

Reta intercepta o eixo y acima da origem</td><td>$y = -ax + b$</td><td></td><td>$y = \frac{-x}{2} + 1$</td></tr>
<tr><td>$b < 0$

Reta intercepta o eixo y abaixo da origem</td><td>$y = -ax - b$</td><td></td><td>$y = \frac{-x}{2} - 1$</td></tr>
</table>

Quadro 10: Variáveis visuais da função afim quando $-1 < a < 0$ e suas variações do coeficiente b
Fonte: Autora

A partir de todas as considerações feitas neste capítulo acerca desta teoria, e considerando que: 1) de acordo com Duval (2011b) e Moretti (2003), nas propostas de ensino não está presente a prática da abordagem de interpretação global, ou seja, “[...] a discriminação das variáveis visuais e a sua vinculação com as unidades simbólicas correspondentes são de fato ignoradas” (DUVAL, 2011b, p. 104); 2) que a “[...] interpretação das representações gráficas cartesianas depende de uma identificação precisa de todos os valores das variáveis visuais pertinentes e do reconhecimento qualitativo das unidades da expressão simbólica correspondente” (DUVAL, 2011b, p. 111); e 3) considerando que identificamos na literatura brasileira apenas uma pesquisa (SANTOS, 2002) associada à interpretação global de propriedades figurais e o conceito de função afim, notamos que se faz pertinente uma abordagem experimental a partir da variação de uma unidade significativa na expressão algébrica, mantendo outras constantes a fim de compreender o que ocorre no registro gráfico, e vice e versa.

Com base nesta consideração apresentada por Duval (2011b) e em relação à abordagem de interpretação global de propriedades figurais, salientamos que esta pode ser trabalhada em sala de aula a partir de práticas metodológicas diferenciadas, que permitam ao estudante interagir e experienciar com os conceitos matemáticos e as suas diferentes representações. Corroboramos com Moretti e Luiz (2014) quando argumentam que os gráficos "[...] podem ser facilmente feitos em um programa computacional e, com isso, deixar o aluno com mais tempo livre para a tarefa mais importante que é a interpretação e assim responder com mais segurança a questão proposta na atividade" (MORETTI; LUIZ, 2014, p. 79).

Também, Duval, em entrevista para Freitas e Rezende (2013), argumenta que o uso de *softwares* traz três grandes inovações, do ponto de vista cognitivo, pelo seu poder de promover a visualização de conteúdos pertinentes a todas as áreas do conhecimento; por exercer funções de simulação e de modelagem e, por fim, por produzir algo imediatamente. "É esta tripla inovação do ponto de vista cognitivo que gera o interesse e os benefícios pedagógicos dos ambientes informatizados no ensino de Matemática" (DUVAL; FREITAS; REZENDE, 2013, p. 32).

É neste contexto que buscamos apoio no uso de ferramentas tecnológicas, pois seja por meio de calculadoras, aplicativos da Internet, *softwares* em geral, e mesmo *smartphones,* enfatizados neste trabalho, tais instrumentos favorecem as experimentações matemáticas e potencializam formas de investigação e resolução de problemas.

Pelo exposto, consideramos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica dá respaldo para a elaboração de atividades matemáticas sobre função afim, incluindo o uso de recursos tecnológicos e baseada na interpretação global de propriedades figurais, para ser implementada com os participantes desta pesquisa. Considerando as intenções didáticas desta pesquisa, respaldamo-nos na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, para o suporte à construção de um ambiente didático e de situações didáticas que permitam que as atividades que compõem a sequência sejam escolhidas de forma que o estudante as aceite e leve-o a agir, a falar, a refletir e a evoluir por si próprio (BROUSSEAU, 1996) durante este processo de aprendizagem. Na próxima seção, apresentamos aspectos desta teoria que nos auxiliaram no desenvolvimento e aplicação da sequência didática.

2.3 A Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau no início dos anos 1980 e tem por objetivo apresentar um modelo teórico para contribuir com o processo de aprendizagem matemática, a partir de uma série de situações reprodutíveis em sala de aula, as quais conduzem a uma modificação no comportamento dos estudantes (ALMOULOUD, 2007). Segundo este pesquisador, essa modificação "[...] é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos" (ALMOULOUD, 2007, p. 32). Esta teoria não busca estudar o sujeito cognitivo, mas a situação *didática* nas quais estão envolvidos o professor, o aluno e o saber.

Para Freitas (1999), o significado do saber matemático para o estudante é influenciado pela forma com que os conteúdos lhes são apresentados e o seu envolvimento dependerá das diferentes atividades de aprendizagem de uma situação didática. Bittar (2017) apresenta que essas situações didáticas podem ser entendidas como um conjunto de relações estabelecidas (explícita ou implicitamente) entre um estudante ou um grupo de estudantes inseridos em um sistema educativo, no qual o professor tem a intenção de que esses adquiram um determinado saber.

Brousseau apresenta dois tipos de situações – a situação *didática* e situação *adidática*. Nas situações didáticas a intenção de ensinar é revelada ao estudante. Já nas situações *adidáticas* a intenção de ensinar não é revelada para o estudante, mas é uma situação que foi planejada e construída pelo professor a fim de proporcionar aos estudantes condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar. Além disso, são situações nas quais o problema matemático escolhido pelo professor deve permitir ao estudante falar, refletir, conjecturar e evoluir por si próprio, bem como adquirir novos conhecimentos por uma necessidade própria e não por uma escolha do professor ou do sistema educativo (ALMOULOUD, 2007). Freitas (1999) complementa que as situações *adidáticas* são os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do estudante neste processo é fruto de seu próprio mérito, haja vista que foi capaz de sintetizar um conhecimento.

Para que as situações *adidáticas* ocorram, é necessário que o professor faça a *devolução* de um problema, ou seja, esta ação, conforme Freitas (1999), deve ser compreendida como a

> [...] transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução de problema, ou seja, se ele aceita participar deste desafio intelectual e se ele consegue sucesso, então inicia-se o processo de aprendizagem (FREITAS, 1999, p. 68).

Queiroz (2014) salienta sobre a importância do papel do professor neste processo de devolução, no momento de escolher bons problemas, que levem em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e que sejam de seu interesse a fim de incentivá-los a resolverem o problema proposto.

As situações *adidáticas* podem ser classificadas em três tipos: situação de *ação*, de *formulação* e de *validação*. A situação de ação é o momento em que o estudante aceita o problema escolhido pelo professor, no processo de devolução, e busca formas para solucioná-lo, a partir dos conhecimentos que já possui. Almouloud (2007) explica que esta primeira etapa deve proporcionar ao estudante um momento de julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se houver necessidade, sem a intervenção do professor. No entanto, para Queiroz (2014), é na situação de ação que devemos esperar alguns questionamentos dos estudantes, tais como: “está certo isso que eu fiz?” ou “esta é a resposta correta do problema?”. O pesquisador salienta que o professor pode intervir nestes momentos, não apresentando respostas prontas, mas elaborando novos questionamentos, de maneira a permitir que as reflexões do estudante permitam o abandono de seu modelo inicial para criar outro, caso o seu modelo não esteja de acordo com a solução do problema. Neste caso, há “[...] uma desestabilização cognitiva do aluno” (QUEIROZ, 2014, p. 38).

A situação de formulação ocorre quando o estudante sente a necessidade de realizar uma troca de informações com outras pessoas, ou seja, precisa comunicar, seja na forma escrita ou oral, e por meio da língua natural ou matemática, suas estratégias e conjecturas que utilizou para solucionar o problema. Bittar (2017) destaca que essas “[...] situações podem acontecer diversas vezes dentro de uma mesma situação adidática” (BITTAR, 2017, p. 112). Além disso, Queiroz (2014) considera que este tipo de situação pode ser favorecido nas atividades em grupos, uma vez que, durante os debates entre os estudantes, a solução do problema pode ser refinada e compreendida por todos. Esses momentos também podem proporcionar aos estudantes condições de construir “[...] uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática” (ALMOULOUD, 2007, p. 38).

Enquanto que, na situação de formulação, o objetivo é a comunicação de estratégias, na situação de validação há o debate entre os estudantes para mostrar a validade das estratégias e da solução encontrada para o problema (ALMOULOUD, 2007), ou seja, “[...] o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação” (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Freitas (1999) destaca que as situações de validação e de formulação são indissociáveis, uma vez que, para se produzirem provas, é necessário constituir um sistema de validação, oral ou escrito, no grupo de estudantes, mesmo que haja apenas dois indivíduos.

Para Bittar (2017), durante as três situações citadas, que podem não ocorrer na ordem predeterminada, o professor deve estar presente e atuando como mediador. Para isso, precisa assumir uma postura de questionador para estimular seus estudantes ao debate e à busca por estratégias e não fornecer informações sobre a resolução do problema, nem tão pouco invalidar as soluções propostas. Queiroz (2014) também concorda que a produção do conhecimento deve ficar a cargo do estudante e, para isso, é necessário que este assuma um papel ativo nesse processo, ou seja, o estudante é “[...] corresponsável pela produção do saber” (QUEIROZ, 2014, p. 39).

Conforme Almouloud (2007), é do estudante a responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber durante as situações de ação, formulação e validação. O professor fica encarregado das situações de *institucionalização*, as quais são definidas como os momentos em que “[...] o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 40), para que, posteriormente, este novo conteúdo possa fazer parte de um conjunto de conhecimentos no processo de ensino e ter sua funcionalidade na resolução de outros problemas. Freitas (1999) concorda que

> [...] cabe ao professor organizar essa síntese do conhecimento procurando elevá-lo a um status de saber que não dependa mais dos aspectos subjetivos e particulares. Se faz necessário igualmente estabelecer as devidas correlações com outros saberes [...] para que possam ser reinvestidas em outras situações (FREITAS, 1999, p. 83).

Para que uma situação possa ser caracterizada como *adidática*, Bittar (2017) sugere a Engenharia Didática como sendo uma metodologia de pesquisa pertinente, uma vez que suas fases permitirão preparar o professor/pesquisador para a elaboração de uma sequência didática, cujas atividades sejam situações *adidáticas*. Assim, na próxima seção apresentamos aspectos sobre a Engenharia Didática, a qual fundamentou metodologicamente este trabalho.

2.4 A Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa cujos estudos começaram a ser sistematizados, a partir da década de 1980, por Guy Brousseau, Yves Chevallard e Régine Douady (BITTAR, 2017). Para Bittar (2017), apesar de não haver uma metodologia de pesquisa nesta época, as pesquisas experimentais em sala de aula seguiam padrões quanto ao seu preparo, à realização com estudantes e à análise dos dados. Além disso, essas experimentações "[...] tinham em comum o desejo de levar o aluno a construir seu conhecimento" (BITTAR, 2017, p. 102). Ao final da década de 1980, Michèle Artigue publica um artigo na revista francesa *Recherches en Didactique des Mathématiques*[15], destaque na comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, a fim de sistematizar e disseminar a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Almouloud e Silva (2012) apresentam a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa capaz de ressaltar os fenômenos didáticos em condições próximas ao funcionamento de uma sala de aula. Complementam que essa metodologia

[15] ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308. Grenoble, 1988.

> [...] se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, permitindo uma validação interna a partir da confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 26).

Conforme Bittar (2017), a Engenharia Didática é constituída por quatro fases ou etapas: “[...] análise preliminar, concepção e análise *a priori* das situações a serem propostas, realização da sequência didática, análise *a posteriori* e validação” (BITTAR, 2017, p. 103).

A análise preliminar consiste no estudo do objeto matemático a fim de fornecer subsídios para o pesquisador no tratamento e elaboração da sequência didática. Para Bittar (2017), esta fase pode ser constituída do estudo histórico e epistemológico do objeto matemático envolvido e como este é adotado no ensino atual, por meio da análise de livros didáticos e documentos curriculares. Também, é importante o estudo de pesquisas já realizadas, que envolveram o objeto de estudo em questão, uma vez que estas podem trazer relatos das dificuldades dos estudantes mediante o objeto matemático e, inclusive, discussões sobre as origens destas dificuldades, as quais podem ter sua gênese no desenvolvimento epistemológico do conteúdo.

Além disso, “[...] permite que o pesquisador elabore hipóteses cognitivas e didáticas que fundamentarão a construção da sequência didática” (BITTAR, 2017, p. 103). Cabe ressaltar que as análises preliminares, segundo Machado (1999), podem ser retomadas e aprofundadas em qualquer momento do desenvolvimento da pesquisa, pois dependem do seu objetivo e “[...] é esse objetivo também que determinará o grau de profundidade dessas análises” (MACHADO, 1999, p. 202).

Na fase da concepção e análises *a priori*, é o momento que o pesquisador, tendo como base os estudos preliminares, “[...] delimita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar” (MACHADO, 1999, p. 203). Nesta fase, é importante o pesquisador refletir sobre: quais conceitos e propriedades podem ser utilizados nas estratégias dos estudantes, quais dificuldades podem apresentar, quais fundamentos o estudante precisa ter para entender o problema proposto, justificando, desta forma, a escolha das atividades que serão propostas. Portanto, a análise *a priori*

> [...] deve conter a sequência didática (as atividades a serem propostas aos alunos), a descrição e justificativa das escolhas ligadas tanto à organização geral de cada sessão quanto às situações propostas e as possíveis estratégias de resolução das atividades propostas (BITTAR, 2017, p. 104).

Conforme Bittar (2017), estas ações permitem que o pesquisador esteja preparado para compreender o que os estudantes estão fazendo e, consequentemente, saber em que momento e que tipo de intervenção deve ser realizada para favorecer a aprendizagem do objeto matemático envolvido nas atividades.

A terceira etapa consiste da Experimentação e supõe “[...] a aplicação dos instrumentos de pesquisa” (MACHADO, 1999, p. 206) com uma população de estudantes. Além disso, é o momento em que o professor/pesquisador explicita os objetivos da pesquisa aos estudantes participantes, estabelece o contrato didático e realiza o registro das observações feitas durante a experimentação (MACHADO, 1999).

A partir da experimentação e produção das resoluções dos estudantes nas atividades da sequência didática, ocorre a quarta etapa da Engenharia Didática, análise *a posteriori* e a validação, ou seja, a “[...] análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas” (BITTAR, 2017, p. 106), a qual necessita “[...] ser feita sempre em confronto com o previsto na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados” (BITTAR, 2017, p. 106). Bittar (2017) salienta que este confronto pode ser realizado em vários momentos da Engenharia Didática, uma vez que esta é a característica que a define como tendo validação interna, bem como a ação que permite redefinir rumos, quando necessário.

A Engenharia Didática é considerada por Bittar (2017) como uma metodologia de pesquisa aberta, ou seja, o pesquisador, durante a realização da sequência didática, pode planejar outra situação ou alterar uma situação planejada, a partir do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* e constatar que o estudante, por exemplo, está mobilizando uma concepção errônea. Como o objetivo é promover a construção do conhecimento pelo estudante, então o pesquisador pode, com apoio dos estudos realizados na fase das análises preliminares, executar quaisquer mudanças, na sequência didática, que sejam necessárias para favorecer a aprendizagem do estudante.

No próximo capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento desta pesquisa, bem como a pergunta norteadora, objetivo geral e específicos.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos o problema e os objetivos da pesquisa, seguidos do contexto e procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento da investigação. Para tanto, apresentamos os sujeitos colaboradores da pesquisa, o modo de produção e coleta de dados durante a aplicação da sequência didática e os resultados do teste diagnóstico aplicado aos sujeitos participantes da pesquisa previamente à sequência didática.

3.1 Problema e os objetivos da pesquisa

Mediante o aporte teórico e metodológico, bem como a justificativa para esta pesquisa apresentados nos capítulos 1 e 2, delineamos a pergunta norteadora para esta investigação: *quais as contribuições de um ensino baseado na interpretação global de propriedades figurais para a aprendizagem da função afim?*

Para tanto, delimitamos como objetivo geral *analisar a aprendizagem de estudantes sobre a função afim a partir de uma sequência didática relacionada à interpretação global de propriedades figurais.*

São objetivos específicos:

- analisar as conversões e tratamentos mobilizados pelos estudantes entre as representações semióticas da função afim; e
- investigar a compreensão dos estudantes em relação às unidades simbólicas significativas da expressão algébrica correspondentes às variáveis visuais de representação, pertinentes aos registros de representação simbólico algébrico e gráfico, respectivamente.

3.2 O contexto da pesquisa

Esta seção consiste de uma descrição sobre a organização e infraestrutura do Colégio e do Curso de Formação de Docentes, nos quais estão inseridos os sujeitos colaboradores desta pesquisa.

3.2.1 O Colégio e o Curso de Formação de Docentes

O Colégio Estadual Eron Domingues, vinculado ao Núcleo Regional de Educação de Toledo - Paraná, está localizado no centro da cidade de Marechal Cândido Rondon, Oeste do Paraná, e atende aproximadamente 1050 estudantes residentes nas suas proximidades e munícipios vizinhos nas modalidades de ensino: Fundamental Anos Finais (6º ao 9º ano); Médio Regular (1º ao 3º ano); Formação de Docentes Regular para Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 4º ano); Atendimento Educacional Especializado - Sala de Recursos Multifuncional; CAEDV – Centro de Atendimento Educacional ao Deficiente Visual; e Centro de Línguas Estrangeiras Modernas – CELEM Inglês e Espanhol. O estabelecimento funciona nos períodos matutino (18 turmas), vespertino (14 turmas) e noturno (apenas 3 turmas do Ensino Médio Regular). A Tabela 1 a seguir apresenta a quantidade de turmas nos três períodos e o número de matrículas realizadas no ano de 2019.

Tabela 1: Turmas e Matrículas do Colégio em 2019

Ensino	**Turmas**			**Total de Matrículas**
	Matutino	**Vespertino**	**Noturno**	
Fundamental	9	8	-	503
Médio	6	4	3	391
Formação de Docentes	3	2	-	152
Total	**18**	**14**	**3**	**1046**

Fonte: Paraná (2019)

O Colégio possui boa infraestrutura no que diz respeito à conexão de internet, a qual está disponível em todos os ambientes do estabelecimento para que os estudantes possam utilizar nas aulas com autorização do professor.

O curso de Formação de Docentes da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental deste estabelecimento foi implantado em 2007, na modalidade

Normal, nível médio, para os estudantes egressos do Ensino Fundamental. Atende estudantes residentes no próprio município e outros próximos: Nova Santa Rosa, Quatro Pontes, Pato Bragado, Entre Rios do Oeste e Mercedes. Além disso, compreende disciplinas da Base Nacional Comum, entre elas, a Matemática regida pelas Diretrizes Curriculares Orientadoras do Paraná (PARANÁ, 2008) e dezoito disciplinas específicas, distribuídas nos quatro anos previstos para o término do curso.

3.2.2 Os sujeitos participantes da pesquisa

Considerando que o objeto matemático em jogo nesta pesquisa é a função afim, que se trata de um dos conteúdos previsto na Proposta Pedagógica Curricular do colégio para o 1º ano do Ensino Médio, os sujeitos colaboradores da pesquisa foram os estudantes matriculados no 1º Ano do curso de Formação de Docentes, no ano de 2019, do Colégio Estadual Eron Domingues. Esta escolha se deu, primeiramente, pela pesquisadora ser professora de Matemática da turma; e, segundo, pelo período da aplicação da sequência didática nos meses de agosto a outubro de 2019, pois verificamos que as turmas de 1º Ano do Ensino Médio Regular já haviam trabalhado o conteúdo de função afim devido ao maior número de aulas (3 aulas semanais de 50 minutos cada) comparados ao curso de Formação de Docentes (2 aulas semanais de 50 minutos cada).

Antes de iniciar a pesquisa, na primeira semana do mês de agosto do ano de 2019, a pesquisadora aplicou um questionário individual aos trinta e seis estudantes pertencentes à turma selecionada, com a finalidade de conhecer alguns aspectos particulares dos estudantes, como: idade, município de residência, se possuem *smartphone* próprio e a respeito dos conteúdos estudados em anos anteriores. A partir dos dados coletados e das observações realizadas pela pesquisadora durante todo o primeiro semestre de 2019, pudemos identificar algumas características gerais da turma: demonstram interesse em aprender os conteúdos abordados pelo professor; são atentos na maior parte do tempo de aula; e participativos no que tange às discussões em sala de aula. Em relação às idades, 29 estudantes possuem 15 anos; 5 possuem 16 anos completos e 2 estudantes são maiores de idade, um com 18 e outro com 34 anos.

Sobre os estudos relativos ao Ensino Fundamental, perguntamos, a partir de uma lista com alguns conteúdos pré-selecionados, quais deles os estudantes lembravam de ter estudado. Como respostas, 25 estudantes identificaram o conteúdo de Trigonometria como trabalhado no 9º ano do Ensino Fundamental, 22 marcaram o conteúdo de função afim, 16 marcaram o conteúdo de função quadrática, 27 lembraram do conteúdo de equações de 1º grau; 32 marcaram o conteúdo de equações de 2º grau, apenas 4 estudantes marcaram os conteúdos de geometria plana e 3 os conteúdos de geometria espacial. Nesta pergunta, destacamos que os estudantes poderiam marcar mais que uma resposta, por isso os dados apresentados na Figura 4, a seguir, não totalizam 100%.

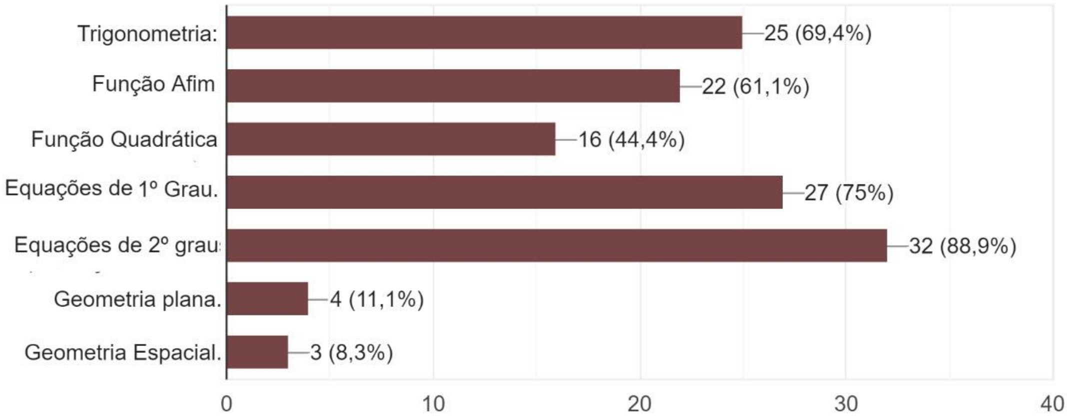


Figura 4: Conteúdos matemáticos estudados em anos anteriores, segundo os sujeitos da pesquisa.
Fonte: Autora

Considerando que o *smartphone* seria um equipamento previsto para ser utilizado durante a implementação da sequência didática, perguntamos, também, quais deles possuíam o referido instrumento tecnológico e para o quê mais utilizavam no seu cotidiano. Como resposta, dos 36 estudantes da turma, 34 disseram que possuem seu próprio *smartphone* e apenas 2 disseram não possuir o equipamento. Estes dois estudantes trabalharam em parceria com algum colega que utilizou o seu próprio *smartphone* durante a implementação da sequência didática. Deste grupo de 34 estudantes, todos disseram que usam o *smartphone* para comunicação com amigos. Além disso, 31 estudantes utilizam-no para conversar com familiares, 17 para jogos em geral, 30 para uso das redes sociais, 13 marcaram a opção para a instalação de aplicativos que podem facilitar as ações do dia a dia, 25 assistem a vídeos, 26 utilizam para estudar os conteúdos trabalhados na escola (não foi especificado como o fazem), 31 usam para músicas e vídeos, 13 leem as principais notícias do dia, 1 marcou que utiliza o *smartphone* para ler livros e 1 para assistir séries e filmes. Nesta pergunta, os estudantes também podiam marcar mais que uma alternativa e, por isso, os dados apresentados na Figura 5, a seguir, totalizam mais que 100%.

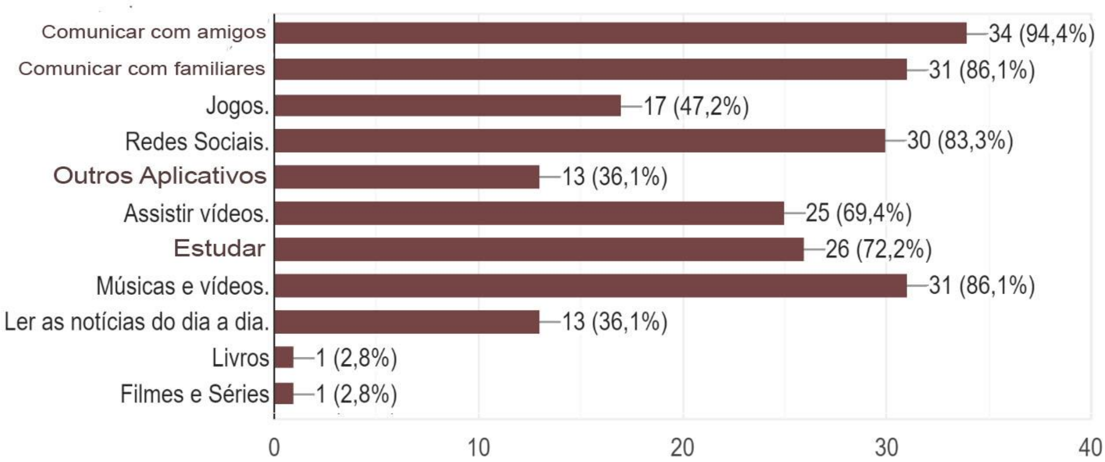


Figura 5: Para quê o estudante utiliza o *smartphone*
Fonte: Autora

Com base nos dados coletados, observamos que os sujeitos colaboradores desta pesquisa fazem uso de seu *smartphone* em seu cotidiano, no geral, para fins de comunicação, entretenimento e estudo. No entanto, na visão dos estudantes, o ato de estudar utilizando o *smartphone* não está vinculado ao uso de aplicativos que possam auxiliar na compreensão dos conteúdos. Para eles, esta ferramenta tecnológica serve apenas como apoio para pesquisas em geral, manter a comunicação com os colegas da sala e com os professores da turma para informações das disciplinas, assistir a videoaulas complementares ou sugeridas pelos docentes ou, ainda, utilizar a câmera para filmagens de trabalhos específicos da área educacional, uma vez que, na grade curricular do curso de Formação de Docentes, há disciplinas de cunho pedagógico. Assim, para a elaboração da sequência didática, levamos em consideração, especialmente, o fato de que quase todos os estudantes possuíam um equipamento próprio e que poderiam relacionar o seu uso a outras formas de aprender, ou seja, a partir da exploração de aplicativos que permitem a visualização e experimentação dos conteúdos propostos para o trabalho da disciplina.

A seguir, retratamos o percurso para a coleta de informações desta pesquisa.

3.3 Coleta de informações para a realização da pesquisa

Esta pesquisa foi autorizada pelo Comitê de Ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, *campus* Cascavel e pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná – SEED conforme as Resoluções CNS nº 466/2012 e nº 406/2018 – GS/SEED. Previamente à aplicação da sequência didática, os estudantes foram orientados pela pesquisadora quanto à importância desta pesquisa para o meio científico e social, bem como para a participação deles no período de coleta de dados. Em seguida, cada estudante recebeu dois documentos: o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (ver Anexo I), com os principais dados da pesquisa, e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ver Anexo II), encaminhados aos responsáveis legais para a autorização da participação da pesquisa e o uso de áudio dos diálogos entre os estudantes, quando necessário, para melhor fidelidade das informações e análises da pesquisa. Mesmo assim, não obtivemos a autorização de um dos estudantes da turma. Neste caso, ele participou das aulas, mas os dados coletados do grupo em que participou não foram levados em consideração para análise *a posteriori* da presente pesquisa.

A *sequência didática* que serviu de instrumento de coleta de informações para a pesquisa, cuja descrição detalhada encontra-se no capítulo 4, é relativa ao objeto matemático função afim. As atividades que a compõem foram elaboradas a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica; e tem como base pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, especialmente no que se refere às situações *adidáticas*, associadas às dialéticas de ação, formulação e validação, e ao respaldo na organização do ambiente didático para a realização da investigação. A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática. Dentre as fases dessa metodologia (análises preliminares, concepção e análises *a priori*, experimentação e análises *a posteriori* e validação) destacamos aqui as análises *a priori*, as quais foram realizadas minuciosamente, buscando identificar as diferentes estratégias, adequadas ou não do ponto de vista matemático, que deram suporte para as ações da pesquisadora em sala de aula e organização do ambiente didático no momento da implementação das atividades com os estudantes.

Após a elaboração da sequência didática, bem como das análises *a priori* de cada atividade, essa fora apresentada pela pesquisadora e discutida com os membros do grupo GEPeDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática, formado por pesquisadores mestrandos, doutorandos e docentes do PPGECEM – Unioeste e do PRPGEM – Unespar, os quais apresentaram sugestões, complementações e encaminhamentos para a (re)estruturação das atividades e das respectivas análises *a priori*.

Antes do início da aplicação da sequência didática, os estudantes desta turma já haviam trabalhado com a pesquisadora os seguintes conteúdos previstos para o 1º ano do Ensino Médio: conjuntos numéricos e seus intervalos, medidas de informática, o conceito fundamental de função, com vistas para as ideias base de variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização. As abordagens metodológicas perpassaram a aplicação de atividades investigativas e a resolução de problemas do cotidiano que proporcionaram a reflexão sobre tais conceitos.

Pelo fato de os estudantes cursarem o 1º ano e já terem estudado o conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental, bem como ideias base do conceito de função no primeiro semestre do ano de 2019, consideramos pertinente a realização de um *teste diagnóstico*, o qual os estudantes responderam individualmente, com o propósito de observarmos quais conhecimentos cada estudante apresentava sobre o conteúdo de função afim com o foco nos diferentes registros de representação semiótica (língua natural, gráfico, simbólico algébrico/numérico) e na interpretação global de propriedades figurais. As atividades e resultados do teste diagnóstico estão apresentados nas últimas seções deste capítulo, 3.4 e 3.5.

Após finalizada a sequência didática e suas análises *a priori*, iniciamos a aplicação, a qual foi realizada nas aulas regulares, ou seja, um encontro semanal de duas aulas de 50 minutos cada, às sextas-feiras, totalizando 16 aulas. Os estudantes da turma foram organizados em trios, a critério dos próprios participantes e sem intervenção da pesquisadora, por dois motivos: primeiro, pretendíamos proporcionar diálogos entre os participantes e a comunicação necessária de ser vivenciada durante as situações *adidáticas* de ação, formulação e validação; e, segundo, pelo fato de o colégio dispor de apenas 13 provetas graduadas para a realização da atividade 1 da sequência didática. Informamos que os grupos formados no primeiro dia de aplicação foram os mesmos até o final da aplicação da sequência didática, com exceções nos dias em que houve falta de alguns estudantes.

A *coleta de dados* pela pesquisadora durante a execução da sequência de atividades se deu por meio: 1) das resoluções das atividades em registro escrito pelos estudantes: uma via recolhida após a sua execução para análise fiel dos dados e outra via, em folha colorida, que permanecia com o estudante para institucionalizações posteriores; 2) dos *prints* de tela dos *smartphones* dos estudantes enviados para a pesquisadora por meio do aplicativo *WhatsApp*; 3) das gravações por meio de áudio dos grupos durante as discussões das atividades feitas com gravadores pessoais da pesquisadora[16] e estudantes que se dispuseram em gravar os seus áudios com seus próprios *smartphones*; e 4) da filmagem da pesquisadora nos momentos de discussão das atividades e institucionalizações com toda turma para controle e organização das intervenções que foram realizadas quando julgamos ser necessário.

O Quadro 11, a seguir, apresenta o *cronograma de aplicações da sequência didática* com a data de aplicação, o número de aulas trabalhadas e as atividades aplicadas.

Data	**Número de Aulas**	**Atividades Aplicadas**
14/08	1	Atividade Diagnóstica 1
16/08	1	Atividades Diagnósticas 2 e 3
23/08	2	Atividade 1 – Parte 1
30/08	2	Atividade 1 – Parte 2
06/09	1	Atividade 2
13/09	1	Atividade 2
20/09	2	Atividade 3
20/09	2	Atividade 4
27/09	2	Atividade 5
04/10	2	Atividade 6
TOTAL	**16 aulas**	

Quadro 11: Cronograma de aplicação da sequência didática
Fonte: Autora

Apresentamos na sequência as atividades do teste diagnóstico seguidas da análise de seus resultados.

[16] Todo o processo de gravação foi acompanhado pela pesquisadora que dispunha de 8 gravadores. Como eram 11 equipes, foram utilizados 3 *smartphones* dos estudantes que se dispuseram a, também, gravar as discussões de seus grupos.

3.4 O Teste Diagnóstico

Antes do início da implementação da sequência didática, foram aplicadas três atividades (ver Apêndice I), consideradas como diagnósticas, que tiveram o intuito de identificar conhecimentos prévios manifestados pelos estudantes acerca do conceito de função afim, antes da implementação da sequência didática. Os sujeitos resolveram o teste diagnóstico, apresentado a seguir, de forma individual, e, por esta razão, não houve gravação de áudios.

1) Adaptado (RORATTO, 2009) - O senhor Traba Lhador foi na fotocopiadora ao lado de seu trabalho e deparou-se com a seguinte tabela:

Quantidade	**Valor da cópia em preto e Branco (R$)**	**Valor da cópia colorida (R$)**
1	0,20	
2	0,40	2,40
3		3,60
4		
5	1,00	6,00
6		7,20
7	1,40	
8		
9		
10	2,00	12,00
ENCADERNAÇÃO = R$ 2,50		

a) Quanto o senhor Traba Lhador gastaria ao tirar 9 cópias em preto e branco? E ao tirar 8 cópias coloridas?

b) O senhor Traba Lhador dispõe de R$ 156,00 para a reprodução dos panfletos de divulgação da sua nova loja. Quantas cópias coloridas ele poderá fazer? Explique como você determinou sua resposta.

c) Considerando que o senhor Traba Lhador fez uma quantidade qualquer de cópias em preto e branco, descreva com a suas palavras os passos para determinar o valor a ser a pago.

d) Qual a "lei" de formação que determina o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias em preto e branco?

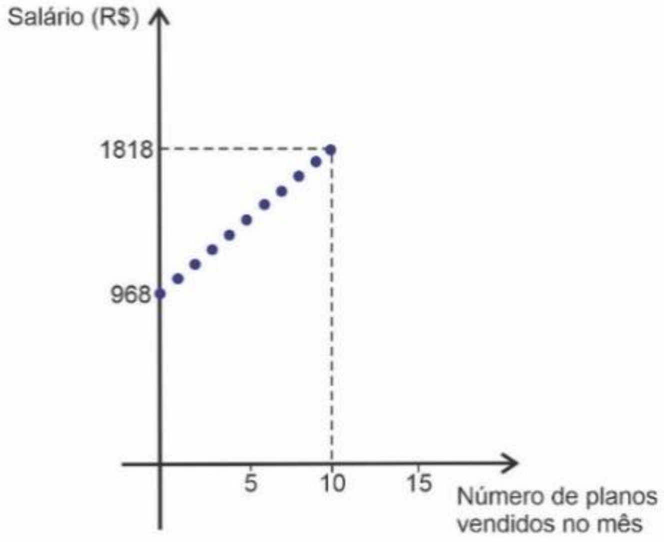
e) Represente graficamente a função definida no item (d).

f) Sabendo que a encadernação custa R$ 2,50 qual seria o valor total a ser pago pelo senhor Traba Lhador após fotocopiar e encadernar 150 folhas em preto e branco?

g) Escreva com as suas palavras o que Senhor Traba Lhador precisar fazer para saber qual o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias coloridas e encadernadas ao final?

h) Qual é a "lei" de formação que determina o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias coloridas encadernadas?

2) O salário mensal de um vendedor da empresa Planos de Saúde Mil está representado no gráfico a seguir:



a) Do que depende o salário final mensal de um vendedor desta empresa?

b) Quanto o vendedor recebe por cada plano de saúde vendido no mês?

c) Se o vendedor não realizar vendas em um determinado mês, qual é o valor do seu salário?

d) Qual é o valor a ser pago de salário para um vendedor que vendeu 15 planos de saúde no mês?

e) Como a frase "*o salário do vendedor depende do número de planos de saúde que ele vende mensalmente*" poderia ser expressa em linguagem matemática? Justifique.

f) Qual a "lei" de formação que determina o valor de salário a ser pago para o vendedor que vende uma quantidade qualquer de planos?

3) Joana e Roberta, residentes na mesma cidade, realizam pinturas a mão em xícaras de cerâmica sob encomenda. Para tanto, cada uma delas representou o valor a ser pago pelos seus clientes a partir das seguintes expressões algébricas:

Joana	$V = 25 + 12.x$
Roberta	$V = 20 + 22.x$

sendo V o valor final a ser pago e x o número de xícaras encomendadas.
a) Represente graficamente cada uma destas expressões algébricas.

b) Descreva diferenças e semelhanças que você pode observar em relação às expressões algébricas para os negócios de Joana e Roberta.

c) Agora, descreva diferenças e semelhanças em relação aos gráficos construídos no item (a), ao comparar com suas respectivas expressões algébricas.

O objetivo da atividade 1 do teste diagnóstico era identificar quais conhecimentos os estudantes mobilizavam em relação ao conceito de função afim, tendo como partida o registro de representação língua natural e o suporte de uma tabela com informações e dados na representação numérica para a resolução da atividade. Especificamente, tivemos a pretensão de examinar como ocorre a mobilização das ideias base de variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização relativas ao conceito de função, bem como a realização de conversões entre os registros de representação língua natural (LN) para o simbólico algébrico (RSA) e simbólico algébrico (RSA) para o gráfico (RGRA).

Com a atividade 2 pretendíamos identificar quais conhecimentos os estudantes manifestavam em relação à função afim, tendo como partida o registro de representação gráfico, ou seja, a intenção era analisar como o estudante interpretava e operava com os dados dispostos no gráfico, bem como realizava a conversão entre os registros de representação gráfico para o simbólico algébrico.

Na atividade 3 do teste diagnóstico tivemos a intenção de identificar quais conhecimentos os estudantes apresentavam em relação à conversão entre os registros de representação simbólico algébrico para o gráfico e se identificavam a taxa de variação e o coeficiente linear nas expressões algébricas envolvidas no problema. Além disso, nossa pretensão era de analisar como os estudantes identificavam as variáveis visuais de representação no gráfico da função afim e as relacionavam às unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, ou seja, se realizavam uma interpretação global da função afim entre os registros de representação simbólico algébrico e gráfico.

O Quadro 12, a seguir, especifica os itens de cada uma das atividades do teste diagnóstico, indicando quais elementos da função afim foram contemplados e suas respectivas possibilidades de tratamentos e/ou conversões.

ATIV. DIAG.	ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $\boldsymbol{f(x) = a.x + b}$	TRATAMENTO	CONVERSÃO
1	1. a) Cálculo com valores da função afim com $b = 0$.	RSN	
	1. b) Cálculo com valores da função afim com $b = 0$.	RSN	
	1. c) Lei de formação com $b = 0$.	LN	
	1. d) Lei de formação com $b = 0$ (generalização).		LN ➔ RSA
	1. e) Construção de um gráfico.		RSA ➔ RGRA
	1. f) Cálculo com valores da função afim com $b \neq 0$.	RSN	
	1. g) Lei de formação com $b \neq 0$ (generalização).	LN	
	1. h) Lei de formação com $b \neq 0$ (generalização).		LN ➔ RSA
2	2. a) Relações de dependência.	LN	
	2. b) Taxa de variação na representação gráfica.		RGRA ➔ RSN
	2. c) Coeficiente linear na representação gráfica.		RGRA ➔ RSN
	2. d) Cálculo com valores da função afim.		RGRA ➔ RSN
	2. e) Lei de formação (generalização).	LN	LN ➔ RSA
	2. f) Lei de formação (generalização).		RGRA ➔ RSA
3	3. a) Construção de um gráfico.		RSA ➔ RGRA
	3. b) Comparação entre as taxas de variação e dos coeficientes lineares das expressões algébricas.	RSA	
	3. c) Interpretação Global entre os registros de representação RSA e RGRA.		RSA ➔ RGRA

Quadro 12: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre registros de representação das atividades diagnósticas
Fonte: Autora

Especificamente para a atividade 3, item (c), cuja proposta era verificar indicativos de uso da interpretação global da função afim pelos estudantes, elaboramos o Quadro 13, que especifica as unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, suas respectivas variáveis visuais de representação no registro gráfico e os seus valores envolvidos no problema. A ideia principal era de que o estudante observasse as mudanças ocorridas entre os gráficos e as confrontasse com os respectivos valores para as taxas de variação e coeficientes lineares nas expressões algébricas.

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM	UNIDADE SIMBÓLICA SIGNIFICATIVA	VARIÁVEL VISUAL DE REPRESENTAÇÃO	VALORES
3. c) Interpretação Global entre o RSA e RGRA.	- Sinal do coeficiente a	- Sentido de inclinação	Ascendente
	- Valor do coeficiente a	- Ângulos com os eixos	Ângulo $\alpha > \beta$
	- Valor do coeficiente b	- Posição sobre o eixo	$b > 0$

Quadro 13: Elementos da função afim envolvidos na interpretação global da atividade 3 do teste diagnóstico
Fonte: Autora

3.5 O Resultado do Teste Diagnóstico

O teste diagnóstico ocorreu em duas etapas: a atividade 1 foi realizada em uma aula do dia 14 de agosto de 2019, na qual estavam presentes 34 estudantes, e as atividades 2 e 3 em uma aula do dia 16 de agosto de 2019, com 33 estudantes presentes. Em ambas as aulas as atividades foram realizadas individualmente com os seguintes materiais: lápis, borracha, folha de questões e calculadora.

Todos os estudantes apresentaram resolução correta de R$1,80 para o item (a) da atividade 1, cuja pergunta fora sobre o valor a ser pago por 9 cópias em preto e branco, sendo o valor da cópia unitária R$0,20. Neste mesmo item, quando lhes perguntamos sobre o valor a ser pago por 8 cópias coloridas, vinte e nove estudantes realizaram a multiplicação entre o valor da cópia colorida unitária R$1,20 pela quantidade de cópias e apresentaram a resposta correta de R$9,60. No entanto, três estudantes apresentaram resoluções incorretas: um realizou a multiplicação do valor de duas cópias R$2,40 pelas 8 cópias pedidas; outro concluiu que o resultado seria R$2,60 sem justificativas e um estudante partiu do preenchimento da tabela, mas apresentou cálculos incorretos na determinação do número de cópias. Dois estudantes não determinaram o valor a ser pago pelas cópias coloridas. Observamos, neste item, que os estudantes realizaram corretamente, de forma geral, o tratamento no registro simbólico numérico a partir dos dados dispostos na tabela. Porém, observamos as primeiras dificuldades na identificação da regularidade da situação descrita, uma vez que, para as cópias coloridas, não havia sido dado o valor da cópia unitária.

No item 1.(b), questionamos os estudantes sobre a quantidade de cópias possíveis de serem feitas com a quantia de R$156,00. Neste caso, vinte e sete deles mobilizaram corretamente as relações de dependência e correspondência entre as variáveis quantidade de cópias (x) e o valor a pagar (y), ou seja, demonstraram realizar um tratamento correto no registro de representação simbólico numérico, e, apesar de estratégias diferenciadas, apresentaram como resultado 130 cópias.

Dentre as resoluções incorretas: dois estudantes apresentaram a multiplicação entre o valor de R$156,00 por R$1,20 respectivo ao valor de uma cópia colorida; um estudante obteve como resposta a quantia de 46 cópias, sem justificativas; e outro concluiu que poderiam ser feitas 390 cópias, resultado obtido da multiplicação entre R$156,00 por R$2,50 referente ao valor da encadernação. Observamos que estes estudantes não identificam as relações de dependência, correspondência e regularidade entre as variáveis quantidade de cópias (x) e valor a ser pago (y) envolvidas no problema, especialmente na dependência da variável y para x. Três estudantes não apresentaram resoluções.

No item 1.(c), no qual os estudantes deveriam descrever em língua natural os passos para determinar o valor a ser pago por uma determinada quantidade de cópias, catorze estudantes apresentaram respostas coerentes, ou seja, realizaram um tratamento correto no registro em língua natural, pois explicaram que o valor final a ser pago será dado pela multiplicação entre o valor de uma cópia pela quantidade de cópias desejadas. Sete estudantes, apesar de terem apresentado respostas corretas, descreveram a situação a partir de outros registros de representação: por meio de exemplos numéricos ou pela generalização no registro simbólico algébrico.

Dez estudantes descreveram a situação em língua natural de forma incorreta. Nestes casos, conjecturamos que os estudantes não compreenderam o que estava sendo pedido e não souberam realizar um tratamento no registro em língua natural. Três estudantes entregaram a questão em branco.

Quando nos referimos à generalização do problema no item 1.(d), apenas quinze estudantes apresentaram resoluções corretas a partir da expressão algébrica $V = 0{,}20.x$, sendo V o valor a ser pago e x a quantidade de cópias. Consideramos que estes estudantes efetuaram corretamente a conversão entre o registro em língua natural para o simbólico algébrico. Outros dois estudantes apresentaram a generalização em língua natural, semelhante ao item 1.(c) e, nestes casos, consideramos que não houve conversão entre os registros de representação envolvidos no problema. Quatro estudantes apresentaram resoluções incorretas e treze deixaram o item sem resolução.

No item 1.(e), para a representação gráfica da expressão algébrica definida no item 1.(d), apenas dois estudantes expressaram graficamente a função afim de forma correta, pois partiram da expressão algébrica $V = 0{,}20.x$ e levaram em consideração o domínio discreto nos Naturais, implícito ao problema. Outros quatro estudantes, apesar de terem apresentado um gráfico de uma função afim, desconsideraram a restrição para os valores do domínio e traçaram a reta para esboçar o gráfico da expressão algébrica $V = 0{,}20. x$. Notamos que estes realizaram a conversão entre o registro simbólico algébrico para o gráfico, a partir da abordagem ponto a ponto e de extensão do traçado efetuado (DUVAL, 2011), pois representaram pontos em pares ordenados obtidos da expressão algébrica ou da tabela inicial do problema e, posteriormente, uniram os pontos marcados em uma reta, delineando o gráfico.

Identificamos que dezesseis estudantes entregaram a atividade 1 com o item (e) sem resolução. Ademais, doze estudantes apresentaram resoluções incorretas, dentre eles: sete representaram os eixos graduados e marcaram pontos aleatórios não condizentes com a situação proposta; e cinco apenas representaram os eixos x e y.

Quando o coeficiente linear b da função afim é diferente de zero, ou seja, há o acréscimo de uma parte fixa na expressão algébrica mediante a situação descrita no item 1.(f), apenas treze estudantes apresentaram resoluções corretas, considerando, além da multiplicação entre o valor de uma cópia em preto e branco pela quantidade de cópias pedidas, o acréscimo de R$2,50 referente ao valor da encadernação, obtendo como resposta correta R$32,50. No entanto, dezessete estudantes não obtiveram resultados corretos, sendo a resolução incorreta mais comum dentre estes, a multiplicação entre o número de cópias pedidas, 150, pelo valor de R$2,50 referente à encadernação. Quatro estudantes entregaram o item 1.(f) sem resolução.

No item 1.(g), cuja proposta era descrever os passos para determinar o valor a ser pago por uma certa quantidade de cópias coloridas e encadernadas, dos treze estudantes que apresentaram a resposta correta ao item 1.(f), apenas nove deles explicaram corretamente que o valor a ser pago seria dado pela multiplicação entre a quantidade de cópias pedidas e o valor de uma cópia colorida, acrescentando, ao final, o valor de R$2,50 para a encadernação. Com isso, observamos que nem todos os estudantes que realizaram corretamente o tratamento no registro simbólico numérico, no item 1.(f), conseguiram realizar o tratamento no registro em língua natural quando o coeficiente linear b é diferente de zero. Ainda, neste item, dezessete estudantes apresentaram resoluções incorretas, entre elas, descreveram que o valor a pagar seria dado pela multiplicação entre três fatores: o valor da cópia colorida unitária, quantidade de cópias pedidas e o valor da encadernação. Oito estudantes entregaram o item sem resolução.

No último item desta atividade, no qual deveriam apresentar a generalização da situação descrita do item 1.(f), apenas cinco estudantes apresentaram a expressão algébrica $V = 1{,}20.x + 2{,}50$ para V o valor a ser pago e x a quantidade de cópias realizadas. Quinze estudantes apresentaram respostas incorretas, dos quais seis generalizaram a situação pela expressão $V = 1{,}20.x$ desconsiderando o valor para a encadernação. Por fim, quatorze estudantes deixaram o item em branco.

No item (a) da atividade 2, trinta estudantes identificaram as variáveis envolvidas e a relação de dependência entre elas a partir da leitura do gráfico, descrevendo que o salário final mensal depende do número de planos de saúde vendidos durante o mês. Apenas três estudantes responderam incorretamente e, a partir da análise de suas respostas, observamos que estes não levaram em consideração os dados apresentados no gráfico para a elaboração da resposta e, portanto, não houve compreensão da questão.

Onze estudantes identificaram corretamente, no item (b), a taxa de variação da função afim no registro gráfico, ou seja, realizaram a conversão para o registro simbólico numérico e efetuaram um tratamento neste último registro. Vinte e um estudantes apresentaram incorretamente o item, dos quais citamos, como exemplo, a estratégia de resolução mais utilizada: divisão de 1818 reais por 10 planos, obtendo R$181,80 por plano vendido. Um estudante entregou a questão em branco. Nestes casos, além de os estudantes não realizarem adequadamente a conversão do registro gráfico para o registro simbólico numérico, não identificam a taxa de variação da função afim no registro de representação gráfico.

Para relacionar o coeficiente linear da função afim apresentada em seu registro gráfico, perguntamos no item 2.(c) qual o valor do salário caso não houvesse venda de planos de saúde. Neste caso, dezenove estudantes responderam corretamente que o salário seria R$918,00. Porém, dez estudantes responderam incorretamente, entre eles, quatro afirmaram que o salário seria R$0,00. Também, quatro entregaram este item sem resolução. Com base nestes dados, observamos que estes estudantes apresentam dificuldades na interpretação do gráfico e para realizar uma conversão entre este registro e o registro simbólico numérico. Ademais, não associam o valor inicial da função afim em seu registro gráfico.

No item 2.(d), o estudante precisaria ter determinado, no item 2.(b), a taxa de variação da função para, então, calcular o valor do salário após a venda de 15 planos de saúde em um mês. Assim, dos onze estudantes que haviam respondido corretamente o item 2.(b), nove deles apresentaram resposta correta para este item. Vinte e um estudantes apresentaram resoluções incorretas, os quais já haviam respondido erroneamente, também, o item 2.(b). Neste caso, a estratégia de resolução mais utilizada foi multiplicar o valor encontrado no item (b) de R$181,80 por 15 planos de saúde vendidos, obtendo como resposta R$2727,00. Três estudantes não apresentaram estratégias para resolução. Em relação a este item, observamos as dificuldades para converter a função afim em seu registro de representação gráfico para dados no registro simbólico numérico, bem como operar com eles.

No item 2.(e), identificamos apenas duas respostas corretas, uma vez que os estudantes apresentaram a generalização $S = 85.x + 968$, sendo S os valores para o salário e x o número de planos vendidos no mês. Quinze estudantes deixaram em branco e dezesseis apresentaram respostas incorretas. De forma geral, consideramos o item de difícil entendimento para os estudantes, uma vez que não estão acostumados a reescreverem uma situação dada em língua natural para a linguagem matemática, ou seja, apresentam dificuldades em realizar um tratamento em língua natural, bem como realizar a conversão entre este registro e o registro simbólico algébrico.

No entanto, no item 2.(f), quando lhes perguntamos sobre a lei de formação da situação, sete estudantes, os quais apresentaram respostas corretas para os itens 2.(b), 2.(c) e 2.(d), relacionaram a situação com a expressão $S = 968 + 85.x$, sendo S a variável salário e x o número de planos vendidos no mês. Treze estudantes apresentaram outras expressões algébricas para o item 2.(f), entre elas $S = 181{,}80.x$, dados obtidos a partir de itens anteriores. Outros treze estudantes entregaram sem resolução. Como os estudantes apresentaram dificuldades em identificar no registro gráfico a taxa de variação e o coeficiente linear da função afim, consequentemente, o processo de generalização, ou seja, a conversão do registro gráfico para o registro simbólico algébrico não é concluída com presteza.

Após identificarmos na atividade 1 a dificuldade dos estudantes em representar uma função graficamente a partir da sua expressão algébrica, o mesmo ocorreu na atividade 3, item (a), no qual nenhum estudante apresentou a construção gráfica correta para ambas as expressões algébricas propostas no problema. Isso nos faz refletir que possivelmente os dois estudantes que apresentaram os gráficos corretos na atividade 1.(e), não partiram da expressão algébrica, mas dos dados dispostos na tabela de valores, convertendo-os em pontos para o plano cartesiano.

No item (a), na atividade 3, vinte e quatro estudantes entregaram em branco e nove deles tentaram, de alguma forma, esboçar um gráfico. Dentre estes, quatro apresentaram retas quaisquer sobre os eixos do plano cartesiano, numericamente sem relação com as expressões algébricas dadas; dois estudantes marcaram apenas um ponto qualquer sobre o plano cartesiano, também sem relação numérica com as expressões algébricas; outros dois apresentaram gráficos em reta, porém, com os eixos invertidos, ou seja, y na horizontal e x na vertical.

No item 3.(b), apenas três estudantes delimitaram suas observações referentes às diferenças e semelhanças entre as expressões algébricas das funções afim mencionados no problema. Dentre as diferenças, dois estudantes citaram que os valores das xícaras são diferentes e outro mencionou que os números e resultados são diferentes, percebendo a distinção entre os valores para a taxa de variação e o coeficiente linear nas expressões algébricas. Entre as semelhanças, os mesmos dois estudantes citaram que o valor a ser pago depende da quantidade de xícaras vendidas e um destacou que são calculados da mesma forma. Os demais estudantes entregaram sem qualquer tentativa para resolução.

Por fim, no item 3.(c) apenas um estudante, dos três supracitados, também apresentou considerações acerca das diferenças e semelhanças entre as representações gráficas. Porém, este realizou comparações sem a observação empírica dos referidos gráficos, pois não esboçou os gráficos no item 3.(a). Com isso, destacou dentre as diferenças que os gráficos seriam um maior e outro menor e nas semelhanças que os dois gráficos representam o valor de uma xícara. Com base nestas considerações, podemos concluir que os estudantes não realizam uma interpretação global entre os registros de representação simbólico algébrico e gráfico, ou seja, não identificam variáveis visuais de representação no registro gráfico e, tão pouco, associam às suas respectivas unidades simbólicas significativas da expressão algébrica.

Com base nas análises das resoluções dos sujeitos desta pesquisa, elaboramos o Quadro 14 com os conhecimentos de função afim manifestados pelos estudantes nas atividades do teste diagnóstico. Em contrapartida: 1) as diversas respostas em branco; 2) os erros relacionados à mobilização das ideias base de função (dependência, regularidade e generalização) e à identificação dos elementos da função afim, taxa de variação e coeficiente linear em diferentes registros de representação; 3) a falta de compreensão nas atividades cognitivas de tratamento e conversão entre os registros simbólico algébrico e gráfico; e 4) a ausência de uma interpretação global de propriedades figurais da função afim entre os registros simbólico algébrico e gráfico mostram as dificuldades destes estudantes em relação à função afim, mencionadas, também, no Quadro 14.

CONHECIMENTOS SOBRE A FUNÇÃO AFIM MANIFESTADOS PELOS SUJEITOS NO TESTE DIAGNÓSTICO	DIFICULDADES SOBRE A FUNÇÃO AFIM MANIFESTADAS PELOS SUJEITOS NO TESTE DIAGNÓSTICO
- Determinam valores para uma função linear $f(x) = a.x$, dada no registro em língua natural e com dados dispostos na representação numérica em tabelas. - Identificam a regularidade da função afim a partir de dados dispostos em tabelas. - Percebem a relação de dependência e correspondência entre as variáveis x e y da função afim, cujos dados foram dispostos em tabelas. - Identificam a relação de dependência entre as variáveis de uma função afim $f(x) = a.x + b$ dada a partir do registro de representação gráfico.	- Apresentar a generalização para a função afim $f(x) = a.x + b$ (e linear $f(x) = a.x$) na expressão algébrica, a partir da língua natural. - Apresentar a generalização para a função afim $f(x) = a.x + b$ (e linear $f(x) = a.x$) na expressão algébrica, a partir da representação numérica em tabelas. - Representar graficamente uma função afim $f(x) = a.x + b$, bem como uma função linear $f(x) = a.x$, a partir do registro simbólico algébrico. - Determinar valores para uma função afim $f(x) = a.x + b$, dada no registro em língua natural e com dados dispostos na representação numérica em tabelas. - Determinar os valores para taxa de variação e coeficiente linear de uma função afim $f(x) = a.x + b$ dada no registro de representação gráfico. - Determinar valores para uma função afim $f(x) = a.x + b$ dada no registro de representação gráfico. - Apresentar a expressão algébrica de uma função afim $f(x) = a.x + b$ a partir do registro de representação gráfico. - Identificar as variáveis visuais de representação no registro gráfico e associar às suas respectivas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica.

Quadro 14: Conhecimentos e dificuldades manifestados pelos sujeitos no teste diagnóstico
Fonte: Autora

Os resultados do teste diagnóstico revelam as dificuldades dos estudantes acerca do conceito de função afim, notadamente no que diz respeito à articulação entre os diferentes registros de representação semiótica. Tal fato confirma a necessidade de uma investigação, com intenções didáticas, a partir de uma sequência composta por situações *adidáticas*, que possibilite a análise da aprendizagem dos estudantes sobre a função afim relativa à interpretação global de propriedades figurais.

No próximo capítulo apresentamos a construção da sequência didática e suas análises *a priori*, incluindo as variáveis didáticas selecionadas para a elaboração da situação proposta.

CAPÍTULO 4

A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as variáveis didáticas que direcionaram a construção da sequência didática e as atividades que a compõem seguidas de suas análises a *priori.*

4.1 Variável didática

Variáveis didáticas são definidas por Bittar (2017) como os "[...] elementos da situação, que ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos" (BITTAR, 2017, p. 104). Para tanto, a escolha das variáveis didáticas deve ser realizada cuidadosamente, pois estas influenciam diretamente os estudantes na escolha dos procedimentos para a resolução das atividades. Neste caso, a variável didática levada em consideração na elaboração das atividades desta investigação é a *diversidade de registros de representação semiótica*.

Maggio, Soares e Nehring (2010) argumentam que a prática pedagógica dos professores de matemática é baseada exclusivamente nos livros didáticos. Nestes materiais, segundo as autoras, privilegia-se o estudo das funções com tratamentos no registro algébrico e conversões, geralmente, em um único sentido, como entre língua natural para o simbólico algébrico e este último para o gráfico. No entanto, as conversões em sentidos contrários raramente são mencionadas nos livros didáticos, seja na apresentação do conteúdo ou nos exercícios. Ademais, Queiroz (2014) menciona que os diferentes registros para o conceito de função são trabalhados separadamente, sem o incentivo à sua coordenação.

Duval (2003) salienta que a falta de articulação entre os registros de representação, bem como a ênfase em um único sentido de conversão, compromete a construção de novos conhecimentos e a apreensão do objeto matemático, uma vez que o estudante, nestes casos, não identitica a função, por exemplo, em diferentes representações. "É enganadora a ideia de que todos os registros de representação de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros" (DUVAL, 2003, p. 31). Assim, procuramos diversificar nas atividades os registros de representação para que o estudante possa reconhecer e mobilizar a função afim a partir de diferentes situações, uma vez que as propriedades do objeto não são as mesmas em cada registro.

4.2 A Sequência Didática e Análises *a Priori*

A sequência didática foi desenvolvida com o objetivo de analisar e promover a aprendizagem dos estudantes sobre a função afim a partir de atividades relacionadas à interpretação global de propriedades figurais. Para isso, buscamos a elaboração de situações *adidáticas* com a intenção de proporcionar a devolução por parte dos estudantes, ou seja, momentos em que os estudantes aceitam a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (*adidática*) (BROUSSEAU, 1996). Também, pretendemos que as situações propostas propiciem aos estudantes momentos *adidáticos* para agir, discutir, formular ideias, conjecturar e validar informações. Para isso, buscamos contemplar nas atividades o uso de experimentos, a resolução de problemas, aspectos da investigação matemática e o uso de aplicativos para *smartphone*, os quais otimizam e dinamizam o estudo dos objetos matemáticos. Posteriormente, junto à pesquisadora, esperamos que os estudantes vivenciem momentos didáticos de institucionalização do saber em jogo - o conceito de função afim e seus elementos, tais como taxa de variação e coeficiente linear, a partir de diferentes registros de representação semiótica e da interpretação global das propriedades figurais.

A seguir, apresentamos cada uma das atividades (ver Apêndice II) que compõe a sequência didática, seguida de suas análises *a priori*. Tais análises foram realizadas minuciosamente pela pesquisadora, levando em consideração os estudos realizados nas análises preliminares, e contou com a colaboração de membros do GEPeDiMa que também auxiliaram na busca de possibilidades de estratégias, resoluções e respostas para cada uma das atividades propostas na sequência didática. A partir das análises a *priori*, e assim como menciona Bittar (2017), a pesquisadora esteve melhor preparada para compreender as resoluções, erros e possíveis questionamentos que surgiram durante a implementação das atividades, contribuindo para que as intervenções realizadas pudessem favorecer a aprendizagem dos estudantes.

Nas atividades 1, 3 e 6 da sequência didática desenvolvida para esta pesquisa, optamos por utilizar aplicativos para *smartphone* que permitissem auxiliar os estudantes no estudo da interpretação global da função afim. Para tanto, optamos pela utilização dos aplicativos *Desmos*[17] e *GeoGebra* (*Graphing Calc*)[18] (ver Apêndice III), ambos para o sistema *Android*.

4.2.1 Atividade 1

Vamos fazer um pequeno experimento por meio da observação do comportamento do nível de água em uma proveta graduada quando inserimos nela algumas bolinhas de gude. Coloque 40 ml de água na sua proveta graduada.

a) Construa uma tabela com os dados pedidos a partir das observações realizadas.

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	**Nível de água na proveta graduada (ml)**

b) Qual é o valor inicial de água colocada na proveta graduada?

c) Quanto aumenta o nível de água na proveta graduada cada vez que você coloca uma bolinha de gude?

d) Qual seria o nível de água na proveta graduada se você colocasse 10 bolinhas? E 15 bolinhas? E 28 bolinhas? Explique como você determinou suas respostas.

e) Quantas bolinhas seriam necessárias para que o nível de água na proveta graduada atingisse 180 ml? E 250 ml? Explique como você determinou suas respostas.

f) Com base nos dados dispostos na tabela do item (a), descreva de que modo podemos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas de gude colocada na proveta graduada que possui 40 ml de água inicialmente.

g) Estabeleça uma "lei" de formação de modo que possamos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas colocadas na proveta graduada.

h) Se mudarmos a quantidade de água inicial na proveta graduada para 55 ml e ainda com as mesmas bolinhas de gude, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação, comparada a expressão descrita no item (g)?

[17] Disponível em https://play.google.com/store/apps/details?id=com.desmos.calculator&hl=pt_BR para *smartphones* com sistema Android e https://apps.apple.com/br/app/desmos-graphing-calculator/id653517540 para *smartphones* com sistema iOS.

[18] Disponível em https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android&hl=pt_BR para smartphones com sistema Android e https://apps.apple.com/br/app/c%C3%A1lculadora-gr%C3%A1fica-geogebra/id1146717204 para *smartphones* com sistema iOS.

i) Quais seriam as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml? Com ajuda do aplicativo *Desmos* digite a expressão algébrica encontrada na "lei" de formação da função definida no item (g). Depois, insira a nova "lei" de formação, obtida no item (h) e relate as suas observações.
- Faça um *print* do que aparece na tela do seu aplicativo *Desmos* e envie para a professora indicando foto 1.

j) Agora, suponhamos o experimento com bolinhas de gude de maior volume, ou seja, cada bolinha inserida em uma proveta graduada com 55 ml de valor inicial de água eleva o seu nível em 3 ml. Então, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação comparada com as anteriores definidas nos itens (g) e (h)?

k) Quais foram as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml e o tamanho das bolinhas de gude? Insira a nova "lei" de formação no aplicativo *Desmos* e relate as suas observações.
- Faça um *print* do que aparece na tela do seu aplicativo *Desmos* e envie para a professora indicando foto 2.

Análise a priori da atividade 1

O objetivo desta primeira atividade foi proporcionar o estudo da função afim e seus elementos, taxa de variação e coeficiente linear, a partir de uma situação contextualizada envolvendo um experimento com líquido, proveta graduada e bolinhas de gude e diferentes registros de representação: língua natural, simbólico numérico, simbólico algébrico e gráfico. Considerando a variável didática estabelecida para esta pesquisa - diversidade de registros de representação semiótica, as representações contempladas na atividade 1 são: língua natural, simbólica numérica, simbólica algébrica e gráfica.

No item (a), os grupos deveriam registrar as suas observações referentes ao nível de água durante a colocação de bolinhas de gude em uma proveta graduada com, inicialmente, 40 ml de água. Não indicamos aos estudantes a ordem da quantidade de bolinhas que deveriam colocar. Esta ação foi administrada pelos grupos que poderiam apresentar as seguintes resoluções corretas: (A.1) uma bolinha e o nível de água sobe para 42 ml; 2 bolinhas e o nível de água sobe para 44 ml; 3 bolinhas e o nível de água sobe para 46 ml; e assim sucessivamente; e (A.2) uma bolinha e o nível de água sobe para 43 ml; 2 bolinhas e o nível de água sobe para 46 ml; 3 bolinhas e o nível de água sobe para 49 ml; e assim sucessivamente.

Esperávamos no item (b) que os grupos indicassem o valor de água inicial do experimento. Acreditamos que os estudantes não apresentariam respostas incorretas ou em branco, pois poderiam obter o dado a partir de um tratamento no registro em língua natural ou após as observações e um tratamento nos dados organizados na tabela no registro simbólico numérico. Neste caso, poderiam apresentar como resposta correta: (B.1) valor inicial 40 ml.

No item (c), o objetivo foi proporcionar ao estudante o reconhecimento da regularidade da situação, ou seja, as bolinhas de gude de mesmo volume devem elevar o nível de água de forma constante, neste caso, em 2 ml ou 3 ml cada, a depender do grupo de bolinhas de gude. Indicamos como possíveis respostas corretas para este item: (C.1) aumenta 2 ml; e (C.2) aumenta 3 ml. E resposta incorreta: (C.3) o aumento de água varia em 1 ml, 2 ml ou 3 ml.

Para o item (d) esperávamos que os estudantes compreendessem a regularidade da situação. Assim, esperávamos que indicassem como determinar o nível de água na proveta após a observação da variação do líquido entre uma bolinha de gude e outra. Para isso, poderiam apresentar as seguintes estratégias de resolução corretas: (D.1) apresenta em língua natural que cada bolinha eleva o nível de água em 2 ml, como discutido no item (c), ou seja, com 10 bolinhas de gude na proveta graduada teremos 10 x 2 ml = 20 ml adicionado da quantidade inicial 40 ml, totalizando 60 ml de água; com 15 bolinhas de gude teremos 15 x 2 ml = 30 + 40 ml = 70 ml e para 28 bolinhas teremos 28 x 2 ml = 56 ml + 40 ml = 96 ml de água na proveta graduada; (D.2) apresenta os cálculos 10 x 2 ml = 20 + 40 = 60 ml; 15 x 2 ml = 30 + 40 = 70 ml; 28 x 2 ml = 56 + 40 = 96 ml; e (D.3) apresenta os cálculos 10 x 3 ml = 30 + 40 = 70 ml; 15 x 3 ml = 45 + 40 = 85 ml; 28 x 3 ml = 84 + 40 = 124 ml.

Dentre as respostas incorretas para o item (d) elencamos: (D.4) apresenta os cálculos 10 x 2 ml = 20 ml; 15 x 2 ml = 30 ml; 28 x 2 ml = 56 ml; (D.5) soma o nível inicial de água com a quantidade de bolinhas, ou seja, 10 + 40 = 50 ml; 15 + 40 = 55 ml; 28 + 40 = 68 ml; e (D.6) apresenta estratégia correta para o desenvolvimento da questão, porém efetua os cálculos erroneamente, seja pelo mau uso de vírgulas, números decimais ou operações básicas.

A partir da observação da regularidade presente na situação, no item (e) tínhamos a pretensão de que os estudantes determinassem a quantidade de bolinhas de gude a partir do nível de água na proveta graduada. Para isso, os estudantes poderiam apresentar as seguintes estratégias de resolução corretas: (E.1) 180 ml – 40 ml para o valor inicial de água = 140 ml e sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 2 ml, então 140 ÷ 2 = 70 bolinhas de gude; da mesma forma, 250 ml – 40 ml = 210 ÷ 2 = 105 bolinhas de gude; (E.2) 180 ml – 40 ml para o valor inicial de água = 140 ml e sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 3 ml, então 140 ÷ 3 = 46,6 ou aproximadamente 46 bolinhas de gude; da mesma forma, 250 ml – 40 ml = 210 ÷ 3 = 70 bolinhas de gude; e (E.3) determinam os valores por tentativas, variando o número de bolinhas, multiplicando por 2 e somando 40 ml ao final.

Como estratégias de resolução incorretas: (E.4) sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 2 ml, então 180 ml ÷ 2 = 90 bolinhas de gude e 250 ml ÷ 2 = 125 bolinhas de gude; (E.5) sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 3 ml, então 180 ml ÷ 3 = 60 bolinhas de gude e 250 ml ÷ 3 = 83,3 ou seja, 83 bolinhas de gude aproximadamente; (E.6) sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 2 ml, então 180 ml ÷ 2 = 90 subtraído dos 40 ml iniciais resulta em 50 bolinhas de gude e 250 ml ÷ 2 = 125 – 40 = 85 bolinhas de gude; (E.7) sabendo que cada bolinha eleva o nível de água em 3 ml, então 180 ml ÷ 3 = 60 subtraído dos 40 ml iniciais resulta em 20 bolinhas de gude ml e 250 ml ÷ 3 = 83 – 40 = 43 bolinhas de gude, aproximadamente; (E.8) multiplica a quantidade final de água 180 ml por 2 ml de cada bolinha e posteriormente 250 ml por 2 ml, ou seja, 180 x 2 = 360 bolinhas de gude e 250 x 2 = 500 bolinhas de gude; e (E.9) não apresenta resolução.

No item (f), esperávamos que os estudantes descrevessem no registro em língua natural a situação apresentada. Consideramos em nossa análise, a *priori*, as seguintes estratégias corretas de resolução: (F.1) apresenta em língua natural que, para determinar o nível de água na proveta, é necessário multiplicar a quantidade de bolinhas por 2 ml e posteriormente somar 40 ml, quantidade que já está na proveta graduada; e (F.2) apresenta em língua natural que, para determinar o nível de água na proveta, é necessário multiplicar a quantidade de bolinhas por 3 ml e posteriormente somar 40 ml, quantidade que já está na proveta graduada.

Como estratégias incorretas: (F.3) apresenta em língua natural que, para determinar o nível de água na proveta, é necessário multiplicar a quantidade de bolinhas por 2 ml; (F.4) apresenta em língua natural que, para determinar o nível de água na proveta, é necessário multiplicar a quantidade de bolinhas por 3 ml; (F.5) apresenta em língua natural que, para determinar o nível de água na proveta, é necessário somar 2 ml ou 3 ml para cada bolinha colocada; e (F.6) não apresenta resolução.

Esperávamos para o item (g) que os grupos apresentassem a generalização da situação. Para isso, poderiam apresentar as seguintes respostas corretas: (G.1) $A = 40 + 2.x$ ou $A = 2.x + 40$ onde A é o nível de água na proveta em ml e x a quantidade de bolinhas colocadas na proveta graduada; e (G.2) $A = 40 + 3.x$ ou $A = 3.x + 40$ onde A é o nível de água na proveta em ml e x a quantidade de bolinhas colocadas na proveta graduada. E respostas incorretas: (G.3) $A = 2.x$ ou $A = 3.x$; (G.4) $A = 2$ ou $A = 3$; e (G.5) não apresenta resolução.

No item (h), esperávamos que os grupos identificassem a mudança do coeficiente linear, tanto no problema em língua natural quanto na expressão algébrica, para 55. Os estudantes poderiam apresentar a seguinte resolução correta: (H.1) a expressão algébrica será definida por $A = 55 + 2.x$ ou $A = 2.x + 55$ onde A é o nível de água e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada, pois a quantidade inicial de água mudou para 55 ml. E respostas incorretas: (H.2) a expressão algébrica permanece a mesma do item (f), ou seja, $A = 40 + 2.x$; (H.3) a expressão algébrica será definida por $A = 2 + 55.x$ ou $A = 55.x + 2$ onde A é o nível de água e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada, pois a quantidade inicial de água mudou para 55 ml; (H.4) apresenta a expressão algébrica $A = 55.x$; e (H.5) não apresenta resolução.

Para o item (i), tínhamos como pretensão introduzir o estudo da interpretação global das propriedades figurais, ou seja, esperávamos que os grupos percebessem as mudanças ocorridas graficamente com a troca do coeficiente linear na expressão algébrica e no problema. A Figura 6 mostra como deveriam estar os gráficos das funções afim para a observação dos estudantes.

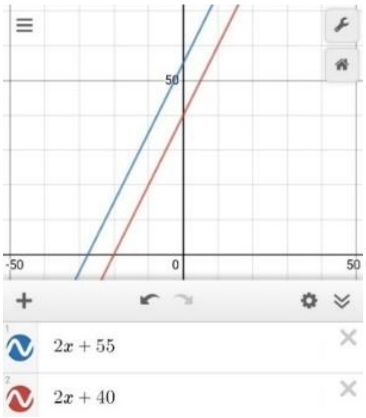


Figura 6: Provável tela do aplicativo *Desmos* para foto 1 do item (i)
Fonte: Autora

Neste caso, poderiam apresentar a seguinte estratégia correta de resolução: (I.1) o novo gráfico possui coeficiente linear igual a 55 ml diferente do anterior que era 40 ml. E incorretas: (I.2) o novo gráfico passa acima do gráfico anterior, pois está em 55 no eixo y; (I.3) o novo gráfico “subiu” em relação ao anterior; e (I.4) o novo gráfico é paralelo ao anterior, mas corta o eixo y no ponto (0,55).

O objetivo do item (j) era fazer os grupos identificarem a mudança na taxa de variação, tanto no problema em língua natural quanto na expressão algébrica, pois cada bolinha colocada na proveta graduada eleva o nível de água em 3 ml. Para tanto, poderiam apresentar como resposta correta: (J.1) a nova expressão algébrica será definida por $A = 55 + 3.x$ ou $A = 3.x + 55$ onde A é o nível de água e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada, pois a taxa de variação mudou para 3 ml. E respostas incorretas: (J.2) a expressão algébrica permanece a mesma do item (g), ou seja, $A = 40 + 2.x$; (J.3) a expressão algébrica permanece a mesma do item (h), ou seja, $A = 55 + 2.x$; e (J.4) a expressão algébrica será definida por $A = 3 + 55.x$ ou $A = 55.x + 3$ onde A é nível de água e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada, pois a taxa de variação mudou para 3 ml.

Semelhantemente ao item (i), esperávamos no item (k) que os grupos percebessem as mudanças ocorridas graficamente com a troca de valor para a taxa de variação na expressão algébrica. A Figura 7 mostra a tela de observação dos estudantes.

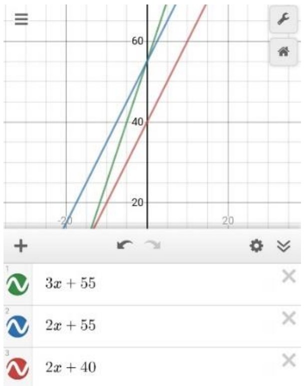


Figura 7: Provável tela do aplicativo *Desmos* para foto 2 do item (k)[19]
Fonte: Autora

Portanto, poderiam apresentar como resposta correta: (K.1) o novo gráfico possui uma inclinação maior em relação ao anterior. Resposta parcialmente correta: (K.2) o novo gráfico corta o eixo y no ponto (0,55). Ainda, resposta incorreta: (K.3) o novo gráfico "subiu" em relação ao anterior.

No Quadro 15, a seguir, estão listados os elementos da função afim propostos em cada item desta atividade, os registros de representação semiótica e as transformações – tratamento e/ou conversão, necessárias para a realização da atividade.

	ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $\boldsymbol{f(x) = a.x + b}$	TRATAMENTO	CONVERSÃO
ATIVIDADE 1	a) Organização de dados em tabela (experimento).		LN ➔ RSN
	b) Valor inicial da função afim.	LN e RSN	
	c) Taxa de variação da função afim.	RSN	
	d) Cálculo com valores da função afim com $b \neq 0$.	RSN	
	e) Cálculo com valores da função afim com $b \neq 0$.	RSN	
	f) Lei de formação (generalização).		RSN ➔ LN
	g) Lei de formação (generalização).	RSN e RSA	
	h) Comparação entre os coeficientes lineares nas expressões algébricas.	RSA	
	i) Interpretação Global – coeficiente linear.		RSA ➔ RGRA
	j) Comparação entre as taxas de variação lineares nas expressões algébricas.	RSA	
	k) Interpretação Global – taxa de variação.		RSA ➔ RGRA

Quadro 15: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre Registros de Representação da atividade 1 da Sequência Didática
Fonte: Autora

[19] Nas figuras 6 e 7 as representações gráficas apresentadas pelo aplicativo *Desmos* representam uma correspondência fiel às expressões algébricas $y = 3x + 55$; $y = 2x + 55$ e $y = 2x + 40$, mas não à situação discutida, dado que o domínio da função ($x \in \mathbb{N}$) não é representado nas imagens.

Também, elaboramos o Quadro 16 com as unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, suas respectivas variáveis visuais de representação e os seus valores envolvidos no problema.

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$	**UNIDADE SIMBÓLICA SIGNIFICATIVA**	**VARIÁVEL VISUAL DE REPRESENTAÇÃO**	**VALORES**
i) Interpretação Global – coeficiente linear.	- Valor do coeficiente b na expressão algébrica	- Posição sobre o eixo y	Corta acima da origem (diferença na posição da reta sobre o eixo y)
k) Interpretação Global – taxa de variação.	- Valor do coeficiente a na expressão algébrica	- Ângulos com os eixos	Ângulo $\alpha > \beta$ (diferença entre as inclinações das retas)

Quadro 16: Elementos da função afim e a abordagem de interpretação global da atividade 1 da Sequência Didática
Fonte: Autora

4.2.2 Atividade 2

1) Observe a tabela a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água.

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	**Nível de água na proveta graduada (ml)**
2	50
5	65
8	80
12	100

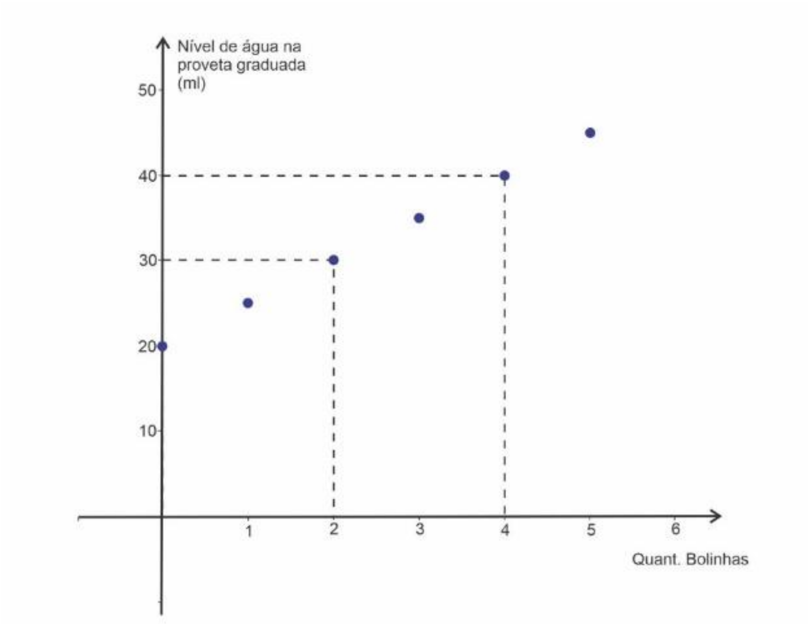
a) O nível de água na proveta graduada cresce quanto cada vez que uma bolinha de gude é colocada? Explique como você encontrou este valor.

b) Então, qual é a taxa de variação desta função? Justifique.

c) Qual é o coeficiente linear da função representada pela tabela? Explique como você encontrou este valor.

d) Com base nas informações da tabela, determine a "lei" de formação desta função.

2) Observe o gráfico a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água.



a) Qual é a quantidade inicial de água colocada na proveta graduada? Como este valor está associado à função descrita?

b) Conforme os dados apresentados no gráfico, qual é o nível de água na proveta graduada que aumenta quando é colocada uma bolinha de gude? Como este valor está associado à função descrita?

c) Determine a "lei" de formação da função desta situação.

Análises a priori da atividade 2

O objetivo da atividade 2 foi proporcionar o estudo da função afim e seus elementos, taxa de variação e coeficiente linear, tendo como partida um problema em língua natural que apresenta dados no registro de representação simbólico numérico e no registro de representação gráfico. Assim, a partir da variável didática estabelecida, os registros de representação contemplados nesta atividade são: língua natural, simbólico numérico, simbólico algébrico e gráfico.

No item (a) da atividade 2.1, esperávamos que os estudantes percebessem que, na tabela, a quantidade de bolinhas de gude não era sequencial e que eles precisariam efetuar cálculos para identificar o nível de água em uma proveta graduada que cada bolinha de gude eleva. Assim, poderiam apresentar diferentes resoluções corretas: (1.A.1) apresenta em língua natural que 3 bolinhas elevam o nível de água em 15 ml, pela diferença entre 65 ml e 50 ml para 5 e 2 bolinhas, respectivamente, então, cada bolinha eleva a água em 5 ml, pois 15 ÷ 3 = 5 ml; e (1.A.2) apresenta o cálculo 65 – 50 = 15 ÷ 3 = 5 ml de água para cada bolinha. E resoluções incorretas: (1.A.3) 65 – 50 =15 ml para cada bolinha; (1.A.4) 50 ml ÷ 2 bolinhas = 25 ml para cada bolinha; (1.A.5) não apresenta resolução.

O objetivo do item 2.1.(b) era proporcionar a associação do aumento do nível de água de cada bolinha de gude, no registro de representação língua natural, determinado no item (a), com a taxa de variação da função afim no registro de representação simbólico numérico. Para isso, poderiam apresentar as seguintes respostas corretas: (1.B.1) apresenta em língua natural que a taxa de variação é o nível de água que se eleva a cada bolinha de gude inserida, igual a 5 ml; e (1.B.2) 5 ml. E incorretas: (1.B.3) 15 ml; (1.B.4) 25 ml; (1.B.5) apresenta outras respostas que não associam a taxa de variação ao nível elevado de água a cada bolinha de gude; e (1.B.6) não apresenta resolução.

No item (c) da atividade 2.1, se o estudante determinou nos itens anteriores a taxa de variação, que não estava explícita na tabela, poderia ter determinado o valor inicial da função, que é o coeficiente linear. Neste caso, poderiam apresentar como respostas corretas: (1.C.1) se a taxa de variação é igual a 5 ml, então o valor inicial é de 40 ml; e (1.C.2) 50 ml – 5 = 45 ml – 5 = 40 ml de quantidade inicial de água. E respostas incorretas: (1.C.3) 50 ml; (1.C.4) 50 – 15 ml (taxa de variação) = 35 ml; (1.C.5) 5 ml; e (1.C.6) não apresenta resolução.

Esperávamos para o item 2.1.(d) que os grupos apresentassem a generalização da função afim envolvida na atividade. Para isso, poderiam apresentar a resolução correta: (1.D.1) $A = 40 + 5.x$ ou $A = 5.x + 40$ onde A é o nível de água na proveta graduada e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas. E resoluções incorretas: (1.D.2) $A = 35 + 15.x$ ou $A = 15.x + 35$ onde A é o nível de água na proveta graduada e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas; (1.D.3) apresenta outras respostas que não associam à verdadeira lei de formação cuja taxa de variação é igual a 5 e o valor inicial é igual a 40; e (1.D.4) não apresenta resolução.

Nossa pretensão para o item 2.2.(a) era de que os estudantes percebessem, a partir da leitura da função em sua representação gráfica, que o valor inicial da função está na intersecção do gráfico com o eixo y e que corresponde, neste caso, ao valor do coeficiente linear. Para isso, poderiam apresentar as seguintes respostas corretas: (2.A.1) 20 ml é a quantidade inicial de água e corresponde ao valor para o coeficiente linear; (2.A.2) 20 ml; e (2.A.3) 20 ml, pois a reta do gráfico tem valor inicial no ponto (0,20). E respostas incorretas: (2.A.4) 0 ml; e (2.A.5) não apresenta resolução.

Esperávamos para o item 2.2.(b) que os grupos compreendessem que o nível de água que aumenta está relacionado à taxa de variação da função e o seu valor, neste caso, é igual a 5. Assim, poderiam utilizar diferentes formas corretas para obtenção do resultado: (2.B.1) apresenta em língua natural que 4 bolinhas colocadas na proveta apontam para 40 ml de água e que 2 bolinhas na proveta apontam para 30 ml, então, 40 – 30 = 10 ml para duas bolinhas, pois a diferença entre 4 bolinhas e 2 bolinhas é 2 bolinhas. Assim, 10 ml ÷ 2 = 5 ml para cada bolinha e conclui que esta é a taxa de variação da função; e (2.B.2) apresenta em língua natural que 2 bolinhas colocadas na proveta apontam para 30 ml de água e que a quantidade inicial de água é 20 ml, então, 30 – 20 = 10 ml para duas bolinhas, pois a diferença entre 2 bolinhas e nenhuma bolinha é 2 bolinhas. Assim, 10 ml ÷ 2 = 5 ml para cada bolinha e conclui que esta é a taxa de variação da função. Elencamos como resposta parcialmente correta: (2.B.3) 5 ml, mas não associa explicitamente a taxa de variação da função. E respostas incorretas: (2.B.4) aumenta 10 ml que representa a taxa de variação; e (2.B.5) não apresenta resolução.

Por fim, no item 2.2.(c), nossa pretensão era de que os grupos generalizassem a função afim envolvida. Assim, poderiam apresentar como resposta correta: (2.C.1) $A = 20 + 5.x$ ou $A = 5.x + 20$ em que A é o nível de água na proveta graduada e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas. E incorretas: (2.C.2) $A = 5 + 20.x$ ou $A = 5 + 20.x$ em que A é o nível de água na proveta graduada e x a quantidade de bolinhas de gude colocadas; e (2.C.3) não apresenta resolução.

No Quadro 17, a seguir, estão listados os elementos da função afim propostos para a discussão em cada item da atividade 2 e a transformação necessária entre os registros de representação. Nas questões em que contemplamos a interpretação global, elaboramos o Quadro 18 que apresenta as unidades simbólicas significativas e suas respectivas variáveis visuais de representação, bem como seus valores envolvidos na discussão desta atividade.

<table>
<tr><th rowspan="8">ATIVIDADE 2</th><th>ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$</th><th>TRATAMENTO</th><th>CONVERSÃO</th></tr>
<tr><td>1. a) Taxa de variação.</td><td>RSN</td><td></td></tr>
<tr><td>1. b) Taxa de variação.</td><td>RSN</td><td></td></tr>
<tr><td>1. c) Coeficiente linear.</td><td>RSN</td><td></td></tr>
<tr><td>1. d) Lei de formação (generalização).</td><td>RSN e RSA</td><td></td></tr>
<tr><td>2. a) Interpretação Global – coeficiente linear.</td><td></td><td>RGRA ➔ RSN</td></tr>
<tr><td>2. b) Interpretação Global – taxa de variação.</td><td></td><td>RGRA ➔ RSN</td></tr>
<tr><td>2. c) Lei de formação (generalização).</td><td></td><td>RGRA ➔ RSA</td></tr>
</table>

Quadro 17: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre Registros de Representação da atividade 2 da Sequência Didática
Fonte: Autora

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$	UNIDADE SIMBÓLICA SIGNIFICATIVA	VARIÁVEL VISUAL DE REPRESENTAÇÃO	VALORES
2. a) Interpretação Global – coeficiente linear.	- Valor do coeficiente b na expressão algébrica	- Posição sobre o eixo y	Corta acima da origem
2. b) Interpretação global – taxa de variação.	- Sinal do coeficiente a na expressão algébrica	- Sentido de inclinação	Ascendente

Quadro 18: Elementos da função afim e a abordagem de interpretação global da atividade 2 da Sequência Didática
Fonte: Autora

4.2.3 Atividade 3

1) Com auxílio do aplicativo *Desmos*, abra o arquivo1 enviado pela professora[20] e observe a função afim em sua forma algébrica $y = ax + b$, bem como a sua representação gráfica. Abaixo você encontra botões chamados *controles deslizantes* para o coeficiente a (taxa de variação) e o coeficiente b (coeficiente linear). A função que está sendo representada graficamente é a função $y = 1x + 1$, porque os controles deslizantes de a e b estão iguais a 1. Quando vocês deslizarem o controle para $a = 2$ teremos uma nova função $f(x) = 2x + 1$, e assim sucessivamente.

a) Arraste o controle deslizante do coeficiente a para 2, depois para -2 e observe o que acontece com a representação gráfica em cada mudança. Teste ainda para a igual a 4 e depois a igual a -4. Relate as suas observações.

b) Agora, coloque o controle deslizante do coeficiente b em -1 e volte a variar os valores para o coeficiente a: teste novamente para *a* igual a 2 e depois -2, para 5 e depois -5. O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente a são positivos?

c) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente a são negativos?

d) Arraste o controle deslizante do coeficiente a para 0 e varie os valores no controle deslizante do coeficiente b. O que acontece com o gráfico nestes casos?

[20] Todos os arquivos para esta atividade foram enviados no início da aula, antes dos grupos se reunirem para a discussão das questões.

2) Volte o controle deslizante do coeficiente a para 1. Agora, observe o gráfico da função quando variamos apenas os valores no controle deslizante do coeficiente b (coeficiente linear). Teste: arraste o controle deslizante de b por valores positivos e depois negativos.

a) O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear b são positivos?

b) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear b são negativos?

c) E quando b é igual a 0, o que ocorre com o gráfico desta função?

3) Agora, vocês irão receber o arquivo3.3.a, pré-formatado pela professora, o qual abrirá no aplicativo *GeoGebra (Graphing Calc)* e que servirá de base para as nossas próximas experiências.

a) Observe que o controle deslizante para o coeficiente a está marcando $a = 1$. Além disso, na figura, estão marcados inicialmente dois ângulos:

- α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x;
- β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y.

Com base nessas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar o *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y.

Valor de a (taxa de variação)	**Função**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)**
1			
2			
5			
10			

O que vocês podem concluir a partir da observação dos dados organizados nesta tabela?

b) Agora, vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de $0 < a < 1$.

Valor de a (taxa de variação)	**Função**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)**
1			
0,8			
0,4			
0,2			

O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

Agora, vocês irão receber o arquivo3.3.b, pré-formatado pela professora, o qual abrirá neste mesmo aplicativo e que servirá de base para as nossas próximas experiências.

c) O novo arquivo apresenta outra função e nela estão marcados os mesmos dois ângulos:

- α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x;
- β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y.

Com base nessas novas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar novamente no *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y.

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 1			
- 2			
- 5			
- 10			

O que vocês podem concluir a partir dos dados organizados nesta tabela?

d) Agora vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de $-1 < a < 0$.

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 0,2			
- 0,4			
- 0,8			

O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

Análises a priori da atividade 3

O objetivo da atividade 3 foi o estudo da função afim a partir dos registros de representação gráfico e simbólico algébrico, sob a perspectiva da abordagem de interpretação global de propriedades figurais e contemplando a variável didática estabelecida para esta pesquisa – diversidade de registros de representação semiótica. Para tanto, propomos questões aos grupos que os levassem a confrontar as três variáveis visuais de representação no registro gráfico, a saber: 1) o sentido da inclinação do traçado; 2) a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical; e 3) os ângulos do traçado com os eixos, às suas respectivas unidades simbólicas significativas no registro algébrico: A) sinal do coeficiente a; B) sinal do coeficiente b da função afim; e C) valor do coeficiente a.

O objetivo do item (a) da atividade 3.1 era proporcionar o estudo da variável visual que se refere ao sentido da inclinação do traçado conforme o valor para o coeficiente a. Conforme Lima (2016), uma "[...] função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (dada pelo coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$" (LIMA, 2016, p. 91). Ou seja, o sentido da reta do gráfico pertinente a uma função afim é dependente do sinal do coeficiente a ou taxa de variação. A Figura 8 apresenta os gráficos de uma função afim para o coeficiente a positivo e negativo, respectivamente, no aplicativo *Desmos*.

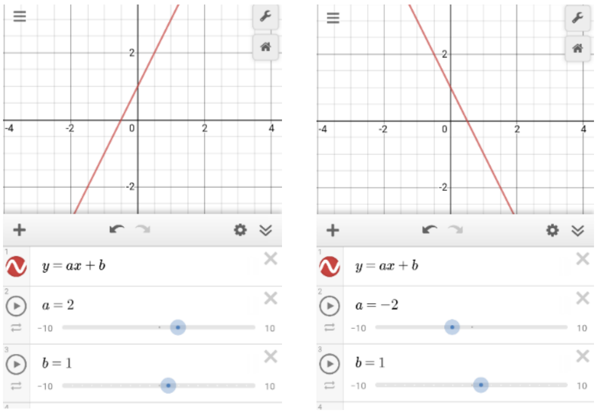


Figura 8: Tela do aplicativo *Desmos* para a atividade 3.1.(a) quando coeficiente a é positivo e negativo respectivamente
Fonte: Autora

Para tanto, os estudantes poderiam apresentar as seguintes observações corretas referentes a este item: (1.A.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é positivo, a reta do gráfico sobe da esquerda para a direita e, quando ele é negativo, a reta do gráfico desce da esquerda para a direita; e (1.A.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é positivo, a reta do gráfico é crescente e, quando ele é negativo, a reta do gráfico é decrescente. Como observação parcialmente correta: (1.A.3) apresenta em língua natural que, quando variamos os valores para o coeficiente a entre números positivos e negativos, a reta do gráfico muda de sentido, mas não especifica a direção para o sentido. E observações incorretas: (1.A.4) apresenta em língua natural que, quando variamos os valores para o coeficiente a entre números positivos e negativos, a reta do gráfico fica ao contrário ou invertida em relação a primeira; e (1.A.5) não apresenta resolução.

Ainda tendo como foco o estudo da primeira variável visual de representação, para os itens (b) e (c) da atividade 3.1, tínhamos a pretensão de que, a partir do manuseio do aplicativo, os estudantes percebessem que o valor para o coeficiente linear não influencia no sentido da inclinação da reta do gráfico, mas somente o sinal do coeficiente a. A Figura 9, a seguir, apresenta os gráficos para quando o coeficiente a é positivo e negativo, respectivamente, tendo por coeficiente linear o valor de -1, ambos no aplicativo *Desmos*.

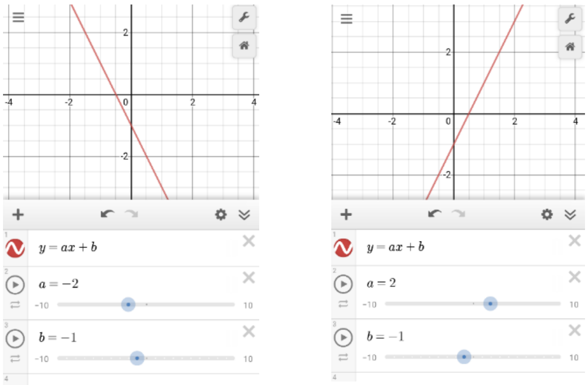


Figura 9: Tela do aplicativo *Desmos* para as atividades 3.1.(b) e 3.1.(c) quando coeficiente a é negativo e positivo respectivamente e para $b = -1$
Fonte: Autora

Assim, os grupos de estudantes poderiam apresentar as seguintes observações corretas para o item 3.1.(b): (1.B.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é positivo, a reta do gráfico sobe da esquerda para direita; e (1.B.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é positivo, a reta do gráfico é crescente. E observações incorretas: (1.B.3) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é positivo, a reta do gráfico é decrescente; e (1.B.4) não apresenta resolução.

De forma análoga, para o item 3.1.(c) poderiam apresentar as seguintes respostas corretas: (1.C.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é negativo, a reta do gráfico desce da esquerda para direita; e (1.C.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é negativo, a reta do gráfico é decrescente. E respostas incorretas: (1.C.3) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é negativo, a reta do gráfico é crescente; e (1.C.4) não apresenta resolução.

Ainda para o estudo da primeira variável visual de representação, esperávamos que os grupos no item 3.1.(d) visualizassem que, ao colocar o valor zero para o coeficiente a, a reta do gráfico da função afim se torna constante, ou seja, uma reta paralela ao eixo x que intercepta o eixo y de acordo com o valor para o coeficiente linear indicado. A Figura 10 apresenta os gráficos de uma função afim para quando o coeficiente a é nulo e o coeficiente linear é igual a -2 e 1, respectivamente, no aplicativo *Desmos*.

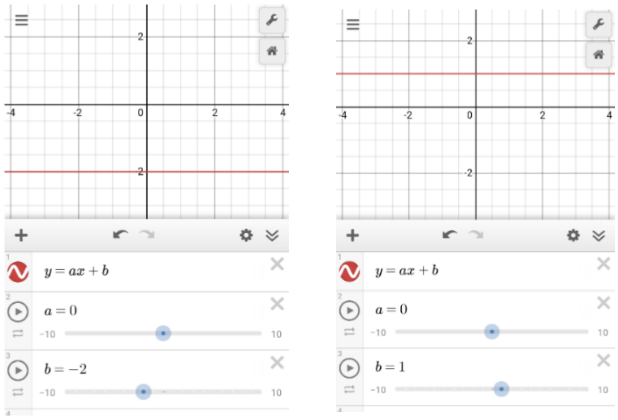


Figura 10: Telas do aplicativo *Desmos* para a atividade 3.1.(d) quando o coeficiente a é nulo
Fonte: Autora

Para tanto, analisamos previamente que os grupos poderiam apresentar como observações corretas: (1.D.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é igual a 0, a reta não tem um “sentido” e corta o eixo y exatamente no valor do coeficiente b; (1.D.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é igual a 0, a reta nem cresce e nem decresce e corta o eixo y exatamente no valor do coeficiente b; e (1.D.3) apresenta em língua natural que quando o coeficiente a é igual a 0, a reta é horizontal e corta o eixo y exatamente no valor do coeficiente b. Como observações parcialmente corretas: (1.D.4) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é igual a 0, a reta é horizontal e quando o coeficiente b é positivo a reta está acima do eixo x e quando é negativo está abaixo do eixo x, mas não percebe que o valor para o coeficiente linear é o ponto em que a reta do gráfico corta o eixo y; e (1.D.5) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é igual a 0, a reta não tem um “sentido” ou é horizontal, mas não percebe que o valor para o coeficiente linear é o ponto em que a reta do gráfico corta o eixo y. E observações incorretas: (1.D.6) não apresenta resolução.

O objetivo dos itens (a), (b) e (c) da atividade 3.2 era proporcionar o estudo sobre a segunda variável visual, relacionada à posição da reta do gráfico em relação à origem do eixo vertical ou eixo y. O coeficiente linear determina o ponto em que a reta do gráfico intercepta o eixo y, ou seja, se o coeficiente b é um número positivo, então, a reta está acima da origem, se o coeficiente b é um número negativo, a reta está abaixo da origem e se o coeficiente b é nulo, então, a reta está sobre a origem. A Figura 11, a seguir, apresenta os gráficos da função afim quando o coeficiente linear b é um número positivo, negativo e nulo, respectivamente, no aplicativo *Desmos*.

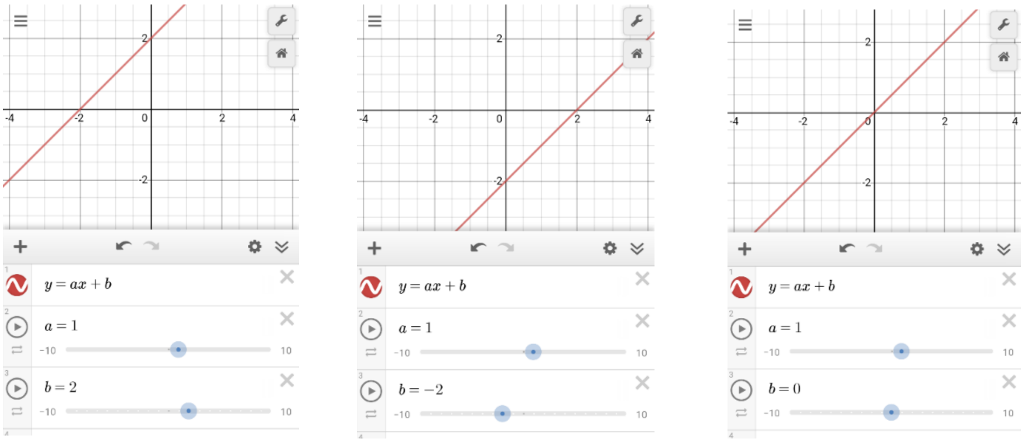


Figura 11: Telas do aplicativo *Desmos* para a atividade 3.2.(b) quando coeficiente b é positivo, negativo e nulo respectivamente
Fonte: Autora

Em relação ao item 3.2.(a), os grupos poderiam apresentar como respostas corretas: (2.A.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é positivo, a reta do gráfico corta o eixo y acima da origem; (2.A.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é positivo, a reta do gráfico sobe por valores positivos no eixo y; e (2.A.3) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é positivo, a reta do gráfico corta o eixo y em seu lado positivo. E como resposta incorreta: (A.4) não apresenta resolução.

Para o item 3.2.(b), colocamos como possíveis resoluções corretas: (2.B.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é negativo, a reta do gráfico corta o eixo y abaixo da origem; (2.B.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é negativo, a reta do gráfico desce por valores negativos no eixo y; e (2.B.3) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é negativo, a reta do gráfico corta o eixo y em seu lado negativo. E como resposta incorreta: (2.B.4) não apresenta resolução.

E finalmente para o item 3.2.(c), respostas corretas: (2.C.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é igual a 0, a reta do gráfico corta o eixo y na origem; e (2.C.2) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é igual a 0, a reta do gráfico corta o eixo y no ponto (0,0). Como resposta parcialmente correta: (2.C.3) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente b é igual a 0, a reta do gráfico corta o eixo y em 0, mas não identifica a origem como ponto cartesiano. E resposta incorreta: (2.C.4) não apresenta resolução.

Para o trabalho com a terceira variável visual, que relaciona os ângulos da reta do gráfico de uma função afim com os eixos x e y, elaboramos o tópico 3.3, o qual foi subdividido em quatro itens, a fim de contemplar os aspectos necessários ao entendimento desta variável visual. Assim, no item 3.3.(a), esperávamos que os grupos observassem que, quando a taxa de variação aumenta, ou seja, a perpassa por valores maiores que 1, o valor do ângulo α, formado entre a reta e o eixo x, também aumenta e, consequentemente, o valor do ângulo β, formado entre a reta e o eixo y, diminui. Portanto, neste caso, o **ângulo α é sempre maior que o ângulo β**. A Figura 12, a seguir, apresenta, respectivamente, as telas dos *smartphones* com as retas dos gráficos de uma função afim e os ângulos formados com os eixos x e y quando o coeficiente a assume valores 1, 2 e 5, no aplicativo *GeoGebra*.

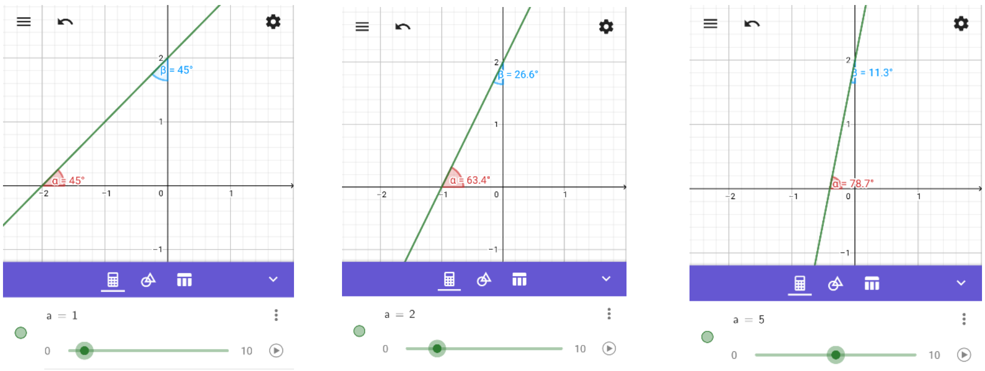


Figura 12: Telas do aplicativo *GeoGebra* para a atividade 3.3.(a) quando coeficiente $a = 1$; $a = 2$ e $a = 5$ respectivamente
Fonte: Autora

A seguir, apresentamos possíveis respostas para o item 3.3.(a) no Quadro 19:

Valor de a (taxa de variação)	**Função**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)**
1	$f(x) = 1.x + 2$	*45º*	*45º*
2	$f(x) = 2.x + 2$	*63,4º*	*26,6 º*
5	$f(x) = 5.x + 2$	*78,7º*	*11,3 º*
10	$f(x) = 10.x + 2$	*84,3º*	*5,7 º*

Quadro 19: Respostas esperadas para a atividade 3.3 item (a)
Fonte: Autora

Além disso, poderiam apresentar como resposta correta: (3.A.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é maior que 1, o ângulo α é sempre maior que o ângulo β. Como resposta parcialmente correta: (3.A.2) apresenta em língua natural que, quando os valores do coeficiente a aumentam, sendo $a > 1$, o ângulo α aumenta, o ângulo β diminui. E resposta incorreta: (3.A.3) não observa e compara as medidas dos ângulos.

No item 3.3.(b), o objetivo era que os grupos observassem os ângulos quando a taxa de variação a perpassava por valores menores que 1, mas maiores que 0, ou seja, valores no intervalo $0 < a < 1$, caso este em que o valor do ângulo β, formado com o eixo y, passa a ser maior que o valor do ângulo α, formado com o eixo x. Portanto, neste caso, **o ângulo α é sempre menor que o ângulo β**. A Figura 13 apresenta, respectivamente, as telas dos *smartphones* dos estudantes com as retas dos gráficos e os ângulos formados com os eixos x e y quando o coeficiente a assume valores 0,8; 0,4 e 0,2, proposto para discussão neste item.

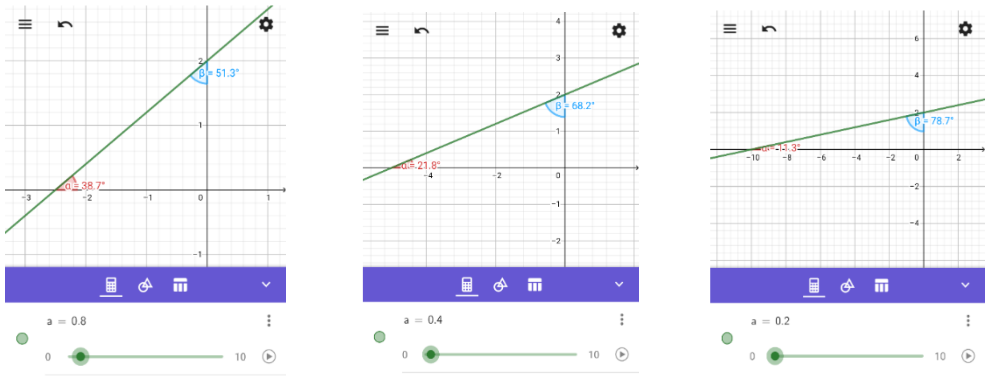


Figura 13: Telas do aplicativo *GeoGebra* para a atividade 3.3.(b) quando o coeficiente $a = 0{,}8$; $a = 0{,}4$ e $a = 0{,}2$ respectivamente
Fonte: Autora

Possíveis respostas para o item (b) são apresentadas no Quadro 20 a seguir:

Valor de a (taxa de variação)	**Função**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)**
1	$f(x) = 1.x + 2$	*45º*	*45º*
0,8	$f(x) = 0{,}8.x + 2$	*38,7º*	*51,3º*
0,4	$f(x) = 0{,}4.x + 2$	*21,8º*	*68,2º*
0,2	$f(x) = 0{,}2.x + 2$	*11,3º*	*78,7º*

Quadro 20: Respostas esperadas para a atividade 3.3 item (b)
Fonte: Autora

Além disso, como resposta correta após as discussões, os grupos poderiam apresentar: (3.B.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é maior que 0, mas menor que 1, o ângulo α é sempre menor que o ângulo β. Resposta parcialmente correta: (3.B.2) apresenta em língua natural que, quando os valores do coeficiente a tendem a 0, sendo $0 < a < 1$, o ângulo α diminui, o ângulo β aumenta. E como incorreta: (3.B.3) não observa e compara as medidas dos ângulos.

No item 3.3.(c), tínhamos como pretensão que os grupos observassem que, quando a taxa de variação ou coeficiente a perpassa por valores menores que -1, ou seja, $a < -1$ o valor do **ângulo α é maior que o ângulo β**. Portanto, é equivalente ao caso da taxa de variação ser maior que 1 ($a > 1$), estudado no item 3.3.(a). A Figura 14 apresenta, respectivamente, as telas dos *smartphones* dos estudantes com as retas dos gráficos da função afim e os ângulos formados com os eixos x e y quando o coeficiente a assume valores -2, -5 e -10.

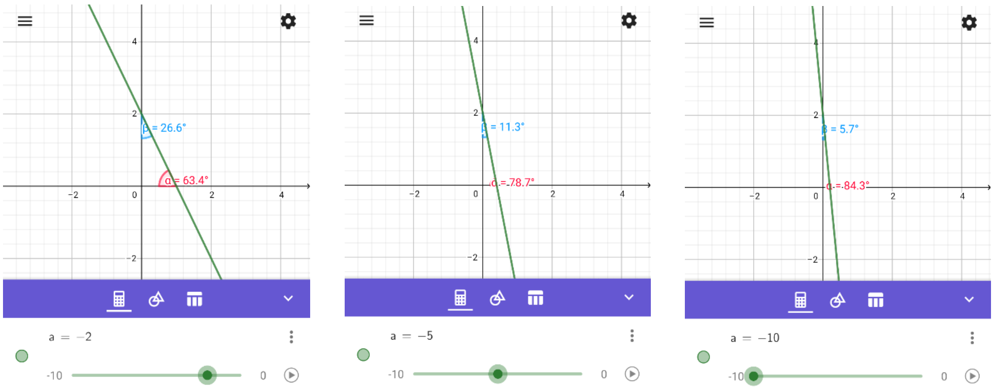


Figura 14: Telas do aplicativo *GeoGebra* para a atividade 3.3.(c) quando coeficiente $a = -2$; $a = -5$ e $a = -10$ respectivamente
Fonte: Autora

Apresentamos no Quadro 21, a seguir, possíveis respostas dos estudantes:

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 1	$f(x) = -1.x + 2$	*45º*	*45º*
- 2	$f(x) = -2.x + 2$	*63,4º*	*26,6º*
- 5	$f(x) = -5.x + 2$	*78,7º*	*11,3º*
- 10	$f(x) = -10.x + 2$	*84,3º*	*5,7º*

Quadro 21: Respostas esperadas para a atividade 3.3 item (c)
Fonte: Autora

Neste caso, os grupos poderiam apresentar como resposta correta: (3.C.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é menor que -1, o ângulo α é sempre maior que o ângulo β. Resposta parcialmente correta: (3.C.2) apresenta em língua natural que, quando os valores do coeficiente a diminuem, sendo $a < -1$, o ângulo α, aumenta o ângulo β diminui. E incorreta: (3.C.3) não observa e compara as medidas dos ângulos.

Por fim, esperávamos para o item 3.3.(d) que os grupos observassem que, quando a taxa de variação a perpassava valores no intervalo $-1 < a < 0$, o valor do ângulo **β passa a ser maior que o valor do ângulo α**. Portanto, é equivalente ao caso da taxa de variação estar entre $0 < a < 1$, estudado no item (b), ou seja, o ângulo α é sempre menor que o ângulo β. A Figura 15 apresenta, respectivamente, as telas dos *smartphones* dos estudantes com as retas dos gráficos da função afim e os ângulos formados com os eixos x e y quando o coeficiente a assume valores -0,2; -0,4 e – 0,8.

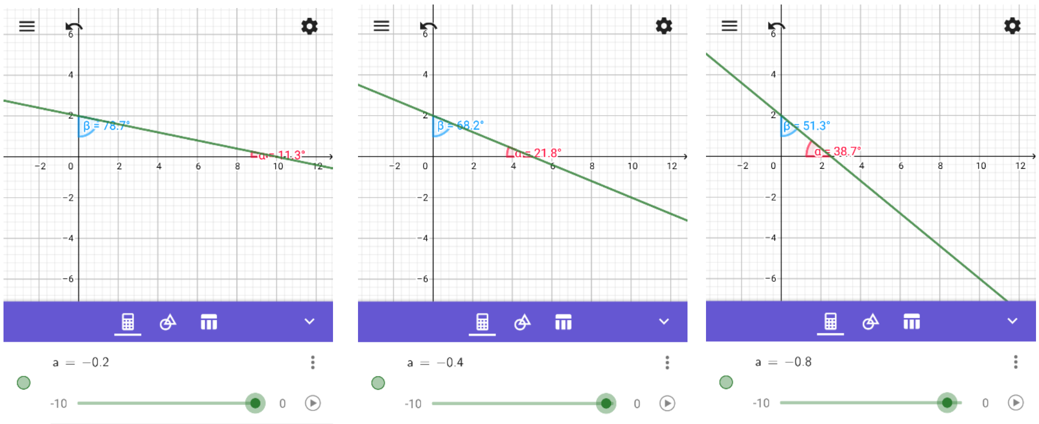


Figura 15: Telas do aplicativo *GeoGebra* para a atividade 3.3.(d) quando coeficiente $a = -0{,}2$; $a = -0{,}4$ e $a = -0{,}8$ respectivamente
Fonte: Autora

Apresentamos no Quadro 22, a seguir, possíveis respostas dos estudantes:

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 0,2	$f(x) = -0{,}2.x + 2$	*11,3º*	*78,7º*
- 0,4	$f(x) = -0{,}4.x + 2$	*21,8º*	*68,2º*
- 0,8	$f(x) = -0{,}8.x + 2$	*38,7º*	*51,3º*

Quadro 22: Respostas esperadas para a atividade 3.3 item (d)
Fonte: Autora

Ainda, os grupos poderiam apresentar como resposta correta após suas discussões: (3.D.1) apresenta em língua natural que, quando o coeficiente a é menor que 0, mas maior que 1, o ângulo α é sempre menor que o ângulo β. Parcialmente correta: (3.D.2) apresenta em língua natural que, quando os valores do coeficiente a

tendem a 0, sendo $-1 < a < 0$, o ângulo α diminui, o ângulo β aumenta. E incorreta: (3.D.3) não observa e compara as medidas dos ângulos.

Assim, apresentamos no Quadro 23 o tipo de conversão, as unidades simbólicas significativas, variáveis visuais de representação e seus respectivos valores envolvidos em cada item desta atividade. Salientamos que nesta atividade os estudantes não realizam a transformação de tratamento, uma vez que é voltada para o estudo das variáveis visuais no registro gráfico frente às modificações nas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica da função afim.

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$	**CONVERSÃO**	**UNIDADES SIMB. SIGNIF.**	**VARIÁVEIS VISUAIS DE REPRES.**	**VALORES VAR. VIS. DE REPRES.**
1. a) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Sinal do coeficiente a (+) ou (-)	Sentido de inclinação do traçado	Ascendente ou Descendente
1. b) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Sinal do coeficiente a (+)	Sentido de inclinação do traçado	Ascendente
1. c) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Sinal do coeficiente a (-)	Sentido de inclinação do traçado	Descendente
1. d) Interpretação Global - coeficientes a e b	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $a = 0$	Sentido de inclinação do traçado	Paralela ao eixo x
		Sinal do coeficiente b (+) ou (-)	Posição do traçado sobre sobre o eixo y	Acima ou abaixo da origem
2. a) Interpretação Global - coeficiente b	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente b (+)	Posição do traçado sobre sobre o eixo y	Corta acima da origem
2. b) Interpretação Global - coeficiente b	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente b (-)	Posição do traçado sobre sobre o eixo y	Corta abaixo da origem
2. c) Interpretação Global - coeficiente b	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $b = 0$	Posição do traçado sobre sobre o eixo y	Corta sobre a origem
3. a) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $a > 1$	Ângulos do traçado com os eixos	Ângulo α > β
3. b) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $0 < a < 1$	Ângulos do traçado com os eixos	Ângulo α < β
3. c) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $-1 < a < 0$	Ângulos do traçado com os eixos	Ângulo α < β
3. d) Interpretação Global - coeficiente a	RSA ➔ RGRA	Valor do coeficiente $a < -1$	Ângulos do traçado com os eixos	Ângulo α > β

Quadro 23: Elementos da função afim e a identificação de conversões entre Registros de Representação da atividade 3 da Sequência Didática
Fonte: Autora

4.2.4 Atividade 4

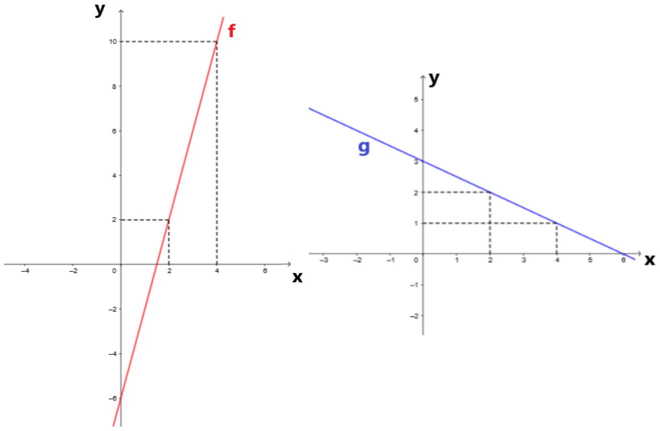
<table>
<tr><td>
Com base nas funções f e g representadas graficamente a seguir, responda:

a) O que você pode concluir em relação ao sinal do coeficiente a (taxa de variação) em cada uma das funções apresentadas?

b) O que você pode concluir em relação ao coeficiente linear em cada uma das funções apresentadas?

c) Observando os ângulos que as retas dos gráficos das funções formam com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao valor do coeficiente a?

d) Escreva a representação algébrica de cada uma destas funções.



</td></tr>
</table>

Análises a priori da atividade 4

O objetivo desta atividade foi proporcionar o estudo da função afim a partir da interpretação global entre os registros de representação simbólico algébrico e gráfico. A ideia principal era que os estudantes analisassem diferentes gráficos de função afim e, com base nas três variáveis visuais estudadas, tirassem conclusões a respeito do registro simbólico algébrico de cada um dos gráficos, sem apoio dos aplicativos para *smartphones*. As representações contempladas na atividade 4, considerando a variável didática estabelecida, são: simbólica algébrica e gráfica.

No item (a), esperávamos que os estudantes associassem a primeira variável visual de representação referente ao sentido da inclinação da reta do gráfico da função afim, a partir do sinal do coeficiente a ou taxa de variação. Para tanto, consideramos que os grupos poderiam apresentar as seguintes resoluções corretas: (A.1) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente a positivo, porque a função “sobe” da esquerda para a direita, e para a função g o sinal do coeficiente a é negativo, porque a função “desce” da esquerda para a direita; e (A.2) apresenta em língua natural que, na função f, o sinal do coeficiente a é positivo, porque a função é crescente, e para a função g o sinal do coeficiente a é negativo, porque a função é decrescente. E como resoluções incorretas: (A.3) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente a negativo, porque a função “sobe” da esquerda para a direita, e para a função g, o sinal do coeficiente a é positivo, porque a função desce da esquerda para a direita; (A.4) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente a negativo, porque a reta do gráfico da função corta o eixo y em -6, e para a função g, o sinal do coeficiente a é positivo, porque a reta do gráfico da função corta o eixo y em +3; e (A.5) não apresenta resolução.

Nossa pretensão para o item (b) era de que os grupos observassem a segunda variável visual, a qual se refere à posição da reta do gráfico da função afim em relação à origem do eixo vertical ou eixo y. Assim, os grupos poderiam apresentar como respostas corretas: (B.1) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear é igual a -6, porque é onde a reta do gráfico corta o eixo y, e na função g o coeficiente linear é igual a 3; e (B.2) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear é negativo, pois está abaixo da origem, e, na função g, o coeficiente linear é positivo, pois está acima da origem. Como resposta parcialmente correta: (B.3) apresenta em língua natural que nas funções f e g o coeficiente linear está no eixo y, mas não especifica detalhes sobre o coeficiente linear na função da atividade. E respostas incorretas: (B.4) apresenta em língua natural que na função f o coeficiente linear é igual a 1,5, porque é onde a reta do gráfico corta o eixo x, e na função g o coeficiente linear é igual a 6; (B.5) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente b positivo, porque a função “sobe” da esquerda para a direita, e, para a função g, o sinal do coeficiente b é negativo, porque a função “desce” da esquerda para a direita; e (B.6) não apresenta resolução.

Para o item (c), esperávamos que os grupos comparassem os dados estudados na terceira variável visual, ou seja, que observassem os ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y, na tentativa de prever os valores para a taxa de variação ou coeficiente a. Neste caso, os estudantes poderiam apresentar as seguintes respostas corretas para a função f: (C.1) apresenta em língua natural que na função f o ângulo $\alpha > \beta$ e, então, o coeficiente a é um número maior que 1, pois a reta é crescente; e (C.2) apresenta que, na função f, o coeficiente a é maior que 1, mas sem justificativas. E respostas incorretas para a função f: (C.3) apresenta que, na função f, o coeficiente a é menor é 1 e maior que 0; (C.4) apresenta que, na função f, o coeficiente a é menor que 0 e maior que 1; (C.5) apresenta que, na função f, o coeficiente a é menor que – 1; (C.6) apresenta apenas a comparação entre os ângulos α e β e não conclui a respeito do coeficiente a na função; e (C.7) não consegue fazer as comparações dos ângulos sem apoio tecnológico.

E, após analisar a função g, as seguintes respostas corretas: (C.8) apresenta em língua natural que, na função g, o ângulo α < β, então, o coeficiente a é um menor que 0 e maior que -1, pois a reta é decrescente; e (C.9) apresenta que, na função g, o coeficiente a é menor é 1 e maior que 0, mas sem justificativas. E respostas incorretas em relação à função g: (C.10) apresenta que, na função g, o coeficiente a é maior que 1; (C.11) apresenta que, na função g, o coeficiente a é menor que 0 e maior que 1; (C.12) apresenta que, na função g, o coeficiente a é menor que – 1; (C.13) apresenta apenas a comparação entre os ângulos α e β e não conclui a respeito do coeficiente a na função; e (C.14) não consegue fazer as comparações dos ângulos sem apoio tecnológico.

Por fim, no item (d) esperávamos identificar como os grupos, após o estudo das três variáveis de interpretação global, expressariam as funções afim f e g em suas representações algébricas, realizando uma conversão entre o registro de representação gráfico para o registro simbólico algébrico. Portanto, poderiam apresentar a seguinte resposta correta para a função f: (D.1) determina a taxa de variação igual a 4, identifica o coeficiente linear igual a -6 e apresenta que a função f é dada por $f(x) = 4.x - 6$ ou $f(x) = -6 + 4.x$. E respostas incorretas: (D.2) apresenta a expressão $f(x) = a.x - 6$ para a função f; (D.3) apresenta as expressões *algébricas* $f(x) = 1{,}5.x - 6$; (D.4) apresenta as expressões algébricas $f(x) = 2x - 6$; e (D.5) não apresenta resolução.

Em relação à função g, poderiam apresentar a seguinte resposta correta: (D.6) determina a taxa de variação igual a $\frac{-1}{2}$ ou igual a -0,5; identifica o coeficiente linear igual a 3 e apresenta que a função g é dada por $g(x) = -0{,}5.x + 3$ ou $g(x) = \frac{-1}{2}x + 3$. E respostas incorretas: (D.7) apresenta a expressão $g(x) = a.x + 3$ para a função

g; (D.8) apresenta as expressões algébricas $g(x) = 6.x + 3$; (D.9) apresenta as expressões algébricas $g(x) = -2x + 3$; e (D.10) não apresenta resolução.

O Quadro 24 apresenta os elementos da função afim em discussão nesta atividade, as transformações envolvidas, as unidades simbólicas significativas e suas respectivas variáveis visuais de representação, bem como seus valores.

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $\boldsymbol{f(x) = a.x + b}$	**TRAT.**	**CONV.**	**UNIDADES SIMB. SIGNIF.**	**VARIÁVEIS VISUAIS DE REPRES.**	**VALORES VAR. VIS. DE REPRES.**
a) Interpretação Global - coeficiente a		RGRA ➔ RSA	Sinal do coeficiente a na expressão algébrica	Sentido da reta do traçado	Ascendente (f) e Descendente (g)
b) Interpretação Global - coeficiente b		RGRA ➔ RSA	Valor do coeficiente b na expressão algébrica	Posição da reta sobre o eixo y	Corta acima (f) ou abaixo da origem (g)
c) Interpretação Global - coeficiente a	RSN	RGRA ➔ RSA	Valor do coeficiente a na expressão algébrica	Ângulos da reta com os eixos	Ângulo α > β (f) e Ângulo α < β (g)
d) Interpretação Global - lei de formação	RSN	RGRA ➔ RSA	Valores dos coeficientes a e b na expressão algébrica	Sentido de inclinação da reta Posição da reta sobre o eixo	Ascendente e Descendente Corta acima ou abaixo da origem

Quadro 24: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre Registros de Representação da atividade 4 da Sequência Didática
Fonte: Autora

4.2.5 Atividade 5 [atividade alterada durante a experimentação]

1) Com base na função f representada graficamente a seguir, responda:

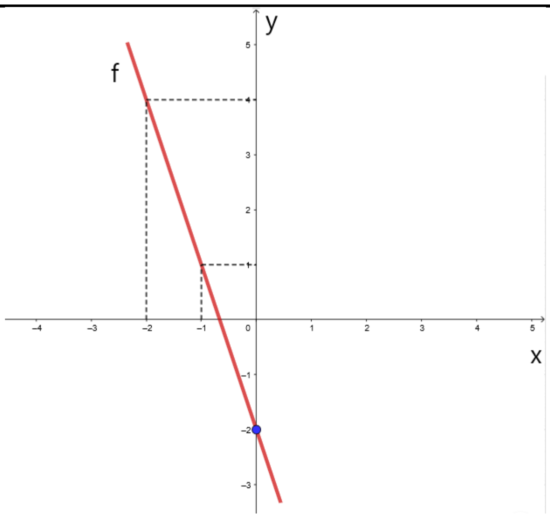
a) O que você pode concluir em relação **ao sinal** do coeficiente a (taxa de variação)?

b) O que você pode concluir em relação ao **coeficiente $\boldsymbol{b}$** na função apresentada?

c) Observando os ângulos que a reta do gráfico da função forma com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$**?

d) Determine o valor para o coeficiente a e explique como obteve este resultado.

e) Escreva a representação algébrica da função apresentada graficamente.



2) Um canal de televisão por assinatura proporciona aos seus clientes uma seção de locação de filmes online a partir de 3 formas de pagamento:

Plano 1: R$ 30,00 de adesão anual, mais R$ 1,20 por filme locado.
Plano 2: R$ 15,00 de adesão anual, mais R$ 2,00 por filme locado.
Plano 3: R$ 4,50 por filme alugado, sem taxa de adesão.

a) Adriana fez a sua adesão pelo plano 1 e realizou a locação de 12 filmes ao longo do ano. Quanto gastou?

b) Augusto escolheu o plano 2 e gastou R$ 55,00 durante o ano em locação de filmes. Quantos filmes foram locados por este cliente?

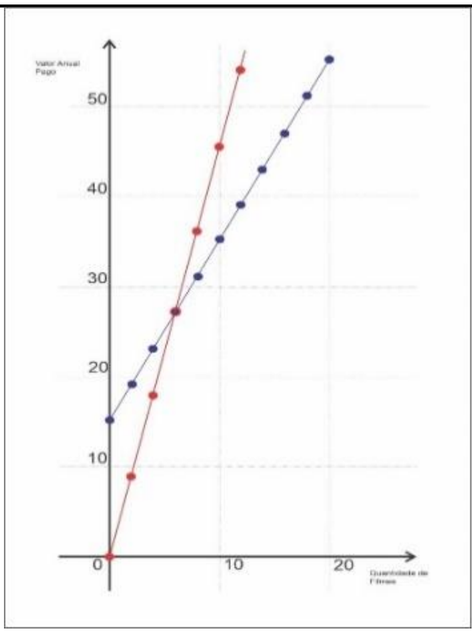
c) Considerando que Augusto fez a sua adesão pelo plano 2, descreva com suas palavras os passos para determinar o valor a ser pago na conta após a locação de uma quantidade qualquer de filmes no ano.

d) Escreva a "lei" de formação da função de cada plano de pagamento.

e) Se João aluga em média 35 filmes por ano, qual será o plano de pagamento mais econômico para o seu caso?

f) Em um plano cartesiano, construa a representação gráfica para o Plano 1 de locação de filmes.

g) Observe a seguir os planos 2 e 3 para a locação de filmes representados graficamente em cores diferentes (azul e vermelho). Identifique cada uma das retas dos gráficos de acordo com as suas respectivas representações algébricas determinadas no item (d). Justifique a escolha para cada função.



Análises a priori da atividade 5

Após a aplicação da atividade 4 sentimos a necessidade de reelaborar a atividade 5, na tentativa de suprir as dificuldades sobre a interpretação global da função, em especial as discussões referentes a segunda e a terceira variáveis visuais de representação, a posição do traçado sobre o eixo e ângulos formados com os eixos, respectivamente. A Engenharia Didática respalda esta ação, uma vez que não é uma metodologia de pesquisa fechada, pois prevê, conforme Bittar (2017), incluir, retirar ou alterar atividades de acordo com as necessidades da experimentação em sala de aula.

Assim, acrescentamos nesta atividade a questão identificada por (1), cujo objetivo era proporcionar o estudo da função afim a partir da interpretação global entre os registros de representação simbólico algébrico e gráfico. Com a questão (2), pretendíamos identificar, a partir de um problema em língua natural, quais conhecimentos os grupos demonstrariam ter em relação à função afim associados aos tratamentos e conversões entre os registros de representação envolvidos: língua natural, simbólico algébrico, simbólico numérico e gráfico, considerando a variável didática estabelecida para esta pesquisa.

No item 1.(a), esperávamos que os grupos observassem o decrescimento do gráfico da função afim dada em sua representação gráfica e concluíssem que o sinal do coeficiente a ou taxa de variação seria negativo. Para isso, poderiam apresentar a seguinte estratégia correta de resolução: (1.A.1) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente a negativo, porque a função é decrescente. E incorretas: (1.A.2) apresenta em língua natural que a função f possui sinal do coeficiente a positivo, porque a função é decrescente; e (1.A.3) não apresenta resolução.

O objetivo do item 1.(b) era fazer os grupos refletirem sobre a posição e o valor assumido para o coeficiente linear b a partir da representação gráfica de uma função afim. Para tanto, poderiam apresentar como resolução correta: (1.B.1) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear é igual a -2, porque é onde a reta do gráfico corta o eixo y. Resoluções parcialmente corretas: (1.B.2) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear é negativo, pois está abaixo da origem, mas não especifica o valor; e (1.B.3) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear está no eixo y, mas não especifica detalhes sobre o coeficiente linear na função da atividade. E incorretas: (1.B.4) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente linear é igual a aproximadamente -0,7, porque é onde a reta do gráfico corta o eixo x; e (1.B.5) não apresenta resolução.

A ideia principal para o item 1.(c) era de que os grupos comparassem os dados para a terceira variável visual referente aos ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y. Os grupos poderiam apresentar como resposta correta: (1.C.1) apresenta em língua natural que, na função f, o ângulo α > β e, então, o coeficiente a é um número menor que 1, pois a reta é decrescente. E incorretas: (1.C.2) apresenta em língua natural que, na função f, o ângulo α > β e, então, o coeficiente a é um número maior que 1; (1.C.3) apresenta em língua natural que, na função f, o coeficiente a é: $a > 1$ ou $0 < a < 1$ ou ainda $-1 < a < 0$ sem apresentar a comparação entre os ângulos α e β; (1.C.4) apresenta apenas a comparação entre os ângulos α e β e não conclui a respeito do coeficiente a na função; e (1.C.5) não apresenta resolução.

Na sequência, elaboramos o item (d) com o objetivo de analisar como os estudantes determinam o valor para o coeficiente a, após ter estudado a abordagem de interpretação global da função afim. Para isso, poderiam apresentar como resolução correta: (1.D.1) apresenta que o coeficiente a é igual a -3. E incorretas:

(1.D.2) apresenta que o coeficiente a é igual a 3; (1.D.3) apresenta que o coeficiente a é igual a 1; e (1.D.4) não apresenta resolução.

Pretendíamos observar como os grupos apresentariam o registro de representação simbólico algébrico para a função afim em questão no item 1.(e), no qual poderiam apresentar a seguinte resolução correta: (1.E.1) apresenta que a função f é dada por $f(x) = -3.x - 2$ ou $f(x) = -2 - 3.x$. E resoluções incorretas apresentando que a função f seria dada por: (1.E.2) $f(x) = 3.x - 2$; (1.E.3) $f(x) = 1.x - 2$; (1.E.4) $f(x) = 2x - 6$; e (1.E.5) não apresenta resolução.

No item 2.(a), especificamente, o objetivo era que os grupos mobilizassem a ideia base de dependência e correspondência entre as variáveis. Assim, poderiam apresentar como estratégia de resolução correta: (2.A.1) multiplica 12 filmes locados por 1,20 e depois soma com R$30,00 valor da adesão resultando R$ 44,40. E estratégias incorretas: (2.A.2) multiplica 12 filmes locados por 1,20 resultando R$ 14,40; (2.A.3) multiplica 12 filmes locados por 2,00 reais e depois soma com R$ 15,00 valor da adesão resultando R$ 39,00; (2.A.4) multiplica 12 filmes locados por 4,50 reais resultando R$ 54,00; e (2.A.5) apresenta estratégia correta para o desenvolvimento da questão, porém efetua os cálculos erroneamente, seja pelo mau uso de vírgulas, números decimais ou operações básicas.

De forma semelhante, no item 2.(b), esperávamos que os grupos novamente mobilizassem a ideia base de dependência e correspondência, mas neste caso de y para x, ou seja, a partir de um tratamento no registro simbólico numérico, deveriam determinar o valor a ser pago anualmente pelo plano e a quantidade de filmes locados. Para isso, poderiam utilizar a estratégia correta: (2.B.1) subtrai R$ 55,00 do valor da taxa de adesão R$ 15,00 e depois divide por R$ 2,00 valor de cada filme locado, ou seja, 55,00 reais – 15,00 reais = 40,00 ÷ 2,00 reais = 20 filmes locados. E estratégias incorretas: (2.B.2) divide R$ 55,00 por R$ 2,00 valor de cada filme resultando 27,5 filmes; (2.B.3) divide R$ 55,00 por R$ 2,00 valor de cada filme locado e subtrai R$ 15,00 do valor da taxa de adesão, ou seja, 55,00 ÷ 2,00 reais = 27,5 – 15,00 reais = 12,5 filmes; e (2.B.4) apresenta estratégia correta para o desenvolvimento da questão, porém efetua os cálculos erroneamente, seja pelo mau uso de vírgulas, números decimais ou operações básicas.

No item 2.(c), esperávamos que os grupos descrevessem em língua natural qual procedimento poderia ser realizado para determinar o valor a ser pago pelas locações de filmes após ter escolhido o plano 2. Elencamos como resposta correta: (2.C.1) apresenta em língua natural que o valor a ser pago será dado pelo valor da adesão somado ao valor por filme locado multiplicado pela quantidade de filmes locados no ano. E respostas incorretas: (2.C.2) apresenta em língua natural que o valor a ser pago será dado pela quantidade de filmes locados multiplicado pelo valor de cada filme; (2.C.3) apresenta em língua natural que o valor a ser pago será dado pelo valor da adesão multiplicado pela quantidade de filmes locados; (2.C.4) apresenta em língua natural que o valor a ser pago será dado pelo valor da adesão multiplicado pelo valor de cada locação; e (2.C.5) não apresenta resolução.

Novamente, nossa pretensão para o item 2.(d) era de que os grupos mobilizassem as ideias de generalização. Para isto, poderiam utilizar diferentes formas para obtenção do resultado. Dentre as corretas: (2.D.1) apresenta algebricamente para o plano 1: $V = 30 + 1{,}20.x$ ou $V = 1{,}20.x + 30$; para o plano 2: $V = 15 + 2.x$ ou $V = 2.x + 15$ e para o plano 3: $V = 4{,}5.x$ onde V é o valor a ser pago e x a quantidade de filmes locados no ano; (2.D.2) apresenta em língua natural que o valor a ser pago depende do valor da adesão somado ao valor por filme locado multiplicado pela quantidade de filmes locados no ano. E incorretas: (2.D.3) apresenta algebricamente para o plano 1: $V = 1{,}20 + 30.x$ ou $V = 30.x + 1{,}20$; para o plano 2: $V = 2 + 15.x$ ou $V = 15.x + 2$ e para o plano 3: $V = 4{,}5.x$ onde V é o valor a ser pago e x a quantidade de filmes locados no ano; (2.D.4) apresenta algebricamente para o plano 1: $V = 1{,}20.x$; para o plano 2: $V = 2.x$; e para o plano 3: $V = 4{,}5.x$ onde V é o valor a ser pago e x a quantidade de filmes locados no ano; e (2.D.5) não apresenta resolução.

No item 2.(e), esperávamos que os estudantes analisassem cada um dos planos de locação de filmes, a partir das expressões algébricas definidas no item 2.(d) para que percebessem que o plano 1, neste caso, é mais econômico em relação aos demais, para esta quantidade de 35 filmes locados anualmente. Assim, consideramos como possível resposta correta: (2.E.1) apresenta o cálculo do valor para as 3 opções - plano 1: V = 30 + 1,20.35 = 72 reais; plano 2: V = 15 + 2.35 = 85 reais; plano 3: V = 4,5.35 = 157,50 reais e conclui que o plano 1 é o mais econômico. E respostas incorretas: (2.E.2) apresenta o cálculo do valor para as 3 opções - plano 1: V = 1,20.35 = 42 reais; plano 2: V = 2.35 = 70 reais; plano 3: V = 4,5.35 = 157,50 reais e conclui que o plano 1 é o mais econômico, mas desconsidera os valores da adesão para os planos; (2.E.3) considera, sem efetuar cálculos, que o plano 3 é o mais econômico, pois não possui taxa de adesão; (2.E.4) apresenta estratégia correta para o desenvolvimento da questão, porém, efetua os cálculos erroneamente, seja pelo mau uso de vírgulas, números decimais ou operações básicas; e (2.E.5) não apresenta resolução.

O objetivo do item 2.(f) foi investigar como os grupos apresentariam os dados do problema em língua natural a partir de uma conversão para o registro de representação gráfico. Além disso, pretendíamos observar qual método fora utilizado: ponto a ponto ou pelos conceitos estudados na abordagem de interpretação global. Elencamos como estratégia de resolução correta: (2.F.1) apresenta o plano cartesiano, no qual no eixo x está a quantidade de filmes locados, no eixo y o valor anual a ser pago e representa os pontos descontínuos no gráfico. E estratégias incorretas: (2.F.2) apresenta o plano cartesiano no qual no eixo x está a quantidade de filmes locados, no eixo y o valor a ser pago pela locação e representa a reta do gráfico; (2.F.3) apresenta o plano cartesiano no qual no eixo x está a quantidade de filmes locados, no eixo y o valor a ser pago pela locação e representa a reta do gráfico, mas desconsidera a taxa de adesão; (2.F.4) apresenta o plano cartesiano no qual no eixo x está a quantidade de filmes locados, no eixo y o valor a ser pago pela locação, mas posiciona o valor inicial da função na origem; e (2.F.5) não apresenta resolução.

Já o objetivo do item 2.(g) foi investigar se os grupos, a partir das representações algébricas e depois de ter estudado a abordagem de interpretação global, identificavam e diferenciavam graficamente as funções apresentadas nesta tarefa. Para isso, o estudante poderia apresentar diferentes estratégias de resolução, como as corretas: (2.G.1) identifica as respectivas representações algébricas aos seus gráficos, partindo do valor inicial da função ou coeficiente linear de cada uma delas, ou seja, identifica que a reta azul representa a função para o plano 2: $V = 15 + 2.x$ e a reta vermelha representa a função para o plano 3: $V = 4{,}5.x$; e (2.G.2) identifica as respectivas representações algébricas aos seus gráficos, partindo da taxa de variação de cada uma delas, ou seja, identifica que a reta azul representa a função para o plano 2: $V = 15 + 2.x$ e a reta vermelha representa a função para o plano 3: $V = 4{,}5.x$. Estratégia parcialmente correta: (2.G.3) identifica as representações algébricas aos seus gráficos corretamente, mas não apresenta justificativa. E estratégia incorreta: (2.G.4) não apresenta resolução.

No Quadro 25 apresentamos os elementos da função afim contemplados e as respectivas transformações para cada item da atividade 5. Para os itens cujo propósito fora enfatizar a interpretação global, elaboramos o Quadro 26 que especifica as unidades simbólicas significativas, as respectivas variáveis visuais de representação e seus valores envolvidos no problema.

	ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$	**TRATAMENTO**	**CONVERSÃO**
ATIVIDADE 5	1. a) Intepretação Global – taxa de variação.		RGRA ➔ RSA
	1. b) Interpretação Global – coeficiente linear.		RGRA ➔ RSA
	1. c) Interpretação Global – taxa de variação.		RGRA ➔ RSA
	1. d) Interpretação Global – taxa de variação.	RSN	RGRA ➔ RSA
	1. e) Lei de formação (generalização).	RSN	RGRA ➔ RSA
	2. a) Cálculo com valores da função afim.	RSN	
	2. b) Cálculo com valores da função afim.	RSN	
	2. c) Lei de formação (generalização).	LN	
	2. d) Lei de formação (generalização).		LN ➔ RSA
	2. e) Cálculo com valores da função afim.	RSN	
	2. f) Construção de um gráfico.		RSA ➔ RGRA
	2. g) Interpretação Global da função afim.		RGRA ➔ RSA

Quadro 25: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre Registros de Representação da atividade 5 da Sequência Didática
Fonte: Autora

ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $\boldsymbol{f(x) = a.x + b}$	**UNIDADE SIMBÓLICA SIGNIFICATIVA**	**VARIÁVEL VISUAL DE REPRESENTAÇÃO**	**VALORES**
1. a) Interpretação global – taxa de variação.	Sinal do coeficiente a na expressão algébrica	Sentido de inclinação da reta	Descendente
1. b) Interpretação Global – coeficiente linear.	Valor do coeficiente b na expressão algébrica	Posição da reta sobre o eixo y	Corta abaixo da origem
1. c) Interpretação global – taxa de variação.	Valor do coeficiente a na expressão algébrica	Ângulos da reta com os eixos	Ângulo α > β e, então, $a < -1$
1. d) Interpretação global – taxa de variação.	Valor do coeficiente a na expressão algébrica	Sentido de inclinação da reta Ângulos da reta com os eixos	Descendente Ângulo α > β e, então, $a < -1$
2. g) Interpretação Global da função afim.	Valores dos coeficientes a e b na expressão algébrica	Sentido de inclinação da reta Posição da reta sobre o eixo	Ascendentes Corta acima da origem

Quadro 26: Elementos da função afim e a identificação das conversões entre Registros de Representação da atividade 5 da Sequência Didática
Fonte: Autora

4.2.6 Atividade 6

a) Expliquem o que é domínio de uma função.

b) Já vimos em atividades anteriores que a função afim, graficamente, é uma reta. Agora reflitam: é possível dizer que esta reta é infinita? Justifiquem sua resposta.

c) Israel está abrindo um novo consultório médico em sua cidade e gostaria de decorar a sala de espera com um painel em aço de 1m por 1m com a logo da sua empresa entalhado, conforme figura a seguir. Para isso, irá recorrer a um tipo de impressão chamado CNC Router, que é uma máquina de corte controlada por um computador e que serve para cortar e gravar em materiais duros como madeira, alumínio, aço, vidro, plástico e espuma. Para obter a máxima precisão na impressão é necessário que o computador receba a programação das linhas para o corte, ou seja, precisamos descrever algebricamente as funções que compõem <u>todas as retas desta logo</u>. Assim, o problema é: quais são as expressões algébricas das retas e os domínios de definição que constituem a logo requerida por Israel?

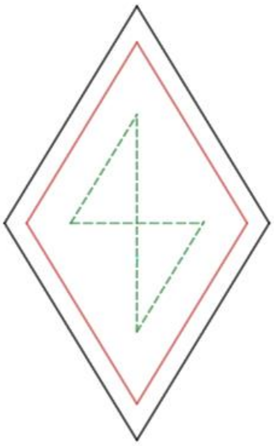


Figura 16: Logo para construção na atividade 6
Fonte: Autora

Análises a priori da atividade 6

Para esta última atividade da sequência didática buscamos identificar os conhecimentos do estudante sobre a função afim a partir dos registros de representação simbólico algébrico e gráfico e da intepretação global de propriedades figurais, a partir de uma situação contextualizada envolvendo uma logo de uma empresa. Além disso, nesta atividade contemplou-se sobre o domínio da função afim e a infinitude da reta do gráfico.

No item (a) esperávamos que os grupos apresentassem a definição, com suas próprias palavras, sobre o domínio de uma função, conceito trabalhado previamente a esta pesquisa. Assim, elencamos como possível resposta correta: (A.1) apresenta em língua natural que o domínio é o conjunto de valores que pode “entrar” em uma função. E incorretas: (A.2) apresenta em língua natural que o domínio é o conjunto de valores que pode “sair” de uma função; (A.3) são os valores para x; (A.4) são os valores para y; e (A.5) são todos os valores para a função.

O objetivo para o item (b) era identificar o entendimento do estudante sobre a representação gráfica de uma função afim e a sua infinitude. Consideramos como resposta correta: (B.1) sim, a reta do gráfico da função afim sempre é infinita, pois x pode assumir todos os valores no conjunto dos Reais. E incorreta: (B.2) não, a reta do gráfico não é infinita, pois não vemos ela inteira.

O item (c) visa analisar o uso da abordagem de interpretação global pelos estudantes, ou seja, se durante a conversão entre registros de representação gráfico e simbólico algébrico eles fazem uso, mesmo que implicitamente, das três variáveis visuais de representação junto às suas respectivas unidades simbólicas significativas. Assim, esperávamos que os grupos apresentassem as expressões algébricas das funções afim envolvidas na figura, bem como os seus intervalos de domínio, conforme necessário para reproduzir uma logo igual ou semelhante a apresentada.

Para esta análise a *priori* consideramos que os grupos utilizariam como estratégia de resolução tentativas e erros, ou seja, lançariam no aplicativo *Desmos* expressões algébricas aleatórias até definir uma mais próxima ao desenho. A partir daí, analisariam os valores para os coeficientes da primeira função para definir as próximas expressões algébricas.

O Quadro 27 apresenta os itens desta atividade e os elementos da função afim pertinentes ao trabalho, bem como a transformação proposta para a resolução destes.

ATIVIDADE 6	ELEMENTOS DA FUNÇÃO AFIM $f(x) = a.x + b$	TRATAMENTO	CONVERSÃO
	1. Domínio da função	LN	
	2. Finitude da reta do Gráfico	LN	
	3. Construção da Logo		RGRA ➔ RSA

Quadro 27: Elementos da função afim e a identificação de tratamentos e conversões entre Registros de Representação da atividade 6 da sequência didática
Fonte: Autora

Após o desenvolvimento desta sequência didática e sua análise *a priori*, elaboramos o Quadro 28 que organiza nossas expectativas quanto à mobilização dos conhecimentos dos estudantes em relação às transformações de tratamento e conversão. Além disso, mencionamos as variáveis visuais de representação e suas respectivas unidades simbólicas significativas envolvidas nas atividades pertinentes à interpretação global, as quais esperamos, também, a mobilização por parte dos estudantes.

Ativ.		Trat.	Conversões		Variáveis Visuais	Unidades Simbólicas Significativas
			Reg. Partida	Reg. Chegada		
Sequência Didática	1	RSN RSA LN	LN	RSA		
			RSA	RGRA	Posição do traçado	Coeficiente $b > 0$ em diferentes pontos do plano cartesiano.
					Ângulos com os eixos	Quanto maior o valor para o coeficiente a maior o ângulo α.
	2	RSN RSA	LN	RSA		
			RGRA	RSN		
			RGRA	RSA		
	3		RGRA	RSA	Sentido de inclinação	Coeficiente $a > 0$ ou $a < 0$.
					Posição do traçado	Coeficiente $b > 0$ ou $b < 0$.
					Ângulos com os eixos	Ângulo α > β ou α < β.
	4	RSN	RGRA	RSA	Sentido de inclinação	Coeficiente $a > 0$ ou $a > 0$.
					Posição do traçado	Coeficiente $b > 0$ ou $b < 0$.
					Ângulos com os eixos	Ângulo α > β ou α < β.
	5	RSN	RGRA RSA	RSA RGRA	Sentido de inclinação	Coeficiente $a > 0$ ou $a < 0$.
					Posição do traçado	Coeficiente $b > 0$ ou $b < 0$.
					Ângulos com os eixos	Ângulo α > β ou α < β.
	6	LN	RGRA	RSA	Sentido de inclinação	Coeficiente $a > 0$ ou $a < 0$.
					Posição do traçado	Coeficiente $b > 0$ ou $b < 0$.

Quadro 28: Expectativas da pesquisadora em relação a tratamentos e conversões para cada uma das atividades da sequência didática.
Fonte: Autora

No próximo capítulo apresentamos a descrição da experimentação e das análises *a posteriori* das atividades aqui mencionadas.

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES *A POSTERIORI* DAS ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo são apresentadas a experimentação e as análises *a posteriori* das atividades da sequência didática, buscando fazer o confronto com as análises *a priori*. Para a realização das atividades, foram organizados onze grupos de três estudantes, denominados: G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10 e G11. A fim de preservarmos a identificação dos estudantes participantes desta pesquisa, utilizaremos a sigla E1G1 para o estudante 1 do grupo G1; E2G1 para o estudante 2 do grupo G1 e E3G1 para o estudante 3 do grupo G1, e assim sucessivamente para os demais grupos, para que, quando for necessário, possamos mencioná-los de modo específico durante estas análises.

5.1 Análise *a Posteriori* da Atividade 1

Esta atividade foi aplicada em dois encontros: a primeira sessão no dia 23 de agosto de 2019, em duas horas-aula, momento em que os estudantes resolveram até o item (g); e a segunda sessão no dia 30 de agosto de 2019, também em duas horas-aula, no qual os estudantes finalizaram a atividade até o item (k).

Na primeira sessão, os grupos organizaram-se com os seguintes materiais: uma proveta graduada, um recipiente com água, bolinhas de gude, lápis, borracha, folha de questões e calculadora. Para uma melhor execução do experimento, a pesquisadora utilizou o espaço do laboratório de ciências que dispunha de bancadas de mármore e instalações com pias e torneiras para a coleta de água.

Antes do início do experimento, a pesquisadora salientou que os grupos estavam recebendo uma determinada quantidade de bolinhas de gude, as quais, talvez, pudessem apresentar diferenças mínimas de tamanho e, por isso, poderia ocorrer uma diferença na leitura do nível de água. Neste caso, deveriam repetir o experimento, retirando a referida bolinha de gude para refazer suas observações e inserindo outra.

Caracterizamos esta atividade como *adidática*, pois os estudantes demonstraram envolvimento com a situação, pelo fato de estarem no ambiente do laboratório de ciências, pela manipulação de materiais diferenciados, como a proveta graduada e durante as discussões em grupo buscando encontrar soluções para as atividades, a partir dos conhecimentos que tinham previamente, ou seja, notamos que essa situação se caracterizou como uma situação de ação e que houve a *devolução* do problema.

Para as análises *a posteriori*, apresentamos novamente os enunciados das atividades a fim de situar o leitor nas discussões.

1) Vamos fazer um pequeno experimento por meio da observação do comportamento do nível de água em uma proveta graduada quando inserimos nela algumas bolinhas de gude. Coloque 40 ml de água na sua proveta graduada. a) Construa uma tabela com os dados pedidos a partir das observações realizadas. b) Qual é o valor inicial de água colocada na proveta graduada? c) Quanto aumenta o nível de água na proveta graduada cada vez que você coloca uma bolinha de gude?

Nos itens (a), (b) e (c) da atividade 1, os grupos não apresentaram dificuldades, realizando tratamentos corretos no registro simbólico numérico. Como nem todas as bolinhas de gude recebidas pelos grupos eram idênticas, tivemos diferenças entre as leituras nas provetas graduadas. Os grupos G1, G2, G3, G4, G7, G9 e G10 observaram e registraram corretamente, nos itens (a) e (c), um aumento do nível de água na proveta em 2 ml e os grupos G5, G6 e G11, 3 ml para cada bolinha de gude colocada.

O grupo G8 considerou no item (c) que o aumento do nível de água na proveta graduada era de 2,5 ml a cada bolinha colocada, resolução correta e não prevista em análise a *priori*. Na sequência, apresentamos um trecho da transcrição dos áudios de discussão do grupo G8, no qual identificamos a situação de formulação e validação das informações tomadas via experimento, bem como a resolução para o item (a).

Estudante 2: Coloca uma bolinha e veja a quantidade de água que subiu.
Estudante 3: Ficou no meio.
Estudante 2: Coloca mais uma.
Estudante 1: Vamos ir anotando já.
Estudante 2: Duas bolinhas deu 45.
Estudante 3: Quatro bolinhas ...

Estudante 2: Vai dar 50. (Barulho de bolinhas sendo colocadas na proveta).
Estudante 2: Agora deu 55.
Estudante 1: É não tinha nenhuma para dar 40.
Estudante 3: Coloca zero e quarenta.
Estudante 2: Qual o valor inicial colocado na proveta graduada. 40 ml. Quanto aumenta a quantidade de líquido na proveta graduada cada vez que você coloca uma bolinha de gude?
Estudante 1: 5 ml.
Estudante 2: Aumenta 5 ml.
Estudante 3: Tem certeza? De duas em duas, né? Mas ali é a cada bolinha.
Estudante 2: Então, é dois vírgula cinco.
Estudante 3: Acho que a gente deveria ter colocado a cada bolinha.
Estudante 2: Mas só tinham 7 bolinhas. Não iria dar que chega.
Estudante 1: Eu disse para observar quanto que subia de ml da primeira bolinha.
Estudante 2: Mas se duas bolinhas sobem 5 ml é só colocar 2,5.
Estudante 3: É isso. (GRUPO G8)

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	Nível de água na proveta graduada (ml)
0	40 ml
2	45 ml
4	50 ml
6	55 ml
7	57,5 ml

Figura 17: Resolução para o item (a) da atividade 1 do Grupo G8
Fonte: Dados da Pesquisa

A partir da transcrição dos áudios da discussão de G8 e da análise da Figura 17, percebemos que o grupo considerou que, se duas bolinhas elevavam o nível de água em 5 ml, então, proporcionalmente, uma bolinha eleva em 2,5 ml.

Todos os grupos responderam corretamente o item (b) dizendo que o nível inicial de água na proveta era de 40 ml.

1.d) Qual seria o nível de água na proveta graduada se você colocasse 10 bolinhas? E 15 bolinhas? E 28 bolinhas? Explique como você determinou suas respostas.

No item (d), os grupos expressaram dificuldade em organizar as suas ideias, especialmente quando confrontavam os dados do experimento (empírico) com os dados numéricos que surgiam durante suas discussões. Todos os grupos buscaram tentativas de resoluções por meio de um tratamento no registro de representação simbólico numérico.

O grupo G2 utilizou a estratégia correta D.1 da análise *a priori*, pois apresentaram a multiplicação entre a quantidade de bolinhas de gude dada e o valor obtido no item (c), 2 ml, e, posteriormente, somaram aos 40 ml da quantidade inicial de água. Os grupos G8 e G11 responderam de forma semelhante, porém aproximaram-se da estratégia correta D.3, uma vez que em seus experimentos uma bolinha de gude elevava o nível de água em 3 ml.

O grupo G8 teve ampla discussão, numa situação de formulação e validação, pois os resultados obtidos empiricamente nos itens anteriores não correspondiam, inicialmente, às suas demonstrações numéricas.

Estudante 3: Se uma bolinha aumenta 2,5 ml então tem que fazer 2,5 vezes 10; 2,5 vezes 15 e 2,5 vezes 28.
Estudante 2: Não dá. Agora a gente tem que fazer quanto dá para ml. Qual seria o nível de água que vai subir.
Estudante 3: 25 dá.
Estudante 2: Então, seria 25 ml. Mas não vai dar certo, porque se com 7 bolinhas deu 57,5 ml tem que dar mais. Porque é 10 bolinhas.
Estudante 3: Aqui vai dar 37,5.
Estudante 2: Aí que tá não pode dar isso!
Estudante 3: Por que não?
Estudante 2: Porque aqui no 7 chegou em 57,5.
Estudante 3: Ah, mas agora você soma os 40 ml que já tinha né?
Estudante 2: Pode ser.
Estudante 3: Porque aqui você faz, tipo assim, 10 vezes 2,5 dá 25, mais 40 ...
Estudante 2: É verdade, porque antes de colocar as bolinhas já tinha os 40 ali. Depois foram as bolinhas.
Estudante 3: 65. (GRUPO G8)

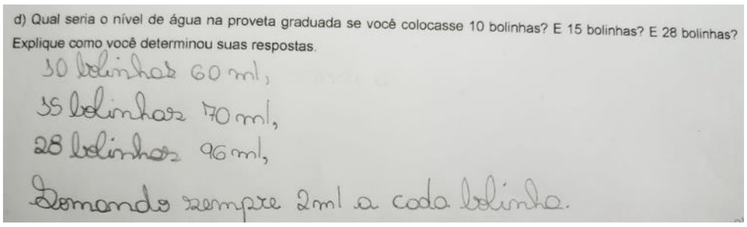
Enquanto o estudante E3G8 sugere que a situação seja resolvida pela multiplicação entre a quantidade de bolinhas pedidas e o valor correspondente de água para uma bolinha, o estudante E2G8 compara os valores obtidos ao experimento e verifica que algo não está correto, uma vez que do nível de água na proveta para 10 bolinhas deve ser maior que a quantidade dada empiricamente por 7 bolinhas de gude, o qual corresponde a 57,5 ml de volume na proveta. Resolvem a situação percebendo que havia uma quantidade de 40 ml inicial de água que deveria ser considerado nestes casos.

Com base neste diálogo entre os componentes do grupo, observamos indicativos de compreensão do termo *coeficiente linear* de uma função afim, ao considerarem o acréscimo de 40 ml do experimento. Além disso, notamos que o estudante E3G8 mobilizou corretamente as ideias base de dependência e correspondência entre a variável nível de água e a variável quantidade de água que cada bolinha de gude elevava na proveta graduada.

Os grupos G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9 e G10 resolveram o item por uma estratégia não prevista nas análises a *priori* e realizaram um tratamento no registro simbólico numérico, que apesar de correto, foi diferente dos grupos anteriores. Ambos os grupos utilizaram a contagem de dois em dois ou três em três, de acordo com os seus experimentos, até obterem a quantidade de bolinhas pedidas, como observado nas transcrições dos áudios do grupo G1, trecho relatado a seguir, no qual identificamos, também, situações de formulação e validação.

Estudante 3: Tá, qual seria o nível de água na proveta graduada se você colocasse 10 bolinhas?
Estudante 1: Dez bolinhas não tem.
Estudante 3: Mas daí a gente vai ter que pensar. Experimenta de 2.
Estudante 1: Tá, quanto é o mínimo de cada um?
Estudante 3: 2 ml. Será que não é o dez vezes o dois?
Estudante 1: Dá 20.
Estudante 3: Se você colocasse 10 bolinhas ...
Estudante 2: Oh, tem 7 aqui dentro. Sete, oito, nove, dez. Então, oito vai dar para 56, aí vai pra 58 pra nove bolinhas. Aí dez, sessenta.
Estudante 3: Ok, 10 igual 60 ml. E quinze bolinhas? Sessenta com dez, sessenta e dois com onze, sessenta e quatro com doze, sessenta e seis com treze, sessenta e oito com quatorze e 70 com quinze. (GRUPO G1)

Neste diálogo de discussão do grupo G1, há indicativos de que os estudantes não compreendem a generalização da situação, apenas a correspondência entre a variável quantidade de bolinhas e a variável nível de água. Também observamos na explicação dada pelo grupo G9 na folha de questões, conforme apresentado na Figura 18 a seguir.


d) Qual seria o nível de água na proveta graduada se você colocasse 10 bolinhas? E 15 bolinhas? E 28 bolinhas? Explique como você determinou suas respostas.

30 bolinhas 60 ml,
35 bolinhas 70 ml,
28 bolinhas 96 ml,
Somando sempre 2ml a cada bolinha.

Figura 18: Resolução do item (d) da atividade 1 do Grupo G9
Fonte: Dados da Pesquisa

Nestes casos, os grupos G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9 e G10 não compreendem a regularidade e a generalização, tão pouco a relação de dependência entre as variáveis quantidade de bolinhas e nível de água. Estes mesmos grupos não apresentaram a generalização correta tanto no registro de representação em língua natural no item (f) quanto no registro de representação simbólico algébrico pedido no item (g).

1.e) Quantas bolinhas seriam necessárias para que o nível de água na proveta graduada atingisse 180 ml? E 250 ml? Explique como você determinou suas respostas.

Apenas os grupos G9 e G11 apresentaram resposta correta para o item (e). No entanto, nenhum destes grupos formalizou o cálculo ou justificou sua resposta demonstrando a relação de dependência entre a variável nível de água na proveta (y) e a quantidade de bolinhas (x), ou seja, a dependência de y para x. Ambos os grupos utilizaram a estratégia de resolução E.3 por meio de tentativas. A Figura 19 mostra a resolução do grupo G9, que, apesar do uso equivocado no sinal de igualdade em sua explicação, atribuiu diferentes valores para a quantidade de bolinhas e seus respectivos níveis de água. A resposta final está correta, porém esperávamos outra forma de resolução, evidenciando a relação de dependência inversa, ou seja, de 180 ml subtrai-se 40 ml igual a 140 ml dividido por 2 ml, o que corresponde a 70 bolinhas.

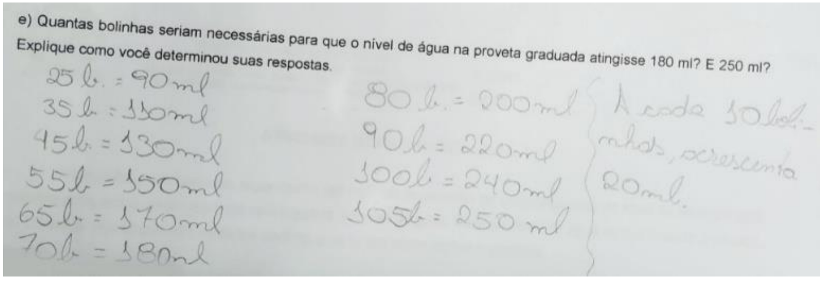


Figura 19: Resolução do item (e) da atividade 1 do Grupo G9
Fonte: Dados da Pesquisa

Os grupos G8 e G10 realizaram apenas a divisão entre o nível de água por 2 ml, ou seja, 180 ÷ 2 e 250 ÷ 2 obtendo como resultados 90 e 125 bolinhas de gude, respectivamente, os quais identificamos a estratégia de resolução incorreta E.4. Da mesma forma, os grupos G5 e G6 apresentaram a estratégia E.5, considerando uma bolinha de gude a variação de 3 ml. Estes quatro grupos desconsideraram o valor inicial de água na proveta graduada.

O grupo G3 considerou o valor inicial de água, porém, trocou a ordem das operações, realizando, primeiramente, a divisão do nível de água 180 ml por 2 e, posteriormente, subtraiu a quantidade inicial de água de 40 ml na proveta, estratégia de resolução incorreta E.6.

Os grupos G1, G2 e G7 apresentaram estratégias de resolução incorretas e não contempladas em nossa análise a *priori*. O grupo G1 partiu da ideia de que 30 bolinhas de gude dariam 100 ml de volume na proveta, dado este correto. Porém, conjecturamos que o estudante E1G1, ao coordenar as discussões para o referido item, confundiu-se ao lidar com as variáveis bolinhas de gude e nível de água, como observamos na transcrição do seu áudio: "*Você pega 180 que é das 30 bolinhas, 30 que dá 210. Aí você soma mais 30, deu 240. Você pega os 30 de cima mais 30, sessenta, mais trinta, noventa, mais dez, dá cem*" (Estudante E1G1). Os outros dois integrantes do grupo aceitaram a resposta, pois também pareceram não compreender o problema. O grupo G4 não apresentou resolução para os itens (e), (f) e (g).

O fato de os grupos utilizarem a estratégia de resolução por tentativas também foi identificado na pesquisa de Reis (2011) que, numa situação com estrutura semelhante, mas num contexto relativo à compra de passagens, os estudantes de sua pesquisa também não utilizaram a estratégia de converter para o registro simbólico algébrico e responderam a partir do uso de tentativas ou somatórias para encontrar a resposta. Mesmo os estudantes que apresentaram respostas corretas não "[...] produziram soluções que poderiam ser utilizadas na ocorrência de valores numéricos muito maiores, o que indica a dificuldade de realizar uma generalização algebricamente válida" (REIS, 2011, p. 101). O mesmo ocorreu com a ideia de generalização, na pesquisa de Reis (2011), na qual nenhum estudante obteve sucesso em apresentar uma fórmula que descrevesse a situação. Fato este também observado pela pesquisadora nesta atividade e que será aprofundado na análise *a posteriori* dos itens (f) e (g).

1.f) Com base nos dados dispostos na tabela do item (a), descreva de que modo podemos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas de gude colocada na proveta graduada que possui 40 ml de água inicialmente. g) Estabeleça uma "lei" de formação de modo que possamos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas colocadas na proveta graduada.

Nos itens (f) e (g), referentes à ideia de generalização da função afim envolvida no enunciado, o primeiro em língua natural e o segundo no registro simbólico algébrico, os grupos G2, G8 e G11, que apresentaram resposta correta para o item (d), demonstraram entendimento da regularidade presente na situação entre as variáveis quantidade de bolinhas e nível de água na proveta e obtiveram sucesso em responder os dois itens de generalização. No item (f), apresentaram a necessidade de multiplicar a quantidade de bolinhas por 2 ml e somar, posteriormente, 40 ml da água já existente na proveta graduada e no item (g) a expressão algébrica $A = 40 + 2.x$, onde A é do nível de água em ml e x a quantidade de bolinhas colocadas na proveta graduada.

Os demais grupos não apresentaram soluções corretas para ambos os itens. Seis grupos, G1, G3, G5, G7, G9 e G10 apresentaram para o item (f) a estratégia de resolução incorreta F.5 indicando que, para determinar do nível de água, é necessário somar ou acrescentar 2 ml ou 3 ml a cada bolinha colocada, conforme situação experimental. Apenas o grupo G6 que, apesar de incorreto, trouxe a ideia de multiplicação entre a quantidade de bolinhas colocadas e o valor de 2 ml correspondente a cada bolinha, estratégia F.3 da análise *a priori*. Estes grupos desconsideraram a quantidade inicial de água como dado necessário para a determinação do nível de água na proveta graduada.

Em relação ao item (g), dentre as estratégias incorretas, os grupos G1, G7 e G10 apresentaram resoluções não previstas nas análises *a priori*. Consideramos que estes grupos tentaram, de alguma maneira, apresentar alguma solução, mesmo a partir de tentativas, numa situação de formulação, atribuindo às expressões quaisquer variáveis e relações, ainda que incoerentes, pois não queriam deixar questões em branco, o que, mesmo assim, ocorreu com os grupos G4 e G9.

O grupo G10 obteve como lei de formação no item (g) a expressão $40.x = 1.2$, a qual buscamos, na transcrição dos áudios, melhor entendimento da situação de formulação dos estudantes.

Estudante 1: Essa lei de formação eu nunca entendo.
Estudante 2: Calma, eu tenho que ler devagar.
Estudante 3: Quarenta ml mais dois ...
Estudante 2: Não, esse x tem que mudar. Tem que ser tipo nível de água. Então, o x é o nível de água ...
Estudante 3: Que é 40 ml. Aí tem que fazer 1 bolinha vezes 2.
Estudante 1: Então, tá certo.
Estudante 3: Quarenta x, não é?
Estudante 1: Não é só x. Porque se mudar o tanto de água aqui dentro muda todos os resultados, tipo se não começar com 40.
Estudante 3: Mas se começar com 40, aí depois você vai fazer vezes dois, daí vai ficar só o x, aí dois mais 40 ... Não! Esquece. Pronto, terminamos. (GRUPO 10)

Este mesmo grupo no item (f) apresentou como resposta: "*aumentar 2 ml ao valor da água a cada bolinha colocada*" (GRUPO G10), ou seja, percebe em língua natural a relação dependência entre quantidade de bolinhas e nível de água na proveta. Porém, não consegue estabelecer uma lei de formação no registro simbólico algébrico associando as mesmas ideias, uma vez que, para o grupo, a variação ocorre apenas no nível de água.

Os grupos G3, G5 e G6 apresentaram resolução incorreta G.3 da análise *a priori*, ou seja, estabeleceram como lei de formação para a situação a expressão $y = x.2$; $N = b.3$ e $f(x) = x.3$, respectivamente. Assim como nas suas respostas para o item (f), estes grupos não consideraram o valor inicial de água como dado necessário para a generalização da situação, mas compreendem que do nível de água depende da quantidade de bolinhas inseridas na proveta.

Com base nestas análises, observamos as dificuldades dos estudantes em realizarem uma conversão entre o registro simbólico numérico (dados organizados na tabela) para o registro em língua natural (generalização da situação), bem como nos tratamentos corretos no registro simbólico numérico para que chegassem ao registro simbólico algébrico, ou seja, do ponto de vista de Duval (2011), os estudantes participantes desta pesquisa indicam a não compreensão do conceito de função, devido às suas dificuldades com as transformações (internas e externas) dos registros de representação semiótica envolvidos nesta atividade 1.

Após a finalização das discussões entre os estudantes dos grupos, a folha de questões foi recolhida pela pesquisadora e outra igual foi dada individualmente, para que, junto a ela, pudéssemos fazer apontamentos sobre as questões e a institucionalização de conceitos pertinentes a primeira sessão do nosso estudo. A pesquisadora dispôs as questões na forma de *slides* para que a turma, como um todo, pudesse participar. Os estudantes foram convidados a expor suas resoluções, suas ideias e conjecturas, para que, juntos, estudantes e pesquisadora, pudéssemos formalizar o conceito de função afim.

Neste momento de institucionalização, ou seja, de situação didática, cuja intenção de ensinar é revelada ao estudante, ocorreram as discussões entre os estudantes e estudantes e pesquisadora sobre as resoluções (corretas ou não) apresentadas pelos grupos na atividade 1. Em conjunto com a turma, a pesquisadora validava as respostas corretas. Para dar sequência às demais atividades, a definição de função afim foi apresentada aos estudantes, bem como foram feitas junto à turma discussões sobre os termos coeficiente linear e taxa de variação, presentes na função afim.

A partir da resolução do item (h) iniciamos a segunda sessão de aplicação, que ocorreu no dia 30 de agosto de 2019 na própria sala de aula, também em duas horas-aula, momento em que finalizamos as discussões da atividade 1 nos mesmos onze grupos (trios), sem falta de estudantes neste dia. Além dos materiais usuais, foi utilizado o aplicativo *Desmos* instalado em pelo menos um *smartphone* pessoal de cada grupo.

1.h) Se mudarmos a quantidade de água inicial na proveta graduada para 55 ml e ainda com as mesmas bolinhas de gude, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação, comparada a expressão descrita no item (g)? i) Quais seriam as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml? Com ajuda do aplicativo *Desmos* digite a expressão algébrica encontrada na "lei" de formação da função definida no item (g). Depois, insira a nova "lei" de formação, obtida no item (h) e relate as suas observações. j) Agora, suponhamos o experimento com bolinhas de gude de maior volume, ou seja, cada bolinha inserida em uma proveta graduada com 55 ml de valor inicial de água eleva o seu nível em 3 ml. Então, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação comparada com as anteriores definidas nos itens (g) e (h)? k) Quais foram as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml e o tamanho das bolinhas de gude? Insira a nova "lei" de formação no aplicativo *Desmos* e relate as suas observações.

Os itens (h), (i), (j) e (k) foram elaborados com ênfase para a interpretação global de propriedades figurais, ou seja, o estudo da função afim a partir do confronto entre unidades simbólicas significativas, neste caso os valores para a taxa de variação e coeficiente linear, e as respectivas mudanças nas variáveis visuais de representação ocorridas no registro gráfico.

Nos itens (h) e (j) os estudantes deveriam observar, a partir da expressão algébrica definida no item (g)[21] como sendo $f(x) = 40 + 2.x$, que os coeficientes a e b sofreriam mudanças de acordo com o solicitado em cada item. Nestes, todos os grupos responderam corretamente, ou seja, no item (h) identificaram que a mudança do valor inicial da função deveria ser expressa no coeficiente b da expressão algébrica da função afim $f(x) = a.x + b$. Assim, detalharam que a nova expressão algébrica seria $f(x) = 55 + 2.x$, resolução H.1 prevista em análise a *priori*.

De forma semelhante, no item (j), observaram que a mudança na taxa de variação se referia ao valor dado para o coeficiente a da expressão algébrica da função afim $f(x) = a.x + b$, pois descreveram que a nova expressão algébrica deveria ser $f(x) = 55 + 3.x$, resolução J.1 da análise *a priori*.

[21] A fim de facilitarmos as próximas discussões, no momento da institucionalização, a pesquisadora, junto aos estudantes, padronizou as respostas das atividades da primeira sessão, a partir da situação em que cada bolinha de gude sobe o nível de água na proveta graduada em 2 ml.

Nos itens (i) e (k), os grupos deveriam utilizar o aplicativo *Desmos* para visualizarem as possíveis mudanças ocorridas no registro de representação gráfico de cada uma das funções afim definidas nos itens (g), (h) e (j). No item (i), a respeito da mudança ocorrida na variável visual de representação posição do gráfico em relação à origem do eixo y, quando alterado o valor para o coeficiente b no registro simbólico algébrico da função afim, os grupos, ao compararem com o gráfico gerado pelo item (g), cuja expressão algébrica era definida por $f(x) = 2.x + 40$, destacaram diferentes características, conforme as percepções que tiveram com o uso do aplicativo.

Elencamos as respostas para o item (i) em três agrupamentos, a saber: 1) as respostas corretas, que mencionaram, de alguma forma, a respeito da mudança do coeficiente linear b sobre o eixo y em relação à origem, variável visual de representação envolvida, resolução prevista em análise *a priori* como I.1; 2) as parcialmente corretas, pois mencionaram outras características referentes às mudanças e não se referiram à variável visual de representação envolvida; e 3) as incorretas.

Os grupos que se enquadram no primeiro agrupamento são G4 e G8. O grupo G4 percebeu que, além dos gráficos terem o mesmo sentido, o gráfico gerado pela expressão algébrica do item (i) apresenta quantidade inicial de água em 55 ml, valor marcado sobre o eixo y do plano cartesiano, mostrado pelo aplicativo *Desmos*, pois respondeu: "[...] *ambas possuem o mesmo sentido, porém elas estão mais afastadas e interferindo na quantidade inicial de água que agora é 55 ml no y*" (GRUPO G4), ou seja, apesar de não identificarem pontos em coordenadas no gráfico, perceberam a mudança ocorrida graficamente no momento da inserção de novo valor para o coeficiente linear da função.

No agrupamento 2, enquadram-se os grupos: G2, G5, G6, G7, G9, G10 e G11, pois descrevem outras características, as quais estão parcialmente corretas e que não remetem sua análise para a variável visual de representação posição do gráfico sobre o eixo y. Nestes grupos observamos, tanto nas produções escritas quanto nas transcrições dos áudios, as dificuldades na utilização da linguagem matemática para descrever o que estavam observando no aplicativo. Desta forma, apresentam respostas em termos do senso comum, como exemplo: "[...] *tem duas retas, uma* *vermelha e outra verde, com a diferença de 15 números*” (GRUPO G6); e “[...] *a linha ficou acima do 50*” (GRUPO G11). Os demais grupos desse agrupamento apresentaram como resposta as seguintes observações: mudança da posição da reta (G2 e G7), a reta está mais acima que a primeira (G5) e que aumentou 15 ml (G9).

Por fim, no agrupamento de respostas incorretas enquadram-se os grupos G1 e G3. O grupo G1 não percebeu mudanças entre os registros gráficos, pois relatou que “[...] *os pontos, primeiro eram positivos, depois negativos, pula de 5 em 5*” (GRUPO G1), ou seja, destacaram características do plano cartesiano, que, neste caso, marcava valores de cinco em cinco. O grupo G3 se referiu ao gráfico com o termo “plano cartesiano” e destacou que “[...] *o plano cartesiano ficou ainda na diagonal, porém um pouco menos inclinado*” (GRUPO G3), ou seja, não conseguiram realizar uma leitura global dos gráficos em relação às suas expressões algébricas.

No item (k), os grupos deveriam observar a mudança na variável visual de representação *ângulos do traçado com os eixos*, quando alterado o valor para o coeficiente a ou taxa de variação no registro simbólico algébrico da função afim. Assim como no item (i), elencamos as respostas dos grupos em três novos agrupamentos, a saber: 1) as corretas, que mencionaram, de alguma forma, a respeito da mudança na inclinação da reta, variável visual envolvida, cuja resolução prevista em análise *a priori* como K.1; 2) as parcialmente corretas, pois mencionaram outras características referentes às mudanças e não se referiram à variável visual de representação envolvida; e 3) as incorretas.

No agrupamento 1 enquadram-se os grupos G8, que já havia relacionado corretamente a variável visual posição do gráfico sobre o eixo y no item (h), e o grupo G11. Ambos destacaram que a reta do gráfico da expressão algébrica $f(x) = 3.x + 55$ ficou mais inclinada que a reta determinada no item (h), cuja taxa de variação era igual a dois, ou seja, estes grupos percebem a mudança no registro gráfico quando se altera o valor para o coeficiente a.

No agrupamento 2, enquadram-se a maior parte dos grupos G2, G4, G5, G6, G7, G9 e G10, pois suas respostas estão parcialmente corretas e não há em seus registros escritos indicativo de observação para a variável visual de representação *ângulos do traçado com os eixos*. Estes grupos destacaram como mudanças que: a linha se estende (G2); as retas se cruzam no valor de 55, mas depois passam por caminhos diferentes (G4 e G9); a reta atravessa a anterior com valores diferentes (G5); as retas se cruzam (G6 e G7); e a reta mudou de lugar (G10).

Assim como no item (i), os grupos G1 e G3 não apresentaram respostas corretas, enquadrando-se no agrupamento 3. O grupo G1, novamente, apresentou características do plano cartesiano e o grupo G3 não apresentou resolução.

As dificuldades dos grupos em observar as mudanças sobre as variáveis visuais de representação – *posição do traçado sobre o eixo* y e *ângulos do traçado com os eixos* – no registro gráfico da função afim também foram identificadas na pesquisa de Tozo (2016), cuja atividade aplicada era sobre o valor (v) a ser pago pelo combustível a depender da quantidade percorrida (x) em quilômetros. Os sujeitos de sua pesquisa determinaram duas expressões algébricas frente a cada uma das situações ($v = \frac{x}{12}$ para os valores da gasolina e $v = \frac{x}{9}$ para os valores do etanol) e também esboçaram seus respectivos gráficos. Porém, não apresentaram conclusões a respeito das mudanças no registro gráfico em relação à diferença entre os valores para a taxa de variação nas expressões algébricas. A abordagem de interpretação global, essencial para a compreensão da função afim do ponto de vista de Duval (2011), não é trivial para os estudantes, demandando um trabalho didático específico por parte do professor.

Após a aplicação da segunda sessão da atividade 1, a pesquisadora realizou a discussão junto aos estudantes dos itens (h), (i), (j) e (k) dessa atividade. Para isso, as folhas com os registros escritos dos grupos foram, novamente, recolhidas e os estudantes, individualmente, receberam novas, com os mesmos itens da atividade 1 para que pudessem realizar suas anotações. Neste momento, também ocorreram discussões sobre o fato de que todo o gráfico de uma função afim é uma reta e que o coeficiente b é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo y.

5.2 Análise *a Posteriori* da Atividade 2

Esta sessão foi aplicada no dia 6 de setembro de 2019, em uma hora-aula, e as atividades foram realizadas nos mesmos grupos anteriormente formados, com pequenas readequações devido à falta de dois membros do grupo G6. Neste caso, o único estudante presente do referido grupo uniu-se, excepcionalmente, ao grupo G1.

Portanto, para esta atividade foram analisadas as produções de dez grupos, os quais utilizaram os seguintes materiais: lápis, borracha, folha de questões e calculadora.

Na atividade 2.1, a qual também caracterizamos como *adidática*, houve o envolvimento dos estudantes durante as discussões dos grupos, na busca de soluções, numa situação de ação.

2.1) Observe a tabela a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água.

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	**Nível de água na proveta graduada (ml)**
2	50
5	65
8	80
12	100

a) O nível de água na proveta graduada cresce quanto cada vez que uma bolinha de gude é colocada? Explique como você encontrou este valor.

No item 2.1(a) os grupos G2, G4, G5, G7, G8, G9, G10 e G11 apresentaram a resolução correta 1.A.1, ou seja, perceberam que os dados explícitos da tabela não lhes permitiam uma resposta imediata. Assim, determinaram que cada bolinha inserida na proveta, neste caso, elevava a água em 5 ml, partindo da análise de que, com 5 bolinhas na proveta, havia 65 ml de água, e com 2 bolinhas, 50 ml. Portanto, realizaram a diferença entre 65 e 50, resultando 15 ml e dividiram o valor por 3, pela diferença entre 5 e 2 bolinhas. Estes grupos souberam realizar um tratamento correto no registro de representação simbólico numérico para determinar o valor para a taxa de variação desta situação. No trecho da transcrição do áudio do grupo G5, podemos observar a discussão dos estudantes para determinar o valor da taxa de variação e as situações de formulação e de validação.

Estudante 1: Duas bolinhas são 50. Cinco é 65. De 50 para 65 sobe 15. E de 2 para 5 sobre 3.
Estudante 3: Então dá 3ml.
Estudante 2: Dá onde você tirou 3 ml?
Estudante 3: Quinze dividido por 5. Cinco bolinhas isso aumentou mais 15 ml.
Estudante 2: Mas é 15 divido por 3, porque são 3 bolinhas para subir 15 ml. Dá 5.
Estudante 3: Então, vamos ver se bate. Com 1 bolinha dá?
Estudante 2: 45.
Estudante 3: Com 2 bolinhas?
Estudante 1: É, tá certo. É de 5 em 5.
Estudante 3: Verdade. 45, 50, 55 e 60. (GRUPO G5)

O grupo G3, apesar de apresentar resposta correta, resolveu o item por tentativas, não previsto em análise *a priori*. Nas transcrições dos seus áudios, notamos que o grupo partiu da hipótese de que na proveta graduada havia 40 ml de água, assim como na atividade 1, e inserindo duas bolinhas o nível de água elevou para 50 ml. Concluíram, então, que cada bolinha de gude equivale a 5 ml no nível de água, resposta que, apesar de correta, não condiz com uma análise adequada dos dados da tabela, ou seja, da função afim em seu registro simbólico numérico.

O grupo G1, que respondeu incorretamente, tomou como hipótese que o valor inicial da proveta era de 44 ml e que, ao acrescentar 2 bolinhas, chegaria a 50 ml, ou seja, cada bolinha elevava a quantidade de água em 3 ml. Não há justificativa oral, na transcrição dos áudios, ou por escrito, a respeito do valor de 44 ml tomados inicialmente. Conjecturamos que o grupo apresentou dificuldades para interpretar e realizar um tratamento no registro simbólico numérico da função afim.

2.1.b) Então, qual é a taxa de variação desta função? Justifique.

Os mesmos grupos que apresentaram resposta correta para o item (a) também apresentaram resposta correta para o item (b). Os grupos relacionaram corretamente a taxa de variação *a* na expressão algébrica da função afim ao valor da quantidade de água que se elevava na proveta graduada para cada bolinha de gude colocada. Os grupos G3, G9 e G10 não trouxeram justificativas, apresentando apenas a resposta final correta de 5 ml, previsto em análise *a priori* como 1.B.2. Os demais grupos trouxeram justificativas plausíveis e, em suas respostas, estava explícita a percepção da relação entre a taxa de variação e a quantidade de água, resolução 1.B.1 da análise *a priori*.

O grupo G1, que também apresentou resposta incorreta para o item (a), foi o único grupo que não relacionou o nível de água que aumenta a cada bolinha de gude inserida na proveta graduada à taxa de variação da função afim. Apenas descreveram a relação de dependência existente na situação da atividade e não mencionaram qualquer valor numérico relacionado à taxa de variação.

2.1.c) Qual é o coeficiente linear da função representada pela tabela? Explique como você encontrou este valor. d) Com base nas informações da tabela, determine a “lei” de formação desta função.

No item (c), todos os grupos, com exceção do grupo G1, apresentaram respostas corretas. Além de relacionarem o coeficiente linear ao valor inicial de água na proveta graduada, neste caso, determinaram seu valor como sendo 40 ml, a partir do dado de que, com 2 bolinhas de gude, a proveta indicava 50 ml de água. Então, retirando-se duas bolinhas, teríamos 40 ml de água na proveta, uma vez que cada bolinha estava relacionada à quantidade de 5 ml de água previsto em análise *a priori* como 1.C.1.

Consequentemente, todos estes grupos definiram a expressão algébrica desta situação no item (d) como sendo $f(x) = 40 + 5.x$ ou $f(x) = 5.x + 40$, resolução 1.D.1 da análise *a priori*, ou seja, relacionaram os números a e b da expressão algébrica da função afim $f(x) = a.x + b$, respectivamente à taxa de variação e coeficiente linear ou valor inicial da função. Neste caso, observamos a realização de um tratamento correto no registro de representação numérico e algébrico. Apenas o grupo G1 apresentou resoluções incorretas, tanto para o item (c) quanto para o item (d). Como já vinham apresentando dificuldades deste o item (a), o grupo concluiu no item (c) que o coeficiente linear da função seria 50, pois era o primeiro valor para o nível de água, presente na tabela. Consequentemente, no item (d), apresentaram como lei de formação a expressão $f(x) = 44 + 3.x$, valores estes determinados em seus itens anteriores.

Após a análise destes quatro itens, observamos que os grupos tiveram entendimento acerca da função afim representada no registro de representação simbólico numérico, por meio de tabelas, uma vez que identificaram a taxa de variação e coeficiente linear desta situação, finalizando com a determinação da expressão algébrica da função afim.

2.2) Observe o gráfico a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água. a) Qual é a quantidade inicial de água colocada na proveta graduada? Como este valor está associado à função descrita? b) Conforme os dados apresentados no gráfico, qual é o nível de água na proveta graduada que aumenta quando é colocada uma bolinha de gude? Como este valor está associado a função descrita?

Na atividade 2.2, cujo registro de representação de partida era um gráfico, os grupos apresentaram discussões em situação de ação e resultados corretos. No item (a), todos os grupos concluíram que o valor inicial era de 20 ml, resposta prevista em análise *a priori* como 2.A.2. Somente os grupos G1, G2, G3, G5, G8 e G10 justificaram sua resposta relacionando implicitamente que o valor inicial está no ponto onde o gráfico intercepta o eixo y. No entanto, nenhum grupo atribuiu diretamente este valor ao coeficiente linear da função afim, como pedido também no item (a).

Analogamente, no item (b), todos os grupos concluíram que a quantidade de líquido na proveta graduada aumentava quando colocado uma bolinha de gude era de 5 ml. As respostas dos grupos G3, G4, G8 e G10 aproximam-se da resolução, prevista em análise *a priori*, como 2.B.1, isto é, a partir da leitura dos dados do gráfico, os estudantes realizaram uma conversão deste registro para o registro simbólico numérico, realizando um tratamento no registro de chegada. Ao observarem no gráfico que quatro bolinhas inseridas na proveta marcava uma quantidade de 40 ml de água e que, com duas bolinhas havia 30 ml de água, então a diferença de 10 ml de água seria referente a duas bolinhas inseridas na proveta e, portanto, cada bolinha subia o nível de água em 5 ml na proveta graduada.

Apenas o grupo G2 respondeu pela estratégia de resolução prevista em análise *a priori* como 2.B.2, o qual também mostrou realizar corretamente uma conversão entre o registro gráfico para o simbólico numérico. O grupo apresentou, em língua natural, que 2 bolinhas colocadas na proveta indicavam 30 ml de água e que a quantidade inicial de água era de 20 ml. Então, com a diferença entre os valores 30 e 20, resultando em 10 ml para duas bolinhas inseridas na proveta, concluíram que cada bolinha elevava o nível de água em 5 ml e que este valor é a taxa de variação da função. Os grupos G1, G5, G7, G9 e G11 apresentaram apenas o valor de 5 ml como resposta, sem justificativas. Novamente, nenhum grupo associou diretamente este resultado à taxa de variação da função afim, também pedido na pergunta.

2.2.c) Determine a "lei" de formação da função desta situação.

Apesar de os grupos não apresentarem de forma escrita a relação entre coeficiente linear e taxa de variação no registro gráfico, determinaram a lei de formação no item (c) de forma correta, ou seja, apresentaram a expressão $f(x) = 5.x + 20$ ou $f(x) = 20 + 5.x.$ Nestes casos, observamos que há indicativos de compreensão sobre o coeficiente linear e taxa de variação no registro de representação gráfico e os determinam a partir da conversão entre este registro e o registro simbólico numérico.

Ao final desta aula, a pesquisadora recolheu a folha de questões e, no dia 13 de setembro de 2019, novamente em uma hora-aula, retomamos a discussão de forma coletiva, com o intuito de realizar a correção da atividade 2. Neste momento, não houve institucionalização de novos conceitos pertinentes à função afim.

5.3 Análise *a Posteriori* da Atividade 3

Esta sessão foi aplicada no dia 20 de setembro de 2019, em duas horas-aula. Neste dia, optamos em realizar a primeira etapa de discussões no pátio da escola, onde há mesas dispostas para as refeições e demais trabalhos escolares. Os estudantes utilizaram, para a resolução da atividade 3: lápis, borracha, calculadora, folha de questões e os aplicativos *Desmos* e *GeoGebra (Graphing Calc)* instalados no *smartphone* de pelo menos um estudante do grupo.

3.1) Com auxílio do aplicativo *Desmos*, abra o arquivo1 enviado pela professora e observe a função afim em sua forma algébrica $y = ax + b$, bem como a sua representação gráfica. Abaixo você encontra botões chamados *controles deslizantes* para o coeficiente a (taxa de variação) e o coeficiente b (coeficiente linear). A função que está sendo representada graficamente é a função $y = 1x + 1$, porque os controles deslizantes de a e b estão iguais a 1. Quando vocês deslizarem o controle para $a = 2$ teremos uma nova função $f(x) = 2x + 1$, e assim sucessivamente. a) Arraste o controle deslizante do coeficiente a para 2, depois para -2 e observe o que acontece com a representação gráfica em cada mudança. Teste ainda para a igual a 4 e depois a igual a -4. Relate as suas observações.

As análises da pesquisa mostram que, a partir da resolução da atividade 3, os sujeitos participantes passaram buscar respaldo na matemática para relatar suas observações. Em relação ao item (a) desta atividade, em apenas dois grupos, G4 e G8, identificamos a utilização do termo “sentido” em suas análises, aproximando-se da resposta correta 1.A.3 da análise a *priori*. Os grupos relataram em seus registros escritos: “[...] *podemos notar que a cada mudança efetuada o sentido da reta muda completamente*” (GRUPO G4) e “[...] *a linha do gráfico muda de sentido*” (GRUPO G8). O grupo G8 utilizou o termo “sentido” por causa da intervenção da pesquisadora durante a realização desta atividade, como podemos observar na transcrição dos áudios a seguir, que indicam que essa situação se caracterizou como sendo de formulação e validação para os estudantes.

Pesquisadora: O que teve de diferença daqui para cá? (Apontando para o aplicativo com o coeficiente a sendo primeiro um número negativo e depois um número positivo).
Estudante 1: Ficou ao contrário.
Pesquisadora: E esse virar ao contrário é o quê? Ele está mudando o quê?
Estudante 1: Os valores?
Pesquisadora: Vejam, se eu estou olhando para lá eu tenho um? Se eu estou olhando para cá eu tenho outro? O que está mudando?
Estudante 2: O sentido?
Pesquisadora: Sim, o sentido. Agora voltem para a questão. Quando a é positivo que sentido tem essa reta? Então, eu quero que vocês pensem a respeito desse sentido que essa reta tem.
Estudante 2: Seria da esquerda para direita?
Pesquisadora: Exatamente. (GRUPO G8)

3.1.b) Agora, coloque o controle deslizante do coeficiente b em -1 e volte a variar os valores para o coeficiente a: teste novamente para a igual a 2 e depois -2, para 5 e depois -5. O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente a são positivos? c) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente a são negativos?

Nos itens (b) e (c), tanto o grupo G4 quanto G8 tentaram avançar nas discussões para especificar a direção do sentido das retas do gráfico. Para ambos, quando o coeficiente a tem valor positivo, a reta do gráfico "*cresce da esquerda para a direita*" (GRUPO G4); "*sobe da esquerda para a direita*" (GRUPO G8), mas quando o coeficiente a tem valor negativo, a reta do gráfico "*cresce da direita para a esquerda*" (GRUPO G4); "*sobe da direita para a esquerda*" (GRUPO G8), ou seja, os grupos não compreendem o sentido da leitura do crescimento e decrescimento de gráficos em geral. Ressaltamos que o estudo de funções crescentes e decrescentes não fora abordado pela pesquisadora em aulas anteriores à pesquisa.

Os grupos G2 e G11 observaram a mudança na inclinação da reta, objetivo da atividade 3.3. Em seus registros escritos relataram que: "a *reta pode mudar sua inclinação, a posição é a mesma só inverte os lados"* (GRUPO G2) e "*cada vez ele fica mais inclinado*" (GRUPO G11), ou seja, ao comparar os gráficos com os valores positivos para o coeficiente a, sugeridos $a = 2$ e $a = 4$, observaram corretamente alteração na inclinação desta reta em relação aos eixos do plano cartesiano. Nos itens (b) e (c), estes grupos também apresentaram algum avanço nas suas observações e relataram que, quando o coeficiente a é positivo, "*a linha do gráfico sobe*" (GRUPO G2) e "*a linha sobe no sentido esquerda para direita*" (GRUPO G11), bem como, quando o coeficiente a é negativo, "*a linha do gráfico desce*" (GRUPO G2) e "*a linha* *sobe no sentido direita para esquerda"* (GRUPO G11). O grupo G11, assim como o G4 e G8, também não compreende o sentido de leitura do crescimento e decrescimento de gráficos.

Para estes quatro grupos supracitados, há indicativos de que perceberam a relação existente entre a primeira variável visual de representação, sentido de inclinação, e a sua respectiva unidade significativa da expressão algébrica, sinal do coeficiente a.

Os demais grupos trouxeram respostas incorretas para o item (a). O grupo G9 especificou que as retas ficam iguais "[...] *mas ao contrário, como se estivesse espelhado*" (GRUPO G9), resolução 1.A.4 da análise *a priori*, no qual consideramos que os estudantes poderiam apresentar em sua resposta o termo "contrário" ou "invertido" para as retas do gráfico. Os grupos G1, G3, G5, G6 e G7 aproximam-se em suas respostas, pois relatam que os gráficos: mudam de direção (G5 e G7); mudam de posição (G1 e G6) e mudam a linha (G3).

Assim, nos grupos G1, G3, G5, G6, G7 e G9, não houve avanço nas discussões dos itens (b) e (c) e concluímos que o estudo da primeira variável de representação, junto a sua respectiva unidade simbólica significativa, não se concretizou apenas com a discussão entre os estudantes do grupo frente a esta atividade da sequência didática. Ou seja, não associam a ascendência ou a descendência da reta do gráfico da função afim ao sinal "+" ou "-" do coeficiente a na expressão algébrica (DUVAL, 2011).

Há indicativos de que os grupos G1, G3 e G6 analisaram os gráficos considerando apenas a parte superior do eixo x, ou seja, no primeiro e segundo quadrante do plano cartesiano, pois se referiram à posição da reta em relação ao eixo y. Nas respostas aos itens (b) e (c) consideraram, respectivamente, que quando o coeficiente a é positivo "*a reta do gráfico fica do lado direito da linha y*" (GRUPO G1); "*ele inverte o lado (negativo/positivo)*" (GRUPO G3); e "*vai para o lado direito*" (GRUPO G6); analogamente, quando o coeficiente a é negativo "*a reta do gráfico fica para o lado esquerdo do eixo y*" (GRUPO G1); "*ele inverte o lado, ficando negativo*" (GRUPO G3) e "*vai para o lado esquerdo*" (GRUPO G6). De forma geral, estes grupos não realizaram uma leitura global da função afim em seu registro de representação gráfico, pois desconsideram elementos essenciais, como os valores negativos para a função, ou seja, no eixo y. Esta leitura equivocada pode advir de práticas, nas quais as apresentações gráficas tiveram como foco o trabalho apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano, ou seja, somente com pontos de abcissas e ordenadas positivas.

Ainda nos itens (b) e (c), os grupos G5, G7 e G9 apresentam respostas incompletas, com uso de termos do senso comum e não previstas em análise *a priori*, o que dificulta a análise de forma integral. Nos áudios transcritos dos grupos G7 e G9, pois do G5 não foi possível efetuar a gravação neste dia, observamos que as discussões referentes à atividade são mínimas entre os estudantes. Desta forma, notamos a fragilidade nas observações realizadas pelos grupos no estudo da interpretação global da função afim. As respostas dadas por estes grupos se resumem em dizer que, quando o coeficiente a é positivo, "*a linha passou para o lado de baixo do gráfico*" (GRUPO G5) e quando o coeficiente a é negativo, "*muda de direção, troca de lado da esquerda superior para direita inferior*" (GRUPO G5), as quais não possibilitam uma análise e interpretação de suas respostas.

3.1.d) Arraste o controle deslizante do coeficiente a para 0 e varie os valores no controle deslizante do coeficiente *b*. O que acontece com o gráfico nestes casos?

No item (d), apenas os grupos G2, G3, G6, G8 e G9 apresentaram corretamente em suas respostas que quando o coeficiente a é nulo, a reta do gráfico da função afim é horizontal ou paralela ao eixo x, resposta 1.D.3 da análise *a priori*. Estes cinco grupos, bem como os demais, não demonstraram associar que o valor do coeficiente b é a ordenada do ponto em que a reta do gráfico intercepta o eixo y. No entanto, os grupos G6, G8 e G9 avançaram nas discussões e concluíram que, ao variar os valores para o coeficiente b, entre positivos e negativos, a reta do gráfico se desloca para cima ou para baixo em relação ao eixo x, resposta parcialmente correta prevista em análise *a priori* como D.4. Neste caso, também se enquadram os grupos G1, G4, G5 e G11, que, apesar de não argumentarem sobre a horizontalidade da reta do gráfico, perceberam que o sinal do coeficiente b está relacionado com a posição da reta do gráfico, ou seja, quando tem valor positivo, a reta está acima do eixo x e quando tem valor negativo, a reta está abaixo do eixo x. O grupo G5 foi um dos grupos que analisou o caso para ambos os coeficientes iguais a 0 e concluíram que a reta do gráfico "*se alinha no x*" (GRUPO G5).

Além do grupo G5, consideramos que o grupo G7 analisou o caso somente com os coeficientes nulos, pois concluiu que "*a linha vermelha se localiza por cima da preta, ou seja, na linha* x" (GRUPO G7). Percebemos tanto neste item quanto nos itens anteriores e nos áudios transcritos, bem como nas poucas discussões que o grupo realizou durante a aplicação, indicativos de que os estudantes não identificam a função afim em seu registro de representação gráfico, pois, em seus registros escritos, referem-se à "*linha vermelha*" e "*linha preta*" para a reta do gráfico da função e os eixos x e y, respectivamente, como se estivessem realizando a leitura de um conjunto de retas quaisquer num desenho representativo e não em um gráfico de funções.

Na atividade 3.2, o objetivo era trabalhar com a segunda variável visual de representação relacionada à posição da reta do gráfico em relação à origem do eixo y, ou seja, para valores positivos do coeficiente linear, a reta do gráfico da função afim corta o eixo y em pontos de ordenada positiva e para valores negativos do coeficiente linear a reta do gráfico corta o eixo y em pontos de ordenada negativa. Consequentemente, para o coeficiente linear nulo, a reta do gráfico corta o eixo y na origem.

3.2) Volte o controle deslizante do coeficiente a para 1. Agora, observe o gráfico da função quando variamos apenas os valores no controle deslizante do coeficiente b (coeficiente linear). Teste: arraste o controle deslizante de b por valores positivos e depois negativos. a) O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear b são positivos? b) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear b são negativos?

De forma geral, os grupos apresentaram mais facilidade em observar e compreender a segunda variável visual de representação. Nos itens (a) e (b), após a observação da variação do coeficiente linear assumindo valores positivos e negativos, com o uso do aplicativo *Desmos*, o grupo G1 concluiu que "*o coeficiente linear* b *quando está positivo ele fica acima do marco zero*" (GRUPO G1), enquadrando-se na resposta correta 2.A.1 da análise *a priori*, bem como "*o coeficiente linear* b *quando está negativo fica abaixo do marco zero*" (GRUPO G1), resolução 2.B.1 da análise *a priori*. Há indicativos de que o uso do termo "*marco zero*" por este grupo e outros provém da disciplina de geografia, cujos conteúdos para esta etapa de ensino perpassam o estudo da orientação e localização geográfica por meio das coordenadas geográficas, linhas imaginárias que cortam o planeta no sentido norte/sul e leste/oeste, determinando latitudes e longitudes respectivamente e que são associadas ao plano cartesiano em matemática.

Os grupos G2, G4, G6, G8 e G11 concluíram que a reta do gráfico da função afim “sobe” por valores positivos no eixo y quando o coeficiente linear assume valores positivos, ou seja, resolução 2.A.2 da análise *a priori*. Consequentemente, esses mesmos grupos percebem que a reta do gráfico da função afim “desce” por valores negativos no eixo y para valores negativos do coeficiente linear, resolução 2.B.2 da análise *a priori*. Destacamos os grupos G4 e G8 que, além dessas considerações, enfatizaram novamente de forma correta, assim como no item 3.1(b), que a reta permanece com o sentido crescente da esquerda para a direita quando o coeficiente a é igual a 1. O valor para a igual *a* 1 foi atribuído pela atividade 3.2, uma vez que o objetivo era estudar a segunda variável visual de representação relacionado ao valor do coeficiente linear b. A Figura 20, a seguir, apresenta as respostas do grupo G8 em discussão.

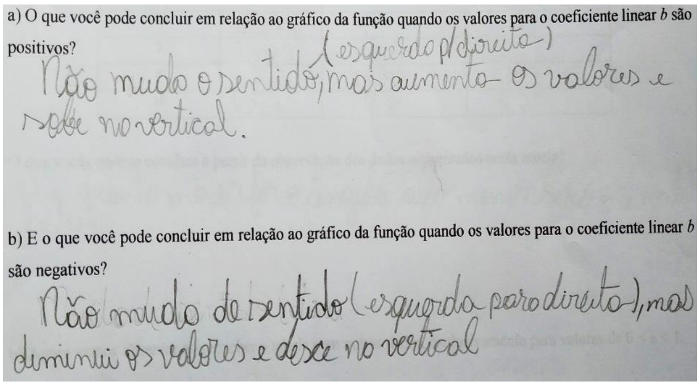


Figura 20: Resolução do Grupo G8 para as atividades 3.2(a) e 3.2(b)
Fonte: Dados da Pesquisa

Apenas o grupo G3 enquadrou-se na resolução da análise *a priori* 2.A.3, destacando que a reta do gráfico “*se move somente no eixo y sempre para o positivo*” (GRUPO G3) em valores positivos para coeficiente linear b e resolução B.3 da análise *a priori*, “*ele vai abaixando no eixo y*” (GRUPO G3) em referência aos valores negativos para o coeficiente b.

Os grupos G5, G7 e G9 novamente não se aproximaram das possíveis respostas levantadas em análise *a priori*. O grupo G5 apenas mencionou de modo incorreto que a reta está “*na parte de cima do gráfico*” (GRUPO G5), no item (a), e que a reta *“fica na parte de baixo do gráfico*” (GRUPO 5), no item (b). O grupo G7 realizou a discussão correta, com intervenção da pesquisadora, nas situações identificadas como sendo de formulação e validação, pois, em suas primeiras discussões, há indicativos de que o grupo analisa o deslocamento do gráfico sob o ponto de vista do eixo x, indicando que este vai para a direita e para a esquerda, conforme a transcrição do trecho do áudio a seguir.

Estudante 2: O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear b são positivos?
Estudante 1: Quando ele é positivo ele se afasta para o lado esquerdo. Quando ele é negativo ele se afasta para lado direito.
Estudante 3: Eu acho que não é isso.
(Estudante 2 lê a pergunta novamente).
Estudante 1: Eles se afastam para o lado esquerdo.
Estudante 2: Vamos chamar a profe.
Pesquisadora: O que vocês escreveram? Eles se afastam para o lado esquerdo? Mas o que é o lado esquerdo?
Estudante 1: Os positivos.
Pesquisadora: Ok, e o que vocês podem concluir em relação ao gráfico quando o coeficiente linear é negativo? Joga no aplicativo alguns valores negativos. O que acontece com o gráfico?
Estudante 3: Se afasta de novo. Pro lado direito.
Estudante 1: Pro lado direito.
Pesquisadora: Que lado direito? O lado direito de quem? Eixo x? Eixo y?
Estudantes 3 e 1: Do eixo y.
Estudante 1: Não. Do eixo x.
Pesquisadora: É isso que vocês não estão conseguindo enxergar. Vocês estão com dificuldade neste direcionamento. Então, vamos lá. (Pesquisadora toma o smartphone com o aplicativo para ajudar nas discussões do grupo.) Quando o b é positivo observem o gráfico em relação ao eixo y. B positivo. Ou vamos comparar valores. Coloquei aqui (indicando no aplicativo) b igual a cinco. Em que ponto o gráfico está passando no eixo y?
Estudantes 1 e 3: No cinco.
Pesquisadora: Mudei. Vou colocar b igual a um. Em que ponto o gráfico está passando no eixo y?
Estudantes 1, 2 e 3: No um.
Pesquisadora: Agora vou colocar um valor negativo. Se o b for igual a menos dois. Em que ponto o gráfico está passando no eixo y?
Estudantes 1, 2 e 3: No dois.
Pesquisadora: No dois?
(Risos e não respondem.)
Pesquisadora: Ok, vamos colocar o valor para menos sete. De novo, em que ponto o gráfico está passando no eixo y?
Estudante 2: y e x. (Provavelmente gesticulando com a mão “eixo y” na vertical e “eixo x” na horizontal.)
Pesquisadora: Isso. Então, olhem aqui. (Indicando o aplicativo.) Menos cinco, menos seis e menos sete. Será que tem alguma relação isso?
Estudante 1: Ah! Assim, quando ele é positivo ele vem para cá (Apontando para o aplicativo). Quando ele é negativo ele vem pra baixo.
Estudante 2: Ah, mas isso a gente já tinha falado!
Pesquisadora: Então, relatem isso na folha. E agora para b igual a 0. O que vai acontecer?
Estudante 3: Fica no zero.
Pesquisadora: Que zero é esse que você está me falando?
Estudante 3: No zero que fica no meio do eixo x e do y.
Pesquisadora: Isso, que chamamos de origem ou ponto zero, zero. Entenderam? É isso que vocês precisam relatar.

Estudante 1: Certo, professora. (GRUPO G7)

A partir desse fragmento de diálogo entre estudantes do grupo e a pesquisadora, entendemos que o grupo G7 compreendeu a relação entre o coeficiente linear b e a posição da reta do gráfico sobre o eixo y. No entanto, no registro escrito mantiveram suas primeiras impressões, antes da intervenção da pesquisadora, ou seja, para o grupo, a reta do gráfico da função afim "*se afasta para o lado esquerdo*" (GRUPO G7) quando o coeficiente assume valores positivos e "*lado positivo vai pra cima e o negativo para baixo*" (GRUPO G7) quando o coeficiente b assume valores negativos.

Por fim, o grupo G9 teve percepção semelhante ao grupo G7 e também analisou o comportamento da reta do gráfico sob o ponto de vista do eixo x, pois indica que, quando o coeficiente linear b "*varia pro positivo ele anda em horizontal pra esquerda*" (GRUPO G9) e quando "*varia pro negativo ele anda em horizontal pra direita*" (GRUPO G9). Salientamos, novamente, que este grupo realizou poucas discussões durante a aplicação desta atividade e não houve intervenção da pesquisadora, uma vez que o grupo não requisitou auxílio durante a aula.

3.2.c) E quando b é igual a 0, o que ocorre com o gráfico desta função?

Em relação ao item (c) desta atividade, consideramos que houve entendimento pelos grupos G3, G5, G7 e G11, os quais se aproximam da resposta da análise *a priori* 2.C.1, ou seja, destacam que, quando o coeficiente b é igual a 0, a reta do gráfico corta o eixo y na origem. No entanto, os grupos G3, G5 e G11 utilizam o termo "*marco zero*" para se referirem a origem do plano cartesiano. Salientamos, novamente, que o uso deste termo pode ser atribuído a sua utilização nos estudos dos conceitos geográficos da referida série. Nos grupos G2, G8 e G9 consideramos respostas parciais, conforme análise *a priori* 2.C.3, pois destacam que a reta do gráfico corta o eixo y em 0, mas não identificam este 0 como ponto de origem do plano cartesiano.

As respostas dos grupos G1 e G4 nos dão indicativos de que estes não identificam a origem do plano cartesiano como ponto de coordenadas 0 para x e para y. Destacam que: "*fica tanto positivo quanto negativo; o zero é neutro*" (GRUPO G1) e "*a reta permanece centralizada, ou seja, não permanece nem superior nem inferior*" (GRUPO G4). Além disso, o grupo G6 apenas observou que a reta do gráfico da função afim, neste caso, ficou em diagonal, ou seja, não associou a posição da reta em relação ao eixo y.

Desta forma, podemos considerar que, parcialmente, os estudantes da turma associaram, a partir das discussões realizadas nesta etapa da atividade 3, a segunda variável visual de representação posição do traçado sobre o eixo y à sua respectiva unidade simbólica significativa valor do coeficiente linear b.

A terceira variável visual de representação definida por Duval (2011) relaciona os ângulos da reta do gráfico da função afim formados com os eixos do plano cartesiano ao valor do coeficiente a (taxa de variação). Assim, a atividade 3.3 foi subdividida em quatro itens a fim de facilitar a visualização e observação dos estudantes. A pesquisadora enviou aos estudantes, via aplicativo de mensagem, dois arquivos pré-formatados para uso no aplicativo *GeoGebra* (*Graphing Calc*), os quais deveriam utilizar nesta etapa: o primeiro para o estudo da variável visual para valores positivos do coeficiente a e o segundo para valores negativos do coeficiente a.

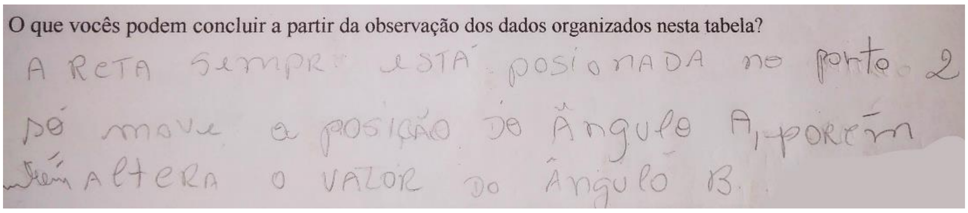
Assim, cada um dos itens desta atividade teve como objetivo estudar o comportamento dos ângulos formados entre a reta do gráfico da função afim em relação aos eixos x e y, nos seguintes casos: a) quando o coeficiente a assume valores maiores ou iguais a 1 ($a > 1$); b) quando o coeficiente a assume valores entre zero e um ($0 < a < 1$); c) quando o coeficiente a assume valores menores que menos um ($a < -1$); e d) quando o coeficiente a assume valores entre zero e menos um ($-1 < a < 0$).

3.3) Agora, vocês irão receber o arquivo3.3.a, pré-formatado pela professora, o qual abrirá no aplicativo *GeoGebra (Graphing Calc*) e que servirá de base para as nossas próximas experiências. a) Observe que o controle deslizante para o coeficiente a está marcando $a = 1$. Além disso, na figura, estão marcados inicialmente dois ângulos: • α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x; • β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y. Com base nessas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar o *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y. O que vocês podem concluir a partir da observação dos dados organizados nesta tabela?

No item (a), cuja observação fora realizada para valores do coeficiente a maiores que um, todos os grupos preencheram corretamente a tabela com os valores dos ângulos α e β, formamos entre a reta do gráfico e o eixo x e a reta do gráfico e eixo y, respectivamente, com apoio do aplicativo. Os grupos G2, G3, G4, G5, G6, G8, G9 e G11 apresentaram em suas respostas o fato de que, quando o coeficiente a perpassa valores positivos e maiores que 1, “[...] *a medida do ângulo α aumenta os graus e a medida do ângulo β diminui os graus*” (GRUPO G3), conforme a resposta parcialmente correta 3.A.2 da análise *a priori*.

Nenhum dos grupos observou que, nestes casos, as medidas para o ângulo α sempre foram maiores que as medidas para o ângulo β, informação considerada relevante do ponto de vista de Duval (2011), que define como valor para esta variável visual de representação o fato de “[...] o ângulo formado com o eixo horizontal é maior que o ângulo formado com o eixo vertical” (DUVAL, 2011, p.101), ou seja, a importância do estudante compreender que quando o coeficiente a é um número maior que um, o ângulo α é maior que o ângulo β, neste caso.

O grupo G1 apenas destacou que os ângulos mudam de valores e não sinalizou, tanto no registro escrito quanto nas discussões do grupo gravadas, algo sobre a comparação destes valores. Porém, foi o único grupo que observou e relatou, mesmo que de forma equivocada, que as retas dos gráficos sempre passavam pelo ponto de ordenada 2, como podemos observar na Figura 21, a seguir.


O que vocês podem concluir a partir da observação dos dados organizados nesta tabela?

A RETA SEMPRE ESTÁ POSIONADA NO PONTO 2 SÓ MOVE A POSIÇÃO DO ÂNGULO A, PORÉM NÃO ALTERA O VALOR DO ÂNGULO B.

Figura 21: Resposta do grupo G1 para o item (a)
Fonte: Dados da Pesquisa

3.3.b) Agora vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de $0 < a < 1$. O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

Ainda sobre o mesmo arquivo, no item (b), os grupos deveriam analisar o comportamento dos ângulos α e β quando o coeficiente a assume valores no intervalo entre 0 e 1. Neste caso, os mesmos grupos que responderam parcialmente correto o item (a), relataram que, quanto menor a taxa de variação sendo $0 < a < 1$, “*diminui a medida do ângulo α e aumenta a medida do ângulo β*” (GRUPO G2), enquadrando-se na resposta 3.B.2 da análise *a priori*.

Neste caso, Duval (2011b) atribui como valor para esta variável visual de representação que "[...] o ângulo formado com o eixo horizontal é menor que o ângulo formado com o eixo vertical" (DUVAL, 2011b, p.101), ou seja, o estudante necessita compreender que, quando o coeficiente a é um número no intervalo entre 0 e 1, o ângulo α é menor que o ângulo β, comparação que também não ocorreu entre os grupos de estudantes.

O grupo G1 no item (b) destacou que a reta continuava passando sobre o ponto (0,2), mas que, neste caso, a reta "*sempre permanece deslizando sobre os números negativos*" (GRUPO G1). Os áudios gravados não nos deram indicativos para justificar esta resposta, uma vez que o grupo não aprofundou suas discussões sobre o referido tema, aceitando de imediato a resposta de um estudante. Assim, conjecturamos que o grupo considerou sua análise sob o ponto de vista dos valores dados para o coeficiente a, dispostos em ordem decrescente na tabela que deveriam preencher. Por isso, o destaque para "*deslizando sobre os números negativos*" (GRUPO G1).

O grupo G7, que já vinha apresentando dificuldades em responder os itens anteriores, foi o único grupo que, mesmo com a intervenção da pesquisadora detalhando melhor o que deveriam fazer na questão, não avançou em suas discussões, especialmente na comparação dos valores para os ângulos α e β.

3.3) Agora, vocês irão receber o <u>arquivo3.3.b</u>, pré-formatado pela professora, o qual abrirá neste mesmo aplicativo e que servirá de base para as nossas próximas experiências. c) O novo arquivo apresenta outra função e nela estão marcados os mesmos dois ângulos: • α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x; • β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y. Com base nessas novas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar novamente no *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y. O que vocês podem concluir a partir dos dados organizados nesta tabela?

Com o segundo arquivo pré-formatado pela pesquisadora, os grupos discutiram os itens (c) e (d) tendo como foco os ângulos α e β formados entre a reta do gráfico e o eixo x e a reta do gráfico e o eixo y, respectivamente, com valores negativos para o coeficiente a. Assim, no item (c), os grupos G2, G3, G4, G5, G6, G8, G9 e G11 apresentaram resposta parcialmente correta, pois consideraram apenas que, quando o coeficiente a assume valores negativos, ou seja, são menores que -1 "[...] o *α vai aumentando os graus e o β vai diminuindo os graus*" (GRUPO G4), resposta 3.C.2 da análise *a priori*. Este grupo também se preocupou em destacar que a reta havia mudado de direção, como observado e relatado no item 3.1(a) e 3.1(b).

Salientamos, novamente, que nosso objetivo fora parcialmente atingido com esta atividade, uma vez que esperávamos que os estudantes avançassem em suas discussões e observações para compreenderem que, neste caso, quando o coeficiente a perpassa valores negativos, ou seja, $a < -1$, o ângulo α é maior que o ângulo β, caso idêntico para quando a assume valores maiores que 1 (DUVAL, 2011).

3.3.d) Agora vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de $-1 < a < 0$. O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

No item (d), observamos duas situações diferentes entre as respostas, a saber: 1) os grupos que analisaram os valores para α e β sob a perspectiva do crescimento dos valores para o coeficiente a; e 2) os grupos que analisaram os valores para α e β sob a perspectiva do decrescimento dos valores para o coeficiente a. Os grupos que se enquadram na primeira situação, G8, G9 e G11, responderam de forma semelhante ao grupo G8 que apontou "*na medida que a taxa de variação aumentou o ângulo alfa diminuiu e o beta aumentou*" (GRUPO G8). Os grupos G2, G3, G4, G5 e G6, os quais se enquadram na segunda situação, abordam de forma semelhante ao grupo G2, ou seja, "*quanto menor a taxa de variação a medida do ângulo α aumenta e a medida do ângulo β diminui*" (GRUPO G2).

Independente da perspectiva que o grupo analisou, nenhum grupo, novamente, destacou que, neste caso, para valores do coeficiente a no intervalo entre -1 e 0, a medida do ângulo α é sempre menor que a medida do ângulo β, caso semelhante para valores do coeficiente a no intervalo entre 0 e 1 (DUVAL, 2011).

Os grupos G1 e G7 não evoluíram em suas análises nos itens (c) e (d). Há indicativos, em suas respostas, de que não souberam distinguir entre coeficientes a e b e ângulos α e β, concluindo, por exemplo, de modo incorreto que "*a linha verde se desloca, sem sair do y em cima do dois, apenas se deslocando para o lado direito*" (GRUPO G7) para a resposta ao item (c) e "*a cada valor do gráfico, a linha verde vai diminuindo*" (GRUPO G7) para o item (d).

Portanto, podemos considerar que os estudantes, nestes itens nos quais foram envolvidos a terceira variável visual de representação ângulos com os eixos do plano cartesiano relacionados à unidade simbólica significativa valor do coeficiente a, perceberam diferenças nas inclinações da reta do gráfico da função afim. Porém, não avançaram nas percepções referentes aos valores dos ângulos α e β formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y, respectivamente, inclusive em determinar os intervalos em que a propriedade dos ângulos se mantém, ou seja, a medida do ângulo α é maior que a medida do ângulo β quando o coeficiente a é maior que 1 e menor que -1. O contrário, a medida do ângulo α é menor que a medida do ângulo β quando o coeficiente a é menor que 1 e maior que -1, sendo obrigatoriamente diferente de 0.

Estas e outras observações foram discutidas em um momento didático, durante a terceira hora-aula, que ocorreu no dia 20 de setembro de 2019, pois neste dia a pesquisadora permaneceu em sala com os estudantes durante quatro horas-aula. As questões da atividade 3 foram dispostas na forma de *slides* para que a turma pudesse expor suas respostas e, juntos, turma e pesquisadora, pudéssemos compreender as variáveis visuais de representação frente às suas respectivas unidades simbólicas significativas, a partir da interpretação global de propriedades figurais.

Nesse momento também houve a institucionalização pela pesquisadora do crescimento e decrescimento da função afim, o qual se fez presente na atividade 3 e os estudantes apresentaram dificuldades. Após essas discussões, os estudantes foram convidados a discutir sobre as variáveis visuais de representação frente às unidades simbólicas significativas na atividade 4, apresentada a seguir.

5.4 Análise *a Posteriori* da Atividade 4

Esta atividade também foi aplicada no dia 20 de setembro de 2019, após uma hora-aula dedicada à discussão da atividade 3 entre pesquisadora e os estudantes. Neste caso, em apenas uma hora-aula os grupos se reuniram na mesma disposição do início da aula e trabalharam com os seguintes materiais: lápis, borracha, calculadora e folha de questões.

4) Com base nas funções f e g representadas graficamente a seguir, responda:
a) O que você pode concluir em relação ao sinal do coeficiente a (taxa de variação) em cada uma das funções apresentadas?

Em relação a primeira variável visual de representação sentido da inclinação do gráfico da função afim, contemplada para o estudo no item (a) desta atividade, todos os grupos demonstraram associá-la ao sinal do coeficiente a ou taxa de variação, ou seja, ao perceberem que f era uma função crescente e g uma função decrescente, concluíram que o coeficiente a era positivo para a função f e negativo para a função g, como previsto em análise *a priori* na resposta A.2 e apresentado na Figura 22 a seguir.

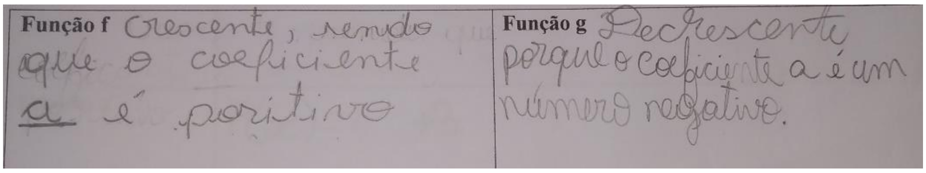


Figura 22: Resposta do grupo G8 para a atividade 4(a)
Fonte: Dados da Pesquisa

O grupo G7, o qual já havia apresentado dificuldades na compreensão das três variáveis visuais de representação na atividade anterior, na atividade 4, item (a), indicaram a resposta correta, mas com a intervenção da pesquisadora em suas discussões. A partir da transcrição dos áudios das discussões, observamos que o grupo havia respondido que a função f era crescente, mas que o coeficiente a desta função era negativo porque o gráfico cortava o eixo y abaixo da origem, ou seja, o grupo apresentava dificuldades em distinguir as variáveis visuais de representação frente aos coeficientes a e b da expressão algébrica, uma vez que, em vários momentos, o grupo não discernia entre os próprios coeficientes a e b e seus respectivos papéis na expressão algébrica. Durante a intervenção da pesquisadora para auxiliar na identificação dos ângulos α e β no item (c), o grupo soube concluir oralmente de forma correta e foram incentivados a registrarem suas respostas na folha de questões. Assim, como o grupo G7, os demais demonstraram compreender esta variável visual de representação.

4.b) O que você pode concluir em relação ao coeficiente linear em cada uma das funções apresentadas?

No item (b), o qual abordava a segunda variável visual de representação posição do gráfico da função afim em relação ao eixo y, os grupos começaram a apresentar dificuldades, as quais foram percebidas pela pesquisadora durante a aplicação e constatadas durante a análise *a posteriori* dos registros escritos. Nos áudios gravados dos grupos, observamos baixo rendimento nas discussões e até despreocupação em completar a atividade com presteza, fato este que pode ter ocorrido pelo excessivo número de aulas de matemática no mesmo dia.

Assim, apenas os grupos G1, G4, G5, G6 e G8 apresentaram relacionar a segunda variável visual de representação posição do gráfico em relação ao eixo y ao valor do coeficiente linear b na expressão algébrica da função afim, resposta B.2 da análise *a priori*. Esses grupos concluíram corretamente que o gráfico da função f cortava o eixo y abaixo da origem e, então, o coeficiente linear b era negativo. Consequentemente, o gráfico da função g cortava o eixo y acima da origem e, então, o valor para o coeficiente b era positivo. Apenas os grupos G1 e G8 determinaram o valor para o coeficiente b corretamente, o que ocorreu no item (d), durante a formalização da expressão algébrica da função f.

O grupo G11 relatou corretamente como resposta ao item (b) que "*o coeficiente linear está no eixo* y" (GRUPO G11), tanto para a função f quanto para a função g e somente no item (d) determinaram corretamente seus valores, no momento de realizar a conversão do registro gráfico para o registro simbólico algébrico para as respectivas funções, como sendo o valor da ordenada em que a reta intercepta o eixo y. Os grupos G2 e G9 perceberam que as funções f e g cortavam o eixo y acima e abaixo da origem, respectivamente, mas não trouxeram conclusões a respeito do valor do coeficiente b, nem por escrito nem a partir dos áudios das discussões. O grupo G7 não apresentou indicativos de compreensão deste item e o grupo G3 entregou em branco.

4.c) Observando os ângulos que as retas dos gráficos das funções formam com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor** do coeficiente a?

A terceira variável visual de representação ângulos da reta do gráfico da função afim formada com os eixos x e y foi abordada no item (c). Uma das dificuldades levantadas por meio da observação da pesquisadora no dia da aplicação foi no momento em que os estudantes buscavam localizar os ângulos α e β, formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y, respectivamente. Sanada a dúvida, após intervenção da pesquisadora, os grupos G1, G2, G3, G4, G6, G7 e G11 compararam os ângulos corretamente para a função f e concluíram que o valor para o coeficiente a, nesta função, seria maior que 1, uma vez que a reta do gráfico era crescente e a medida do ângulo α era maior que a medida do ângulo β, resolução C.1 da análise *a priori*. O grupo G7 precisou de intervenção e mediação da pesquisadora, em situação de formulação e validação de suas conclusões, conforme transcrição dos áudios das discussões a seguir.

Estudante 2: Profe, a gente colocou um ângulo aqui. Agora, aonde é o outro ângulo? É aqui, ou aqui em cima? (Em referência a posição do ângulo β formado entre a reta do gráfico da função f com o eixo y).
Pesquisadora: O outro ângulo é o que a reta forma com o eixo x. Esse é o alfa. Esse que vocês marcaram é o beta.
Estudante 2: Tá.
Pesquisadora: Ok. E agora? Alfa maior que beta ou beta maior que alfa?
Estudante 2: Alfa parece maior.
Estudante 3: Beta é maior que alfa.
Estudante 2: Não, o beta é menor que alfa. Olha aqui!
Estudante 3: Então, vamos concluir aqui que o alfa é maior que o beta.
Estudante 2: Alfa maior que beta.
Pesquisadora: Certo, se o alfa é maior que o beta que situações podemos concluir em relação ao coeficiente a? Quando o alfa é maior do que beta então ...
Estudante 2: Maior que um.
Pesquisadora: Ou tem outra situação quando alfa é maior que beta.
Estudante 2: Menor que menos um.
Pesquisadora: Isso. Agora olha para o gráfico da função f e me diz se o a vai ser maior que um ou menor que menos 1.
Estudante 2: Maior que 1.
Pesquisadora: Por quê?
Estudante 2: Eu sei, mas não sei como falar.
Estudante 3: Porque é crescente.
Pesquisadora: Certo, agora reflitam sobre a função g. (GRUPO G7)

Os grupos G5 e G8 aproximaram-se das respostas C.6 e C.13 da análise *a priori*, pois marcaram os ângulos α e β, concluíram que α era maior que β para a função f e que α era menor que β para a função g, mas não mencionaram a respeito dos possíveis valores para o coeficiente a em ambos os casos. O grupo G5 apenas destacou que o coeficiente a tem valor positivo para a função f e negativo para a função g, mas não comparou em relação ao 1, tanto nos registros escritos quanto nas discussões gravadas em áudio.

Em relação à função g, apenas os grupos G1, G4 e G6 concluíram no item (c) que, neste caso, a medida do ângulo α era menor que a medida do ângulo β e, como a reta era decrescente, os valores para o coeficiente a seriam menores que 0, mas maiores que -1, resposta C.8 da análise *a priori*. Os grupos que responderam corretamente para a função f, mas não avançaram suas discussões para a função g apresentando conclusões errôneas, tiveram diferentes resoluções: G2 e G11 tiveram dificuldade na comparação das medidas dos ângulos e concluíram que o ângulo α também era maior que o ângulo β. Neste caso, apenas o grupo G2 atribuiu para o coeficiente a valores menores que -1; G3 e G7 observaram corretamente que o ângulo α era menor que o ângulo β, mas associaram para o coeficiente a os valores menores que -1, ou seja, resolução C.12 da análise *a priori*.

4.d) Escreva a representação algébrica de cada uma destas funções.

Por fim, no item (d), tínhamos como pretensão analisar como os grupos realizariam a conversão entre os registros de representação gráfico para o simbólico algébrico, após o estudo das três variáveis visuais, tanto da atividade 3 quanto nos itens (a), (b) e (c) da atividade 4. No entanto, após observarmos que o estudo delas se mostrou como fonte de dificuldades para os estudantes, não poderíamos esperar que realizassem de maneira eficaz a conversão requerida, ou seja, apresentar a expressão algébrica da função afim a partir da sua representação gráfica. Duval (2012) argumenta que a transformação de conversão é a primeira fonte de dificuldade para se compreender a matemática e enfatiza que o registro de representação gráfico "[...] está longe de ser simples e evidente como se supõe no ensino" (DUVAL, 2012, p. 277). Para que haja uma compreensão global desta conversão, Duval (2012) salienta a necessidade do estudante em

> [...] identificar bem as variáveis visuais pertinentes com seus diferentes valores no registro gráfico, e na expressão algébrica da relação as diferentes oposições paradigmáticas que dão uma significação, e não somente um objeto aos símbolos utilizados (DUVAL, 2012, p. 275).

Nesta situação, observamos que os estudantes não relacionaram, em sua totalidade, as unidades significativas da expressão algébrica com suas respectivas variáveis visuais no gráfico, ou seja, os grupos não associaram os coeficientes a e b, estudados a partir da interpretação global no registros de representação gráfico, à uma função afim dada por $f(x) = a.x + b$. Dessa forma, no momento em que deveriam apresentar a expressão algébrica da função, deixaram de levar em consideração as informações obtidas pelas variáveis visuais de representação gráfica. É o caso, por exemplo, do grupo G7, o qual descreveu no item (a) que as funções f e

g eram, respectivamente, crescente e decrescente, ou seja, os valores para o coeficiente a seriam: positivo, para a função f, e negativo, para a função g. Porém, apresentaram, no item (d), expressões algébricas que divergem das suas observações realizadas, a saber: $f(x) = -6.x + 10$ e $g(x) = 6.x + 3$, quer dizer, não relacionaram as informações observadas no registro gráfico para o coeficiente a nas expressões algébricas. Os valores para os coeficientes a e b atribuídos pelo grupo no item (d) não foram justificados, nem por escrito nem oralmente conforme a transcrição dos áudios das discussões. Conjecturamos que tomaram os valores em destaque nos respectivos gráficos.

Apenas os grupos G1, G2, G8 e G11 apresentaram corretamente a expressão algébrica para a função f, ou seja, resolução D.1 da análise *a priori*: $f(x) = 4.x - 6$, identificando corretamente os valores para os coeficientes a e b. No entanto, os quatro grupos tiveram intervenção da pesquisadora, mediando para que fizessem a conexão entre o estudo dos coeficientes, a partir da interpretação global, à função afim em sua forma algébrica. O grupo G1 havia colocado inicialmente como resposta a expressão $f(x) = -6x + 10$, dados explícitos nos gráficos. Após intervenção da pesquisadora, há indicativos de que o grupo compreendeu as relações, em situação de formulação e validação, como podemos observar na transcrição dos áudios da discussão a seguir:

Estudante 3: Podemos deixar assim?
Pesquisadora: Mas é isso?
Estudante 3: Mas expressão algébrica não é o negócio que tem x?
Pesquisadora: Sim. Mas de onde vocês tiraram esses valores aqui?
Estudante 1: Do gráfico.
Estudante 3: O 6 nós tiramos daqui (mostrando o ponto (0,-6) no gráfico f) e o 10 daqui (mostrando o último valor visível no eixo x).
Pesquisadora: Ok, vamos voltar um pouquinho. Lembram que a função era dada por $f(x) = a.x + b$. O a era quem?
Estudante 1: Não sei.
Estudante 2: Taxa de variação.
Pesquisadora: E o b?
Estudante 2: Coeficiente linear.
Pesquisadora: Certo. Vamos olhar para a taxa de variação (apontando para o gráfico). Quanto está variando essa situação aqui? Pensa na situação das bolinhas. Se você tem duas bolinhas tem 2 ml de água, se ele tem quatro bolinhas ele tem?
Estudantes 2 e 3: 10 ml.
Pesquisadora: Então, quanto está variando para cada bolinha colocada?
Estudante 1: 3 ou 4.
Estudante 3: 2.
Pesquisadora: Vejam, temos duas bolinhas a mais para quanto de água?
Estudante 1: Oito.
Pesquisadora: Se foram colocadas duas bolinhas e subiram oito ml de água, então cada bolinha elevou?
Estudante 1: Em 4 ml. (GRUPO G1)

Estes mesmos grupos, no entanto, não avançaram em formular a expressão algébrica corretamente para a função g. Os grupos G1 e G11 determinaram a resposta incorreta D.9 da análise *a priori*, ou seja, $g(x) = -2x + 3$. Neste caso, deram valor correto para o coeficiente linear b, mas a taxa de variação fora calculada por meio da divisão do 6 pelo 3, valores sobre os eixos x e y, respectivamente. Como identificaram que a função era decrescente, apresentaram o valor negativo para o coeficiente a. O grupo G8 identificou apenas o valor para o coeficiente linear b igual a 3 e deixou em branco o espaço para o coeficiente a. Os grupos G4 e G5 apresentaram respostas iguais: $f(x) = 8.x + 2$ e $g(x) = -1.x + 2$ sem justificativas nos registros escritos. Os grupos G3, G6 e G9 deixaram o item (d) em branco.

Observamos que o grupo G1 apresentou diversas dificuldades durante suas discussões na atividade 3. Porém, na atividade 4, em vários momentos percebemos a compreensão das variáveis visuais e suas respectivas unidades significativas. Dessa forma, consideramos que a o momento de discussão após a atividade 3 foi importante para o grupo, pois nesta atividade avançaram em suas discussões, apresentando conclusões corretas e fundamentadas.

No dia 27 de setembro de 2019, primeira aula, a pesquisadora optou em discutir os itens propostos na atividade 4, na qual observamos um baixo nível de compreensão dos conceitos trabalhados, especialmente aqueles voltados para a segunda e terceira variáveis visuais de representação. Com as questões dispostas em forma de *slides*, retomamos as discussões referentes as três variáveis visuais de representação relacionadas as suas respectivas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica.

Neste momento, além de discutirmos cada uma das variáveis visuais de representação conforme os itens da atividade 4, a pesquisadora gerou discussões com a turma e institucionalizou sobre o valor da taxa de variação no registro de representação gráfico, o qual pode ser obtido pelo estudo de dois pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ distintos do gráfico.

Salientamos que não era objetivo da pesquisadora apresentar uma fórmula para o cálculo do coeficiente a dados dois pontos do gráfico, como ocorre nos livros didáticos (MAGGIO; SOARES; NEHRING, 2010) e nas práticas metodológicas que privilegiam a explanação e apresentação dos conteúdos. O objetivo era discutir e formalizar meios para a obtenção do coeficiente a a partir da leitura dos dados apresentados no gráfico da função afim. Para isso, a pesquisadora utilizou uma abordagem didática, por meio de uma institucionalização a partir do contexto das atividades 1 e 2 desta sequência didática, visto que os estudantes haviam demonstrado compreensão e bom rendimento a respeito do elemento taxa de variação da função afim no registro gráfico.

Pesquisadora: Qual é valor para o coeficiente a desta função? (Apresentando o gráfico, na atividade 4, da função f). Qual era o nome que demos para o coeficiente a?
Estudantes: Taxa de variação.
Pesquisadora: Eu gosto desse nome, porque ele nos traz indicativos do que acontece. Taxa de variação é algo que varia. De quanto em quanto esse gráfico está apresentando crescimento? (Já havíamos discutido que o gráfico era crescente).
Estudantes: De dois em dois.
Pesquisadora: De dois em dois? Como vocês chegaram a esse resultado?
Estudante 1: Porque é do dois até o quatro. Do quatro até o seis.
Estudante 2: Porque é dois, quatro, seis. (Referindo-se à variação de valores nos eixos do plano cartesiano).
Pesquisadora: Pessoal, vocês estão falando sobre a variação na escala dos eixos. Precisamos analisar o que está acontecendo no gráfico. Vocês lembram do problema das bolinhas de gude que estudamos? Vamos tentar colocar aquela situação aqui? Porque vocês compreenderam bem aquele problema. Então, vamos lá! Se você tem duas bolinhas de gude em uma proveta, segundo o gráfico da função f, quanto você tem de água?
Estudantes: Dois ml.
Pesquisadora: Vou anotar isso aqui no quadro: duas bolinhas temos dois ml de água. Agora, se você tem quatro bolinhas, quantos ml de água teríamos?
Estudantes: Dez ml.
Pesquisadora: Vamos anotar: quatro bolinhas eu tenho dez ml. Muito bem, quanto subiu aqui? (Pesquisadora apontando para os valores dois e dez supostamente referentes a quantidade de água em ml).
Estudantes: Oito.
Pesquisadora: Isso, só que não foi colocado de um em um. Quantas bolinhas de gude foram colocadas nesse intervalo?
Estudantes: Duas.
Pesquisadora: Duas bolinhas. Ok, gente? De duas eu fui para quatro (apontando para o eixo x do plano cartesiano). Muito bem! Se duas bolinhas elevaram a água em oito ml quanto vai elevar uma bolinha?
Estudantes: Quatro.
Pesquisadora: O que vocês fizeram para chegar no resultado quatro?
Estudante 1: Foi dividindo.
Estudante 2: Oito dividido por dois.
Pesquisadora: Isso, dividido, porque foram oito ml para duas bolinhas de gude. Então, uma bolinha elevaria em quatro ml. O que é esse valor de quatro ml?
Estudantes: Taxa de variação.
Pesquisadora: É a taxa de variação, porque cada bolinha de gude que eu coloco nessa situação eleva o nível de água em quatro ml.

A partir desta transcrição, observamos que, para os estudantes, inicialmente, a taxa de variação ou coeficiente a da função afim apresentada no registro de representação gráfico era condizente com a escala do plano cartesiano, ou seja, de dois em dois neste caso, uma vez que nos eixos x e y os dados foram dispostos em uma escala de um para dois. Assim, a pesquisadora chamou atenção dos estudantes quanto à taxa de variação ser um valor do gráfico da função e que, para ser determinado, é necessária uma leitura minuciosa dos dados pertinentes à reta do gráfico. Os estudantes acompanharam as discussões sobre o coeficiente a e demonstraram compreensão sobre ele, o que pode ser observado na análise *a posteriori* da atividade 5 descrita a seguir.

5.5 Análise *a Posteriori* da Atividade 5

Após a observação das dificuldades encontradas pelos estudantes em relação à atividade 4, sentimos a necessidade de adaptarmos a atividade 5 para proporcionar aos grupos, novamente, o estudo da função afim a partir da interpretação global entre os registros simbólico algébrico e gráfico. Para tanto, acrescentamos na atividade 5 uma questão, identificada por (1) nesta pesquisa, a qual também realizamos as análises *a priori*, descritas no capítulo anterior, previamente à aplicação que ocorreu no dia 27 de setembro de 2019. Neste dia, os grupos trabalharam com os seguintes materiais: lápis, borracha, calculadora e a folha de questões.

5.1) Com base na função f representada graficamente a seguir, responda: a) O que você pode concluir em relação **ao sinal** do coeficiente a (taxa de variação)?

Todos os grupos responderam corretamente o item 1.(a) desta atividade sobre o crescimento e decrescimento do gráfico em relação ao sinal do coeficiente a da expressão algébrica, cujas respostas aproximam-se da 1.A.1 da análise *a priori*, onde identificam a função f como decrescente e, portanto, o coeficiente a assume valores negativos. Os estudantes demonstraram compreensão deste tópico, como podemos observar um exemplo de resposta na Figura 23 do grupo G10.

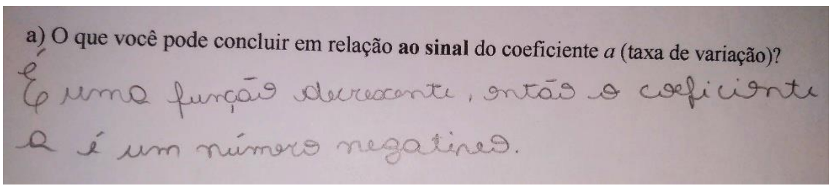


Figura 23: Resposta do grupo G10 para a atividade 5.1(a)
Fonte: Dados da Pesquisa

Os estudantes participantes desta pesquisa associaram, de modo adequado, o crescimento e decrescimento da função afim relacionado ao sinal do coeficiente a da expressão algébrica, fato que também ocorreu na pesquisa de Almeida (2013).

5.1.b) O que você pode concluir em relação ao **coeficiente *b*** na função apresentada?

No item 1.(b), em relação à posição do coeficiente b sobre o eixo y, segunda variável visual de representação, observamos avanço nas discussões e respostas escritas dos grupos em relação às atividades 3 e 4. Neste item, os grupos G2, G3, G4, G7, G8, G9, G10 e G11 apresentaram respostas corretas, como na Figura 24, destacando que o gráfico da função afim cortava o eixo y abaixo da origem e no ponto de ordenada -2, então, o valor para coeficiente b era negativo e igual a -2, resposta 1.B.1 da análise *a priori*. Os grupos G1, G5 e G6 também apresentaram que o valor do coeficiente b seria negativo, mas não mencionaram neste item, a respeito do seu valor, resposta parcialmente correta prevista em análise *a priori* como 1.B.2. No entanto, esses mesmos grupos identificaram corretamente no item (e) o valor para o coeficiente linear, uma vez que deveriam apresentar a expressão algébrica para esta função.

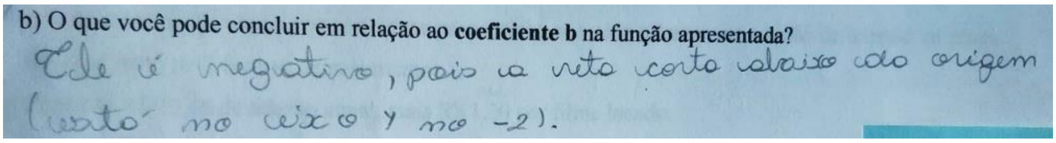
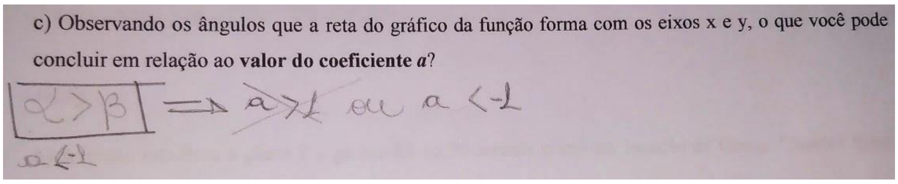

b) O que você pode concluir em relação ao **coeficiente b** na função apresentada?
Ele é negativo, pois a reta corta abaixo da origem (corta no eixo y no -2).

Figura 24: Resposta do grupo G2 para a atividade 5.1(b)
Fonte: Dados da pesquisa

Inferimos que houve compreensão para a segunda variável visual de representação em relação a identificar o seu sinal (positivo ou negativo) e o seu valor, ou seja, b como sendo a ordenada do ponto em que a reta do gráfico da função afim intercepta o eixo y, fato também observado nos dados da pesquisa de Almeida (2013). Para a pesquisadora, os seus sujeitos “[...] conseguiram perceber o efeito que causa no gráfico ao variarmos o valor no coeficiente linear [...] quanto maior é o valor de b, mais a reta fica longe da origem do ponto (0,0)” (ALMEIDA, 2013, p. 76 e 77).

5.1.c) Observando os ângulos que a reta do gráfico da função forma com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor do coeficiente a**?

Para a análise da terceira variável visual de representação, ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y, também observamos avanço nas discussões dos grupos, uma vez que sete deles apresentaram respostas corretas para o item1.(c), ou seja, G1, G2, G3, G4, G5, G7 e G8 responderam que o ângulo α era maior que o ângulo β, formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y respectivamente, e, então, o coeficiente a pode assumir valores menores que -1. Nenhum destes grupos justificou a escolha dos valores negativos para o coeficiente a, mas alguns deixaram indicativos nas respostas escritas, como o caso do grupo G7 apresentado na Figura 25, que desconsiderou os valores de a maiores que 1.


c) Observando os ângulos que a reta do gráfico da função forma com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor do coeficiente *a***?

$\boxed{\alpha > \beta} \Rightarrow \cancel{a > 1}$ ou $a < -1$

$a < -1$

Figura 25: Resposta do grupo G7 para a atividade 5.1(c)
Fonte: Dados da pesquisa

De forma análoga, o grupo G1, nas transcrições dos áudios a seguir, demonstrou, em situações de formulação e validação, relacionar o valor negativo para o coeficiente a ao fato de a reta ser decrescente, como mencionado no item (a).

Estudante 2: Primeiro a gente tem que perceber qual é menor e qual é maior.
Estudante 1: O alfa é aqui ou aqui? Ah, veja da folha amarela, eu só quero ver se os ângulos estão certos.
Estudante 2: Então, esse aqui é o beta e essa aqui é o alfa.
Estudante 1: Então o alfa é maior que o beta. É só isso?
Estudante 2: O que diz a pergunta?
Estudante 1: Mas é pra concluir em relação ao coeficiente a.
Estudante 2: Tá bom.
Estudante 1: Então, se o alfa é maior que o beta o coeficiente a pode ser maior que 1 ou menor que menos 1.
Estudante 3: Ele é negativo porque é decrescente.
Estudante 1: Isso, então é menor que menos 1. (GRUPO G1)

Os demais grupos G6, G9, G10 e G11 afirmaram também que o ângulo α era maior que o ângulo β neste caso, e concluíram que o coeficiente a teria valores maiores que 1, resposta incorreta prevista em análise *a priori* como 1.C.2. Esses grupos não levaram em consideração que a reta do gráfico era decrescente e que o coeficiente a só poderia assumir valores negativos. Porém, os grupos G6, G9 e G11 concluíram corretamente que o coeficiente a tinha valor igual a -3 no item (d). Neste caso, observamos que estes grupos não levaram em consideração os itens desta atividade de forma global e complementar, ou seja, não perceberam todas as conexões existentes entre as respostas aos itens.

5.1.d) Determine o valor para o coeficiente a e explique como obteve este resultado. e) Escreva a representação algébrica da função apresentada graficamente.

No item 1.(d), nosso objetivo era observar como os estudantes determinariam o valor para o coeficiente a (taxa de variação) a partir da função afim em seu registro gráfico. Em análise *a posteriori*, observamos avanço na compreensão dos estudantes, em relação à atividade 4, e conjecturamos que as discussões entre pesquisadora e estudantes contribuíram no esclarecimento das dificuldades, uma vez que todos os grupos apresentaram como estratégia de resolução, de forma escrita ou nas discussões orais, o levantamento de dois pontos do gráfico sob o contexto das atividades 1 e 2, onde a variável x (independente) representava a quantidade de bolinhas de gude e a variável y (dependente) representava o nível de água em uma proveta graduada quando eram colocadas bolinhas de gude.

Os grupos G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G11 determinaram que o coeficiente a teria valor igual a -3, resposta correta 1.D.1 da análise *a priori*. A estratégia de resolução utilizada pelos grupos, como dissemos anteriormente, voltou-se para o contexto da quantidade de bolinhas inseridas em uma proveta graduada com certa quantidade inicial de água. Estes grupos demonstraram, como na Figura 26, que os pontos (-1, 1) e (-2, 4) formavam uma reta cuja taxa de decrescimento era igual a -3, pois, para cada unidade de variação sobre o eixo x, havia uma diferença de 3 unidades sobre o eixo y. No entanto, como a reta do gráfico da função era decrescente, os grupos associaram ao estudo da primeira variável visual de representação que o valor para a taxa de variação deveria ser negativa, o que demonstra a compreensão, também, da taxa de variação no registro de representação gráfico.

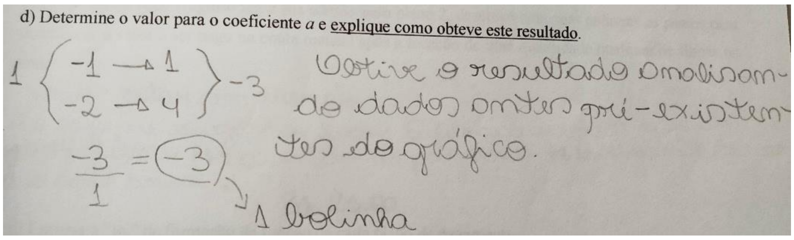


Figura 26: Resposta do grupo G4 para a atividade 5.1(d)
Fonte: Dados da Pesquisa

Consequentemente, esses mesmos grupos apresentaram uma expressão algébrica correta no item 1.(e), ou seja, $f(x) = -3.x - 2$, resposta 1.E.1 da análise *a priori*, atribuindo o valor da taxa de variação ao coeficiente a na expressão algébrica, levando em consideração a primeira e terceira variáveis visuais de representação, bem como o valor para o coeficiente linear, respectivo a segunda variável visual de representação posição sobre o eixo y.

Apenas os grupos G2 e G10 apresentaram outros valores para a taxa de variação no item 1.(d). O grupo G2 utilizou o contexto das bolinhas de gude na proveta graduada para a determinação da taxa de variação, mas inverteu a leitura dos dados no gráfico, pois utilizaram os valores do eixo y como sendo a quantidade de bolinhas de gude e do eixo x o nível de água em uma proveta graduada. Assim, concluíram que o coeficiente a deveria ser igual a $\frac{-1}{3}$. Observamos na resolução escrita que o grupo G10 considerou uma variação de 3 para cada unidade variante do eixo x, mas concluíram que a taxa de variação seria igual a -1. Neste caso, o grupo equivocou-se quanto ao valor ou não compreendeu a ideia de variação apresentada no gráfico da função.

Consideramos que a atividade 5.1 proporcionou avanço na compreensão da função afim, por meio dos registros simbólico algébrico e gráfico, especialmente na determinação da taxa de variação e coeficiente linear, a partir da visualização das variáveis visuais de representação no registro gráfico.

Na questão 5.2, os grupos receberam um problema em língua natural que proporcionou a conversão da função afim para diferentes registros de representação: gráfico, simbólico algébrico e numérico, bem como o tratamento no registro simbólico numérico, a fim de que pudéssemos analisar o uso destas transformações.

5.2) Um canal de televisão por assinatura proporciona aos seus clientes uma seção de locação de filmes online a partir de 3 formas de pagamento:

Plano 1: R$ 30,00 de adesão anual, mais R$ 1,20 por filme locado. **Plano 2:** R$ 15,00 de adesão anual, mais R$ 2,00 por filme locado. **Plano 3:** R$ 4,50 por filme alugado, sem taxa de adesão. a) Adriana fez a sua adesão pelo plano 1 e realizou a locação de 12 filmes ao longo do ano. Quanto gastou? b) Augusto escolheu o plano 2 e gastou R$ 55,00 durante o ano em locação de filmes. Quantos filmes foram locados por este cliente?

Assim, no item (a), sobre as relações de dependência entre as variáveis quantidade de filmes locados (x) e valor a pagar pelo plano (y), os grupos demonstraram compreensão, pois todos responderam corretamente pela estratégia de resolução 2.A.1 da análise *a priori*, ou seja, multiplicaram os 12 filmes locados por R$1,20 e depois somaram ao valor de R$30,00 da adesão anual, concluindo que o valor a pagar seria de R$44,40.

No item 2.(b), em relação à mobilização da ideia base de dependência da variável valor a pagar (y) para a quantidade de filmes locados (x), os grupos G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G10 e G11 apresentaram resoluções corretas de 20 filmes, cuja estratégia de resolução fora 2.B.1 da análise *a priori*. Estes grupos, com exceção do G7, subtraíram R$15,00 do valor R$55,00 pago anualmente pelo plano 2 contratado e dividiram o resultado de R$40,00 pelo valor de cada filme locado, R$2,00. O grupo G7 resolveu pela soma dos valores unitários para o filme, como mostra a Figura 27 a seguir. Neste caso, consideramos que o grupo não mobilizou a ideia de dependência de y para x.

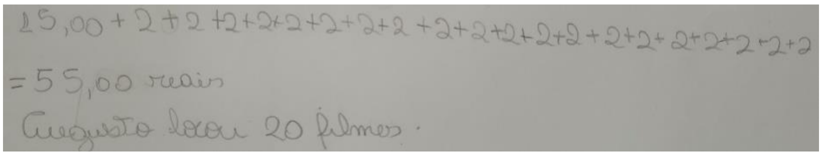


Figura 27: Resposta do grupo G7 para a atividade 5.2(b)
Fonte: Dados da Pesquisa

Os grupos G1 e G9 apresentaram resposta de 28 filmes, a partir da estratégia de resolução incorreta 2.B.2, uma vez que apenas dividiram o valor de R$55,00 por R$2,00 valor por filme locado e desconsideraram o valor de R$40,00 da adesão pago anualmente.

5.2.c) Considerando que Augusto fez a sua adesão pelo plano 2, descreva com suas palavras os passos para determinar o valor a ser pago na conta após a locação de uma quantidade qualquer de filmes no ano. d) Escreva a “lei” de formação da função de cada plano de pagamento.

A descrição em língua natural do procedimento a ser realizado para determinar o valor a ser pago pelas locações de filmes com o plano 2, no item 2.(c), os grupos G6, G7, G8, G10 e G11 apresentaram respostas corretas conforme resolução (2.C.1), pois manifestaram em língua natural que o valor a ser pago será dado pelo valor da adesão somado ao valor por filme locado multiplicado pela quantidade de filmes locados no ano. Os grupos G1, G2, G5 e G9 explicaram, em língua natural, como determinar a quantidade de filmes que podem ser locados depois de pago um valor qualquer para o plano 2, ou seja, descreveram os passos do item 2.(b), respostas consideradas incorretas. Além disso, o grupo G3 apresentou a generalização na expressão algébrica para a função afim, ou seja, $f(x) = 2.x + 15$ e o grupo G4 explicou a partir de um exemplo, ou seja, utilizou o registro simbólico numérico.

A generalização a partir de uma expressão algébrica, pedido no item 2.(d), foi realizada corretamente por todos os grupos, com exceção do grupo G6. Este trocou os valores da taxa de variação e coeficiente linear, prevista como resposta incorreta 2.D.6 da análise *a priori*, pois descreveram as expressões: $V = 30.x + 1{,}20$ *para o plano 1*; $V = 15.x + 2$ para o plano 2 e $V = 4{,}5.x$ para o plano 3, onde V é o valor a ser pago e x a quantidade de filmes locados no ano. Neste caso, há indicativos de dificuldade na identificação destes elementos da função afim no registro simbólico algébrico. Os demais grupos relataram respostas corretas e previstas em análise *a priori* como 2.D.1, ou seja, para o plano 1 apresentaram as expressões $V = 30 + 1{,}20.x$ ou $V = 1{,}20.x + 30$; para o plano 2: $V = 15 + 2.x$ ou $V = 2.x + 15$ e para o plano 3: $V = 4{,}5.x$ onde V é o valor a ser pago e x a quantidade de filmes locados no ano.

5.2.e) Se João aluga em média 35 filmes por ano, qual será o plano de pagamento mais econômico para o seu caso? f) Em um plano cartesiano, construa a representação gráfica para o Plano 1 de locação de filmes.

No item 2.(e) os grupos G1, G2, G3, G4, G5, G8, G10 e G11 responderam que o plano 1 seria mais vantajoso, conforme resolução 2.E.1 da análise *a priori*. Justificaram sua resposta a partir do registro simbólico numérico, ou seja, realizaram um tratamento neste registro atribuindo o valor para x = 35 para cada uma das expressões algébricas definidas no item 2.(d), conforme a Figura 28, e tomaram o menor resultado encontrado.

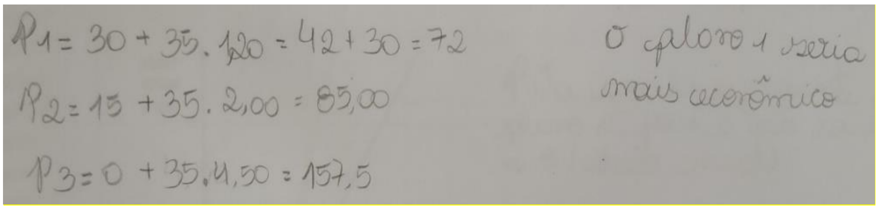


Figura 28: Resposta do grupo G*2* para a atividade 5.*2*(*e*)
Fonte: Dados da Pesquisa

Os grupos G6, G7 e G9 concluíram, sem cálculos, que o plano mais econômico seria o 3, pois este não possui taxa de adesão, conforme resolução 2.E.3 da análise *a priori.*

No item 2.(f), o propósito era a conversão do registro simbólico algébrico para o registro gráfico, dificuldade identificada pela pesquisadora no teste diagnóstico. Neste item, apenas um grupo respondeu corretamente, conforme resolução 2.F.1, pois apresentou no plano cartesiano os pontos descontínuos no gráfico, onde, no eixo x, estava a quantidade de filmes locados e, no eixo y, o valor anual a ser pago. Os grupos G3, G4, G5, G7, G8, G10 e G11 desconsideraram o domínio da função nos Naturais e apresentaram o gráfico traçando a reta, resposta incorreta 2.F.2 da análise *a priori*.

Os grupos G6 e G9 apresentaram incorretamente a questão, traçando uma reta qualquer que partiu da origem e passou pelo ponto (1,20; 30), valores para a taxa de variação e coeficiente linear, respectivamente. Estes grupos não relacionaram os aspectos estudados na interpretação global em um problema em língua natural. O grupo G1 traçou a reta para a função $V = 1{,}20.x$ desconsiderando a taxa de adesão mencionada na situação.

No trecho a seguir das transcrições dos áudios do grupo G4, há indicativos de que o grupo mobilizou a segunda variável de representação posição da reta em relação ao eixo y para construir o gráfico desta função, nas situações de formulação e validação.

Estudante 1: Como é que vamos fazer isso?
Estudante 3: É aquele de marcar os pontos.
Estudante 1: Tá, mas a gente vai colocar exatamente o quê?
Estudante 2: Veja qual é função do plano 1 que ela pediu.
Estudante 3: A gente colocou $V = 1{,}20x + 30$.
Estudante 2: Então, eu acho que é assim. Desenha aí o x *e* y. *Daí o gráfico vai começar no 30.*

Estudante 1: Por que?
Estudante 2: Porque ele é o ... ah, qual é o nome dele mesmo? Olha aí no caderno.
Estudante 3: Taxa de variação?
Estudante 2: Não. Esse é o a.
Estudante 3: Ah, o coeficiente linear?
Estudante 2: É. Ele fica no eixo y. Lembra?
Estudante 1: Não.
Estudante 2: Tá, mas coloca aqui no 30.
Estudante 1: E agora?
Estudante 2: Agora ... Acho que a gente tem que achar um ponto do gráfico. Tipo, calcula quanto ele gasta para 5 filmes.
Estudante 3: Dá a calculadora aí. 1,2 vezes 5 dá 6.
Estudante 1: 6?
Estudante 2: Mas tem que somar o 30.
Estudante 3: Ah é. Então, vai dar 36.
Estudante 2: Isso, coloca aí no gráfico que 5 filmes vai dar 36 reais. (GRUPO G4)

Os demais grupos, com exceção de G6 e G9, fizeram uso da abordagem ponto a ponto para a construção do gráfico, eles não se utilizaram da representação algébrica e marcaram pontos de acordo com os cálculos realizados no registro simbólico numérico a partir dos dados em língua natural.

5.2.g) Observe a seguir os planos 2 e 3 para a locação de filmes representados graficamente em cores diferentes (azul e vermelho). Identifique cada uma das retas dos gráficos de acordo com as suas respectivas representações algébricas determinadas no item (d). Justifique a escolha para cada função.

Em relação ao item 2.(g), no qual os grupos deveriam identificar os gráficos conforme as expressões algébricas dos planos 2 e 3, com exceção do grupo G6, todos os demais apresentaram respostas corretas, ou seja, associaram o gráfico em azul ao plano 2 e o gráfico em vermelho ao plano 3. Os grupos G1, G5, G7 e G10 não apresentaram justificativa escrita, mas, nas transcrições dos áudios das discussões, observamos que todos os grupos, inclusive G2, G3, G4, G8, G9 e G11, definiram suas respostas a partir da posição do coeficiente linear no gráfico, ou seja, pelo uso da segunda varável visual de representação, resposta esperada em análise *a priori* como 2.G.1.

5.6 Análise *a Posteriori* da Atividade 6

Esta aplicação ocorreu nas duas horas-aulas do dia 4 de outubro de 2019, na qual apenas o grupo G9 trabalhou em dupla pela falta de um estudante, os demais grupos permaneceram em trios. Para esta atividade, os estudantes poderiam utilizar lápis, borracha, folha de questões e o aplicativo *Desmos*, o qual permite a limitação dos traçados das retas dos gráficos a partir da definição de intervalos de domínio, que foi explicado pela pesquisadora previamente à atividade.

6.a) Expliquem o que é domínio de uma função. b) Já vimos em atividades anteriores que a função afim, graficamente, é uma reta. Agora reflitam: é possível dizer que esta reta é infinita? Justifiquem sua resposta. c) Israel está abrindo um novo consultório médico em sua cidade e gostaria de decorar a sala de espera com um painel em aço de 1m por 1m com a logo da sua empresa entalhado, conforme figura a seguir. Para isso, irá recorrer a um tipo de impressão chamado CNC Router, que é uma máquina de corte controlada por um computador e que serve para cortar e gravar em materiais duros como madeira, alumínio, aço, vidro, plástico e espuma. Para obter a máxima precisão na impressão é necessário que o computador receba a programação das linhas para o corte, ou seja, precisamos descrever algebricamente as funções que compõem <u>todos os segmentos de reta desta logo</u>. Assim, o problema é: quais são as expressões algébricas das retas e os domínios de definição que constituem a logo requerida por Israel?

Nos itens (a) e (b) a pesquisadora optou, neste dia, por realizar a atividade discutindo com toda a turma, uma vez que os conceitos de domínio e infinitude já haviam sido abordados previamente à aplicação da sequência didática. As respostas manifestadas pelos grupos foram imediatas e praticamente unânimes a respeito do domínio da função, definido pela turma como os números que podem "entrar" em uma função, previsto em análise *a priori* como A.1. Além disso, quando perguntamos a respeito da infinitude da reta de um gráfico da função afim, a turma respondeu que as retas são infinitas, uma vez que podemos atribuir infinitos números ao domínio no conjunto dos Reais, resposta B.1 da análise *a priori*.

Realizamos, então, a leitura em conjunto do item (c) e a pesquisadora explicou o que seria uma máquina CNC *router*, finalizando com a apresentação de um vídeo[22] demonstrativo. Os estudantes ficaram muito interessados no processo e sentiram-se motivados em realizar a atividade, deixando transparecer, mais uma vez, que a situação se caracterizou como sendo *adidática*, e que houve a devolução por parte dos estudantes.

A primeira discussão centrou-se em posicionarmos os eixos do plano cartesiano sobre a imagem para que pudéssemos definir as expressões algébricas de cada uma das retas presentes na figura. Um estudante sugeriu que os eixos x e y

[22] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cNog3f0pMLI.

fossem posicionados com a origem sobre o centro da figura. Os demais estudantes concordaram com a ideia e a pesquisadora, que projetava a imagem da logo sobre o quadro, desenhou sobre a imagem o plano cartesiano, conforme sugestão do estudante.

Com os planos cartesianos definidos nas folhas dos grupos, seguimos com a segunda discussão: como definir um intervalo de domínio no aplicativo *Desmos*. Para isso, projetamos a tela do programa em sua versão online[23] e, junto com os estudantes, refletimos sobre a expressão algébrica para o primeiro segmento de reta da logo, para a qual atribuímos, como exemplo, a função $y = x + 10$, como mostra a Figura 29.

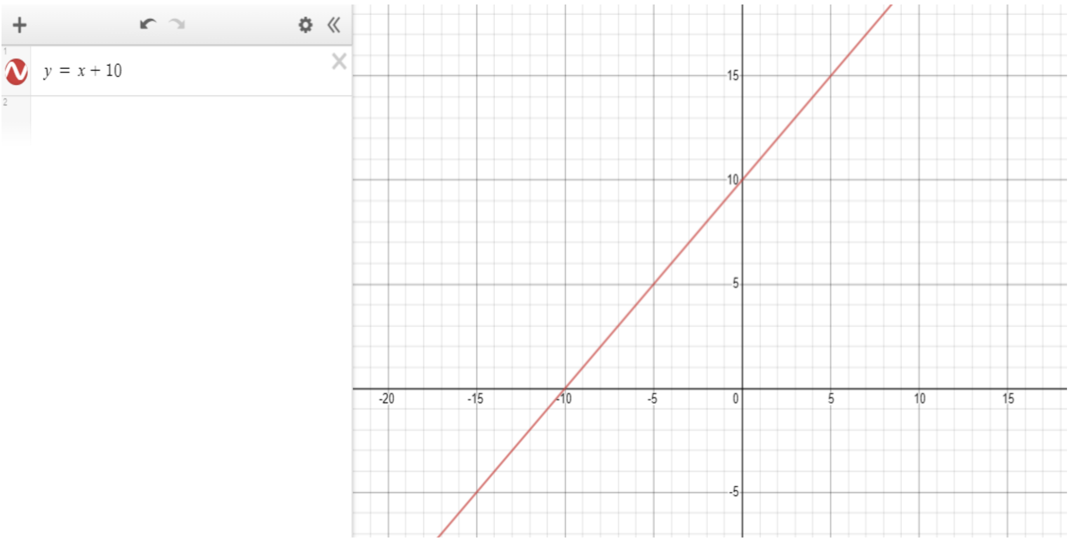


Figura 29: Tela do aplicativo *Desmos* para a função afim $y = x + 10$
Fonte: Autora

No entanto, para que o aplicativo apresentasse somente uma parte da reta do gráfico desta função, precisávamos definir os intervalos de domínio e inseri-los no aplicativo. A turma sugeriu que o domínio desta reta deveria conter os valores para x entre -10 e 0, ou seja, $-10 < x < 0$. Assim, no aplicativo *Desmos*, junto à expressão algébrica da função já definida, atribuímos o código $\{-10 < x < 0\}$ e a reta do gráfico apresentou-se apenas para aquele domínio, como na Figura 30.

[23] Disponível em: desmos.com.

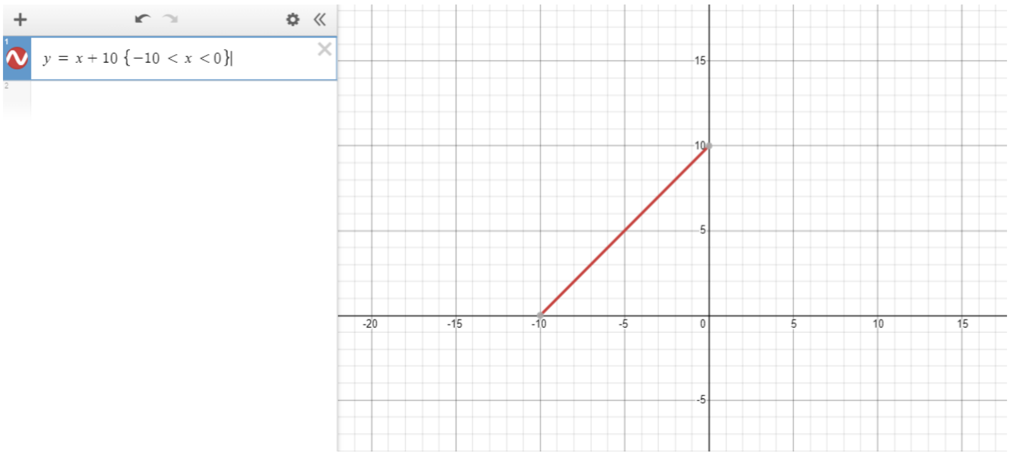


Figura 30: Tela do aplicativo *Desmos* para a função afim $y = x + 10$ com intervalo de domínio
Fonte: Autora

Após estas discussões gerais e momento didático guiado pela pesquisadora considerado essencial para a introdução à atividade com o Demos, os estudantes seguiram com momentos *adidáticos* e as discussões em seus respectivos grupos. Todos optaram em continuar a produção da logo com a mesma expressão algébrica dada como exemplo pela pesquisadora, mesmo que tenham sido convidados a iniciarem com outras expressões. No início das discussões nos grupos houve algumas dificuldades, especialmente na definição dos intervalos de domínio. No entanto, em menos de dez minutos, observamos que escrever as expressões algébricas se tornou fácil para alguns grupos, uma vez que os estudantes perceberam que bastava trocar o sinal do coeficiente a (primeira variável visual de representação) e os valores para o coeficiente b (segunda variável visual de representação) para obter a representação da reta necessária para a construção da logo. Em trinta minutos, quase todos os grupos já haviam delimitado as funções em seu registro simbólico algébrico, junto aos seus intervalos de domínio.

Os grupos G2, G3, G4, G7, G8, G9, G10, G11 e G12 apresentaram as expressões algébricas para todos os segmentos de reta da logo, como mostramos na Figura 31 a seguir, solução apresentada pelo grupo G4, e a sua respectiva construção na tela do *smartphone*, na Figura 32. Os grupos G1, G5 e G6 definiram apenas as expressões para as linhas pretas e vermelhas, pois não houve tempo para finalização. No entanto, demonstraram compreender, assim como os demais grupos, as variáveis visuais de representação envolvidas na atividade.

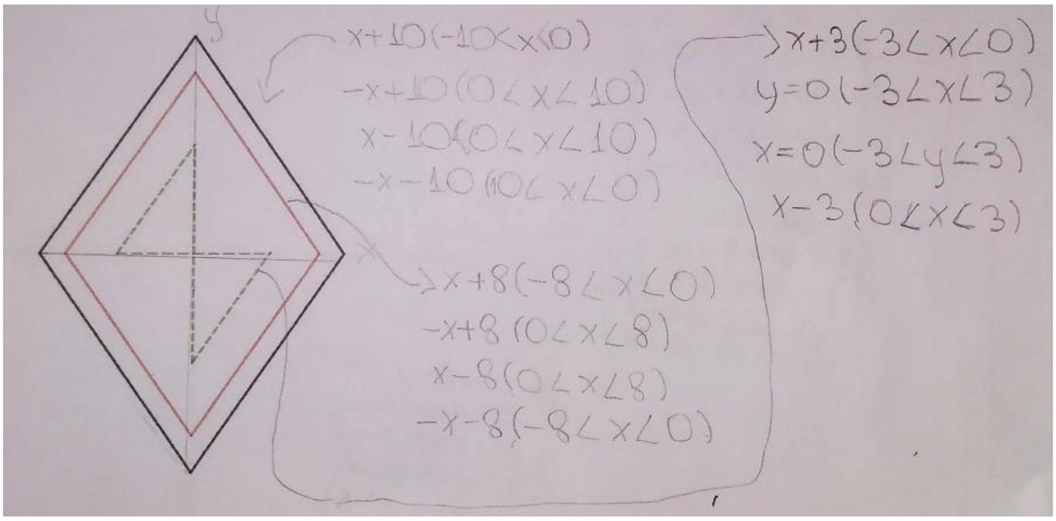


Figura 31: Respostas do grupo G4 para a atividade 6 da sequência didática
Fonte: Dados da Pesquisa

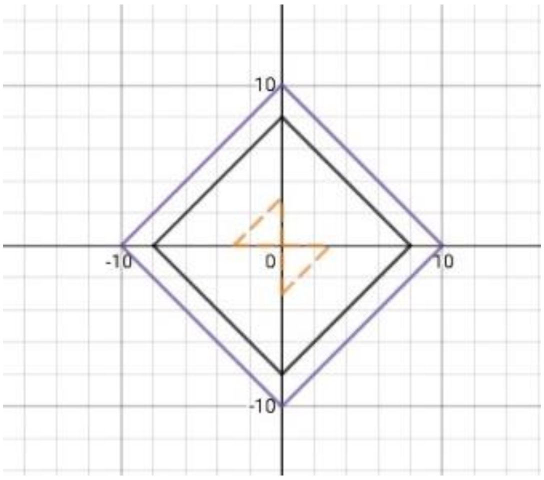


Figura 32: Tela do smartphone do grupo G4 para a atividade 6 da sequência didática[24]
Fonte: Dados da Pesquisa

A partir da aplicação desta atividade, observamos indicativos de compressão das variáveis visuais de representação junto às suas unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, que permite a conversão entre o registro de representação gráfico para o simbólico algébrico pela interpretação global de propriedades figurais.

---

[24] As funções que definem os segmentos da reta da figura 32 são: $f(x) = x + 10$, Dom(f) = $\{x \in R; -10 < x < 0\}$; $g(x) = -x + 10$, Dom(g) = $\{x \in R;\ 0 < x < 10\}$; $h(x) = x - 10$, Dom(h) = $\{x \in R;\ 0 < x < 10\}$; $i(x) = -x - 10$, Dom(i) = $\{x \in R; -10 < x < 0\}$; $j(x) = x + 8$, Dom(j) = $\{x \in R; -8 < x < 0\}$; $k(x) = -x + 8$, Dom(k) = $\{x \in R; 0 < x < 8\}$; $l(x) = x - 8$, Dom(l) = $\{x \in R; 0 < x < 8\}$; $m(x) = -x - 8$, Dom(m) = $\{x \in R; -8 < x < 0\}$; $n(x) = x + 3$, Dom(n) = $\{x \in R; -3 < x < 0\}$; $o(x) = x - 3$, Dom(o) = $\{x \in R; 0 < x < 3\}$; $p(x) = 0$, Dom(p) = $\{x \in R;\ -3 < x < 3\}$ e $y = 0$ no intervalo $\{-3 < x < 3\}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida a fim de buscar resposta para: *quais as contribuições de um ensino baseado na interpretação global de propriedades figurais para a aprendizagem da função afim?* Para responder a esta questão, estabelecemos como objetivo geral *analisar a aprendizagem de estudantes sobre a função afim a partir de uma sequência didática relacionada à interpretação global de propriedades figurais.*

Para tanto, assumimos as seguintes premissas: 1) as representações semióticas (DUVAL, 2003; 2009) são indispensáveis para o desenvolvimento da atividade matemática; 2) um ensino fundamentado pela interpretação global de propriedades figurais, abordagem proposta por Duval (2011b; 2012), a qual privilegia o estudo da função afim por meio do confronto entre variáveis visuais da representação gráfica e unidades simbólicas significativas da expressão algébrica, para proporcionar aos estudantes a compreensão da função afim em seus registros gráfico e simbólico algébrico; e 3) as situações *adidáticas* podem tornar os estudantes agentes de sua aprendizagem, favorecendo a compreensão do conceito matemático em questão. A fim de contemplarmos o objetivo desta investigação, elaboramos uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática e fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Teoria das Situações Didáticas, e aplicamos com os estudantes de uma turma de 1º Ano do Ensino Médio do curso de Formação de Docentes de um colégio da rede estadual de educação do Paraná.

A fundamentação na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2009), cuja abordagem de interpretação global de propriedades figurais é enfatizada por Duval (2011b; 2012) como necessária para a compreensão da função afim, foi fundamental para o desenvolvimento da sequência didática, para que as atividades permitissem aos estudantes observar as modificações das variáveis visuais na representação gráfica e sua respectiva alteração nas unidades simbólicas significativas da expressão algébrica e vice-versa. Além disso, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996) serviu de suporte para a ação em sala de aula, na elaboração da sequência didática e na escolha de situações *adidáticas,* para que ocorresse a devolução e proporcionasse aos estudantes vivenciar situações de ação, formulação e validação relacionadas ao objeto matemático. Por diversos momentos durante a aplicação, os momentos didáticos, a partir da mediação e institucionalização proporcionadas pela pesquisadora, foram necessários para que os estudantes pudessem elaborar e validar suas estratégias de resolução, contribuindo para a compreensão da função afim.

Previamente ao início da pesquisa, foi aplicado um teste diagnóstico com intuito de identificarmos os conhecimentos e dificuldades manifestados pelos sujeitos colaboradores da pesquisa acerca do conceito de função afim. A análise desta etapa nos permitiu concluir que os estudantes: realizaram corretamente a conversão entre o registro em língua natural para o registro simbólico numérico; executaram tratamentos corretos no registro simbólico numérico; e identificaram variáveis, relações de dependência e correspondência nos registros de representação língua natural e gráfico, e regularidade no registro simbólico numérico.

Porém, ao resolver o teste diagnóstico, os estudantes apresentaram dificuldades em: perceber as relações de dependência entre variáveis x e y envolvidas numa situação problema, especialmente a dependência de y para x; generalizar uma função afim a partir de uma conversão entre os registros língua natural para o simbólico algébrico ou por um tratamento entre os registros simbólico numérico e algébrico; realizar a conversão do registro simbólico algébrico para o registro gráfico, seja pela abordagem ponto a ponto ou pela extensão do traçado; converter do registro gráfico para o registro simbólico numérico e, consequentemente, para o simbólico algébrico; identificar os elementos da função afim, taxa de variação e coeficiente linear, nos registros de representação gráfico, simbólico numérico e algébrico; identificar as variáveis visuais de representação (sentido de inclinação da reta, posição da reta e ângulos com os eixos) frente às respectivas unidades simbólicas significativas (sinal do coeficiente a e os valores para os coeficientes a e b).

Diante das dificuldades dos estudantes sobre função afim manifestadas durante o teste diagnóstico, aplicamos a sequência de atividades, composta por situações *adidáticas*, com vistas a analisar a aprendizagem dos estudantes sobre a função afim, a partir da resoluções das atividades, por meio da proposta de interpretação global de propriedades figurais (DUVAL, 2011b).

As atividades 1 e 2 da sequência didática, que têm como contexto um experimento de observação do nível de água em uma proveta graduada com a inserção de bolinhas de gude, proporcionam o estudo do conceito de função afim e seus elementos taxa de variação e coeficiente linear em diferentes registros de representação, bem como o estudo dos registros simbólico algébrico e gráfico por meio da interpretação global de propriedades figurais.

Logo nestas duas primeiras atividades foi possível notar a devolução por parte dos estudantes por meio do engajamento dos mesmos com as resoluções propostas e os seus avanços no que se refere ao reconhecimento da função afim no registro de representação simbólico numérico (tabelas), a identificação dos elementos taxa de variação e coeficiente linear nos registros de representação simbólico algébrico e gráfico e indicativos de compreensão da ideia de generalização. Também, observamos avanço na compreensão da função afim a partir da conversão entre os registros de representação gráfico e simbólico numérico, os quais proporcionaram também as primeiras tentativas corretas de conversão para o registro simbólico algébrico, estudo realizado por meio da interpretação global das propriedades figurais.

A atividade 3 foi realizada com o auxílio dos aplicativos *Desmos* e *GeoGebra* para *smartphone* e permitiu o estudo das três variáveis visuais no registro gráfico da função afim: 1) sentido de inclinação da reta do gráfico; 2) posição do gráfico em relação à origem do eixo y; e 3) ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y; e suas respectivas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica: A) sinal do coeficiente a; B) valor para o coeficiente linear $b;$ C) e valor para o coeficiente a da função afim $f(x) = a.x + b$. Na sequência, aplicamos a atividade 4 para que os estudantes analisassem diferentes gráficos de função afim e, com base nas considerações da atividade 3, em referência às variáveis visuais e suas respectivas unidades simbólicas significativas, tirassem conclusões a respeito do registro simbólico algébrico, sem o auxílio dos aplicativos para *smartphone*.

A interpretação global da função afim não é trivial para os estudantes (DUVAL, 2011b), fato notado nas resoluções das atividades 3 e 4, as quais revelaram as dificuldades dos grupos, especialmente aquelas voltadas para as variáveis visuais de representação 2 e 3 – posição do gráfico em relação à origem do eixo y e os ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos do plano cartesiano, respectivamente. Em decorrência a estas dificuldades apresentadas pelos estudantes na interpretação global da função afim, a conversão entre os registros gráfico e simbólico algébrico não ocorreu conforme nossas expectativas em análise *a priori*, ou seja, os grupos não obtiveram conclusões a respeito da taxa de variação e do coeficiente linear da função afim em seu registro gráfico.

Sendo assim, considerando o dinamismo da Engenharia Didática, ou seja, que a adaptação na sequência de atividades deve ser realizada sempre que necessário (BITTAR, 2017), e em decorrência do desempenho dos estudantes no desenvolvimento da atividade 4, foi realizada uma adaptação na atividade 5, antes de sua implementação em sala de aula. Tal adaptação, que se refere à inserção de uma questão, teve a intenção de propiciar aos estudantes a articulação entre os registros simbólico algébrico e gráfico, por meio das variáveis visuais e suas respectivas unidades simbólicas significativas, conforme proposto por Duval (2011b) para a compreensão da função afim.

A análise da atividade 5, questão 1, mostrou avanço no conhecimento dos estudantes no que tange à compreensão da função afim em seus registros gráfico e simbólico algébrico, ou seja, observaram corretamente o crescimento ou decrescimento do gráfico da função e o associaram ao sinal do coeficiente a da expressão algébrica, positivo ou negativo, respectivamente (primeira variável visual de representação); identificaram o valor para o coeficiente b a partir da análise da posição do gráfico sobre o eixo y (segunda variável visual de representação); e apresentaram conclusões corretas a respeito dos possíveis valores para o coeficiente a, considerando a comparação das medidas dos ângulos α e β formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y respectivamente (terceira variável visual de representação). Com a compreensão das variáveis visuais de representação, notamos que a conversão entre os registros gráfico e simbólico algébrico ocorreu de forma clara pela maior parte dos grupos, especialmente no momento de determinar o valor para a taxa de variação. Identificamos apenas um grupo, dos onze formados inicialmente para esta investigação, que apresentou dificuldades em relacionar a terceira variável visual – ângulos formados entre o gráfico e os eixos do plano cartesiano com o coeficiente a da expressão algébrica.

Ainda na atividade 5, questão 2, há indicativos de avanço dos estudantes na compreensão do processo de generalização de uma situação dada em língua natural e a identificação das relações de dependência, especialmente a dependência de y para x. Porém, notamos que, na conversão do registro simbólico algébrico para o gráfico, alguns estudantes ainda apresentaram dificuldades, uma vez que buscaram nas abordagens ponto a ponto ou de extensão do traçado meios para realizar esta transição. Vimos que, apesar de os estudantes compreenderem as modificações ocorridas nos registros gráfico e simbólico algébrico por meio de uma intepretação global, não buscaram utilizar este procedimento para a construção de um gráfico, com exceção do grupo G4.

A análise da atividade 6 nos permite concluir que, em situações *adidáticas*, os estudantes fizeram uso da intepretação global de propriedades figurais para a sua resolução. A descoberta da utilização de intervalos para limitar o gráfico das funções afim necessárias para a construção da logo foi motivador para os grupos. Além disso, observamos que, nesta atividade, os estudantes não atribuíram valores para os coeficientes a e b de forma aleatória, mas buscaram discutir e argumentar entre seus pares qual deveria ser a expressão algébrica da função para que completasse perfeitamente o desenho da logo, em situações de formulação e validação.

Os resultados expostos nesta pesquisa mostram as *contribuições de um ensino baseado na interpretação global de propriedades figurais para a aprendizagem da função afim,* entre elas, o desenvolvimento de uma visão ampla e a percepção não fragmentada entre as variáveis visuais no registro de representação gráfico e as unidades simbólicas significativas no registro simbólico algébrico, de forma que os estudantes puderam reconhecer a função afim nos diferentes registros e transitar entre eles, bem como analisar gráficos da função afim. Além disso, a conversão entre os registros gráfico e simbólico algébrico, a qual Duval (2011b) enfatiza como fonte de dificuldade para os estudantes, mostrou-se compreensível por meio do estudo de cada uma das variáveis visuais de representação e as mudanças que ocorrem nas unidades simbólicas significativas na expressão algébrica, ou seja, atividades, na qual se privilegiam a abordagem de intepretação global, favorecem o reconhecimento do objeto matemático e seus elementos nos registros gráfico e simbólico algébrico.

No caso específico desta investigação, consideramos que a utilização dos aplicativos para *smartphones*, *Desmos* e *GeoGebra* (*Graphing Calc*) como ferramentas auxiliares para o estudo da interpretação global da função afim se caracterizou como uma contribuição para a aprendizagem dos estudantes sobre o conceito de função afim, uma vez que permitiram a visualização imediata no trânsito entre os registros de representação gráfico e simbólico algébrico do referido conceito. Salientamos que este estudo também poderia ter sido realizado com lápis e papel, mas o tempo gasto e a imprecisão nas construções gráficas não permitiria explorar tantos exemplos e, consequentemente, não proporcionaria tantas discussões entre os estudantes no mesmo tempo proposto para a presente pesquisa.

Desta forma, consideramos que o *smartphone*, enquanto ferramenta tecnológica, é um instrumento que merece atenção por parte dos docentes, em seus planejamentos e suas formações pedagógicas, pela ampla quantidade de recursos disponíveis, os quais, com estudo e discernimento do professor, podem favorecer a compreensão de objetos matemáticos, como observado durante a execução desta pesquisa.

Ainda, salientamos que a disposição dos estudantes em grupos favoreceu a troca, a formulação e a validação de ideias entre eles, com suas linguagens próprias e interação entre os membros durante toda a investigação, conforme pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996).

Sugerimos, por fim, novas pesquisas a respeito de como futuros professores de Educação Infantil e Anos Inicias do Ensino Fundamental encaminham o ensino associado às ideias de função e se levam em consideração os seus aprendizados que receberam no Ensino Médio, no caso de estudantes de Formação Docente, ou de graduação, se for o caso. Além do mais, pesquisas voltadas para a investigação da intepretação global de propriedades figurais, bem como o uso de aplicativos para *smartphones* em outras séries da Educação Básica.

Finalmente, consideramos que este trabalho nos proporcionou aprendizado e satisfação, tanto como pesquisadoras como educadoras, permitindo mostrar o avanço dos conhecimentos dos estudantes na aprendizagem da função afim sob referência da interpretação global, e contribuindo para as nossas práticas docentes em sala de aula de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Dionara Freire de. **Representações Matemática nos processos de Ensino e Aprendizagem da Função Afim com o uso do software GeoGebra.** 2013. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, Saddo Ag.; SILVA, Maria José Ferreira da. Engenharia Didática: evolução e diversidade. **Revemat**. Florianópolis – SC. v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

BERNARDINO, Fabricia; GARCIA, Wellington Fernando Delvechio; REZENDE, Veridiana. Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do ensino fundamental e ensino médio. **ACTIO**. Curitiba, v. 4, n. 2, p. 127-147, mai./ago. 2019.

BIRGIN, Osman. Investigation of Eighth-Grade Students'Understanding of the Slope os the Linear Function. **Bolema.** Rio Claro – SP, v. 26, n. 42A, p. 139-162, abr. 2012.

BITTAR, Marilena. Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, Rosinalda Aurora de Melo; BORABA, Rute Elizabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira. (Org.) **Investigações em Didática da Matemática.** Recife: UFPE, 2017. p. 100-131.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC. 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC. 2018.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

CAMPITELI, Heliana Cioccia; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

CIANI, Andréia Büttner; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; BERNS, Mauricio. A Construção do conceito de Função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Wellington. (orgs) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática**. Curitiba: CRV, 2019. p. 29-50.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-153.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 219 p.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos.Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011a.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**. Florianópolis – SC. v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011b.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**. Florianópolis – SC. v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond.; FREITAS, José Luiz Magalhães de.; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **RPEM.** Campo Mourão – PR. v. 2, n. 3, p. 10-34, jul-dez, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FONSECA, Vilmar Gomes da; SANTOS, Angela Rocha dos; NUNES, Wallace Vallory. Estudo epistemológico do conceito de Funções: uma retrospectiva. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática., 2013, Curitiba. **Anais do XI ENEM**, 2013.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 65-87.

GOMES, Gabriel dos Santos Souza. **A Função Afim através da resolução de problemas: um estudo de caso analisando os Registros de Representação Semiótica.** 2017. 143 f. Dissertação (Mestrado Acadêmido em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A criação do grupo de trabalho de Educação Matemática na ANPEd. In: MIGUEL, Antônio; D'AMBROSIO, Ubiratan; GARNICA, Antônio; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A Educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**: A educação matemática, São Paulo, v. 27, p. 70-210, 2004.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 250 p. v. 1.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-212.

MAGGIO, Deise Pedroso; SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria. Registros de Representação Semiótica da Função Afim: análise de livros didáticos de matemática do Ensino Médio. **Revemat.** Florianópolis, v. 05, n. 1, p. 38-47, 2010.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de Função Afim: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** 2019. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

MORETTI, Méricles Tadeu. O papel dos Registros de Representação na Aprendizagem da Matemática. **Contrapontos**. Itajaí – SC. a. 2, n. 6, p. 423-437, set./dez. 2002.

MORETTI, Méricles Tadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da Interpretação Global de propriedades figurais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 149-160.

MORETTI, Méricles Tadeu.; LUIZ, Learcino dos Santos. O Procedimento Informático de Interpretação Global no Esboço de Curvas no Ensino Universitário. In: BRANDT, Celia Finck.; MORETTI, Méricles Tadeu (org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa da educação matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Construindo o conceito de funções. In: RAMOS, A. S.; REJANI, F. C. **Teoria e Prática de Funções.** Maringá: Centro Universitário de Maringá. Núcleo de Educação a Distância, 2014. 121 p.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**. Seed: Curitiba, 2008.

PARANÁ. Referencial Curricular do Paraná para o Ensino Fundamental: princípios, direitos e orientações. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**. Seed: Curitiba, 2018.

PARANÁ. Projeto Político Pedagógico – Colégio Estadual Eron Domingues EFMN. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná.** Seed: Marechal Cândido Rondon, 2019. Disponível em: http://www.mrherondomingues.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/27/1470/14/arquivos/File/PPP/PPP2019.pdf.

PAVAN, Luciane Regina. **A mobilização das ideias básicas do conceito de Função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicaticas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PIRES, Rogério Fernando. O Conceito de Função: uma análise histórico epistemológica. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática., 2016, São Paulo. **Anais do XII ENEM**, 2016.

QUEIROZ, Páblo Carcheski de. **Uma proposta para o ensino de Função articulando as linguagens Algébrica e Geométrica**. 2014. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

REIS, Adinilson Marques. **Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio**. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ROMANELLO, Laís Aparecida. **Potencialidades do uso do celular na sala de aula: atividades investigativas para o ensino de função.** 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2016.

ROMANELLO, Laís Aparecida; MALTEMPI, Marcus. Vinícius. A utilização do smartphone no ensino de Função: a visão dos alunos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XII, 2016, São Paulo – SP. **Anais** … São Paulo – SP: [s.n.], 2016. p. 1-12.

RORATTO, Cauê. **História da Matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função.** 2009. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SANTOS, Edivaldo Pinto dos. **Função Afim y = ax + b: a articulação entre os Registros Gráfico e Algébrico com auxílio de um software educativo.** 2002. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SCANO, Fabio Correa. **Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra**. 2009. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SELINGARDI, Ainá Montessanti. **O estudo da Função Afim no Ensino Médio com apoio de uma atividade experimental**. 2015. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2015.

TOZO, Fabio Luiz Dias. **Tarefas Exploratórias-Investigativas para a Aprendizagem da Função Afim**. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2016.

TRAVASSOS, Wilian Barbosa. **Um estudo sobre o conteito de inequação com licenciandos em matemática**: contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2018. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

ANEXOS

Anexo I: Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: **O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato:

Lisiane Cristina Amplatz (responsável) – (45) 9 9834 5484; e **Prof. Dra. Veridiana Rezende.**

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de investigar como o uso de smartphones e tablets pode contribuir na aprendizagem do conteúdo matemático de Função Afim, o qual será trabalhado nesta série. Para isso será realizado um trabalho em sala de aula que consiste em propor aos alunos atividades em diferentes contextos, sendo que a pesquisadora coletará os dados para esta pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e áudios de possíveis entrevistas realizadas durante as suas resoluções.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do estudo a professora/pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, mas a partir de atividades que exploram alguns aplicativos disponíveis nos smartphones e tablets. Existe o risco de você, estudante, não apresentar as resoluções para as atividades que serão propostas, mas, caso isso ocorra, ressaltamos que esse fato não trará prejuízo algum nem para a pesquisa nem para você. Além disso, você terá todo o apoio necessário por parte professora/pesquisadora, assim como a proposta de outras tarefas matemáticas para que você acompanhe o conteúdo que será trabalhado em sala de aula.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para você, estudante. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, você se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes dos participantes estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes dos participantes constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo destas tecnologias enquanto ferramentas para aprender. Por isso, frisamos a importância da sua participação nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento durante a pesquisa. Também, poderá contatar o comitê de ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná pelo telefone **3220-3272.**

Declaro estar ciente do exposto e **desejo participar do projeto O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO.**

Nome do estudante: ____
Nome do responsável: ____
Assinatura do responsável: ______________________________________

Eu, Prof. **Lisiane Cristina Amplatz**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

_________________________ , ___ de __________ de ______

Anexo II: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: **O ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO**

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: **Lisiane Cristina Amplatz** (responsável) – (45) 99834 5484; e **Prof. Dra. Veridiana Rezende** (44) 99969 4445

Convidamos o seu filho ou filha a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de investigar como o uso de smartphones e tablets pode contribuir na aprendizagem do conteúdo matemático de Função Afim, o qual será trabalhado nesta série. Para isso, será realizado um trabalho em sala de aula que consiste em propor aos alunos atividades em diferentes contextos, sendo que a pesquisadora coletará os dados para esta pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e áudios de possíveis entrevistas realizadas durante as suas resoluções.

Durante a execução do projeto a professora/pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, a partir de atividades que exploram alguns aplicativos disponíveis nos smartphones e tablets. Existe o risco de os estudantes não apresentarem resoluções para as atividades propostas, mas, caso isso ocorra, ressaltamos que esse fato não trará prejuízo algum nem para a pesquisa nem para o estudante. Além disso, todo o apoio necessário por parte da professora/pesquisadora será dado ao estudante, assim como a proposta de outras tarefas matemática para que ele possa acompanhar o conteúdo sobre função afim a ser trabalhado em sala de aula.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para o estudante. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, se o estudante se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes dos participantes estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes dos participantes constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo destas tecnologias enquanto ferramentas para aprender. Por isso, frisamos a importância da participação do estudante nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Este documento será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com o responsável do estudante e a outra deverá ser entregue para a professora/pesquisadora. Destacamos que o estudante não pagará nem receberá para participar deste estudo, bem como será mantido a confidencialidade do estudante e os dados serão utilizados só para fins científicos.

Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento durante a pesquisa. Também, poderá contatar o comitê de ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná pelo telefone **3220-3272.**

Declaro estar ciente do exposto e **autorizo** ______________________________ **(nome do(a) estudante)** a participar desta pesquisa.

Nome do responsável: ____
Assinatura do responsável: ____

Eu, Prof. **Lisiane Cristina Amplatz**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

___________________________ , ___ de ___________ de ______

APÊNDICES

Apêndice I: Atividades Diagnósticas

1) Adaptado (RORATTO, 2009) - O senhor Traba Lhador foi na fotocopiadora ao lado de seu trabalho e deparou-se com a seguinte tabela:

Quantidade	**Valor da cópia em preto e Branco (R$)**	**Valor da cópia colorida (R$)**
1	0,20	
2	0,40	2,40
3		3,60
4		
5	1,00	6,00
6		7,20
7	1,40	
8		
9		
10	2,00	12,00
ENCADERNAÇÃO = R$ 2,50		

a) Quanto o senhor Traba Lhador gastaria ao tirar 9 cópias em preto e branco? E ao tirar 8 cópias coloridas?

b) O senhor Traba Lhador dispõe de R$ 156,00 para a reprodução dos panfletos de divulgação da sua nova loja. Quantas cópias coloridas ele poderá fazer? Explique como você determinou sua resposta.

c) Considerando que o senhor Traba Lhador fez uma quantidade qualquer de cópias em preto e branco, descreva com a suas palavras os passos para determinar o valor a ser a pago.

d) Qual a "lei" de formação que determina o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias em preto e branco?

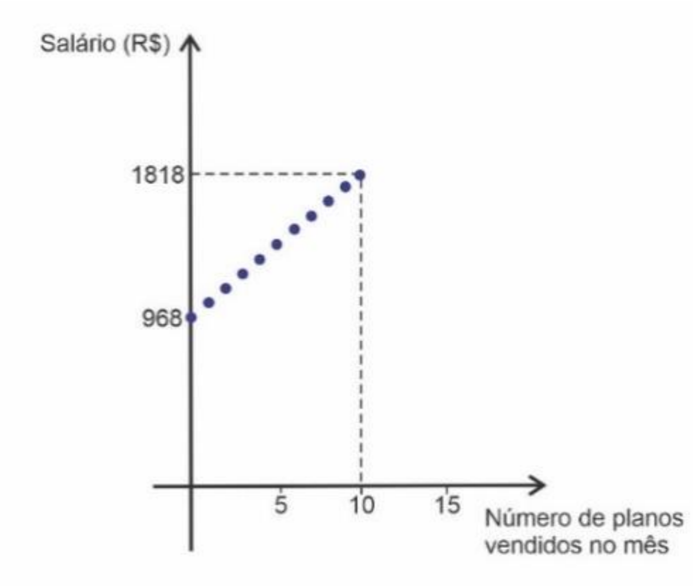
e) Represente graficamente a função definida no item (d).

f) Sabendo que a encadernação custa R$ 2,50 qual seria o valor total a ser pago pelo senhor Traba Lhador após fotocopiar e encadernar 150 folhas em preto e branco?

g) Escreva com as suas palavras o que Senhor Traba Lhador precisar fazer para saber qual o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias coloridas e encadernadas ao final?

h) Qual é a "lei" de formação que determina o valor a ser pago por uma quantidade qualquer de cópias coloridas encadernadas?

2) O salário mensal de um vendedor da empresa Planos de Saúde Mil está representado no gráfico a seguir:



a) Do que depende o salário final mensal de um vendedor desta empresa?

b) Quanto o vendedor recebe por cada plano de saúde vendido no mês?

c) Se o vendedor não realizar vendas em um determinado mês, qual é o valor do seu salário?

d) Qual é o valor a ser pago de salário para um vendedor que vendeu 15 planos de saúde no mês?

e) Como a frase "*o salário do vendedor depende do número de planos de saúde que ele vende mensalmente*" poderia ser expressa em linguagem matemática? Justifique.

f) Qual a "lei" de formação que determina o valor de salário a ser pago para o vendedor que vende uma quantidade qualquer de planos?

3) Joana e Roberta, residentes na mesma cidade, realizam pinturas a mão em xícaras de cerâmica sob encomenda. Para tanto, cada uma delas representou o valor a ser pago pelos seus clientes a partir das seguintes expressões algébricas:

Joana	$V = 25 + 12.x$
Roberta	$V = 20 + 22.x$

sendo V o valor final a ser pago e x o número de xícaras encomendadas.

a) Represente graficamente cada uma destas expressões algébricas.

b) Descreva diferenças e semelhanças que você pode observar em relação às expressões algébricas para os negócios de Joana e Roberta.

c) Agora, descreva diferenças e semelhanças em relação aos gráficos construídos no item (a), ao comparar com suas respectivas expressões algébricas.

Apêndice II: Atividades da Sequência Didática

Atividade 1

Vamos fazer um pequeno experimento por meio da observação do comportamento do nível de água em uma proveta graduada quando inserimos nela algumas bolinhas de gude. Coloque 40 ml de água na sua proveta graduada.

a) Construa uma tabela com os dados pedidos a partir das observações realizadas.

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	**Nível de água na proveta graduada (ml)**

b) Qual é o valor inicial de água colocada na proveta graduada?

c) Quanto aumenta o nível de água na proveta graduada cada vez que você coloca uma bolinha de gude?

d) Qual seria o nível de água na proveta graduada se você colocasse 10 bolinhas? E 15 bolinhas? E 28 bolinhas? Explique como você determinou suas respostas.

e) Quantas bolinhas seriam necessárias para que o nível de água na proveta graduada atingisse 180 ml? E 250 ml? Explique como você determinou suas respostas.

f) Com base nos dados dispostos na tabela do item (a), descreva de que modo podemos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas de gude colocada na proveta graduada que possui 40 ml de água inicialmente.

g) Estabeleça uma "lei" de formação de modo que possamos calcular o nível de água de acordo com o número de bolinhas colocadas na proveta graduada.

h) Se mudarmos a quantidade de água inicial na proveta graduada para 55 ml e ainda com as mesmas bolinhas de gude, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação, comparada a expressão descrita no item (g)?

i) Quais seriam as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml? Com ajuda do aplicativo *Desmos* digite a expressão algébrica encontrada na "lei" de formação da função definida no item (g). Depois, insira a nova "lei" de formação, obtida no item (h) e relate as suas observações.

- Faça um *print* do que aparece na tela do seu aplicativo *Desmos* e envie para a professora indicando foto 1.

j) Agora, suponhamos o experimento com bolinhas de gude de maior volume, ou seja, cada bolinha inserida em uma proveta graduada com 55 ml de valor inicial de água eleva o seu nível em 3 ml. Então, o que acontece com a expressão algébrica desta nova "lei" de formação comparada com as anteriores definidas nos itens (g) e (h)?

k) Quais foram as mudanças ocorridas na representação gráfica ao mudarmos a quantidade inicial de água na proveta graduada para 55 ml e o tamanho das bolinhas de gude? Insira a nova "lei" de formação no aplicativo *Desmos* e relate as suas observações.
- Faça um *print* do que aparece na tela do seu aplicativo *Desmos* e envie para a professora indicando foto 2.

Atividade 2

1) Observe a tabela a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água.

Número de bolinhas de gude colocadas na proveta graduada	**Nível de água na proveta graduada (ml)**
2	50
5	65
8	80
12	100

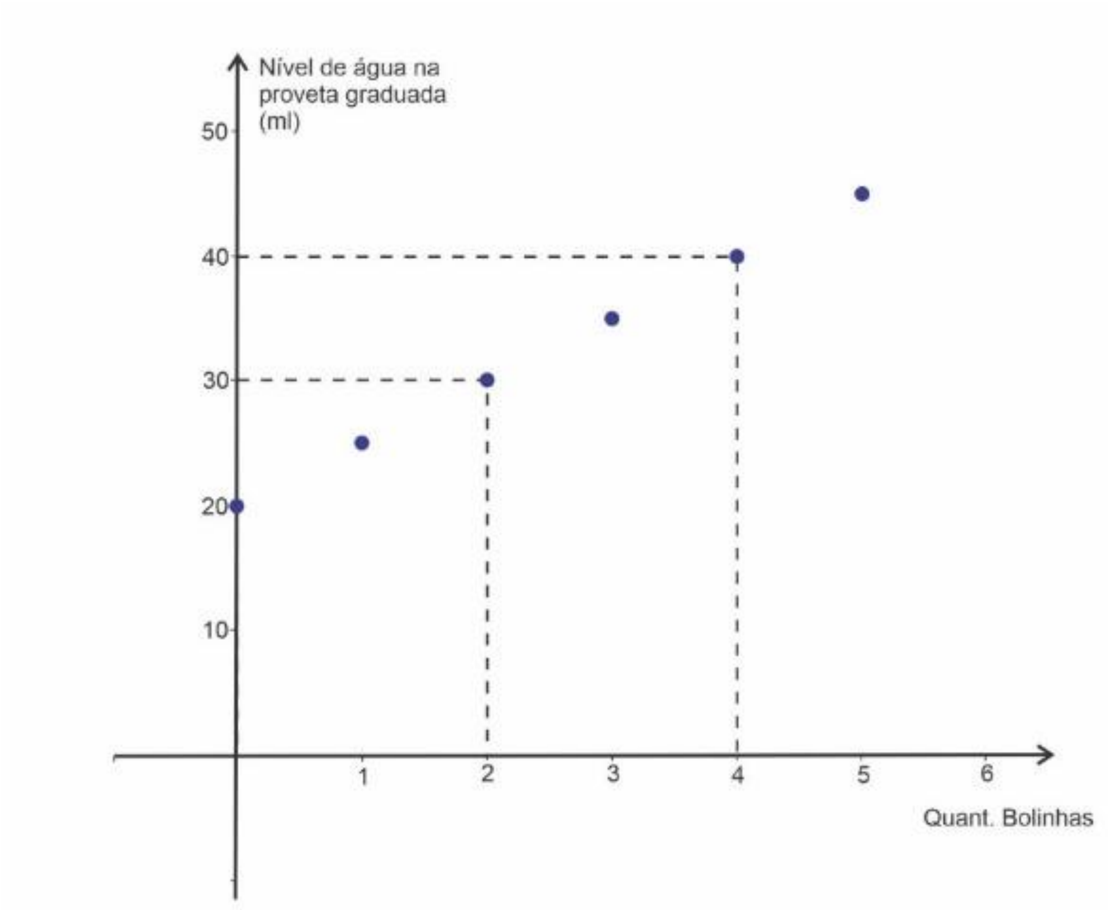
a) O nível de água na proveta graduada cresce quanto cada vez que uma bolinha de gude é colocada? Explique como você encontrou este valor.

b) Então, qual é a taxa de variação desta função? Justifique.

c) Qual é o coeficiente linear da função representada pela tabela? Explique como você encontrou este valor.

d) Com base nas informações da tabela, determine a "lei" de formação desta função.

2) Observe o gráfico a seguir que descreve uma nova situação de bolinhas de gude inseridas em uma proveta graduada para a observação do nível de água.



a) Qual é a quantidade inicial de água colocada na proveta graduada? Como este valor está associado à função descrita?

b) Conforme os dados apresentados no gráfico, qual é o nível de água na proveta graduada que aumenta quando é colocada uma bolinha de gude? Como este valor está associado à função descrita?

c) Determine a "lei" de formação da função desta situação.

Atividade 3

1) Com auxílio do aplicativo *Desmos*, abra o arquivo1 enviado pela professora e observe a função afim em sua forma algébrica y = ax + b, bem como a sua representação gráfica. Abaixo você encontra botões chamados *controles deslizantes* para o coeficiente *a* (taxa de variação) e o coeficiente *b* (coeficiente linear). A função que está sendo representada graficamente é a função y = 1x + 1, porque os controles deslizantes de *a* e *b* estão iguais a 1. Quando vocês deslizarem o controle para a = 2 teremos uma nova função f(x) = 2x + 1, e assim sucessivamente.

a) Arraste o controle deslizante do coeficiente *a* para 2, depois para -2 e observe o que acontece com a representação gráfica em cada mudança. Teste ainda para *a* igual a 4 e depois *a* igual a -4. Relate as suas observações.

b) Agora, coloque o controle deslizante do coeficiente *b* em -1 e volte a variar os valores para o coeficiente *a*: teste novamente para *a* igual a 2 e depois -2, para 5 e depois -5. O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente *a* são positivos?

c) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores do coeficiente *a* são negativos?

d) Arraste o controle deslizante do coeficiente *a* para 0 e varie os valores no controle deslizante do coeficiente *b*. O que acontece com o gráfico nestes casos?

2) Volte o controle deslizante do coeficiente *a* para 1. Agora, observe o gráfico da função quando variamos apenas os valores no controle deslizante do coeficiente *b* (coeficiente linear). Teste: arraste o controle deslizante de *b* por valores positivos e depois negativos.

a) O que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear *b* são positivos?

b) E o que você pode concluir em relação ao gráfico da função quando os valores para o coeficiente linear *b* são negativos?

c) E quando *b* é igual a 0, o que ocorre com o gráfico desta função?

3) Agora, vocês irão receber o <u>arquivo3.3.a</u>, pré-formatado pela professora, o qual abrirá no aplicativo *GeoGebra (Graphing Calc*) e que servirá de base para as nossas próximas experiências.

a) Observe que o controle deslizante para o coeficiente *a* está marcando *a* = 1. Além disso, na figura, estão marcados inicialmente dois ângulos:

- α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x;
- β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y.

Com base nessas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar o *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y.

Valor de a (taxa de variação)	**Função**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)**	**Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)**
1			

2			
5			
10			

O que vocês podem concluir a partir da observação dos dados organizados nesta tabela?

b) Agora, vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de 0 < a < 1.

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
1			
0,8			
0,4			
0,2			

O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

Agora, vocês irão receber o arquivo3.3.b, pré-formatado pela professora, o qual abrirá neste mesmo aplicativo e que servirá de base para as nossas próximas experiências.

c) O novo arquivo apresenta outra função e nela estão marcados os mesmos dois ângulos:

- α ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo x;
- β ângulo formado entre a reta do gráfico e o eixo y.

Com base nessas novas considerações, preencha a tabela a seguir de acordo com o valor da taxa de variação indicado. No aplicativo, você deverá marcar novamente no *Controle Deslizante,* conforme a taxa de variação indicada, para analisar as medidas dos ângulos formados entre o gráfico, o eixo x e o eixo y.

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 1			
- 2			
- 5			
- 10			

O que vocês podem concluir a partir dos dados organizados nesta tabela?

d) Agora vamos observar e preencher a tabela com outros dados, exclusivamente para valores de -1 < a < 0.

Valor de a (taxa de variação)	Função	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo x (α)	Medida do ângulo formado entre o gráfico e o eixo y (β)
- 0,2			
- 0,4			
- 0,8			

O que é possível concluir a partir dos dados desta tabela?

Atividade 4

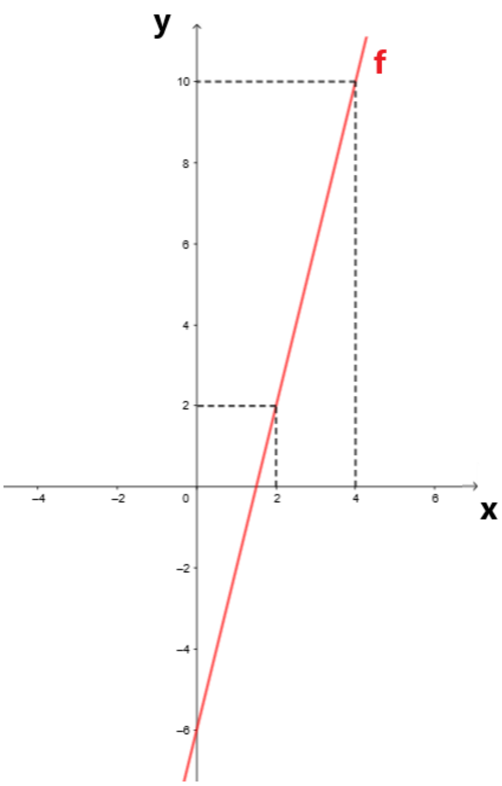
Com base nas funções *f* e *g* representadas graficamente a seguir, responda:

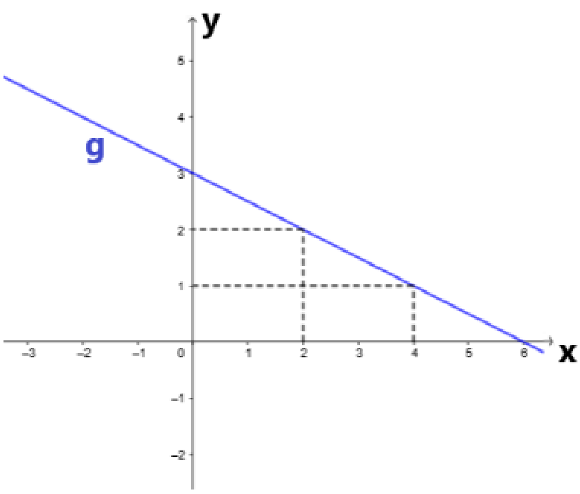
a) O que você pode concluir em relação ao sinal do coeficiente a (taxa de variação) em cada uma das funções apresentadas?

b) O que você pode concluir em relação ao coeficiente linear em cada uma das funções apresentadas?

c) Observando os ângulos que as retas dos gráficos das funções formam com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor** do coeficiente a?

d) Escreva a representação algébrica de cada uma destas funções.





Atividade 5

1) Com base na função *f* representada graficamente a seguir, responda:

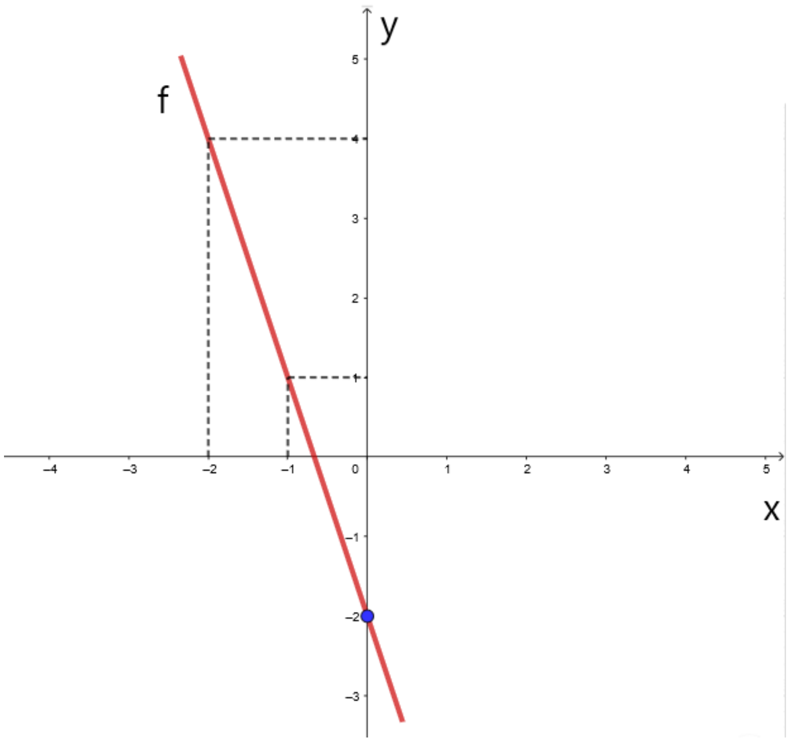
a) O que você pode concluir em relação **ao sinal** do coeficiente *a* (taxa de variação)?

b) O que você pode concluir em relação ao **coeficiente b** na função apresentada?

c) Observando os ângulos que a reta do gráfico da função forma com os eixos x e y, o que você pode concluir em relação ao **valor do coeficiente *a***?

d) Determine o valor para o coeficiente *a* e explique como obteve este resultado.

e) Escreva a representação algébrica da função apresentada graficamente.



2) Um canal de televisão por assinatura proporciona aos seus clientes uma seção de locação de filmes online a partir de 3 formas de pagamento:

Plano 1: R$ 30,00 de adesão anual, mais R$ 1,20 por filme locado.
Plano 2: R$ 15,00 de adesão anual, mais R$ 2,00 por filme locado.
Plano 3: R$ 4,50 por filme alugado, sem taxa de adesão.

a) Adriana fez a sua adesão pelo plano 1 e realizou a locação de 12 filmes ao longo do ano. Quanto gastou?

b) Augusto escolheu o plano 2 e gastou R$ 55,00 durante o ano em locação de filmes. Quantos filmes foram locados por este cliente?

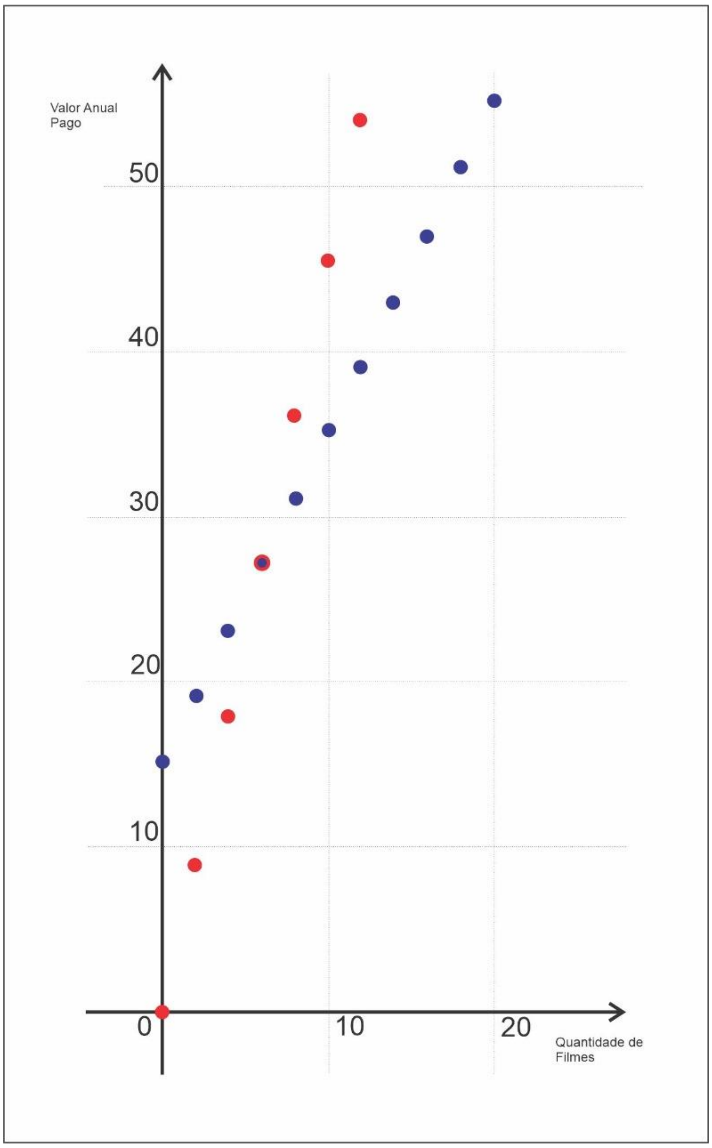
c) Considerando que Augusto fez a sua adesão pelo plano 2, descreva com suas palavras os passos para determinar o valor a ser pago na conta após a locação de uma quantidade qualquer de filmes no ano.

d) Escreva a “lei” de formação da função de cada plano de pagamento.

e) Se João aluga em média 35 filmes por ano, qual será o plano de pagamento mais econômico para o seu caso?

f) Em um plano cartesiano, construa a representação gráfica para o Plano 1 de locação de filmes.

g) Observe a seguir os planos 2 e 3 para a locação de filmes representados graficamente em cores diferentes (azul e vermelho). Identifique cada uma das retas dos gráficos de acordo com as suas respectivas representações algébricas determinadas no item (d). Justifique a escolha para cada função.

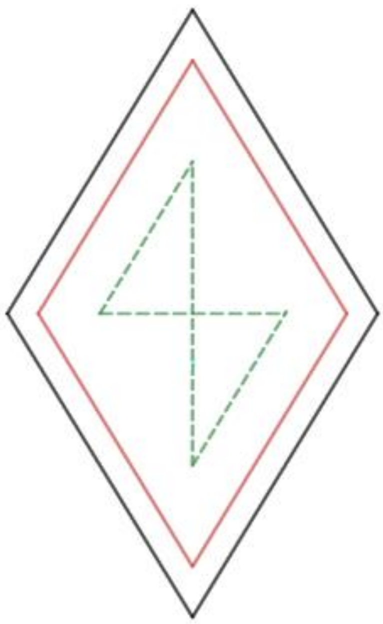


Atividade 6

a) Expliquem o que é domínio de uma função.

b) Já vimos em atividades anteriores que a função afim, graficamente, é uma reta. Agora reflitam: é possível dizer que esta reta é infinita? Justifiquem sua resposta.

c) Israel está abrindo um novo consultório médico em sua cidade e gostaria de decorar a sala de espera com um painel em aço de 1m por 1m com a logo da sua empresa entalhado, conforme figura a seguir. Para isso, irá recorrer a um tipo de impressão chamado CNC Router, que é uma máquina de corte controlada por um computador e que serve para cortar e gravar em materiais duros como madeira, alumínio, aço, vidro, plástico e espuma. Para obter a máxima precisão na impressão é necessário que o computador receba a programação das linhas para o corte, ou seja, precisamos descrever algebricamente as funções que compõem <u>todos os segmentos de reta desta logo</u>. Assim, o problema é: quais são as expressões algébricas das retas e os domínios de definição que constituem a logo requerida por Israel?



Apêndice III: Os Aplicativos *Desmos* e *GeoGebra* (*Graphing Calc*)

O *Desmos* é um aplicativo gratuito, de interface simples, desenvolvido por um grupo de professores, engenheiros e designers cuja missão é ajudar na aprendizagem matemática dos estudantes, na perspectiva de que passem menos tempo se preocupando com a tecnologia e mais tempo pensando em matemática.

Como podemos observar na Figura 33, o aplicativo permite a inserção de diferentes expressões algébricas, notas, tabelas e pastas, as quais podem ser configuradas a critério do usuário. Em sua tela, o estudante pode visualizar, simultaneamente, as expressões algébricas e os gráficos de diferentes funções matemáticas. O *Desmos* foi selecionado para esta pesquisa pela facilidade no manuseio de seus recursos e por ocupar pouca memória física do *smartphone.*

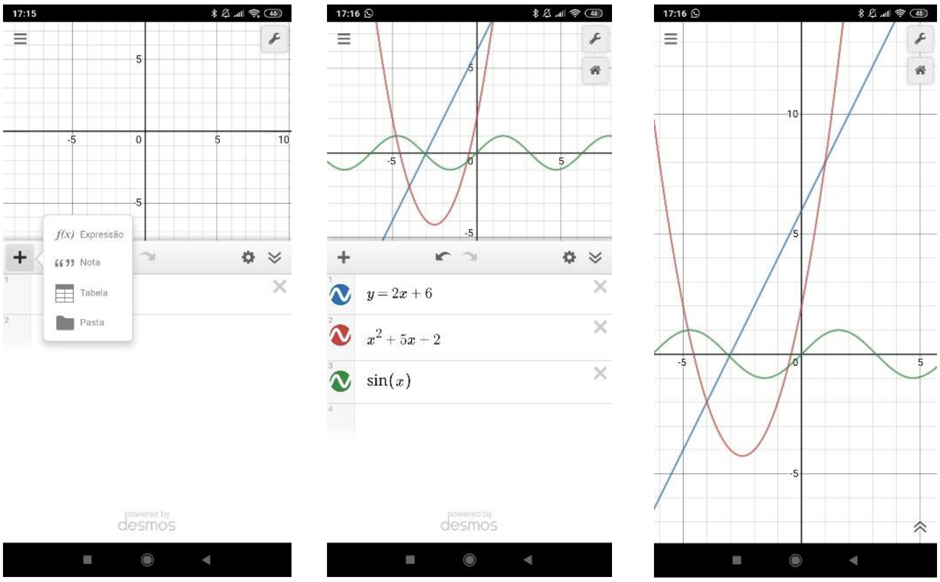


Figura 33: Telas do aplicativo *Desmos* para *smartphones*
Fonte: Autora

O aplicativo permite a inserção de diferentes expressões algébricas, notas, tabelas e pastas, as quais podem ser configuradas a critério do usuário. O *Desmos* foi selecionado para esta pesquisa pela facilidade no manuseio de seus recursos e por ocupar pouca memória física do *smartphone.*

Também, recorremos ao *GeoGebra* (*Graphing Calc* ou Calculadora Gráfica), uma extensão particular do *software GeoGebra*, cujo foco é o trabalho com gráficos de equações e funções, permitindo a associação entre suas representações algébrica e gráfica com maior detalhamento para o estudante. Este aplicativo, também gratuito, apresenta mais funcionalidades que o anterior e foi escolhido para esta pesquisa por permitir a leitura das medidas dos ângulos formados entre a reta do gráfico e os eixos x e y do plano cartesiano, ação necessária para o estudo da terceira variável visual de representação ângulos com os eixos.

A Figura 34 apresenta telas do aplicativo *GeoGebra* (*Graphing Calc*) com possibilidades para inserção de expressões algébricas e textos explicativos. Além disso, é possível observar a medida angular formada entre a reta e os eixos x e y, ação necessária mencionada no parágrafo anterior.

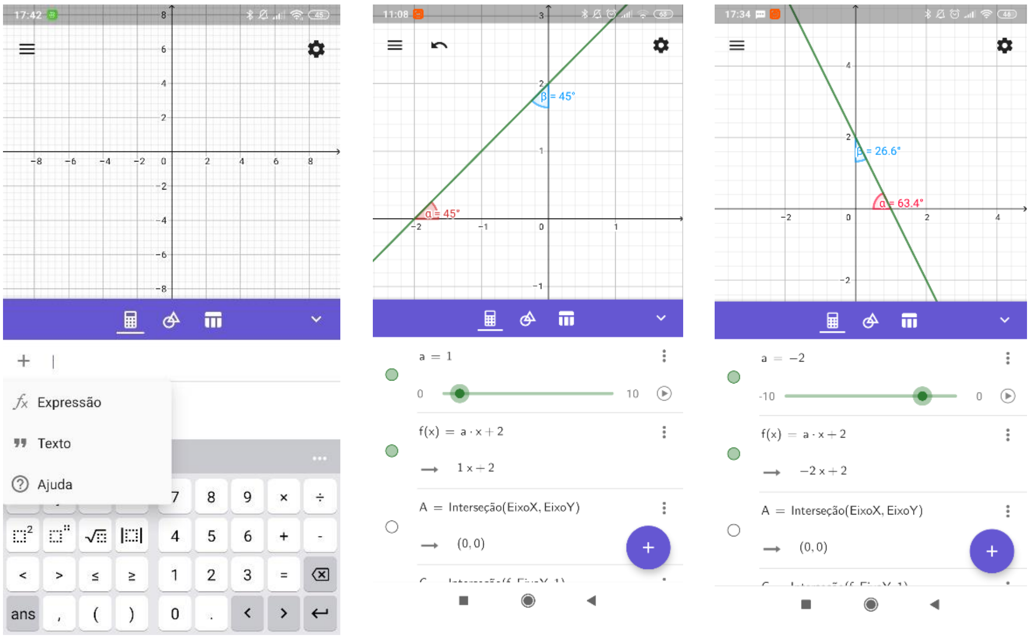


Figura 34: Telas do aplicativo *GeoGebra (Graphing Calc)* para *smartphones*
Fonte: Autora

O *GeoGebra* é um software de geometria dinâmica mais conhecido na comunidade de educadores matemáticos e seus recursos são mais avançados. Diversas pesquisas (SCANO, 2009; REIS, 2011; ALMEIDA, 2013) fazem uso deste recurso e apontam características positivas alusivas ao seu uso em sala de aula, como maior dinamicidade durante a aula, bem como favorecem a observação, experimentação e a interação, ampliando a percepção e investigação de situações, sejam elas do cotidiano dos estudantes ou não.