

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CAMPUS DE FOZ DO IGUAÇU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE SISTEMAS DINÂMICOS E ENERGÉTICOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO COMPARATIVO DE CONTROLADORES DE
ESTRUTURA VARIÁVEL POR MODOS DESLIZANTES
APLICADOS A VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS
AUTÔNOMOS**

MARIANA UZEDA CILDOZ

FOZ DO IGUAÇU
2014

Mariana Uzeda Cildo

**Estudo comparativo de Controladores de Estrutura Variável
por Modos Deslizantes Aplicados a Veículos Subaquáticos
Autônomos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Dinâmicos e Energéticos como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas Dinâmicos e Energéticos. Área de concentração: Sistemas Dinâmicos e Energéticos.

Orientador: Carlos Henrique Farias dos Santos

Foz do Iguaçu
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

C568 Cildo, Mariana Uzeda

Estudo comparativo de controladores de estrutura variável por modos deslizantes aplicados a veículos subaquáticos autônomos / Mariana Uzeda Cildo. – Foz do Iguaçu, 2014.

134 p.: tab: gráf.

Orientador: Prof. Carlos Henrique Farias dos Santos.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Dinâmicos e Energéticos - Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

1. Controle automático. 2. Veículos autônomos. 3. Controle por modo deslizante. 4. Sistemas dinâmicos. I. Título.

CDU 65-52
517.938

**Estudo comparativo de Controladores de Estrutura Variável
por Modos Deslizantes Aplicados a Veículos Subaquáticos
Autônomos**

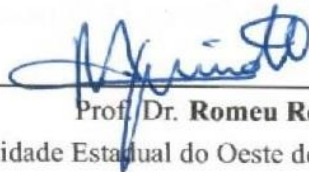
Mariana Uzeda Cildo

Esta Dissertação de Mestrado foi apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Sistemas Dinâmicos e Energéticos e aprovada pela Banca Examinadora:

Data da defesa pública: 29/08/2014.



Prof. Dr. **Carlos Henrique Farias dos Santos** - (Orientador)
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE



Prof. Dr. **Romeu Reginatto**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE



Prof. Dr. **Ubirajara Franco Moreno**
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. **Gideon Villar Leandro**
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre quatro diferentes estratégias de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) aplicadas ao posicionamento de veículos subaquáticos autônomos (VSA) em 6 GDL, sob a influência de ventos, ondas e correntes marinhas. As estratégias abordadas são o controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade de Lyapunov, o controle CEV-MD baseado no controle equivalente, o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída e o controle CEV-MD adaptativo. As comparações realizadas visam a eliminação do fenômeno do *chattering* buscando um compromisso satisfatório entre o desempenho de rastreamento e a estabilidade do sistema em laço fechado. Nesse sentido, a análise e síntese das respectivas leis de controle CEV-MD é realizada a partir da Teoria de Estabilidade de Lyapunov e do Lema de Barbalat. Assim como simulações numéricas são implementadas para a obtenção dos respectivos desempenhos de cada estratégia de controle CEV-MD apresentada.

Palavras-chave: Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD), Controle de Estrutura Variável (CEV), Controle por Modos Deslizantes (CMD), Controle Robusto, Veículos Suaquáticos Autônomos (VSA), o problema do *Chattering*, Método da Camada Limite.

Abstract

This work presents a comparative study between four different sliding mode variable structure control strategies (SMVSC) applied to autonomous underwater vehicles (AUV) positioning in 6 DOF, under the influence of wind, waves and marine currents. The addressed strategies are the conventional CEV-MD control based on Lyapunov stability, the CEV-MD control based on the equivalent control, the CEV-MD control based on the input-output stability and the CEV-MD adaptive control. The accomplished comparisons seek a satisfactory tradeoff between the tracking performance and the closed-loop system stability in light of eliminating the chattering phenomenon. In that sense, the analysis and synthesis of the respective SMVSC control laws is carried out from the Lyapunov Stability Theory and the Barbalat's Lemma. As well as numerical simulations are implemented to obtaining the respective performances of each SMVSC control strategy presented.

Keywords: Sliding Mode Variable Structure Control (SMVSC), Variable Structure Control (VSC), Sliding Mode Control (SMC), Robust Control, Autonomous Underwater Vehicles (AUV), *Chattering* problem, Boundary Layer Method.

Agradecimentos

À Deus, à minha família, amigos e colegas por terem me apoiado incondicionalmente durante esta caminhada. Ao meu orientador, professor Carlos Henrique Farias Dos Santos por ter acreditado em minha capacidade e ter me apoiado e guiado em todo momento, durante o processo de elaboração desta contribuição.

Agradeço também aos professores do PGESDE, pelos conhecimentos impartidos durante o cumprimento de matérias do mestrado. Particularmente ao professor Romeu Reginatto, pelo apoio e contribuições realizadas ao longo das etapas de conclusão deste trabalho.

E finalmente, agradeço o apoio institucional da secretaria do PGESDE, da CAPES, do PTI e do PTI C&TI pela infraestrutura e serviços de acesso ao material bibliográfico e espaços de estudo. Assim como pelo suporte financeiro fornecido para manutenção própria e para participação em eventos científicos.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Veículos Subaquáticos Autônomos	1
1.2 Teoria de Controle Moderno	3
1.2.1 Não Linearidades na Planta	4
1.2.2 Incertezas na Planta	4
1.3 Objetivos e Organização do Trabalho	5
2 Modelagem Matemática do Veículo Subaquático Autônomo	9
2.1 Modelagem Cinemática do Veículo	10
2.1.1 Matriz de Transformação de Referencial	11
2.1.2 Ângulos de Euler	12
2.2 Modelagem Dinâmica do Veículo	15
2.2.1 Dinâmica do Corpo Rígido	16
2.2.2 Hidrodinâmica	18
2.2.3 Massa Adicional Hidrodinâmica	20
2.2.4 Amortecimento Hidrodinâmico	21
2.2.5 Forças Restauradoras	22
2.3 Modelagem dos Propulsores	23

2.3.1	Dinâmica dos Propulsores	23
2.3.2	Dinâmica do Motor	24
2.4	Conclusões	25
3	Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)	27
3.1	Sistemas de Estrutura Variável (SEV)	28
3.2	Sistemas de Controle de Estrutura Variável (CEV)	29
3.3	Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD) .	30
3.3.1	Espaços Canônicos	34
3.3.2	Espaços Não-Canônicos	35
3.4	Existência e Unicidade de Solução de Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)	36
3.4.1	Regularização	36
3.4.2	Método de Filippov	37
3.5	Condições de Existência de Modos Deslizantes	38
3.6	Metodologia de Projeto de Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)	40
3.6.1	Seleção das Superfícies de Chaveamento	41
3.6.2	Seleção da Lei de Controle Descontínua	46
3.7	O problema do <i>Chattering</i>	47
3.7.1	Método da Camada Limite	48
3.8	Conclusão	49
4	Projetos de Controle de Posição CEV-MD Aplicados a Veículos Subaquáticos Autônomos (VSA)	51
4.1	Seleção das Superfícies de Chaveamento	51
4.1.1	Superfícies de Chaveamento de Tipo Integral	54
4.1.2	Superfícies de Chaveamento para o Rastreamento de Posição de um Veículo Subaquático Autônomo (VSA)	54
4.1.3	Transformação de Referencial das Superfícies de Chaveamento	56

4.2	Controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov	57
4.2.1	Prova de Estabilidade	57
4.3	Controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente	60
4.3.1	Prova de Estabilidade	61
4.4	Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída	62
4.4.1	Prova de Estabilidade	63
4.5	Controle CEV-MD Adaptativo	66
4.5.1	Prova de Estabilidade	66
4.6	Eliminação do <i>Chattering</i>	69
4.7	Conclusões	70
5	Resultados de Simulação	73
5.1	Parâmetros de Simulação	73
5.1.1	Parâmetros da Dinâmica do Veículo, Propulsores e Atuadores	74
5.1.2	Parâmetros da Matriz de Configuração dos Propulsores	75
5.1.3	Parâmetros de Controle	76
5.2	Trajетórias Desejadas	78
5.3	Resultados de Simulação: CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov	79
5.4	Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente	82
5.5	Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída	85
5.6	Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Adaptativo	88
5.7	Discussões	91
5.8	Conclusões	93
6	Conclusões e Perspectivas	95
	Referências Bibliográficas	97

A	Códigos MATLAB[®]	101
A.1	Controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov	101
A.2	Controle CEV-MD Baseado na Controle Equivalente	107
A.3	Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída	113
A.4	Controle CEV-MD Adaptativo	119
A.4.1	Lei Adaptativa	119
A.4.2	Lei de Controle	124
A.5	Modelos para Simulação em Simulink [®]	130
B	Matrizes de Regressão Φ e Φ_1	133

Lista de Figuras

2.1	Referencial Inercial e Referencial do Corpo utilizados na modelagem cinemática e dinâmica do veículo.	10
2.2	Rotações principais em torno dos três eixos do Referencial do Corpo.	13
3.1	Plano de estados de um sistema de relé de segunda ordem	32
3.2	Oscilações em uma vizinhança da superfície de chaveamento.	33
3.3	Relé com histerese.	34
3.4	Ilustração do Método de Filippov para a determinação do vetor de velocidade desejada f^0 para movimento em modo deslizante.	39
3.5	Ilustração bidimensional do domínio dos modos deslizantes.	40
3.6	Interpolação da ação de controle descontínua $u(t, x)$	48
3.7	Espessura ω , e largura ϵ da camada limite.	49
5.1	Configuração geométrica dos propulsores do veículo Biointeractive-B1. Fonte: Choi e Kondo, 2010.	75
5.2	Trajetórias desejadas utilizadas para o rastreamento de posição do veículo.	78
5.3	Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.	79
5.4	Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.	80
5.5	Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.	81
5.6	Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.	82

5.7	Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.	83
5.8	Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.	84
5.9	Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional Baseado na Estabilidade Entrada-Saída para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.	85
5.10	Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade entrada-saída para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.	86
5.11	Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade entrada-saída para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.	87
5.12	Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.	88
5.13	Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.	89
5.14	Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.	90
5.15	Erros de rastreamento do controle CEV-MD Adaptativo para a primeira, segunda e terceira trajetórias desejadas respectivamente.	91
A.1	Diagrama utilizado para simular o CEV-MD Baseado na Estabilidade de Lyapunov, CEV-MD Baseado no Controle Equivalente e CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída.	130
A.2	Diagrama de blocos utilizado para simular o CEV-MD Adaptativo.	131

Lista de Tabelas

1.1	Sensores usualmente utilizados em um VSA. Fonte: Antonelli, 2004.	2
2.1	Notações utilizadas para o movimento do veículo com 6 GDL.	9
5.1	Parâmetros de simulação para as dinâmicas do veículo, dos propulsores e dos atuadores.	74
5.2	Parâmetros de controle utilizados nas simulações numéricas.	77
5.3	Limites máximos de erros de rastreamento para cada estratégia apresentada. . .	93

Lista de Símbolos

$X_0Y_0Z_0$	Sistema de coordenadas de referência fixo ao corpo
XYZ	Sistema de coordenadas de referência inercial
$J(\eta)$	Matriz de transformação de referenciais
η	Vetor das posições e orientações atuais do veículo no referencial inercial
η_d	Vetor das posições e orientações desejadas do veículo no referencial inercial
$\dot{\eta}_d, \ddot{\eta}_d$	Velocidades e acelerações desejadas do veículo no referencial inercial
$\dot{\eta}, \dot{\eta}_R, \dot{\eta}_r$	Velocidades atuais, relativas e virtuais do veículo no referencial inercial
$\ddot{\eta}, \ddot{\eta}_R, \ddot{\eta}_r$	Acelerações atuais, relativas e virtuais do veículo no referencial inercial
ν, ν_R, ν_r	Velocidades atuais, relativas e virtuais do veículo no referencial do corpo
$\dot{\nu}, \dot{\nu}_R, \dot{\nu}_r$	Acelerações atuais, relativas e virtuais do veículo no referencial do corpo
$\dot{\eta}_c, \ddot{\eta}_c$	Velocidades e acelerações das correntes marinhas no referencial inercial
$\nu_c, \dot{\nu}_c$	Velocidades e acelerações das correntes marinhas no referencial do corpo
τ	Vetor de forças e momentos resultantes no veículo
τ_H	Vetor de forças e momentos resultantes no veículo na direção horizontal
τ_V	Vetor de forças e momentos resultantes no veículo na direção vertical
τ_d	Vetor de distúrbios de ondas e ventos
τ_{RB}	Vetor de forças e momentos resultantes do corpo rígido
τ_H	Vetor de forças e momentos hidrodinâmicos
τ_R	Vetor de forças e momentos de radiação induzida
τ_D	Vetor de forças e momentos de amortecimentos complementares
τ_m	Vetor de torques dos motores
τ_r	Vetor de torques resistentes dos motores
τ_{eq}	Lei de controle equivalente
τ_{eq}	Lei de controle equivalente
τ_{sI}, τ_{rob}	Termos de controle robusto
τ_{dmax}	Função conhecida e positiva que limita o distúrbio τ_d
M	Matriz de inércia do veículo no referencial do corpo
M_η	Matriz de inércia do veículo no referencial inercial
M_{RB}	Matriz de inércia do corpo rígido
M_A	Matriz de inércia da massa adicional
C	Matriz de Coriolis e centrípetas do veículo no referencial do corpo

C_η	Matriz de Coriolis e centrípetas do veículo no referencial inercial
C_{RB}	Matriz de Coriolis e centrípetas do corpo rígido
C_A	Matriz de Coriolis e centrípetas da massa adicional
D	Matriz de amortecimentos hidrodinâmicos do veículo no referencial do corpo
D_η	Matriz de amortecimentos hidrodinâmicos do veículo no referencial inercial
D_P	Matriz de amortecimento potencial da radiação induzida
D_S	Matriz de amortecimento do atrito superficial
D_W	Matriz de amortecimento das ondas da correnteza
D_M	Matriz de amortecimento do desprendimento de vórtices
g	Vetor de forças restauradoras do veículo no referencial do corpo
g_η	Vetor de forças restauradoras do veículo no referencial inercial
I_0	Tensor de inércia do veículo
S	Operador de produto cruzado
m, ∇	Massa e volume do veículo
ρ	Densidade do fluido
g	Aceleração da gravidade
P, E	Módulos do peso e empuxo do veículo
F_P^E, F_E^E	Peso e empuxo do veículo no referencial inercial
F_P, F_E	Peso e empuxo do veículo no referencial do corpo
M_P, M_E	Momentos do peso e empuxo do veículo no referencial do corpo
r_G, r_B	Centro de gravidade e centro de massa do veículo
T, Q	Empuxo e torque produzidos por cada propulsor
d	Diâmetro dos hélices
v_w	Velocidade de fluxo axial dos hélices
n, \dot{n}	Velocidade e aceleração de rotação dos hélices
σ	Ângulo de avanço
C_T, C_Q	Coefficientes de empuxo e torque dos propulsores
$T_{ n n}, Q_{ n n}$	Coefficientes de empuxo e torque dos propulsores com fluxo axial desprezado
L_a, i_a, V_a	Indutância de armadura, corrente de armadura e tensão do motor
J_p	Soma dos momentos de inércia do motor e do hélice
K_m	Constante eletromagnética do motor
T_m, Q	Torque e torque resistente do motor
P	Matriz dos momentos de inércia dos propulsores
x	Vetor de variáveis de estado
u, B	Vetor e matriz de entrada de controle
n, m	Ordem do sistema e ordem da entrada de controle
s	Função escalar dos estados
S	Variedade deslizante definida a partir de s

B	Camada limite
ω, ϵ	Espessura e largura da camada limite
λ	Largura de banda de controle
V	Função da Lyapunov
s_I, s_I	Funções escalares dos estados nos referenciais inercial e do corpo
S_I	Varietade deslizante definida a partir de s_I
\hat{A}	Matriz de estimativas paramétricas da matriz A
\tilde{A}	Matriz de erros paramétricos da matriz A
\hat{a}	Vetor estimativas paramétricas do vetor a
\tilde{a}	Vetor de erros paramétricos do vetor a
F	Função positiva que limita as incertezas paramétricas
Φ	Matriz de Regressão dependente de $\dot{\nu}_r, \nu_r$ e ν_R
Φ_1	Matriz de Regressão dependente de $\dot{\nu}_c, \nu_c$ e ν_R
Γ	Matriz de peso
Θ	Vetor de parâmetros desconhecidos
K	Matriz de ganho de controle
$sgn(\cdot)$	Função sinal
$sat(\cdot)$	Função de saturação
M_{min}, M_{max}	Limitantes inferior e superior da matriz de inércia M
K_{max}	Limite superior da matriz de ganho de controle K
B_{HV}	Matriz de configuração dos propulsores
B_H	Matriz de configuração dos propulsores horizontais
B_V	Matriz de configuração dos propulsores verticais
W_H	Matriz de ponderação dos propulsores horizontais
$O_{m \times n}$	Matriz nula de ordem m por n
T_H	Vetor de forças de propulsão dos propulsores horizontais
T_V	Vetor de forças de propulsão dos propulsores verticais
F_x	Força resultante na direção de avanço do veículo
F_y	Força resultante na direção de deriva do veículo
M_z	Momento da força resultante na direção de afundamento do veículo
F_z	Força resultante na direção de afundamento do veículo
M_y	Momento da força resultante na direção de deriva do veículo
a	Distância horizontal do centro de massa até o eixo dos propulsores 1 e 2
b	Distância horizontal do centro de massa até o eixo dos propulsores 3 e 4
c	Distância horizontal do centro de massa até o eixo dos propulsores 5 e 5
$\langle a, b \rangle$	Produto interno entre os vetores a e b

Capítulo 1

Introdução

1.1 Veículos Subaquáticos Autônomos

Leonardo Da Vinci é autor de um dos primeiros esforços para projetar um veículo subaquático segundo consta no *Codice Atlântico*, escrito entre 1480 e 1518. Nos últimos anos, o interesse na construção de robôs subaquáticos para fins de pesquisa, indústria e segurança está em contínuo crescimento. Robôs subaquáticos podem ser usados para realizar missões como inspeções de gasodutos no fundo do mar, manutenção de cabos e coleta/soltura de materiais biológicos para pesquisa. Atualmente, a maioria das operações listadas acima são realizadas com a utilização de veículos subaquáticos tripulados ou veículos subaquáticos operados remotamente. Porém devido ao seu elevado custo e risco, o alvo das pesquisas é fazer progressivamente possível realizar tais missões de uma forma completamente autônoma.

Enviar um veículo autônomo a um ambiente desconhecido e imprevisível com comunicação *online* limitada requer de alguma inteligência a bordo para reagir a situações inesperadas de forma factível. O sistema de sensoriamento do veículo deve lidar com ruídos e ambientes não-estruturados¹, além de que tecnologias como o GPS (*Global Positioning System*) não podem ser utilizadas devido à impossibilidade de transmissão de frequências eletromagnéticas específicas do GPS embaixo da água (Antonelli, 2004). Atualmente existe ao redor de 100 protótipos de veículos subaquáticos autônomos em laboratórios por todo o mundo, entre os quais estão:

- O *Biointeractive-BI* desenvolvido no laboratório Kondo da Universidade de Tóquio (<http://www.ocean.e.kaiyodai.ac.jp>).
- O *r2D4* desenvolvido pelo laboratório URA da Universidade de Tóquio (<http://underwater.iis.u-tokyo.ac.jp>).
- O *Odissey IId* pertencente ao Laboratório AUV do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (<http://auvlab.mit.edu>).

¹Ambientes não-estruturados são aqueles em que as posições e deslocamentos de todos ou parte dos objetos não são conhecidos, por tanto não podem ser modelados por equações, ou a sua modelagem apresenta esforço computacional (Junior, 1999).

- O *ODIN* projetado pelo Laboratório de Sistemas Autônomos da Universidade de Hawaii (<http://www.eng.hawaii.edu/asl/>).

Entre as empresas que atualmente comercializam veículos subaquáticos autônomos estão:

- Bluefin Corporations (<http://www.bluefinrobotics.com>).
- C&C Technologies (<http://www.cctechnol.com/>).
- ISE Research (<http://www.ise.bc.ca/>)
- Atlas Maridan (www.maridan.dk).

Devido a que os veículos subaquáticos autônomos (VSA) precisam ser operados em ambientes arriscados e não-estruturados, é comum o uso redundante de sistemas multi-sensores². Entre os sensores utilizados estão:

Sensores	Variáveis medidas
Sistemas inerciais	Acelerações lineares e velocidades angulares
Medidor de pressão	Profundidade do veículo
Sonar frontal	Distância com relação a obstáculos
Sonar vertical	Distância até o fundo do mar
Sonar de velocidade no solo	Velocidade relativa do veículo/fundo
Medidor da corrente	Velocidade relativa do veículo/corrente
Bússola	Orientação
Base acústica	Posição absoluta numa área conhecida
Sistema de visão	Posição relativa/velocidade

Tabela 1.1: Sensores usualmente utilizados em um VSA. Fonte: Antonelli, 2004.

Os VSA são usualmente classificados em dois tipos: VSA com formato de torpedo e VSA manipuladores. Os primeiros são desenhados para atravessar longas distâncias, possuem menos propulsores do que graus de liberdade requeridos e consomem menos energia por terem poucos propulsores. Enquanto que os VSA manipuladores apresentam vantagens no que se refere à manobrabilidade, possuem igual ou maior número de propulsores do que graus de liberdade requeridos, e devido a seus vários propulsores têm maior consumo de energia que os VSA com formato de torpedo. Os VSA manipuladores são amplamente utilizados para tarefas de inspeção que requerem de movimentos precisos, como inspeções de instalações portuárias e inspeção de cascos de diversos navios e plataformas *offshore* por exemplo.

Veículos subaquáticos são comumente controlados por propulsores e superfícies de controle³. Porém, desde que superfícies de controle dependem da velocidade do veículo, as mesmas são nulas em VSA manipuladores, devido a que estes atuam em baixa velocidade procurando

²O filtro de Kalman é técnica matemática comumente utilizada para a obtenção de estimativas mais confiáveis.

³São partes fixas ou móveis presas no corpo do veículo, que têm a função de controlar a sua navegação.

um efetivo e robusto controle de posição. Além disso, considerando que ditos veículos são concebidos para tarefas de manipulação, devem poder atuar em todos os graus de liberdade e possuir pelo menos seis propulsores. O que ocasiona um forte acoplamento de movimentos.

A relação entre as forças que agem no veículo e as entradas de controle dos propulsores é altamente não linear, devido a que depende de algumas variáveis estruturais como a densidade da água, o fluxo volumétrico entre a entrada e a saída de água dos propulsores, o diâmetro dos propulsores e o comprimento e a área da seção transversal do túnel no caso de propulsores em túnel. E os estados da equação dinâmica dos propulsores são dados pela revolução dos propulsores, a velocidade do fluido em direção aos hélices e a entrada de controle. Dessa forma, a grosso modo falando, os propulsores são a principal causa de ciclos limite em posicionamento de veículos e restrições na largura de banda de controle. Assim, a dinâmica dos veículos subaquáticos autônomos é altamente não linear, acoplada e possui incertezas relativas tanto a distúrbios externos impostos pelo ambiente marinho não-estruturado quanto a ruídos advindos dos sensores e atuadores (Luque, 2007). Entre as diversas técnicas de controle de movimento aplicadas a veículos subaquáticos autônomos (VSA), a literatura apresenta controladores por redes neurais (Van de Ven et al., 2005), controladores neuro-difusos (Kim e Yuh, 2001), adaptativos (Antonelli et al., 2001) e controladores de estrutura variável por modos deslizantes (Hong et al., 2010), (Cristi et al., 1990), (Healey e Lienard, 1993) e (Akakaya et al., 2009) entre outros.

Modelos lineares falham na previsão de alguns fenômenos complexos, intimamente ligados a uma natureza não linear, que surgem no comportamento da maioria dos sistemas físicos. Quando na segunda metade do século XX, ditos fenômenos se revelaram como manifestações determinísticas, a Engenharia de Controle se deparou com novos desafios a serem abordados pela Teoria de controle não linear. Ainda, seja por modelagens matemáticas simplificadas ou pela existência de dinâmicas desconhecidas, grande parte dos sistemas dinâmicos possuem incertezas nas suas equações diferenciais. Esta situação já apresenta importantes resultados na literatura no contexto de controle de sistemas lineares incertos, porém ainda existem muitos desafios a serem alcançados quando se trata de controle de sistemas não lineares e incertos. Dessa forma, a Teoria de controle moderno estabelece como seu principal tópico de estudo o controle de plantas não lineares e incertas (Oliveira, 2006).

1.2 Teoria de Controle Moderno

O controle de sistemas dinâmicos incertos⁴ é um dos principais tópicos de estudo da teoria de controle moderno, cujas principais estratégias são o controle adaptativo e o controle robusto (Oliveira, 2006). No controle adaptativo, estimativas dos parâmetros incertos da planta ou do controlador são obtidas em tempo real a partir das variáveis mensuráveis do sistema a fim de calcular o sinal de controle necessário para atingir a dinâmica desejada. Contrariamente a isto,

⁴Sistemas dinâmicos incertos são aqueles que apresentam incertezas paramétricas ou dinâmicas não modeladas.

os métodos de controle robusto são de tipo estático e projetados assumindo que somente limites dessas variações paramétricas são conhecidos. Dessa forma, enquanto que no controle adaptativo a lei de controle varia juntamente com as variações paramétricas da planta, no controle robusto, a lei de controle se mantém estática e considera somente limites conhecidos dessas variações.

Uma das principais técnicas de controle robusto é o controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD), o qual possui uma lei de controle não linear de tipo chaveada que produz alterações no comportamento do sistema de forma a gerar um novo tipo de movimento invariante no tempo de baixa ordem denominado *modo deslizante*, o qual é insensível a não linearidades e incertezas da planta assim como a distúrbios externos e dinâmicas acopladas. Assim, esta técnica estabelece conexões entre a Teoria de sistemas de estrutura variável e a Teoria do controle determinístico de sistemas incertos.

1.2.1 Não Linearidades na Planta

Quando técnicas de controle linear são utilizadas no projeto de controle de um sistema dinâmico não linear, informações valiosas a respeito da dinâmica do sistema são descartadas quando os estados do sistema não permanecem perto do estado a respeito do qual o sistema foi linearizado. Por exemplo, no controle de posição de veículos omnidirecionais (atuam em todas as direções), como os veículos subaquáticos autônomos (VSA), técnicas lineares de controle de posição produzem um desempenho de rastreamento pouco satisfatório devido a este tipo de veículos não possuir pontos óbvios de operação (ou posições nominais de operação) a respeito dos quais o modelo possa ser linearizado. Além disso, embora que um grande número de controladores linearizados em relação a diferentes combinações de posições ao longo de todos os eixos fosse desenvolvido, a estabilidade do sistema ainda seria questionável (Yoerger et al., 1985). Assim, o controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) é uma metodologia satisfatória para o controle de posição de veículos omnidirecionais pois permite ao projetista utilizar um modelo não linear da dinâmica do veículo ao invés de vários modelos linearizados em torno de cada posição de operação, e assim produzir uma única lei de controle para qualquer posição, ao invés de várias leis de controle distintas para cada posição.

1.2.2 Incertezas na Planta

Existem dois tipos de imprecisões na modelagem de um sistema dinâmico: As incertezas paramétricas do modelo ou incertezas estruturadas e as dinâmicas não modeladas ou incertezas não estruturadas, que decorrem de representações simplificadas do sistema e podem ou não influenciar na ordem do mesmo (Slotine e Li, 1991). Tomando novamente como exemplo o controle de movimento de um veículo subaquático autônomo (VSA), a equação dinâmica que expressa o movimento do veículo possui ao redor de duzentos termos não lineares que não

precisam ser considerados para obter um bom desempenho de rastreamento (Yoerger et al., 1985). Nesse sentido, o controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) é uma metodologia que permite uma simplificação sistemática e racional do modelo do veículo sem interferir na estabilidade do sistema, sempre que certas condições sejam satisfeitas, explicitando analiticamente as relações existentes entre essas simplificações e o desempenho do sistema.

1.3 Objetivos e Organização do Trabalho

Embora os sistemas de controle CEV-MD permitam lidar facilmente com incertezas e dinâmicas não lineares e acopladas da planta, estes apresentam dificuldades de implementação quando aplicados em plantas contínuas. Este fenômeno é conhecido como *chattering* e corresponde a oscilações de alta frequência da trajetória do sistema devido à dificuldade do atuador acompanhar o sinal de controle que possui um chaveamento dos sinais realimentados a uma frequência infinita. O fenômeno do *chattering* é discutido com maior detalhe no Capítulo 3. Entre os métodos de redução e eliminação do fenômeno do *chattering* citados por Utkin et al. (1999) estão: O método baseado na camada limite, o método baseado no observador, a forma regular, a rejeição do distúrbio, o método do ganho dependente do estado e o método do ganho dependente do controle equivalente.

Entre as diversas abordagens existentes na literatura relativas à técnica de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) aplicadas a veículos subaquáticos autônomos manipuladores podemos citar os trabalhos de Yoerger e Slotine (1985) e Yoerger et al. (1985), no qual são desenvolvidas leis de controle CEV-MD capazes de lidar com incertezas paramétricas e não linearidades do sistema eliminando o *chattering* a partir da substituição do sinal de chaveamento descontínuo por um sinal contínuo numa pequena vizinhança da superfície de chaveamento. Este método por eles introduzido é denominado Método da Camada Limite.

Outras aplicações podem ser encontradas em Song e Smith (2000), Guo et al. (2003) e Chatchanayuenyong e Parnichkun (2006) em que algoritmos de controle CEV-MD nebuloso são aplicados ao controle de posição de veículos subaquáticos autônomos, com resultados experimentais nos dois últimos casos. Assim como em Cristi et al. (1990) em que um controlador CEV-MD adaptativo é aplicado ao controle de posição de um VSA com três graus de liberdade, em Shi (2006), o qual introduz um método para a eliminação do erro de regime permanente em controladores CEV-MD aplicados a VSA, e em Zhou et al. (2011) no qual a superfície de chaveamento é construída a partir dos autovalores de uma matriz de Hurwitz deduzida a partir da matriz de realimentação de estados.

Já para VSA com formato de torpedo, existem publicações como as de Salgado-Jiménez et al. (2004) na qual é desenvolvido um algoritmo de controle robusto para VSA baseado em modos deslizantes de alta ordem, a de Joe et al. (2014) na qual é apresentado um controlador por modos deslizantes de segunda ordem, a de Rhif (2014) que apresenta um controlador por

modos deslizantes multimodos com uma e várias superfícies de chaveamento, e a de Lakhekar e Waghmare (2015) que desenvolve um controlador por modos deslizantes difuso, entre outros.

Note que os controladores CEV-MD também podem ser aplicados em sistemas de difícil solução para a teoria tradicional de controle como é o caso dos observadores de estados, estimação de parâmetros não lineares e conversores estáticos via superfícies não lineares ou via PWM, entre outros (Takahashi, 1991). A partir dos resultados obtidos em Yoerger et al. (1985) e Yoerger e Slotine (1985) e das abordagens apresentadas em Liu e Wang (2012) e Fossen (2012), este trabalho estipula como principal objetivo o estudo comparativo de quatro estratégias de controle de posição CEV-MD livres de *chattering* aplicadas a veículos subaquáticos autônomos manipuladores. As comparações são feitas em termos de desempenho de rastreamento e estabilidade do sistema em laço fechado. Para este objetivo, estabelecem-se as seguintes metas a serem alcançadas ao longo do trabalho:

- A inclusão das correntes marinhas e distúrbios de ondas e ventos na equação dinâmica do veículo. Nesse sentido, o presente trabalho faz uso da abordagem proposta em (Fossen, 2012).
- A revisão dos principais conceitos que envolvem a teoria e a metodologia dos sistemas de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD).
- A análise e síntese de quatro leis de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) aplicadas ao controle de posição de veículos subaquáticos autônomos (VSA), comprovando analiticamente a estabilidade e convergência dos sistemas em laço fechado através da teoria de estabilidade de Lyapunov e o lema de Barbalat.
- A eliminação do fenômeno do *chattering*. Para o qual utiliza-se o método da camada limite introduzido em (Yoerger e Slotine, 1985).
- A implementação de simulações numéricas de todas as estratégias CEV-MD desenvolvidas utilizando o pacote Simulink[®] integrado ao software Matlab[®].
- Discussões em relação à robustez e desempenho de rastreamento do VSA a partir dos resultados de simulação obtidos, considerando os parâmetros de controle utilizados para cada estratégia, os graus de incerteza e os tipos de distúrbios do sistema em laço fechado.

A partir dos objetivos estabelecidos acima, o presente trabalho está organizado da seguinte forma: Inicialmente, o Capítulo 2 apresenta a modelagem matemática do movimento do veículo e dos propulsores. A modelagem do movimento do veículo é feita em termos da cinemática e a dinâmica do veículo. Enquanto que a modelagem dos propulsores considera a dinâmica dos propulsores e a dinâmica dos atuadores. Logo, o Capítulo 3, introduz a teoria de controle de sistemas de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD). Para o qual são abordadas as definições de sistemas de estrutura variável (SEV) e sistemas de controle de estrutura variável (CEV), desde que os modos deslizantes (MD) se apresentam como um tipo de solução de

sistemas CEV. Nesse mesmo capítulo são abordadas as condições de existência de modos deslizantes em sistemas CEV, utilizadas na metodologia de projetos de controle CEV-MD. Assim como uma breve revisão do problema do *chattering* e do método da camada limite.

O Capítulo 4 apresenta a análise e síntese das respectivas leis de controle CEV-MD aplicadas a veículos subaquáticos autônomos (VSA). As estratégias desenvolvidas são respectivamente o controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade de Lyapunov, o controle CEV-MD baseado no controle equivalente, o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída e o controle CEV-MD adaptativo. No Capítulo 5, os resultados de simulação são exibidos e as correspondentes discussões a respeito são realizadas. E finalmente o Capítulo 6, apresenta as respectivas conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Modelagem Matemática do Veículo Subaquático Autônomo

Neste capítulo são introduzidas a modelagem mecânica do veículo e a modelagem mecânica e elétrica dos propulsores. Os modelos utilizados para expressar a cinemática e a dinâmica do veículo foram extraídos de Fossen (1994) e Fossen (2012) enquanto que o modelo empregado para descrever a dinâmica mecânica e elétrica dos propulsores foi extraído de Tavares (2003). Desde que são necessárias seis coordenadas independentes para determinar a posição e orientação de um corpo rígido, a modelagem matemática do movimento do veículo desenvolvida neste capítulo considera seis graus de liberdade (6 GDL) no sistema. Assim, enquanto as primeiras três coordenadas e suas respectivas derivadas no tempo descrevem a posição e o movimento translacional do veículo ao longo dos eixos x , y e z , as três últimas coordenadas descrevem a orientação e o movimento rotacional do veículo em torno aos eixos x , y e z respectivamente.

A tabela 2.1 a seguir apresenta as notações utilizadas para as respectivas posições, orientações, velocidades, forças e momentos dos movimentos do VSA em cada grau de liberdade.

Graus de Liberdade (GDL)		Forças e momentos	Vel. Lineares e angulares	Posições e orientações
1	Movimento em x - Avanço	X	u	x
2	Movimento em y - Deriva	Y	v	y
3	Movimento em z - Afundamento	Z	w	z
4	Rotação em x - Rolamento	L	p	ϕ
5	Rotação em y - Arfagem	M	q	θ
6	Rotação em z - Guinada	N	r	ψ

Tabela 2.1: Notações utilizadas para o movimento do veículo com 6 GDL.

Assim, os movimentos do VSA são correspondentemente o avanço, a deriva, o afundamento, o rolamento, a arfagem e a guinada. Neste capítulo, inicialmente a seção 2.1 apresenta a modelagem cinemática do veículo. Para a qual são utilizados dois conceitos importantes, estes são a Matriz de Rotação e os Ângulos de Euler introduzidos respectivamente nas subseções 2.1.1 e 2.1.2. Logo, a seção 2.2 introduz o modelo dinâmico do veículo, o qual considera as

forças hidrostáticas do veículo como corpo rígido, as forças hidrodinâmicas do veículo, as forças relativas a distúrbios ambientais e as forças de propulsão. E finalmente as seções 2.3 e 2.4 introduzem a modelagem dos propulsores e as conclusões do capítulo respectivamente. Um aspecto importante neste capítulo é referente à inclusão dos efeitos de correntes marinhas na equação dinâmica do veículo.

2.1 Modelagem Cinemática do Veículo

A análise do comportamento cinemático do veículo com 6 GDL é feita considerando dois sistemas de coordenadas de referência: Um fixo a um ponto da terra com coordenadas XYZ , denominado Referencial Inercial; outro móvel com origem no centro de gravidade do veículo e coordenadas $X_0Y_0Z_0$ denominado Referencial do Corpo. No referencial do corpo, os eixos X_0 , Y_0 e Z_0 coincidem com os principais eixos de inércia do veículo, como mostra a Figura 2.1

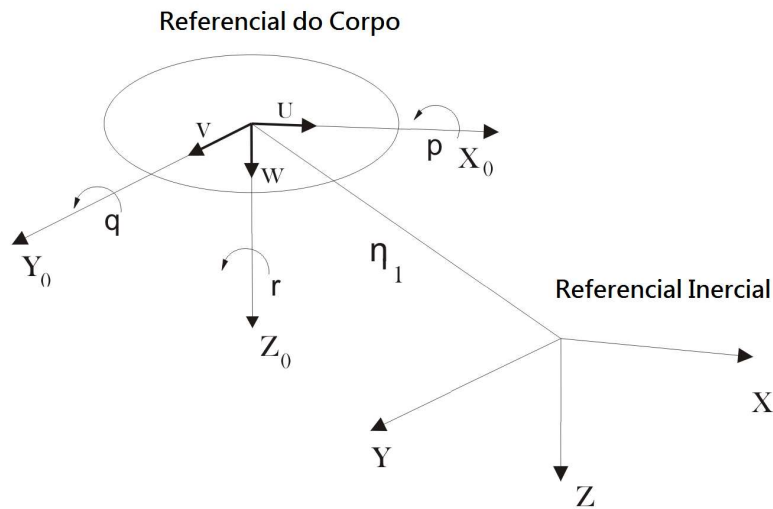


Figura 2.1: Referencial Inercial e Referencial do Corpo utilizados na modelagem cinemática e dinâmica do veículo.

Dessa forma, as posições e orientações do veículo são descritas em relação ao referencial inercial enquanto que as velocidades lineares e angulares do veículo são expressas no sistema de coordenadas do corpo. Da Tabela 2.1, utilizando a notação SNAME (1950), o movimento do veículo com 6 GDL pode ser definido pelos seguintes vetores,

$$\begin{aligned}
 \eta &= [\eta_1, \eta_2]^T, & \eta_1 &= [x, y, z]^T, & \eta_2 &= [\phi, \theta, \psi]^T \\
 \nu &= [\nu_1, \nu_2]^T, & \nu_1 &= [u, v, w]^T, & \nu_2 &= [p, q, r]^T \\
 \tau &= [\tau_1, \tau_2]^T, & \tau_1 &= [X, Y, Z]^T, & \tau_2 &= [L, M, N]^T
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ é o vetor de posições e orientações no referencial inercial, $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$ é o vetor de velocidades lineares e angulares no referencial do corpo e $\tau = [\tau_1, \tau_2]^T$ é o vetor de forças e momentos resultantes que atuam no veículo no referencial do corpo. Logo, a partir dos vetores em (2.1), a modelagem cinemática do veículo pode ser expressa por

$$\dot{\eta} = J(\eta)\nu \quad (2.2)$$

onde $J(\eta)$ é uma matriz de transformação de referenciais que produz a transformação de coordenadas do vetor de velocidade ν no referencial do corpo, para o referencial inercial. A qual é composta respectivamente por,

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

em que $J_1(\eta_2)$ e $J_2(\eta_2)$ são matrizes de transformação de referencial das velocidades lineares e angulares, ν_1 e ν_2 no referencial do corpo respectivamente, para o referencial inercial. Nas seguintes subseções serão encontradas as correspondentes expressões para as matrizes $J_1(\eta_2)$ e $J_2(\eta_2)$ utilizando a matriz de rotação de Euler e os ângulos de Euler.

2.1.1 Matriz de Transformação de Referencial

O percurso realizado pelo veículo no referencial inercial pode ser obtido a partir de uma transformação de referenciais do vetor de velocidade, dado no referencial do corpo. Esta transformação de coordenadas é possível a partir do Teorema 2.1 e da Definição 1 (Fossen, 1994).

Definição 1 (Rotação Simples). *O movimento de um corpo rígido ou sistema de coordenadas A em relação a um corpo rígido ou sistema de coordenadas A' é simplesmente denominado “rotação de A em A' ”, se existe uma linha L denominada eixo de rotação, cuja orientação em relação a A e A' mantém-se inalterada ao longo de todo o movimento.*

Teorema 2.1 (Teorema de Euler sobre Rotações). *Cada mudança na orientação relativa de dois corpos rígidos ou sistemas de coordenadas A e A' pode ser produzida por meio de uma rotação simples de A' em A .*

Dessa forma, dados os referenciais A e A' e o vetor a descrito no referencial A . A transformação de referenciais permite que o vetor a possa ser descrito no referencial A' a partir de uma rotação simples, produzindo-se o seguinte vetor

$$b = \cos \varphi a + (1 - \cos \varphi)\xi\xi^T a - \sin \varphi \xi \times a \quad (2.4)$$

onde $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ é um vetor unitário paralelo ao eixo de rotação L sobre o qual A' realiza a rotação, e φ é o ângulo de rotação do sistema de coordenadas A' . Logo, a sequência de rotações de a para b , dada em 2.4, pode ser reescrita por

$$b = Ca \quad (2.5)$$

onde C pode ser interpretada como uma *matriz de rotação*, a qual é um operador linear que toma um vetor qualquer a e o rotaciona para a obtenção de um novo vetor Ca . Assim, de 2.4, podemos obter a seguinte expressão para C ,

$$C = \cos \varphi I + (1 - \cos \varphi) \xi \xi^T - \sin \varphi S(\xi) \quad (2.6)$$

onde I é uma matriz identidade de terceira ordem e $S(\xi)$ é uma matriz antissimétrica definida talque $S(\xi)a \triangleq \xi \times a$, isto é, $S(\xi)$ é definida como sendo

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Portanto a matriz de rotação $C \in SO(3)$ é interpretada como uma matriz de transformação de coordenadas, a qual produz a orientação das coordenadas transformadas com respeito a um sistema de coordenadas inercial. A seguir, a seguinte seção introduz o método dos ângulos de Euler.

2.1.2 Ângulos de Euler

Para especificar a orientação de um vetor no referencial do corpo em relação ao referencial inercial utilizam-se três ângulos independentes denominados ângulos de Euler. Logo, a partir de 2.6, considerando os eixos de rotação $\xi = [1, 0, 0]^T$, $\xi = [0, 1, 0]^T$ e $\xi = [0, 0, 1]^T$. E os ângulos de rotação ϕ , θ e ψ respectivamente, obtêm-se as **matrizes de rotações principais**,

$$C_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix}, C_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, C_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $s = \text{seno}$, $c = \text{cosseno}$ e a notação $C_{i,\varpi}$ denota a rotação de um ângulo ϖ em torno do eixo i . As matrizes de rotações em (2.8) são denominadas principais devido a que as correspondentes rotações são realizadas em torno dos eixos principais de inércia do veículo. Dessa forma, uma vez que o referencial inercial e o referencial do corpo possuam a mesma origem,

os sistemas podem rotacionar em torno dos seus respectivos eixos coordenados utilizando as matrizes em (2.8) até conseguir uma transformação de referenciais. É importante também notar que as matrizes de rotações principais (2.8) satisfazem a seguinte propriedade:

Propriedade 2.1 (Matriz de Transformação de Coordenadas). *Uma matriz de transformação de coordenadas $C \in SO(3)$ satisfaz:*

$$CC^T = C^T C = I; \quad \det C = 1 \quad (2.9)$$

que implica que C é ortogonal. Como uma consequência disto, a inversa da matriz de transformação de coordenadas C , pode ser dada por $C^{-1} = C^T$.

Transformação da Velocidade Linear

É comum descrever $J_1(\eta_2)$ através de três rotações. Note que a ordem das rotações realizada não é arbitrária. Em aplicações de direção e controle é comum usar a convenção $x - y - z$ especificada em termos dos ângulos de Euler para as rotações. Considerando o sistema de coordenadas $X_3Y_3Z_3$, obtido a partir da translação em paralelo da origem do sistema de coordenadas inercial XYZ até a origem do sistema de coordenadas do corpo, conforme mostra a Figura 2.2. A primeira rotação ocorre em ψ graus em torno do eixo Z_3 , produzindo o sistema de coordenadas $X_2Y_2Z_2$. A segunda rotação é de θ graus em torno do eixo Y_2 , gerando o sistema de coordenadas $X_1Y_1Z_1$. E a última rotação é de ϕ graus, em torno do eixo X_1 , produzindo o sistema $X_0Y_0Z_0$.

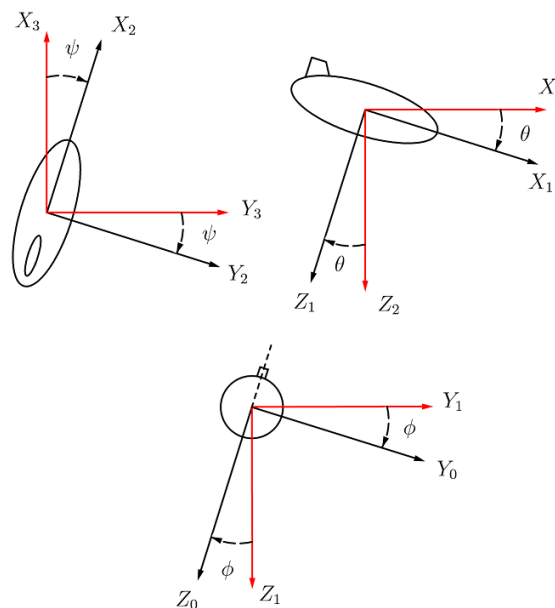


Figura 2.2: Rotações principais em torno dos três eixos do Referencial do Corpo.

Logo, a sequência de rotações entre os sistemas de coordenadas inercial e do corpo, utili-

zados na modelagem cinemática e dinâmica do veículo respectivamente, pode ser descrita pela matriz

$$J_1(\eta_2) = \mathbf{C}_{x,\phi}^T \mathbf{C}_{y,\theta}^T \mathbf{C}_{z,\psi}^T = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi - s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde $s = \text{seno}$, $c = \text{cosseno}$ e $t = \text{tangente}$. E a partir da Propriedade 2.1, a matriz de transformação inversa $J_1^{-1}(\eta_2)$ pode ser dada por,

$$J_1^{-1}(\eta_2) = J_1^T(\eta_2) = \mathbf{C}_{z,\psi} \mathbf{C}_{y,\theta} \mathbf{C}_{x,\phi}. \quad (2.11)$$

Transformação da Velocidade Angular

O vetor de velocidade angular no referencial do corpo $\nu_2 = [p, q, r]^T$ e o vetor de Euler das taxas de rotação $\dot{\eta}_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ são relacionadas através da matriz de transformação $J_2(\eta_2)$ de acordo com,

$$\dot{\eta}_2 = J_2(\eta_2)\nu_2. \quad (2.12)$$

Pode notar-se que o vetor de velocidade angular no corpo $\nu_2 = [p, q, r]^T$ não pode ser integrado diretamente para obter as coordenadas angulares reais do veículo. Isto devido ao fato que $\int_0^t \nu_2(\tau) d\tau$ não tem nenhuma interpretação física imediata. Entretanto, o vetor $\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T$ representa as próprias coordenadas generalizadas. Logo, a orientação do sistema de coordenadas do corpo com respeito ao sistema de coordenadas inercial é dada por,

$$\nu_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{x,\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{x,\phi} \mathbf{C}_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_2^{-1}(\eta_2)\dot{\eta}_2 \quad (2.13)$$

E expandindo em 2.13 obtemos,

$$J_2^{-1}(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \Rightarrow J_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde $s = \text{seno}$, $c = \text{cosseno}$ e $t = \text{tangente}$. Note que a matriz $J_2(\eta_2)$ não está definida para o ângulo de arfagem $\theta = \pm 90^\circ$, assim como não satisfaz a Propriedade 2.1, conseqüentemente

$$J_2^{-1}(\eta_2) \neq J_2^T(\eta_2).$$

Outra possibilidade para realizar transformações entre sistemas de coordenadas de referência é a representação de quatérnions que pode ser encontrada em (Tavares, 2003). Na continuação é introduzida a modelagem da dinâmica do veículo, a qual considera as forças atuantes no veículo como corpo rígido, as forças hidrodinâmicas da massa adicional e amortecimento hidrodinâmico e as forças relativas à gravitação.

2.2 Modelagem Dinâmica do Veículo

A modelagem dinâmica do veículo é inteiramente desenvolvida no referencial do corpo e utiliza os princípios da mecânica Newtoniana e Lagrangiana. O sistema não linear de equações diferenciais de segunda ordem que descreve a dinâmica do veículo é um sistema massa-mola-amortecedor que inclui a dinâmica de corpo rígido do veículo. Na modelagem, os movimentos são acoplados em 6 GDL e considera-se que o veículo está exposto a forças do meio-ambiente, tais como: ventos, ondas e correntes oceânicas. Na hidrodinâmica é comum assumir superposições lineares de modo que as forças relativas a ventos e ondas podem ser tratadas como forças generalizadas e podem ser diretamente adicionadas às equações não lineares de movimento do veículo. Entretanto, as forças generalizadas da corrente oceânica não seguem a lei da superposição e existem controvérsias a respeito de como incluir os efeitos da corrente oceânica nas equações de movimento do veículo. Com esse objetivo e a partir de Fossen (2012), esta seção introduz o conceito de *velocidade relativa*, que corresponde à velocidade do veículo com respeito às correntes oceânicas. Logo, a equação dinâmica do veículo pode ser expressa por

$$M\dot{\nu} + C(\nu_R)\nu_R + D(\nu_R)\nu_R + g = \tau + \tau_d, \quad (2.15)$$

em que M é a matriz de inércia, $C(\nu_R)$ é a matriz de Coriolis e Centrípeta, $D(\nu_R)$ é a matriz de amortecimento hidrodinâmico, g é o vetor de forças e momentos gravitacionais, τ é o vetor de forças e momentos resultantes, τ_d é o vetor de distúrbios de ondas e ventos, $\dot{\nu}$ é o vetor de acelerações atuais do veículo. E, ν_R é o vetor de velocidades relativas do veículo, dado por

$$\nu_R = \nu - \nu_c, \quad (2.16)$$

onde ν é o vetor de velocidade atual do veículo e ν_c é o vetor de velocidade das correntes marinhas. O modelo (2.15) não considera as acelerações das correntes marinhas, assim as acelerações relativas e atuais do veículo são iguais, $\dot{\nu}_R = \dot{\nu} - \dot{\nu}_c = \dot{\nu} - 0 = \dot{\nu}$. A seguir, as seguintes subseções apresentam a obtenção dos termos que compõem a equação dinâmica do veículo (2.15). A subseção 2.2.1 introduz a modelagem das forças do veículo como corpo rígido e a subseção 2.2.2 realiza a modelagem as forças hidrodinâmicas atuantes no veículo.

2.2.1 Dinâmica do Corpo Rígido

Nesta subseção, para a obtenção das equações de movimento do veículo, considera-se que o veículo é rígido, o que elimina a possibilidade de existir forças atuando em elementos individuais da massa do veículo. Dessa forma, a partir do primeiro e segundo axioma de Euler, os movimentos translacionais e rotacionais do veículo podem ser denotados por,

$$M_{RB}\dot{\nu} + C_{RB}(\nu)\nu_R = \tau_{RB} \quad (2.17)$$

onde $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$ é o vetor de velocidades relativas lineares e angulares e $\tau_{RB} = [\tau_1, \tau_2]^T$ é o vetor generalizado de forças e momentos externos. Os axiomas de Euler sugerem expressar a segunda lei de Newton em termos da conservação dos momentos lineares e angulares. Maiores detalhes sobre esta abordagem podem ser encontrados em (Fossen, 1994). Portanto, considerando uma rotação do sistema de coordenadas fixo ao corpo $X_0Y_0Z_0$ com velocidade angular $\nu_2 = [p, q, r]^T$ em torno do sistema de coordenadas inercial XYZ , produz-se o seguinte tensor de inércia I_0 no referencial do corpo,

$$I_0 \triangleq \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}; \quad I_0 = I_0^T \quad (2.18)$$

onde I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia que denotam a distribuição de massa do veículo com respeito aos eixos X_0 , Y_0 e Z_0 correspondentemente¹, e I_{xy} , I_{yx} , I_{xz} , I_{zx} , I_{yz} e I_{zy} são os produtos de inércia que medem a simetria do veículo. Logo, desde que o veículo Biointerative-B1 considerado neste trabalho, possui aproximadamente *dois planos de simetria*², de Fossen (1994) e Kamman (2014) os produtos de inércia do tensor de inércia em (2.18) são desprezíveis³. Portanto temos que, $I_{xy} = I_{yx} = I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$, e a partir de (2.18) o tensor de inércia do VSA pode ser dado por,

$$I_0 \triangleq \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Logo, de Fossen (1994), a matriz de inércia do veículo como corpo rígido M_{RB} , pode ser parametrizada segundo estabelece a seguinte propriedade.

Propriedade 2.2. *A parametrização da matriz de inércia de corpo rígido M_{RB} , é única e*

¹Note que os momentos de inércia do veículo são sempre positivos e menores quando ocorrem sobre os eixos que passam pelo centro de massa do veículo.

²A configuração geométrica do Biointerative-B1 está descrita na seção 5.1.2.

³Esta parametrização do tensor de inércia é usual na maioria dos VSA (Tavares, 2003).

satisfaz: $M_{RB} = M_{RB}^T > 0$ e $\dot{M}_{RB} = 0$. Em que,

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & -mS(r_G) \\ mS(r_G) & I_0 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & 0 & 0 \\ mz_G & 0 & -mx_G & 0 & I_y & 0 \\ -my_G & mx_G & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde m é a massa do veículo, $I_{3 \times 3}$ é uma matriz de identidade de terceira ordem, $S(r_G)$ é o operador de produto cruzado definido em (2.7), $r_G = [x_G, y_G, z_G]^T$ é o centro de gravidade do veículo e I_0 é o tensor de inércia definido em (2.19).

Contrariamente à parametrização da matriz de inércia do corpo rígido M_{RB} , a matriz dos termos de Coriolis e Centrípeta do corpo rígido $C_{RB}(\nu)$ permite um largo número de parametrizações antissimétricas, encontradas a partir da representação quadrática da energia cinética do veículo e das equações de Kirchhoff (Fossen, 1994).

Teorema 2.2 (Matriz de Coriolis e Centrípeta a partir da Matriz de Inércia). *Seja $M > 0$ uma matriz de inércia definida como,*

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Logo, podemos sempre parametrizar a matriz de Coriolis e Centrípeta tal que $C(\nu) = -C^T(\nu)$, a partir de

$$C(\nu) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -S(M_{11}\nu_1 + M_{12}\nu_2) \\ -S(M_{11}\nu_1 + M_{12}\nu_2) & -S(M_{21}\nu_1 + M_{22}\nu_2) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Demonstração. Ver Fossen (1994). □

Propriedade 2.3. *De acordo ao Teorema 2.2, a matriz de Coriolis e Centrípeta do corpo rígido $C_{RB}(\nu)$ pode ser parametrizada sempre tal que $C_{RB}(\nu)$ seja antissimétrica, isto é:*

$$C_{RB}(\nu) = -C_{RB}^T(\nu), \quad \forall \quad \nu \in \mathfrak{R}^6 \quad (2.23)$$

Logo, a aplicação do Teorema 2.2 com $M = M_{RB}$ produz-se a seguinte expressão para

$C_{RB}(\nu)$:

$$C_{RB}(\nu) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -mS(\nu_1) - mS(S(\nu_2)r_G) \\ -mS(\nu_1) - mS(S(\nu_2)r_G) & mS(S(\nu_1)r_G) - S(I_0\nu_2) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Note que $S(\nu_1)\nu_1 = 0$ nesta expressão. Logo, aplicando a propriedade $S(\nu_1)\nu_2 = -S(\nu_2)\nu_1$ em (2.24) (Fossen, 1994), obtém-se outra representação antissimétrica útil dada por,

$$C_{RB}(\nu) = \begin{bmatrix} mS(\nu_2) & -mS(\nu_2)S(r_G) \\ mS(r_G)S(\nu_2) & -S(I_0\nu_2) \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

a qual é utilizada com o objetivo de incluir as velocidades das correntes marinhas na equação dinâmica do veículo (2.15). Logo, a partir de Fossen (2012) temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Se a matriz $C_{RB}(\nu_R)$ é parametrizada de forma independente das velocidades lineares $\nu_1 = [u, v, w]^T$ como em (2.25) e as correntes oceânicas são irrotacionais e constantes, a cinética do corpo rígido satisfaz:*

$$M_{RB}\dot{\nu} + C_{RB}(\nu)\nu = M_{RB}\dot{\nu}_R + C_{RB}(\nu_R)\nu_R \quad (2.26)$$

Demonstração. Desde que a matriz de Coriolis e centrípeta $C_{RB}(\nu)$ representada em (2.25) independe das velocidades lineares $\nu_1 = [u, v, w]^T$, segue que $C_{RB}(\nu_R) = C_{RB}(\nu)$. E a partir da propriedade,

$$M_{RB}\dot{\nu}_c + C_{RB}(\nu_R)\nu_c = 0 \quad (2.27)$$

cuja demonstração pode ser vista em Fossen (1994), temos que

$$M_{RB}\dot{\nu} + C_{RB}(\nu)\nu = M_{RB}[\dot{\nu}_R + \dot{\nu}_c] + C_{RB}(\nu_R)[\nu_R + \nu_c] \quad (2.28)$$

$$= M_{RB}\dot{\nu}_R + C_{RB}(\nu_R)\nu_R. \quad (2.29)$$

□

2.2.2 Hidrodinâmica

Em hidrodinâmica básica é comum assumir que as forças e momentos hidrodinâmicos sobre um corpo rígido podem ser linearmente sobrepostos considerando as forças de radiação

induzidas, as forças de Difração e de Froude-Kriloff, as forças de propulsão e alguns efeitos de amortecimento complementares. Logo, temos que

$$\tau_{RB} = \tau_H + \tau_d + \tau \quad (2.30)$$

onde τ_H expressa as forças e momentos hidrodinâmicos, τ_d representa às forças de difração e de Froude-Kriloff relativas a distúrbios de ondas e ventos e τ expressa as forças e momentos de propulsão dos propulsores. As forças e momentos hidrodinâmicos estão compostos por

$$\tau_H = \tau_R + \tau_D \quad (2.31)$$

em que τ_R são as forças e momentos de radiação induzida e τ_D representa alguns amortecimentos complementares. Além disso, as forças de radiação induzida podem ser identificadas como a soma de três componentes, estas são:

1. *Massa adicional* devido à inercia do fluído ao redor.
2. *Amortecimento potencial da radiação induzida* devido à energia ocasionada pelas ondas geradas na superfície.
3. *Forças restauradoras* decorrentes do princípio de Arquimedes (peso e empuxo).

Assim, a partir destas três componentes, as forças e momentos de radiação induzida podem ser matematicamente expressas por,

$$\tau_R = - \underbrace{M_A \dot{\nu}_R - C_A(\nu_R)\nu_R}_{\text{massa adicional}} - \underbrace{D_P(\nu_R)\nu_R}_{\text{amortecimento potencial}} - \underbrace{g}_{\text{restauradoras}} \quad (2.32)$$

Complementando o amortecimento potencial da radiação induzida, devem ser incluídos outros efeitos de amortecimento como o atrito superficial, o amortecimento de ondas da correnteza e o amortecimento relativo ao desprendimento de vórtices, logo

$$\tau_D = - \underbrace{D_S(\nu_R)\nu_R}_{\text{atrito superficial}} - \underbrace{D_W(\nu_R)\nu_R}_{\text{ondas da correnteza}} - \underbrace{D_M(\nu_R)\nu_R}_{\text{desprendimento de vórtices}} \quad (2.33)$$

Dessa forma, as forças e momentos hidrodinâmicos τ_H , podem ser descritos por

$$\tau_H = -M_A \dot{\nu}_R - C_A(\nu_R)\nu_R - D(\nu_R)\nu_R - g \quad (2.34)$$

onde a matriz de amortecimentos $D(\nu_R)$ é dada por,

$$D(\nu_R) \triangleq D_P(\nu_R) + D_S(\nu_R) + D_W(\nu_R) + D_M(\nu_R). \quad (2.35)$$

Portanto, substituindo (2.31) em (2.30) obtemos a equação dinâmica do veículo (2.15). Na qual as matrizes M e $C(\nu_R)$ são definidas como sendo,

$$M \triangleq M_{RB} + M_A \quad C(\nu_R) \triangleq C_{RB}(\nu_R) + C_A(\nu_R). \quad (2.36)$$

A seguir, nas seguintes subseções são obtidas as matrizes e vectores que compõem os efeitos da massa adicional hidrodinâmica M_A , $C_A(\nu_R)$, o amortecimento hidrodinâmico $D_P(\nu_R)$, $D_S(\nu_R)$, $D_W(\nu_R)$, $D_M(\nu_R)$, e as forças gravitacionais g respectivamente.

2.2.3 Massa Adicional Hidrodinâmica

Os efeitos inerciais que se apresentam no veículo subaquático autônomo são definidos pelo meio que o rodeia. As forças inerciais da água ao redor do veículo são proporcionais à aceleração da superfície do VSA e envolvem uma massa de água que é acelerada junto com a massa do VSA. Seguindo a notação SNAME (1950), a matriz de inércia da massa adicional para um veículo subaquático autônomo com três planos de simetria pode ser dada por,

$$M_A = -diag \{X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}\}. \quad (2.37)$$

onde $X_{\dot{u}}$, $Y_{\dot{v}}$, $Z_{\dot{w}}$, $K_{\dot{p}}$, $M_{\dot{q}}$ e $N_{\dot{r}}$ são coeficientes da massa adicional que dependem da geometria do corpo⁴. Logo, a partir do Teorema 2.2, da matriz (2.37), e das equações de Kirchoff da energia cinética do fluido ao redor do veículo, a matriz de forças e momentos de Coriolis e Centrípetas da massa adicional pode ser expressa por,

$$C_A(\nu_R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{\dot{w}}w_R & -Y_{\dot{v}}v_R \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{\dot{w}}w_R & 0 & X_{\dot{u}}u_R \\ 0 & 0 & 0 & Y_{\dot{v}}v_R & -X_{\dot{u}}u_R & 0 \\ 0 & Z_{\dot{w}}w_R & -Y_{\dot{v}}v_R & 0 & N_{\dot{r}}r_R & -M_{\dot{q}}q_R \\ -Z_{\dot{w}}w_R & 0 & X_{\dot{u}}u_R & -N_{\dot{r}}r_R & 0 & K_{\dot{p}}p_R \\ Y_{\dot{v}}v_R & -X_{\dot{u}}u_R & 0 & M_{\dot{q}}q_R & -K_{\dot{p}}p_R & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

⁴A qual é usual na modelagem dos VSA e é diagonal devido a que os coeficientes da massa adicional fora da diagonal principal são muito menores que os demais.

onde $\nu_R = [u_R, v_R, w_R, p_R, q_R, r_R]^T$ é o vetor de velocidades relativas do veículo. Note que as expressões (2.37) e (2.38) foram obtidas considerando um fluido ideal ilimitado e de extensão infinita. Portanto, quando o VSA estiver próximo de uma grande estrutura ou na superfície ou ao fundo, o modelo poderá diferir bastante da situação real.

2.2.4 Amortecimento Hidrodinâmico

Como mencionado na seção 2.2.2, o amortecimento hidrodinâmico do VSA é principalmente ocasionado pelos seguintes efeitos (Fossen, 1994),

$D_P(\nu_R)$: Amortecimento potencial da radiação induzida relativo a oscilações no VSA.

$D_S(\nu_R)$: Atrito superficial relacionado a camadas limites laminares e atritos superficiais quadráticos relativos a camadas limites turbulentas.

$D_W(\nu_R)$: Amortecimento ocasionado por ondas da correnteza.

$D_M(\nu_R)$: Amortecimento relativo ao desprendimento de vórtices.

Sendo assim, a matriz geral de amortecimento hidrodinâmico $D(\nu_R)$ pode ser descrita pela superposição desses efeitos como indica (2.58), isto é por

$$D(\nu_R) \triangleq D_P(\nu_R) + D_S(\nu_R) + D_W(\nu_R) + D_M(\nu_R)$$

Dessa forma, a matriz de amortecimento hidrodinâmico de um veículo subaquáticos autônomos com três planos de simetria que se movimenta em baixa velocidade e 6 GDL pode ser dada por,

$$D(\nu_R) = -diag\{X_u + X_{u|u}|u_R|, Y_v + Y_{v|v}|v_R|, Z_w + Z_{w|w}|w_R|, \\ K_p + K_{p|p}|p_R|, M_q + M_{q|q}|q_R|, N_r + N_{r|r}|r_R|\} \quad (2.39)$$

onde X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q e N_r são os termos de amortecimento linear, $X_{u|u}|u_R|, Y_{v|v}|v_R|, Z_{w|w}|w_R|, K_{p|p}|p_R|, M_{q|q}|q_R|$ e $N_{r|r}|r_R|$ são os termos de amortecimento quadrático e $\nu_R = [u_R, v_R, w_R, p_R, q_R, r_R]^T$ é o vetor de velocidades relativas do veículo. Note que estes termos dependem das dimensões e do formato do veículo, assim como da rugosidade da sua superfície. Além disso, é importante observar que a matriz de amortecimento hidrodinâmico (2.39) satisfaz a seguinte propriedade.

Propriedade 2.4. *Para um corpo rígido que se move em um fluido ideal, a matriz de amortecimento hidrodinâmico será real, não-simétrica e estritamente positiva. Logo,*

$$D(\nu_R) > 0, \quad \forall \nu_R \in \mathbb{R}^6 \quad (2.40)$$

Demonstração. A demonstração desta propriedade é trivial desde que as forças de amortecimento hidrodinâmico são dissipativas. Assim, $\nu_R^T D(\nu_R) \nu_R > 0, \forall \nu_R \neq 0$.

2.2.5 Forças Restauradoras

Pela notação SNAME (1950), os módulos do peso \vec{P} e empuxo \vec{E} podem ser dados por,

$$P = mg \quad (2.41)$$

$$E = \rho g \nabla \quad (2.42)$$

onde m e ∇ são a massa e o volume do veículo, g é aceleração da gravidade e ρ é a densidade do fluido ao redor do veículo. Tanto a força de peso quanto a força de empuxo atuam na direção vertical do referencial inercial, em sentidos contrários. E considerando que o eixo Z do referencial inercial é vertical e com o sentido positivo apontando para o fundo do mar, os vetores de peso e empuxo são dados respectivamente por,

$$F_P^E = [0, 0, P]^T \quad (2.43)$$

$$F_E^E = -[0, 0, E]^T \quad (2.44)$$

no referencial inercial. Logo, realizando a transformação de ambos vetores para o referencial do corpo obtemos,

$$\begin{aligned} F_P &= J_1^{-1}(\eta_2)[0, 0, P]^T \\ F_E &= -J_1^{-1}(\eta_2)[0, 0, E]^T \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde F_P e F_E são, respectivamente, os vetores de peso e empuxo no referencial do corpo. Os quais atuam correspondentemente no centro de gravidade r_G e no centro de massa do veículo r_B . Logo, a partir de (2.45) os momentos de peso e empuxo são dados respectivamente por,

$$\begin{aligned} M_P &= r_G \times F_P \\ M_E &= r_E \times F_E. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Os momentos produzidos por estas forças atuam no sentido de trazer os ângulos de rola-

mento ϕ e arfagem θ , para zero. A partir disso, as forças de peso e empuxo são denominadas forças restauradoras. Assim, de (2.45) e (2.50) obtemos

$$g = - \begin{bmatrix} F_P + F_E \\ M_P + M_E \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (P - E)s\theta \\ -(P - E)c\theta s\phi \\ -(P - E)c\theta c\phi \\ -(y_G P - y_B E)c\theta c\phi + (z_G P - z_B E)c\theta s\phi \\ -(z_G P - z_B E)s\theta + (x_G P - x_B E)c\theta c\phi \\ -(x_G P - x_B E)c\theta s\phi - (y_G P - y_B E)s\theta \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

2.3 Modelagem dos Propulsores

A força de propulsão dos veículos subaquáticos é efetuada por hélices que por sua vez, são acionadas por motores, na sua maioria, elétricos. Neste trabalho são considerados motores de corrente contínua. Dessa forma é possível estabelecer um mapeamento entre as forças de controle e os atuadores do veículo. A modelagem dinâmica do propulsor pode ser dividida em duas partes: uma referente à hidrodinâmica, que trata a interação entre os hélices e o fluido e outra referente à dinâmica dos atuadores.

2.3.1 Dinâmica dos Propulsores

De Tavares (2003), o empuxo e o torque produzidos por cada propulsor podem ser expressos respectivamente por,

$$T = C_T(\sigma) \frac{\rho}{8} [\nu_w^2 + (0,7\pi nd)^2] \pi d^2 \quad (2.48)$$

$$Q = C_Q(\sigma) \frac{\rho}{8} [\nu_w^2 + (0,7\pi nd)^2] \pi d^3 \quad (2.49)$$

onde ν_w é velocidade com que a água se dirige para a hélice, d é o diâmetro da hélice, n é a velocidade de rotação do hélice (dada em rps), ρ é a densidade do fluido, C_T e C_Q são os coeficientes de empuxo e torque obtidos a partir das curvas características dos propulsores e σ é o ângulo de avanço definido por,

$$\sigma = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\nu_w}{0,7\pi nd} \right). \quad (2.50)$$

Logo, considerando que a velocidade de entrada da água seja igual à componente de

velocidade relativa do veículo, isto é $\nu_w = \nu_R$ e tomando $\sigma = 0^\circ$, as equações (2.48) e (2.49) podem ser escritas como,

$$T = T_{|n|n}|n|n \quad (2.51)$$

$$Q = Q_{|n|n}|n|n \quad (2.52)$$

onde $T_{|n|n}$ e $Q_{|n|n}$, são os coeficientes de empuxo e torque com fluxo axial de água na hélice desprezado respectivamente. Dessa forma, as forças e momentos de propulsão são dados pela seguinte expressão na forma matricial vetorial,

$$\tau = B_{HV}u \quad (2.53)$$

onde u é um vetor de dimensões $p \times 1$ composto por elementos $u_i = |n_i|n_i$, p o número de propulsores e B_{HV} é a matriz de configuração de propulsores de dimensões $6 \times p$, cujos elementos são distribuídos em função da localização de cada propulsor no veículo. Neste trabalho a matriz de configuração do veículo Biointerative-B1 é apresentada na seção 5.1.2.

2.3.2 Dinâmica do Motor

De Tavares (2003), temos que a dinâmica elétrica e mecânica de um motor DC é descrita respectivamente por,

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -R_a i_a - 2\pi K_m n + V_a \quad (2.54)$$

$$2\pi J_p \frac{dn}{dt} = T_m - Q \quad (2.55)$$

onde i_a é a corrente de armadura, V_a é a tensão aplicada ao motor, R_a é a resistência de armadura, L_a é a indutância de armadura, K_m é a constante eletromagnética do motor, J_p é a soma dos momentos de inércia do motor e da hélice, T_m é o torque do motor e Q é o torque resistente. A constante 2π é usada para expressar a velocidade angular do motor em radianos por segundo (rad/s). Logo, devido a que a constante de tempo elétrica do motor é bem menor do que a constante de tempo mecânica, o termo $L_a \frac{di_a}{dt}$ em (2.54) é desprezível. Portanto,

$$-R_a i_a - 2\pi K_m n + V_a = 0. \quad (2.56)$$

Como geralmente em motores de ímã permanente, o torque T_m é aproximadamente pro-

porcional à corrente de armadura, este pode ser estabelecido como sendo $T_m = K_m i_a$. Portanto, de (2.55) e (2.56) a equação dinâmica do motor pode ser expressa pela seguinte forma matricial-vetorial,

$$P\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau}_m - \boldsymbol{\tau}_r \quad (2.57)$$

onde P é uma matriz diagonal que contém os momentos de inércia de cada propulsor, $\dot{\mathbf{n}}$ é o vetor de aceleração angular dos hélices (dada em rpm/s^2), $\boldsymbol{\tau}_m$ é o vetor de torques motores e $\boldsymbol{\tau}_r$ é o vetor de torques resistentes.

Sumarizando as equações para a dinâmica dos propulsores e a dinâmica do motor dadas nas subseções acima, é possível estabelecer uma expressão que relacione a dinâmica da tensão de entrada do motor com a força exercida pelos hélices, a qual pode ser dada por

$$V_a = \left[2\pi\dot{\mathbf{n}}J_p + 2\pi\frac{K_m^2\mathbf{n}}{R_a} + Q_{|\mathbf{n}|\mathbf{n}}|\mathbf{n}|\mathbf{n} \right] \frac{R_a}{K_m}, \quad (2.58)$$

onde V_a indica a tensão de armadura necessária para produzir uma taxa de rotação $\dot{\mathbf{n}}$ nos hélices de cada propulsor. A seguir, a seguinte seção apresenta as respectivas conclusões do capítulo.

2.4 Conclusões

Neste capítulo foram introduzidos os modelos matemáticos do veículo utilizados para os quatro projetos de controle de posição CEV-MD desenvolvidos no Capítulo 4.

A modelagem do veículo extraída de Fossen (1994) e Fossen (2012), enquanto que a modelagem dos propulsores foi obtida a partir de Tavares (2003). A modelagem do veículo é realizada considerando dois sistemas de coordenadas de referência: O referencial do corpo e o referencial inercial. Esta também considera 6 GDL, a influência de correntes marinhas e distúrbios de ondas e ventos. Inicialmente a seção 2.1 introduz a modelagem cinemática do veículo. A qual utiliza a matriz de rotação de Euler e os ângulos de Euler para realizar a transformação de referencial dos vetores de velocidade do veículo, cuja integral produz as posições e orientações do veículo no referencial inercial.

A subseção 2.2.1 introduz a modelagem dinâmica do veículo como corpo rígido e a subseção 2.2.2 estabelece as forças hidrodinâmicas a ser consideradas no modelo. Note que neste trabalho é utilizada a parametrização dada em Fossen (2012) para a matriz de Coriolis e centrípetas do veículo como corpo rígido, no sentido de satisfazer $C_{RB}(\boldsymbol{\nu}) = C_{RB}(\boldsymbol{\nu}_R)$ e $C(\boldsymbol{\nu}_R) = C_{RB}(\boldsymbol{\nu}_R) + C_A(\boldsymbol{\nu}_R)$. Finalmente, na seção 2.3 foram apresentadas a modelagem dinâmica dos propulsores e do motor DC considerado neste trabalho.

Capítulo 3

Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)

Entre as abordagens clássicas de controle não linear, destacam-se a linearização por realimentação, a análise de funções descritivas, o escalonamento de ganho, o *backstepping*, o controle de estrutura variável e o controle adaptativo. Sistemas de controle por relé foram amplamente utilizados nos primórdios da engenharia de controle moderna devido à sua simplicidade de implementação e características de robustez. Isto incentivou o desenvolvimento das pesquisas em equações diferenciais descontínuas formando a base do que hoje se conhece por *Controle de Estrutura Variável*. Com o advento da eletrônica de semicondutores, os sistemas de controle por estrutura variável não mais se restringiram a sistemas com relés, senão que as descontinuidades puderam ser implementadas eletronicamente por meios analógicos e digitais, o que os consolidou como uma das principais técnicas de controle não linear (Cunha, 2002).

Os sistemas de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) introduzem descontinuidades num sistema dinâmico contínuo de forma a provocar o aparecimento de um novo comportamento que leve o sistema para um ponto de equilíbrio desejado, o qual pode ser diferente dos equilíbrios naturais¹ do sistema. A partir disso, dependendo da técnica de projeto utilizada, a dinâmica de ordem reduzida do sistema em modo deslizante pode ser imposta com um certo grau de arbitrariedade. O que permite que controladores CEV-MD lidem tanto com não linearidades quanto com incertezas paramétricas do sistema. Além de que, para sistemas na forma afim $\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u(t, x)$, a existência de um modo deslizante implica também na robustez do sistema em relação a perturbações pertencentes à imagem de B .

Neste capítulo inicialmente é feita uma breve abordagem aos sistemas de estrutura variável (SEV) e sistemas de controle de estrutura variável (CEV) nas seções 3.1 e 3.2 respectivamente. A seguir, a seção 3.3, trata os sistemas CEV-MD, desde que os modos deslizantes (MD) se apresentam como um tipo de solução de sistemas CEV. Esta situação é mostrada na

¹Pontos de equilíbrio quaisquer das estruturas de um sistema SEV em qualquer região do seu espaço de estados.

seção 3.4, no problema de existência e unicidade de solução de sistemas CEV-MD. Logo, as seções 3.5 e 3.6 apresentam as condições de existência de modos deslizantes e a metodologia de projeto de controladores CEV-MD. Finalmente, as seções 3.8 e 3.7 abordam o problema do *chattering* e as conclusões do capítulo respectivamente.

3.1 Sistemas de Estrutura Variável (SEV)

Sistemas de estrutura variável (SEV) são sistemas não lineares *contínuos por partes* que, desde um ponto de vista físico, possuem uma estrutura variável. Devido a que são contínuos por partes, se comportam como diferentes subsistemas contínuos lineares ou não lineares em diferentes regiões do espaço de estados. Dessa forma, nos limites dessas regiões a sua dinâmica muda abruptamente, fazendo com que a sua estrutura varie sobre diferentes partes do espaço de estados. A maneira exata como ocorrem tais transições é muitas vezes complexa ou até desconhecida. Porém, embora estas se deem de modo simples e conhecido, sua dinâmica é muitas ordens de grandeza mais rápida do que as outras dinâmicas do sistema, justificando a sua aproximação por funções matemáticas descontínuas. A modo de generalização, a sua dinâmica pode ser expressa da seguinte forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}(t), u(t, \mathbf{x})) \quad (3.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função vetorial contínua em seus argumentos, $t \in \mathbb{R}$ é a variável independente (em geral o tempo), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial tal que as discontinuidades do sistema ficam todas agrupadas nela, n é a ordem do sistema, e m é a dimensão da função descontínua u .

A característica descontínua e portanto não linear deste tipo de sistemas, confere-lhes comportamentos típicos muito diferentes dos encontrados em sistemas contínuos. Entre estes fenômenos podemos citar os modos deslizantes, as zonas de estagnação, as bifurcações de órbitas deslizantes, entre outros (Cunha, 2002).

Os sistemas de estrutura variável são de grande interesse na engenharia, já que muitos deles descrevem artefatos tecnológicos de larga aplicação. Exemplos deste tipo de sistemas intrinsecamente descontínuos, nos quais as discontinuidades se encontram nas próprias equações do sistema independentemente do tipo de lei de controle utilizada, são os sistemas mecânicos com atrito seco e os conversores estáticos de potência.

No entanto, quando o uso desta técnica é uma opção do projetista, a própria lei de controle pode introduzir discontinuidades nas equações do sistema, de forma a outorgar ao sistema um determinado comportamento desejado em malha fechada, que no seu modelo original em malha aberta pode não possuir qualquer discontinuidade. Quando isto acontecer o sistema será

denominado sistema de controle de estrutura variável (CEV).

3.2 Sistemas de Controle de Estrutura Variável (CEV)

Sistemas híbridos² são sistemas aonde se misturam decisões lógicas e leis de controle contínuas (Bean, 2003). No mundo real podem ser encontrados em sistemas com relés, motores de passo, sistemas de controle de autoestrada, veículos inteligentes, sistemas de controle de vôo e sistemas de manufatura moderna flexível, entre outros.

Sistemas chaveados são uma classe particular de sistemas híbridos, nos quais decisões lógicas outorgam determinadas propriedades a leis de controle contínuo, de forma a provocar mudanças abruptas na dinâmica do sistema. Sistemas chaveados têm despertado grande interesse na Engenharia de Controle devido a que uma lógica é utilizada para selecionar um dentre vários comportamentos possíveis para o sistema, o qual é particularmente utilizado no contexto de construção de múltiplos controladores para uma única planta com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema.

O controle de estrutura variável (CEV) é um tipo de controle caracterizado por possuir um chaveamento de alta velocidade no ramo de realimentação do sistema, cujo ganho varia segundo uma determinada lógica de chaveamento, a qual é estabelecida de forma que o sistema de controle acompanhe as variações da planta (DeCarlo et al., 1988). Este tipo de controle teve sua origem na teoria de controle por relés e teoria de controle bang-bang. Os avanços existentes na tecnologia de computadores e em circuitos chaveados a alta velocidade têm facilitado a sua aplicação prática, assim como incrementado o interesse da comunidade científica no assunto.

A Teoria de sistemas de controle tende a considerar os sistemas de controle de estrutura variável (CEV) como sistemas contínuos apresentando chaveamentos, os principais pontos de discussão no que se refere a este tipo de sistemas são a *análise de estabilidade* e a *síntese* do sinal de controle.

De fato, considerando de forma genérica a classe de sistemas de estrutura variável (3.1), em que a função descontínua u é considerada entrada de controle, definida por

$$u_i(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^+(t, \mathbf{x}), & \text{se } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(t, \mathbf{x}), & \text{se } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}, \quad s(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \dots s_m(\mathbf{x})]^T \quad (3.2)$$

onde u_i^+ e u_i^- são funções de estado contínuas com $u_i^+(t, \mathbf{x}) \neq u_i^-(t, \mathbf{x})$ e onde cada função escalar s_i determina a descontinuidade da i -ésima componente da função vetorial u , sendo que m é a dimensão de controle. Além disso, desde que as descontinuidades estão restritas às

²Sistemas dinâmicos que exibem comportamento dinâmico contínuo e discreto.

variedades

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n / s_i(x) = 0\} \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

os sistemas de controle de estrutura variável (CEV) não são um caso geral de sistemas descontínuos, e a partir da Teoria de Inclusões Diferenciais, as trajetórias pertencentes ao conjunto de pontos das variedades (3.3) são permitidas como soluções de (3.1) (Cunha, 2002).

Isto posto, pode-se analisar o que ocorre nas vizinhanças da superfície S_i quando os estados do sistema se aproximam dela. Dois comportamentos distintos são possíveis: ou os estados, ao alcançar a superfície, a atravessam, e após isto sofrem uma mudança instantânea na sua direção; ou ao alcançar a superfície S_i , os estados se mantêm confinados a ela, caracterizando um comportamento invariante no tempo denominado *modo deslizante*. No primeiro caso, os estados do sistema permanecem na superfície de chaveamento³ apenas um instante de tempo. Já no segundo caso, os estados evoluem sobre a superfície S_i como se deslizassem sobre ela. O segundo caso ocorrerá sempre e quando forem satisfeitas as condições de existência do modo deslizante sobre a superfície S_i .

Quando as condições de existência do modo deslizante forem satisfeitas, i.e., o modo deslizante se apresentar como uma solução para o sistema genérico (3.1), este será denominado sistema de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD), cujo comportamento em modo deslizante não está explicitamente definido pelas equações (3.1) e (3.2), senão que requer de alguns métodos conhecidos na literatura para sua determinação. Alguns destes métodos são apresentados na seção 3.6.1.

3.3 Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)

O controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV–MD) foi inicialmente proposto por S. V. Emelyanov na década de 1930 na União Soviética e mais tarde por outros pesquisadores como Utkin, Guldner e Shi na década de 1990. A sua principal característica é a de gerar um novo tipo de movimento no sistema em laço fechado, denominado movimento em modo deslizante (Emelyanov, 1970; Itkis, 1976), o qual uma vez alcançado outorga ao sistema a *propriedade da invariância* e confere-lhe uma redução de ordem⁴ e uma insensibilidade a não linearidades da planta.

Esta metodologia intuitivamente se baseia na ideia de que, sistemas de primeira ordem e

³A superfície S_i é também chamada superfície de chaveamento devido a que as trajetórias de estados da planta possuem ganhos diferentes quando estão “acima” e “abaixo” da mesma.

⁴Dinâmicas acopladas como as de distúrbios podem aumentar a ordem do sistema em malha aberta.

parâmetros conhecidos são muito mais fáceis de controlar do que sistemas de n -ésima ordem⁵ e parâmetros desconhecidos. De acordo a isso uma simplificação na dinâmica do sistema é introduzida, permitindo que problemas de controle não linear de n -ésima ordem e parâmetros desconhecidos sejam equivalentemente substituídos por problemas de controle linear de primeira ordem e parâmetros conhecidos. A priori, com isto, o desempenho desejado pode ser alcançado na presença de incertezas paramétricas, que são um dos tipos de imprecisões de modelagem. Porém, o alto esforço de controle chaveado utilizado para conseguir essa mudança na dinâmica do sistema acaba excitando o outro tipo de imprecisões de modelagem, i.e., as dinâmicas não modeladas da planta⁶, produzindo-se oscilações de alta frequência no rastreamento da trajetória desejada que podem levar o sistema à instabilidade. Em termos práticos, este fenômeno é conhecido como *chattering* e pode ocasionar aquecimento e desgaste dos atuadores.

Para evitar o fenômeno relatado, a literatura apresenta diversas modificações das leis convencionais de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD), de forma a conseguir uma atividade de controle admissível que permita um desempenho de rastreamento satisfatório, sem interferir na robustez do sistema a incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas⁷. Entre alguns exemplos destas modificações, podemos citar os trabalhos de Yoerger e Slotine (1985) e Slotine e Li (1991) nos quais são utilizadas aproximações contínuas das leis de controle descontínuas dentro uma vizinhança da superfície de chaveamento, assim como os de Shtessel e Buffington (1998) e Yu et al. (2005) nos quais são propostas leis de controle contínuas que garantam a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para a superfície de chaveamento e a publicação de Monsees (2002) na qual uma lei de controle de tempo discreto é apresentada para uma representação discretizada do sistema de tempo contínuo.

Dessa forma, o controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV–MD) brinda uma abordagem sistemática aos problemas de estabilidade e desempenho desejado do sistema, em face de não linearidades e imprecisões de modelagem. Permitindo quantificar o impasse existente entre a estabilidade do sistema, i.e., a robustez a incertezas do modelo, e o desempenho de rastreamento. Essa característica simplifica a elaboração do projeto de controle, facilita a construção do controlador em tempo real e reduz o esforço de modelagem requerido para a obtenção de um bom desempenho.

Para uma melhor ilustração, considere um sistema de relé de segunda ordem invariante no tempo definido por,

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x = u + d(t) \quad (3.4)$$

onde $a_1, a_2 \in \mathfrak{R}$ são parâmetros constantes, $d \in \mathfrak{R}$ é um distúrbio limitado, a lei de controle

⁵Sistemas descritos por equações diferenciais de ordem n , onde $n > 1$.

⁶Neste trabalho, correspondentes a dinâmicas não modeladas dos atuadores.

⁷Em algumas aplicações específicas, como aquelas envolvendo controle de motores elétricos, não é necessário realizar modificações devido à natureza descontínua da planta.

descontínua, $u \in \mathfrak{R}$ é escolhida como

$$u(s) = -K \operatorname{sgn}(s), \quad (3.5)$$

e s é uma função escalar da forma,

$$s(x) = \dot{x} + cx. \quad (3.6)$$

em que $K, c \in \mathfrak{R}$ são parâmetros constantes. É possível analisar o comportamento do sistema (3.4) a partir do plano de estados (x, \dot{x}) na Figura 3.1, quando $a_1 = a_2 = 0$. A lei de controle u , definida em (3.5), sofre descontinuidades na linha de chaveamento $s(x) = 0$, dividindo as trajetórias de estado em dois conjuntos. Um correspondente a $s(x) > 0$ e $u(s) = -K$, representado pelo o semi-plano superior na Figura 3.1. Outro correspondente a $s(x) < 0$ e $u(s) = K$, representado pelo semi-plano inferior na mesma figura.

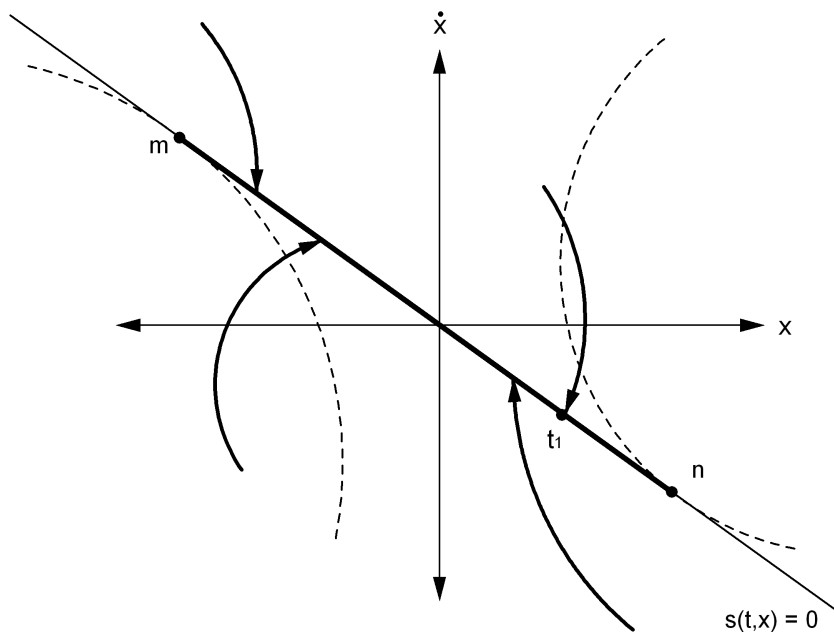


Figura 3.1: Plano de estados de um sistema de relé de segunda ordem

A partir de um determinado setor $m - n$ sobre a linha de chaveamento, as trajetórias de estado são orientadas em direção à linha de chaveamento $s(x) = 0$, como mostra a Figura 3.1. Isto é, uma vez alcançado o setor $m - n$, em algum tempo t_1 , os estados não podem mais deixar a linha de chaveamento. Assim, para todo tempo $t > t_1$, as trajetórias de estado pertencerão à linha de chaveamento $s(x) = 0$. Além disso, desde que em modo deslizante as trajetórias de estado do sistema coincidem com a trajetória da linha de chaveamento $s(x) = 0$, a equação

dinâmica do sistema é a mesma que a da linha de chaveamento, dada por

$$\dot{x} + cx = 0 \quad (3.7)$$

cuja solução, dada por $x(t) = x(t_1)e^{-c(t-t_1)}$, não depende dos parâmetros da planta K , a_1 , a_2 , e nem do distúrbio $d(t)$. Esta é a propriedade da invariância, a qual é encarregada de outorgar robustez a projetos de controle realimentado de plantas dinâmicas que operam sob certas condições de incerteza.

Temos descrito um modelo matemático ideal somente. Em aplicações reais, as trajetórias de estado são confinadas a alguma vizinhança da linha de chaveamento $s(x) = 0$ e não à própria linha de chaveamento como no modelo ideal. Este desvio do modelo ideal é causado por imperfeições nos dispositivos de chaveamento tais como pequenos atrasos, zonas mortas e histereses, as quais podem levar a oscilações de alta frequência (ver Figuras 3.2 e 3.3).

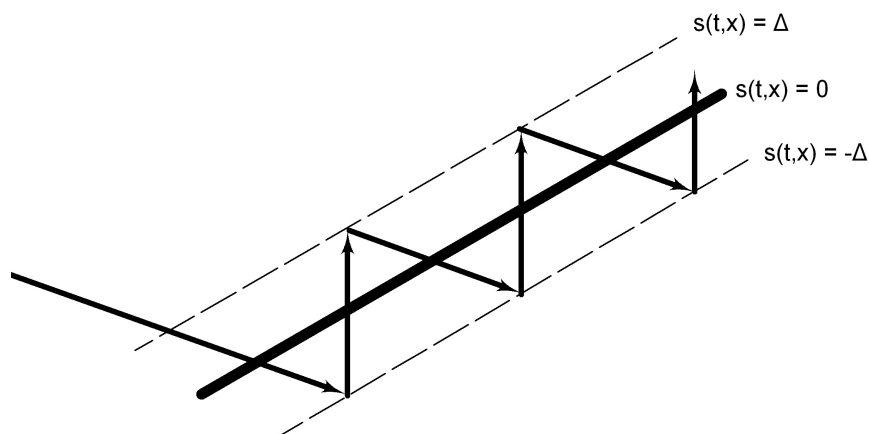


Figura 3.2: Oscilações em uma vizinhança da superfície de chaveamento.

Este mesmo fenômeno aparece quando pequenas constantes de tempo de sensores e atuadores são negligenciadas no modelo ideal. Dessa forma, o *chattering* constitui num sério obstáculo para a aplicação prática de controladores de estrutura variável por modos deslizantes aplicados a sistemas dinâmicos de planta contínua⁸.

É importante observar que quando utilizadas aproximações contínuas da função relé descontínua para evitar imperfeições nos dispositivos de chaveamento, as trajetórias de estado também são confinadas a alguma vizinhança da linha de chaveamento $s(x) = 0$, porém sem produzir-se oscilações de alta frequência, caracterizando uma estabilidade de tipo *ultimate boundedness*.

Na seguinte subseção, será abordado de forma genérica, o controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV–MD) para sistemas que possuem as suas equações de movimento

⁸Este obstáculo não se apresenta quando a planta a ser controlada possui dinâmica descontínua.

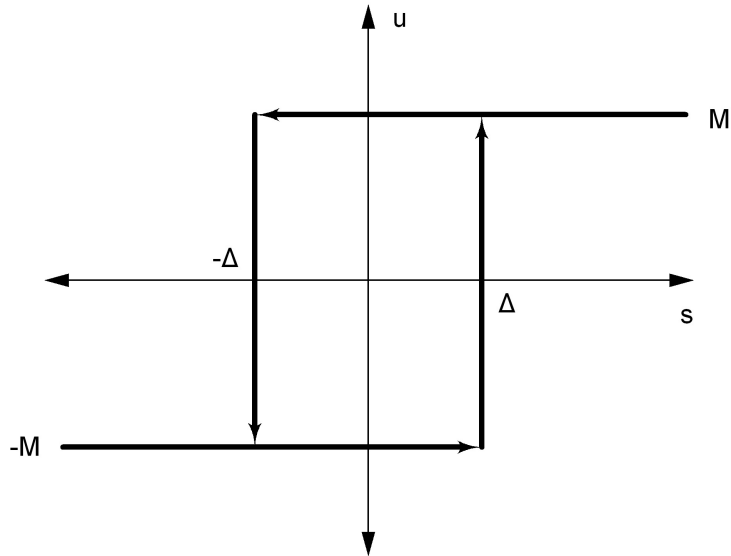


Figura 3.3: Relé com histerese.

descritas no espaço canônico. Será mostrado que nesse caso, as propriedades de invariância e redução de ordem do sistema são mais facilmente garantidas.

3.3.1 Espaços Canônicos

Em espaços de estado canônicos, a variável de interesse ou variável de saída x , e suas respectivas i -ésimas derivadas no tempo $x^{(i-1)}$, conformam os i -ésimos elementos do vetor de estados do sistema $x^{(i-1)} = x_i$ ($i = 2, \dots, n$), como segue

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= & x_{i+1} \\ \dot{x}_{n-1} &= & x_n \\ \dot{x}_n &= & -\sum_{i=1}^n a_i(t)x_i + d(t) + b_i(t)u \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n-2) \quad (3.8)$$

onde $a_i, b_i \in \mathfrak{R}$, são parâmetros desconhecidos, $d \in \mathfrak{R}^m$ é um distúrbio desconhecido e a lei de controle descontínua $u \in \mathfrak{R}^m$, dada por

$$u(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} u^+(t, \mathbf{x}), & \text{se } s(\mathbf{x}) > 0 \\ u^-(t, \mathbf{x}), & \text{se } s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}; \quad s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (3.9)$$

possui funções contínuas u^+, u^- com $u^+(t, \mathbf{x}) \neq u^-(t, \mathbf{x})$, selecionadas tal que as trajetórias de estado do sistema sejam orientadas para a superfície de chaveamento $s(\mathbf{x}) = 0$. Assim, uma vez que o modo deslizante se inicie, as trajetórias de movimento do sistema (3.8) pertencerão à

superfície de chaveamento,

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0. \quad (3.10)$$

Logo, isolando x_n em (3.10) e desde que os coeficientes c_1, \dots, c_{n-1} , são constantes e $c_n = 1$, temos que

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i. \quad (3.11)$$

E substituindo esta última na (n-1)-ésima equação do sistema (3.8), obtêm-se as equações do sistema em modo deslizante,

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= x_{i+1} \\ \dot{x}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n-2) \quad (3.12)$$

que possuem ordem menor do que a do sistema original (3.8) e não dependem dos parâmetros da planta a_i, b_i e nem do distúrbio d . Dessa forma, as propriedades de invariância e redução de ordem do sistema são claramente garantidas. Isto é possível devido a que em sistemas canônicos existe o *espaço das derivadas de estado*, i.e., o vetor de estados está conformado pela variável de controle e suas i -ésimas derivadas. O que permite que a dinâmica do sistema em modo deslizante possa ser facilmente encontrada a partir da equação da superfície de chaveamento e com isto, a dinâmica desejada possa ser melhor especificada através da escolha dos parâmetros c_i , no plano de chaveamento.

3.3.2 Espaços Não-Canônicos

Segundo o desenvolvimento realizado acima, para sistemas descritos em espaços canônicos, a propriedade da invariância cria a impressão de que qualquer problema de controle pode ser facilmente resolvido induzindo modos deslizantes no sistema. A dificuldade está em que o espaço das derivadas de estado é uma idealização matemática e diferenciadores ideais são dificilmente implementados na prática. Por exemplo, em processos tecnológicos modernos é comum que somente algumas componentes do vetor de estados estejam acessíveis para medição. Em tais situações, a abordagem dos espaços canônicos não sugere como o controle possa ser projetado.

Como visto no exemplo genérico da subseção anterior, na abordagem dos espaços canônicos, as propriedades de invariância e redução de ordem do sistemas são reveladas ao analisar a equação do modo deslizante, no exemplo dada por (3.12), a qual é obtida a partir da superfície

de chaveamento, no mesmo exemplo definida por (3.10), desde que em espaços canônicos o vetor de estados do sistema está composto pela variável de saída e suas i -ésimas derivadas. Assim, devido a que em espaços não-canônicos⁹ as variáveis de estado são arbitrárias, a equação dos modos deslizantes não pode ser diretamente obtida como na abordagem dos espaços canônicos, não sendo possível portanto, garantir as propriedades de invariância e redução do sistema. Dessa forma, a literatura apresenta diversas abordagens para o projeto de controladores CEV-MD aplicados a sistemas descritos em espaços de estado arbitrários (não-canônicos), as quais garantem que as propriedades de invariância e redução de ordem do sistema sejam atingidas a partir da escolha adequada da superfície de descontinuidade e do cumprimento de determinadas condições de existência e alcançabilidade¹⁰ dos modos deslizantes (Utkin et al., 1999).

3.4 Existência e Unicidade de Solução de Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)

Controladores de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) produzem dinâmicas descontínuas no sistema em laço fechado devido a que possuem uma ação de controle de tipo chaveada. Sistemas descontínuos podem não satisfazer a condição de Lipschitz, perdendo a garantia de existência e unicidade de solução para *funções Lipschitz contínuas* estabelecida pela Teoria Clássica das Equações Diferenciais (DeCarlo et al., 1988; Cunha, 2002). Assim, devido à natureza descontínua dos sistemas CEV-MD, a garantia de existência e unicidade de solução deste tipo de sistemas não pode ser assegurada pela Teoria Clássica das Equações Diferenciais. Dessa forma, a literatura apresenta diversas abordagens a este problema, dentre as quais os métodos de Regularização e o Método de Phillipov se encontram entre as mais utilizadas (Utkin et al., 1999).

3.4.1 Regularização

A descrição matemática do movimento de um sistema de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD) se torna um problema, do ponto de vista da existência e unicidade de solução, desde que o lado direito da equação diferencial (3.1) não satisfaz a condição de Lipschitz. Esta condição estabelece que, para todo $x_1, x_2 \in D(f)$, a desigualdade $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \bar{L} \|x_1 - x_2\|$ deve ser verdadeira, onde \bar{L} é um número positivo denominado constante de Lipschitz. Assim, esta condição estabelece que a função f , não cresce mais

⁹Um sistema expresso em espaços não-canônicos possui variáveis de estado arbitrárias na sua equação de movimento.

¹⁰A condição de alcançabilidade do modo deslizante se refere à convergência das trajetórias do sistema para a superfície de chaveamento em tempo finito.

rápido que alguma função linear, o que não é verdadeiro para valores de $D(f)$ perto dos pontos de descontinuidade da função f .

Em situações onde os métodos convencionais não são aplicáveis, uma abordagem comum é utilizar métodos de regularização ou substituir o problema original por um problema similar para o qual ditos métodos possam ser aplicáveis. Para sistemas com controle descontínuo, a regularização possui uma interpretação física simples. Incertezas no comportamento do sistema sobre a superfície de descontinuidade aparecem desde que as equações de movimento (3.4) e (3.5) representam um modelo de sistema ideal, e um modelo ideal negligência fatores não ideais, tais como pequenas imperfeições nos dispositivos de chaveamento (atrasos, histereses, pequenas constantes de tempo), dinâmicas não modeladas de sensores e atuadores, etc.

Assim, para lidar com este problema, os métodos de regularização consistem em incluir os fatores desconsiderados no modelo ideal, de forma que, quando incluídos no modelo do sistema, os pontos de descontinuidade se tornem isolados no tempo e eliminem ambiguidades no comportamento do sistema. Logo, assumindo que o limite das soluções existe quando os pequenos parâmetros que caracterizam esses fatores tendem a zero, então esse limite é tomado como a solução das equações que descrevem o modo deslizante ideal¹¹. Este procedimento limite é denominado método da regularização e consiste numa das principais abordagens para a determinação das soluções de um sistema de controle de estrutura variável por modos deslizantes, i.e., para a determinação das equações do sistema (3.4) e (3.5) em modo deslizante.

3.4.2 Método de Filippov

Um aspecto importante no projeto de controle de sistemas CEV-MD é a consideração de que o sistema possui um único comportamento em modo deslizante, i.e., uma única solução quando restrito à superfície deslizante. Nesse sentido, vários teoremas sobre a existência e unicidade de solução de sistemas descontínuos são apresentados em Utkin (1978) e Itkis (1976), entre outros. Entretanto, uma abordagem direta ao problema da existência e unicidade de solução de sistemas CEV-MD foi introduzida pela *Teoria de Filippov* em Filippov (1964), a qual será brevemente ilustrada na continuação.

Considerando genericamente o sistema de controle de estrutura variável (3.1), (3.2), (3.3) e assumido que as condições de existência do modo deslizante são satisfeitas, o método de Filippov mostra que as trajetórias de estado do sistema em modo deslizante $x \in S_i$, são soluções da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha f^+ + (1 - \alpha)f^- = f^0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.13)$$

¹¹Os métodos de regularização podem ser considerados como uma interpretação física do método de Filippov (Utkin et al., 1999).

onde $f^+ = f(t, x, u^+)$, $f^- = f(t, x, u^-)$ e f^0 é o vetor de velocidade das trajetórias $x \in S_i$, como mostra a Figura 3.4. Logo, da condição

$$\langle ds, f^0 \rangle = 0 \quad (3.14)$$

que estabelece que o vetor gradiente de s , ds , e o vetor de velocidade das trajetórias em modo deslizante, f^0 , devem ser ortogonais, resolvendo para α obtemos

$$\alpha = \frac{\langle ds, f^- \rangle}{\langle ds, (f^- - f^+) \rangle}, \quad (3.15)$$

desde que,

$$\langle ds, (f^- - f^+) \rangle > 0, \quad (3.16)$$

$$\langle ds, f^+ \rangle \leq 0, \quad (3.17)$$

$$\langle ds, f^- \rangle \geq 0, \quad (3.18)$$

em que a notação $\langle a, b \rangle$ denota o produto interno entre a e b . Assim, a partir de uma abordagem vetorial, é possível concluir que o sistema (3.1) com entrada de controle (3.2) e (3.3), possui uma única solução quando $s_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, m$, sempre que as condições de existência dos modos deslizantes estejam satisfeitas. É importante observar que o método de Filippov também pode ser usado para determinar o comportamento da planta em modo deslizante, i.e., as equações do sistema em modo deslizante.

3.5 Condições de Existência de Modos Deslizantes

Considerando um sistema de controle de estrutura variável, cuja forma geral é dada por (3.1), (3.2) e (3.3), a existência de modos deslizantes está condicionada à convergência das trajetórias de estado do sistema para as i -ésimas superfícies de chaveamento S_i ou no mínimo para alguma vizinhança. A maior das vizinhanças para a qual as trajetória de estados convergem é denominada *região de atração*. Logo, como visto no método de Fillipov, desde um ponto de vista vetorial, uma vez na região de atração, as derivadas no tempo dos vetores de estado do sistema devem ser ortogonais às i -ésimas superfícies de chaveamento. Assim, toda vez que os estados sofrerem desvios ou perturbações, tenderão a retornar a sua direção para as superfícies S_i . A partir disso, de DeCarlo et al. (1988) estabelece-se a seguinte definição.

Definição 2. *Um domínio D no espaço fechado S_i , é um domínio de modo deslizante se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que qualquer movimento iniciado dentro de uma vizinhança*

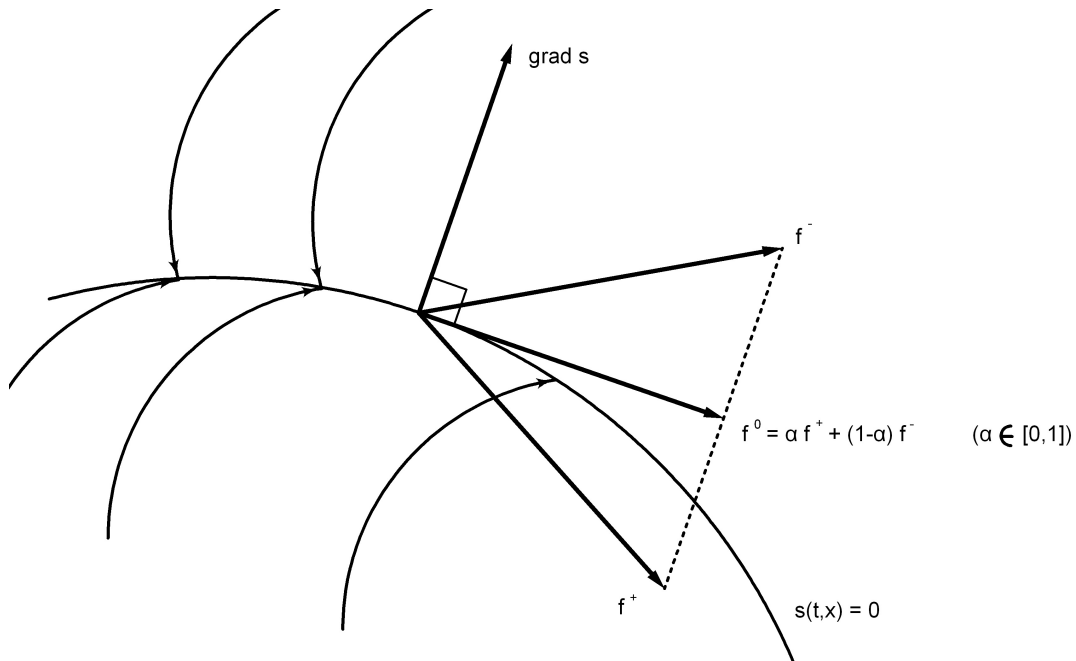


Figura 3.4: Ilustração do Método de Filippov para a determinação do vetor de velocidade desejada f^0 para movimento em modo deslizante.

n -dimensional δ de \mathbf{D} pode deixar a vizinhança n -dimensional ϵ de \mathbf{D} , somente através da vizinhança n -dimensional ϵ da fronteira de \mathbf{D} (ver Figura 3.5).

Devido a essa descrição, o problema de existência de modos deslizantes nas i -ésimas superfícies de descontinuidade assemelha-se a um problema de estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos, i.e., deseja-se que os estados de um sistema se aproximem de um determinado conjunto no espaço de estados à medida que $t \rightarrow \infty$. Porém, a distinção entre ambos problemas está apenas em que, no caso da estabilidade, este conjunto é simplesmente um ponto de equilíbrio e no caso da existência dos modos deslizantes, o conjunto é a variedade S_i . Dessa forma, uma condição suficiente para a existência de modos deslizantes é análoga à existência de uma função de Lyapunov para estabilidade geral de sistemas dinâmicos.

Assim, a partir do segundo método de Lyapunov, a existência de modos deslizantes no sistema requer a seleção de uma função candidata de Lyapunov $V(t, x, s)$, que seja definida positiva em sinal e que possua derivada negativa em relação ao tempo para uma determinada região de atração, como estabelece o seguinte teorema (DeCarlo et al., 1988).

Teorema 3.1. *Para o domínio \mathbf{D} , de dimensão $(n - m)$ ser o domínio de um modo deslizante, é suficiente que, para $\Omega \supset \mathbf{D}$, de dimensão n , exista uma função $V(t, x, s)$ diferenciável com respeito a todos os seus argumentos, satisfazendo as seguintes condições¹²:*

a) A função $V(t, x, s)$ é definida positiva¹³ em relação a s e na esfera $\|s\| = \kappa$, para todo

¹²A demonstração deste teorema está dada em (Utkin, 1978).

¹³Isto é, $V(t, x, s) > 0$ para $s \neq 0$ e t, x arbitrários, além de que $V(t, x, 0) = 0$.

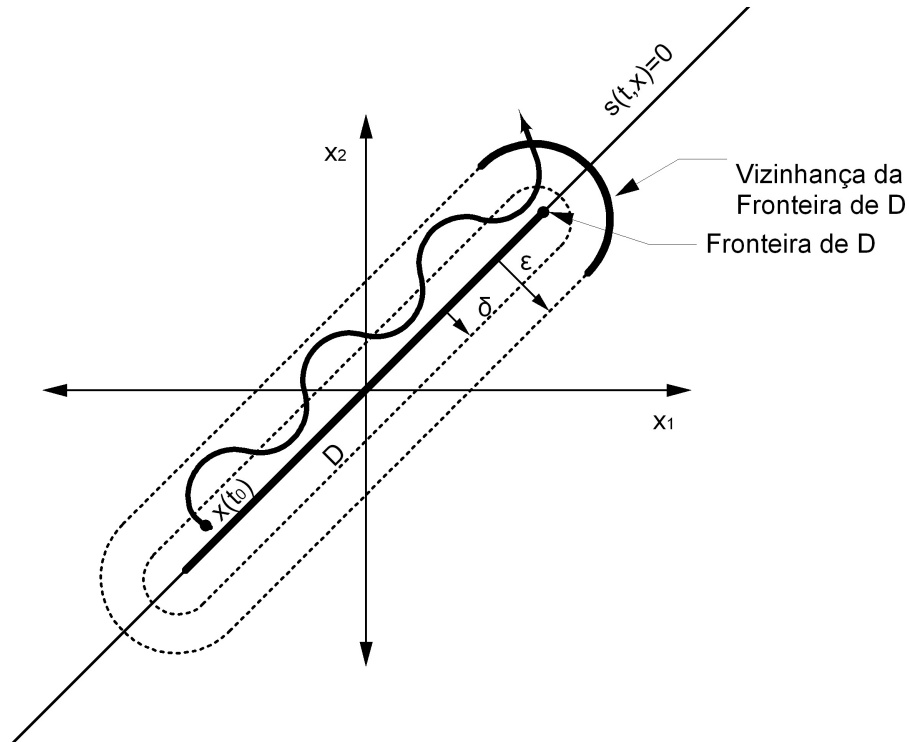


Figura 3.5: Ilustração bidimensional do domínio dos modos deslizantes.

$x \in \Omega$ e qualquer $t \in \mathfrak{R}$, as relações $\inf_{\|s\|=\kappa} V(t, x, s) = h_p$ e $\sup_{\|s\|=\kappa} V(t, x, s) = H_p$ (onde $h_p, H_p > 0$) se mantêm, sendo que h_κ e H_κ dependem de κ ($h_\kappa \neq 0$ se $\kappa \neq 0$).

- b) A derivada de $V(t, x, s)$ para o sistema (3.1), (3.2) e (3.3) possui um supremo negativo para todo $x \in \Omega$, exceto para x na superfície de chaveamento S_i , onde a derivada de $V(t, x, s)$ não existe, devido à descontinuidade em x da entrada de controle $u(t, x)$.

O modo deslizante será globalmente “alcançável” se o domínio de atração Ω , for todo o espaço de estados, de outra forma este será localmente estável e o domínio de atração Ω , será um subconjunto do espaço de estados. Por outro lado, a escolha da função de Lyapunov $V(t, x, s)$, determina a complexidade do cálculo do ganho de realimentação de um sistema CEV-MD. Para uma escolha errada da função de Lyapunov, o cálculo do ganho de realimentação pode resultar insustentável. A seguinte seção introduzirá os conceitos teóricos necessários para o projeto de controladores CEV-MD.

3.6 Metodologia de Projeto de Sistemas de Controle de Estrutura Variável por Modos Deslizantes (CEV-MD)

Desde que os sistemas de controle robusto possuem como principal objetivo de controle a garantia de insensibilidade a incertezas e distúrbios da planta (Oliveira, 2006). Qualquer

sistema de controle de estrutura variável (3.1) expresso na sua forma afim¹⁴,

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u(t, x), \quad (3.19)$$

tem o seu projeto de controle CEV-MD desenvolvido em duas etapas (DeCarlo et al., 1988; Utkin et al., 1999; Slotine e Li, 1991; Liu e Wang, 2012). A primeira etapa do projeto consiste na seleção da superfície de chaveamento, sendo que a mesma representa a dinâmica desejada a ser alcançada pelo sistema. Esta seleção deve ser realizada tal que a dinâmica do sistema quando reduzida ao movimento deslizante exiba as propriedades desejadas. Ou seja, a dinâmica do sistema na superfície de chaveamento deve expressar o movimento desejado em concordância com algum critério de desempenho. Neste estágio podem ser aplicados métodos da teoria convencional de controle, tais como a estabilização, o posicionamento de autovalores, e a otimização dinâmica.

O segundo estágio consiste na obtenção de uma lei de controle descontínua que produza modos deslizantes na interseção das superfícies de descontinuidade selecionadas para cada dimensão de controle¹⁵. Além disso, este controle descontínuo deve ser tal que os estados do sistema alcancem a variedade deslizante em tempo finito.

Em ambas as etapas se lida com problemas de baixa ordem e dimensão. Na primeira etapa, as superfícies selecionadas apresentam baixa ordem. E na segunda etapa do projeto, a dimensão do problema é igual ao número de superfícies descontínuas, a qual é usualmente igual à dimensão de controle. Dessa forma, o projeto é dissociado em dois subproblemas de baixa ordem e dimensão. A continuação são apresentados os conceitos envolvidos na construção de cada uma das etapas do projeto.

3.6.1 Seleção das Superfícies de Chaveamento

O Método do Controle Equivalente, introduzido por Utkin (1978) e Draženović (1969), fornece o conjunto de equações diferenciais de ordem reduzida que governa o movimento de sistemas CEV-MD sobre a superfície de chaveamento. Através desta técnica, a escolha dos parâmetros da superfície de chaveamento pode ser realizada de forma adequada, tal que o sistema em modo deslizante exiba o comportamento desejado. A única restrição enquanto à sua aplicação está em que a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \end{bmatrix} B(t, x)$ deve ser não singular. Por outro lado, para sistemas afins descritos na forma regular, a obtenção da equação dinâmica da superfície de chaveamento pode ser realizada de forma direta e sem restrições. Ambas as situações são brevemente abordada a seguir.

¹⁴Sistemas $\dot{x} = f(x, u)$, onde o lado direito da equação do movimento é descrito como uma função linear da entrada de controle u .

¹⁵No controle de posição, as dimensões de controle correspondem a cada grau de liberdade do sistema.

Método do Controle Equivalente

Para ilustração, considere a seguinte classe de sistemas afins, não lineares no vetor de estados $x(\cdot)$ e lineares no vetor de controle $u(\cdot)$,

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + B(t, x)u(t, x), \quad (3.20)$$

cuja entrada de controle $u(t, x)$ é definida como em (3.2) e (3.3). Além disso, assuma que as funções $f(t, x)$ e $B(t, x)$, são contínuas e possuem derivadas contínuas e limitadas com respeito a x .

Supondo que, no tempo t_0 , as trajetórias de estados do sistema interceptam as i -ésimas superfícies de chaveamento $s_i(x) = 0$, para $i = 1, \dots, m$, e que o modo deslizante exista para todo $t \geq t_0$, então, os conjuntos $S_i = \{x(t) \in \mathfrak{R}^n; s_i(x) = 0\}$ são invariantes para $t \geq t_0$, o que implica que as seguintes condições são satisfeitas

$$(i) \quad \dot{s}(x) = [\dot{s}_1(x), \dot{s}_2(x), \dots, \dot{s}_m(x)]^T = 0 \quad (3.21)$$

$$(ii) \quad s(x) = [s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x)]^T = 0, \forall t \geq t_0. \quad (3.22)$$

Logo, pela regra da cadeia, a condição (3.21) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] \dot{x} = 0, \quad (3.23)$$

onde $\frac{\partial s}{\partial x}$, é o gradiente do vetor $s(x) = [s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x)]^T$. Dessa forma, substituindo a equação dinâmica do sistema (3.20) nesta última, obtemos

$$\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] \dot{x} = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] [f(t, x) + B(t, x)u_{eq}] = 0. \quad (3.24)$$

E desde que a matriz $\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] B(t, x)$ é não singular $\forall t \in \mathfrak{R}, x \in \mathfrak{R}^n$, obtemos a lei de controle equivalente u_{eq} , que resolve (3.24), dada por

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial s}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(t, x). \quad (3.25)$$

Portanto, a substituição do controle u_{eq} na equação dinâmica da planta (3.20), produz a

dinâmica do sistema restrita às superfícies de chaveamento S_i , dada por

$$\dot{x} = \left[I - B(t, x) \left[\frac{\partial s}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f(t, x), \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.26)$$

cuja estrutura pode ser explorada de forma vantajosa na construção das equações $s_i(x) = 0$, para cada i -ésima dimensão de controle, onde $i = 1, \dots, m$. Dessa forma, através do método do controle equivalente, é possível determinar o conjunto de equações dinâmicas de ordem reduzida (3.26), que governa o movimento do sistema sobre as superfícies de chaveamento¹⁶ S_i .

Uma vez obtido este conjunto, a escolha dos parâmetros¹⁷ de $s_i(x) = 0$, é realizada em função da escolha dos parâmetros de (3.26), que expressam a dinâmica desejada do sistema (Utkin et al., 1999). Neste estágio, métodos como a estabilização, o posicionamento de autovalores e a otimização dinâmica, podem ser utilizados para a obtenção dos respectivos parâmetros da dinâmica desejada do sistema.

Logo, devido à dinâmica desejada ter de satisfazer não somente a equação n -dimensional (3.26), senão também as m equações algébricas $s_i(x) = 0$, produz-se uma redução de ordem na dinâmica do sistema.

Forma Regular

Considere a forma regular do sistema afim (3.20), dada por

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x) \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x) + B_2(t, x)u \quad (3.28)$$

onde $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathfrak{R}^m$, $B_2(t, x)$ é uma matriz não singular de ordem $m \times n$, e $u(t, x) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de entrada de controle definido por (3.2). Na forma regular, o bloco (3.27) não depende do controle u , e a dimensão do bloco (3.28) coincide com a dimensão de controle m .

Para a seleção das i -ésimas equações $s_i(x) = 0$, inicialmente o vetor m -dimensional x_2 é tomado como controle do bloco (3.27) e projetado em função do estado $(n-m)$ -dimensional x_1 ,

¹⁶É importante observar que a ilustração dada foi desenvolvida considerando superfícies de chaveamento invariantes no tempo.

¹⁷Quando as superfícies de chaveamento $s_i(x)$ são pré-selecionadas como uma funções lineares ou na forma de séries finitas.

em correspondência a algum critério de desempenho,

$$x_2 = -s_0(x_1). \quad (3.29)$$

Logo, visando atingir o objetivo de controle (3.29), o vetor que contém as superfícies de chaveamento $s(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}), \dots, s_m(\mathbf{x})]^T$, é selecionado como sendo

$$s(\mathbf{x}) = x_2 + s_0(x_1) = 0, \quad (3.30)$$

de forma que uma vez que o sistema alcançar as superfícies (3.30) e estiver em modos deslizantes, terá a sua dinâmica de ordem m-n expressa por

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, -s_0(x_1)). \quad (3.31)$$

Assim, para sistemas descritos na forma regular¹⁸, a seleção das superfícies (3.30) segue critérios de desempenho definidos em (3.29), que produzem dinâmicas desejadas do sistema de ordem reduzida (3.31). Por exemplo, na suposição de que a correspondência (3.29) seja de tipo linear, i.e., a superfície de chaveamento seja definida pela seguinte equação linear,

$$s(\mathbf{x}) = [S_1 \quad S_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.32)$$

onde S_2 é não singular, e de que f_1 possua a seguinte estrutura linear

$$f_1(t, \mathbf{x}) = A_{11}x_1 + A_{12}x_2. \quad (3.33)$$

A dinâmica de ordem reduzida do sistema (3.31) pode ser expressa por,

$$\dot{x}_1 = [A_{11} - A_{12}S_2^{-1}S_1]x_1, \quad (3.34)$$

que possui a estrutura de realimentação $A_{11} + A_{12}F$, onde $F = -S_2^{-1}S_1$ e A_{12} é a matriz de entrada. Logo, se o par (A_{11}, A_{12}) é controlável, então é possível utilizar técnicas de projeto de controle realimentado clássicas¹⁹ para calcular F , tal que $A_{11} + A_{12}F$ tenha as características desejadas, para que uma vez que F for encontrado, possa calcular-se $[S_1 \quad S_2]$ tal que $F = -S_2^{-1}S_1$, para completar a seleção das superfícies de chaveamento (3.32).

¹⁸Algoritmos de transformação de coordenadas para redução de sistemas afins às suas formas regulares, podem ser encontrados em Utkin et al. (1999).

¹⁹Como alocação de polos, controle ótimo linear, etc.

Como visto acima, em ambas abordagens de seleção das superfícies de chaveamento S_i , há garantia de redução de ordem do sistema em modo deslizante, porém nada é dito sobre a garantia de invariância. A seguir, serão apresentadas as condições suficientes para a invariância do sistema, quando este alcançar as superfícies S_i para cada $i = 1, \dots, m$ dimensão de controle.

Invariância sobre as Superfícies de Chaveamento

Para determinar as condições de invariância do sistema sobre as superfícies de chaveamento S_i , considere o seguinte sistema afim em u ,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) + B(t, \mathbf{x})u(t, \mathbf{x}) + d(t, \mathbf{x}) \quad (3.35)$$

onde a entrada de controle $u(t, \mathbf{x})$ é definida como em (3.2) e o vetor $d(t, \mathbf{x})$ é um vetor desconhecido que caracteriza distúrbios e variações de parâmetros, os quais não devem afetar a dinâmica do sistema CEV-MD, uma vez que este se encontra em modo deslizante. Dessa forma, a partir do método do controle equivalente, substituindo a dinâmica do sistema em laço aberto (3.35) na condição de invariância (3.21), temos

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} [f(t, \mathbf{x}) + B(t, \mathbf{x})u_{eq} + d(t, \mathbf{x})] = 0, \quad (3.36)$$

onde o controle equivalente u_{eq} , é dado por

$$u_{eq} = - \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} [f(t, \mathbf{x}) + d(t, \mathbf{x})]. \quad (3.37)$$

O qual produz a seguinte dinâmica do sistema em laço fechado,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) - B \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} f(t, \mathbf{x}) + \left(I_n - B \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} B \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \right) d(t, \mathbf{x}). \quad (3.38)$$

Seja $range [B(t, \mathbf{x})]$ um subespaço formado pelos vetores base da matriz $B(t, \mathbf{x})$ em cada ponto (t, \mathbf{x}) . Logo, o sistema em modo deslizante será invariante com respeito ao vetor $d(t, \mathbf{x})$ desde que,

$$d(t, \mathbf{x}) \in range [B(t, \mathbf{x})]. \quad (3.39)$$

Dessa forma, a condição²⁰ (3.39) implica que existe um vetor $\gamma(t, \mathbf{x})$ tal que,

$$d(t, \mathbf{x}) = B(t, \mathbf{x})\gamma(t, \mathbf{x}), \quad (3.40)$$

e pela substituição direta de (3.40) em (3.38), temos que a dinâmica do sistema em modo deslizando,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) - B \left(\left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \right] B \right)^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \right] f(t, \mathbf{x}) + \left(I_n - B \left(\left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \right] B \right)^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) B\gamma, \quad (3.41)$$

não depende do vetor de perturbação $d(t, \mathbf{x})$, para qualquer seleção das superfícies S_i . Além disso, como será mostrado na seguinte seção, para produzir modos deslizantes no sistema é necessária uma estimativa superior do vetor (3.40).

A continuação, serão apresentados os conceitos que envolvem a segunda etapa do projeto de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD). A qual consiste na seleção de uma lei de controle descontínua que satisfaça as condições de existência dos modos deslizantes e provoque convergência das trajetórias de estado do sistema para as superfícies de chaveamento S_i selecionadas para produzir a dinâmica desejada do sistema segundo critérios de desempenho.

3.6.2 Seleção da Lei de Controle Descontínua

Como exposto na seção 3.5, devido a que o problema da existência dos modos deslizantes nas superfícies de chaveamento S_i é análogo ao problema de estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos²¹, a existência dos modos deslizantes num sistema de estrutura variável, (3.1) e (3.2), reduz-se a um problema de estabilização de primeira ordem das superfícies descontínuas S_i .

Dessa forma, no projeto de controladores CEV-MD, a lei de controle deve ser encontrada tal que as condições de existência dos modos deslizantes para sistemas de estrutura variável, estabelecidas no Teorema 3.1, sejam satisfeitas. Estas condições, garantem a convergência das trajetórias do sistema para as superfícies S_i , em tempo finito, i.e., a derivada da função de Lyapunov $V(t, \mathbf{x}, s)$ para o sistema (3.1) e (3.2), satisfaz

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}, s) < -\nu_0 < 0 \quad (3.42)$$

²⁰A condição (3.40), é uma generalização da condição de invariância obtida para sistemas lineares em Draženović (1969).

²¹Isto é, é análogo à existência de uma função de Lyapunov generalizada para sistemas dinâmicos.

onde ν_0 é uma constante estritamente positiva. Logo, uma vez satisfeita a condição (3.42), é possível garantir que para todo $x(t) \notin S_i$ quando $t = 0$, as trajetórias do sistema convergirão para S_i após um período de tempo transitório finito.

A literatura utiliza diversas técnicas para a seleção da lei de controle descontínua, como a Diagonalização, que converte o problema da seleção da entrada de controle de dimensão m , em m subproblemas de seleção de uma entrada controle unidimensional; a Hierarquia de controle; o Controle equivalente, cuja lei de controle está composta por dois termos, um contínuo e outro descontínuo; a Estabilidade entrada-saída, que assume entradas e saídas do sistema limitadas; o Controle adaptativo Híbrido, que além da lei descontínua utiliza uma lei de adaptação dos parâmetros do sistema; entre outros.

Além das técnicas citadas, outras estruturas simples para a lei de controle são a função relé com ganho constante, a função relé com ganho dependente do estado, a realimentação linear com ganho chaveado, a realimentação linear contínua e o controle unitário (DeCarlo et al., 1988).

Em todas estas técnicas, a seleção da entrada de realimentação é feita tal que o sistema em laço aberto alcance os modos deslizantes, i.e., a dinâmica desejada, em tempo finito. No capítulo 4, são apresentadas quatro estratégias convencionais de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD), as quais foram desenvolvidas de forma a satisfazer as condições de estabilidade da superfície descontínua S_i , estabelecidas no Teorema 3.1.

3.7 O problema do *Chattering*

Em sistemas de estrutura variável, a entrada de controle pode ser chaveada de um valor para outro com uma frequência extremamente elevada. Entretanto, a implementação prática destes chaveamentos e das frequências de amostragem são limitadas por causa de atrasos correspondentes ao tempo de conversão analógica/digital (A/D), digital/analógica (D/A), ao tempo de processamento do algoritmo de controle e aos tempos de resposta dos sensores e atuadores (Guedes, 2010). Por esses motivos e devido a dinâmicas não modeladas do sistema excitadas pelos chaveamentos não ideais surge o fenômeno do *chattering* durante a operação em modos deslizantes. O termo *chattering* descreve o fenômeno de oscilações das trajetórias de estado a uma frequência finita elevada e a uma amplitude finita.

Entre os métodos de redução e eliminação do fenômeno do *chattering* citados por Utkin et al. (1999) estão: O método baseado na camada limite, o método baseado no observador, a forma regular, a rejeição do distúrbio, o método do ganho dependente do estado e método do ganho dependente do controle equivalente. Algumas técnicas utilizadas nestes métodos são: A inclusão de filtros passa-baixa entre a saída do controlador e a entrada de controle do motor, a substituição do relé ideal por uma função do tipo saturação para possibilitar uma

implementação real, o uso de um termo integral na saída do controlador para forçar a condição de erro nulo no sistema em regime permanente e por último, é possível utilizar uma região de fronteira de largura ajustável, a qual dependendo da sua escolha criará um compromisso entre a redução do *chattering* e a robustez do sistema. Nos últimos anos, a literatura tem abordado novos tratamentos ao fenômeno do *chattering*, os quais utilizam técnicas de lógica difusa e redes neurais no projeto de controladores CEV-MD.

Para a eliminação do fenômeno do *chattering* nos projetos de controle desenvolvidos no capítulo (4), foi empregada uma abordagem proposta por Slotine e Li (1991), a qual objetiva a substituição do relé ideal por uma função saturação para uma região de fronteira de largura ajustável, outorgando uma estrutura de filtro passa-baixa para as dinâmicas de s . Esta abordagem é denominada Método da Camada Limite.

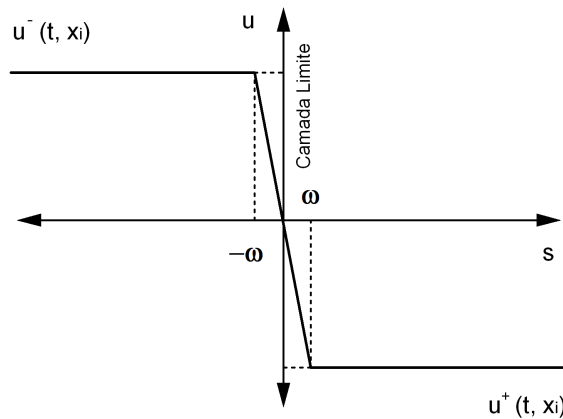


Figura 3.6: Interpolação da ação de controle descontínua $u(t, x)$.

3.7.1 Método da Camada Limite

A eliminação do problema do *chattering* pode ser alcançada geralmente suavizando a descontinuidade da lei de controle para uma camada limite fina nas vizinhanças da superfície de chaveamento,

$$B(t) = \{x \in \mathbb{R}^n, |s(t, x)| \leq \omega\}; \quad \omega > 0 \quad (3.43)$$

onde ω é a espessura da camada limite, n é a ordem do sistema, $\epsilon = \omega/\lambda^{n-1}$ é a largura da camada limite e λ é a largura de banda de controle²², como mostra a Figura 3.7, no caso de um sistema de ordem $n = 2$.

Isto é, fora da camada limite a lei de controle descontínua satisfará as condições de existência e alcançabilidade dos modos deslizantes e dentro da camada limite a lei de controle

²²A largura de banda de controle é definida como a frequência máxima com que a saída de um sistema rastreia uma senoide de entrada de forma satisfatória (Franklin et al., 2013).

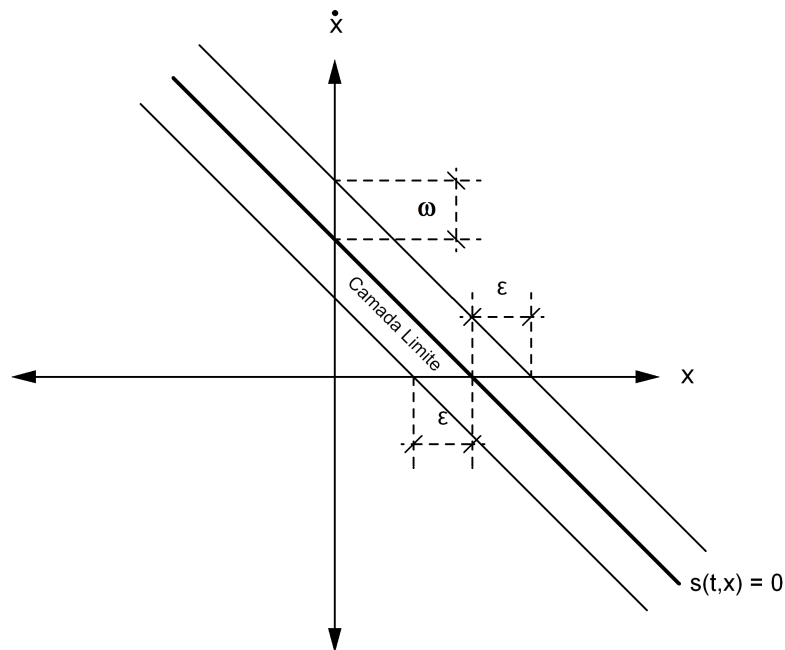


Figura 3.7: Espessura ω , e largura ϵ da camada limite.

descontínua será suavizada para evitar o fenômeno do *chattering*. Devido a uma relação inversa existente neste método entre a espessura da camada limite ω e a largura de banda de controle λ , quanto maior a espessura da camada limite, ω , maior a redução ou até mesmo eliminação do *chattering*, porém menor a largura de banda de controle λ e por tanto menor a robustez de controle (Yoerger e Slotine, 1985). Outras abordagens sobre a eliminação do *chattering* em controladores CEV-MD podem ser encontradas em Salgado-Jimenez e Jouvencel (2003), Rhif et al. (2013), Lakhekar e Saundarmal (2013) e Kim e Yuh (2001) entre outros.

3.8 Conclusão

Neste capítulo foi abordada a teoria de sistemas de controle de estrutura variável por modos deslizantes (CEV-MD). Os quais se apresentam como um tipo de solução de sistemas de estrutura variável (SEV) (Cunha, 2002). Um sistema de controle CEV-MD é projetado de forma que o sistema em laço fechado apresente um novo tipo de movimento invariante e de ordem reduzida, denominado modo deslizante.

Inicialmente foi exposta a ideia principal deste tipo de sistemas de controle. A qual consiste em outorgar ao sistema realimentado, uma redução de ordem e garantia de invariância, assim como um desacoplamento da sua equação dinâmica. Assim, uma vez atingida a dinâmica desejada, os sistemas de controle CEV-MD garantem uma robustez a não linearidades, variações paramétricas, dinâmicas não modeladas e distúrbios da planta.

A partir dessa ideia, a metodologia de projeto de controladores CEV-MD se divide em duas etapas. A primeira etapa consiste na seleção da equação da superfície de chaveamento, pois esta representa a dinâmica desejada a ser alcançada pelo sistema em laço fechado. A segunda etapa consiste na seleção da lei de controle descontínua, necessária para produzir a convergência das trajetórias do sistema para a dinâmica desejada do sistema em laço fechado.

A Teoria de estabilidade de Lyapunov assume um papel importante na segunda etapa do projeto de controladores CEV-MD, pois como visto na seção 3.5, o problema da convergência das trajetórias do sistema para a superfície de chaveamento é análogo a um problema de estabilização de primeira ordem de sistemas dinâmicos. Dessa forma, esta teoria fornece ferramentas suficientes para garantir a existência de modos deslizantes em qualquer sistema de controle de estrutura variável.

O próximo capítulo apresenta quatro projetos de controle de posição CEV-MD diferentes aplicados a veículos subaquáticos autônomos (VSA). As estratégias de controle utilizadas nos respectivos projetos de controle são: O controle CEV-MD baseado na lei de alcance, o controle CEV-MD baseado no controle equivalente, o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída e o controle CEV-MD adaptativo.

Capítulo 4

Projetos de Controle de Posição CEV-MD Aplicados a Veículos Subaquáticos Autônomos (VSA)

Neste capítulo são apresentadas quatro estratégias diferentes de controle de posição de sistemas de estrutura variável por modos deslizantes aplicadas a um veículo subaquático autônomo (VSA). Seguindo a metodologia de projetos de controle CEV-MD dada na seção 3.6, inicialmente, na seção 4.1, é apresentada a seleção das m superfícies de chaveamento que expressam a dinâmica desejada do sistema para cada dimensão de controle $i = 1, \dots, m$. Dessa forma, a seleção das superfícies de chaveamento, para o controle de posição de sistemas mecânicos¹, deve satisfazer critérios de desempenho que garantam um rastreamento satisfatório da posição desejada para cada dimensão de controle ou grau de liberdade do sistema.

Nas seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, são selecionadas as correspondentes leis de controle CEV-MD de forma a satisfazer as condições de existência dos modos deslizantes dadas na seção 3.5. Assim, a partir dessas escolhas, é possível garantir a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para a superfície de chaveamento selecionada em 4.1. Além disso, na seção 4.6, o método da camada limite é utilizado para suavizar as respectivas leis de controle CEV-MD apresentadas com o objetivo de evitar o problema do *chattering*. E para finalizar, na seção 4.7 são emitidas as respectivas conclusões do capítulo.

4.1 Seleção das Superfícies de Chaveamento

No projeto de controle de posição CEV-MD de um sistema mecânico qualquer, as superfícies de chaveamento devem estar definidas em termos de desempenho de rastreamento do sistema ao tempo de possuir uma dinâmica interna estável (Slotine e Li, 1991). Considerando

¹A análise de sistemas mecânicos envolve praticamente dois tipos distintos de movimentos: translacional e rotacional.

de forma genérica o seguinte sistema dinâmico afim,

$$\mathbf{x}_i^{(n)} = f_i(\mathbf{x}) + B_i(\mathbf{x})u \quad (4.1)$$

onde n é a ordem do sistema, $\mathbf{x}_i = [x_i \dot{x}_i \cdots x_i^{(n-1)}]^T \in \mathfrak{R}^n$ é o i -ésimo vetor de estados, $i = 1, \dots, m$ é o i -ésimo grau de liberdade do sistema, $u \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada de controle, m é a dimensão de controle e x_i é a i -ésima variável de estado. Tipicamente, a inércia de um sistema mecânico qualquer é conhecida somente sob certa precisão e os modelos que descrevem a fricção somente descrevem parte das forças de fricção reais que agem num determinado sistema mecânico. Devido a essas e outras características, considera-se que na equação (4.1), a i -ésima função f_i é não linear e desconhecida, porém limitada por uma função conhecida e contínua em \mathbf{x} . De forma similar, assume-se que o ganho de controle B_i é desconhecido, porém limitado por uma função conhecida e contínua em \mathbf{x} . Além disso, para que o i -ésimo estado $\mathbf{x}_i(t)$ rastreie um determinado estado desejado $\mathbf{x}_{d_i}(t)$, variante no tempo, na presença de imprecisões de modelagem em f_i e B_i , a seguinte condição deve ser satisfeita,

$$\mathbf{x}_{d_i}(0) = \mathbf{x}_i(0). \quad (4.2)$$

Isto significa que, por exemplo para um sistema de segunda ordem, no tempo inicial $t = 0$, as posições e velocidades atuais não podem simplesmente “saltar” e alcançar as posições e velocidades desejadas para cada grau de liberdade. De modo que, qualquer trajetória desejada factível desde o tempo inicial $t = 0$, necessariamente deve iniciar com posições e velocidades iguais às da planta. Caso contrário, o rastreamento só poderá ser alcançado após um período de tempo transitório. Logo, uma vez satisfeita a condição (4.2), de Slotine e Li (1991) temos que a partir da função de medição² do erro de rastreamento $s_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, dada por

$$s_i(t, \mathbf{x}_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \right)^{n-1} \tilde{x}_i \quad (4.3)$$

onde $\tilde{x}_i = x_i - x_{d_i}$, são os i -ésimos erros de posição e λ_i , são escalares estritamente positivos tal que a matriz $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ satisfaça a condição de Hurwitz. As i -ésimas superfícies de chaveamento podem ser definidas no espaço de estados \mathfrak{R}^n por,

$$s_i(t, \mathbf{x}_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \right)^{n-1} \tilde{x}_i = 0, \quad (4.4)$$

em que o i -ésimo erro de rastreamento \tilde{x}_i , tende exponencialmente a zero através de uma sequência de $(n - 1)$ filtros passa-baixa de constante de tempo $1/\lambda$. Assim, uma vez que

²Denominada função de medição devido a que, quando $s_i(t, \mathbf{x}) \neq 0$, a função escalar s_i denotará a distância de s_i para a superfície deslizante $s_i(t, \mathbf{x}) = 0$.

as trajetórias de estado atingem a superfície de chaveamento $S_i = \{\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^n / s_i(t, \mathbf{x}_i) = 0\}$, os erros de rastreamento tendem exponencialmente a zero com constante de tempo $(n - 1)/\lambda_i$.

Dessa forma, uma vez satisfeita a condição (4.2), o problema de rastreamento $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_{d_i}(t)$, é equivalente ao problema de manter os estados sobre a superfície S_i , para todo $t > 0$. Isto é, o problema de alcançar um erro de rastreamento nulo $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = 0$, é equivalente ao problema de manter a i -ésima quantidade escalar s_i em zero. Sendo assim, o problema original de rastreamento de ordem n pode ser substituído por um problema de estabilização em s_i de grau relativo³ 1.

Pela definição (4.3), os erros de posição \tilde{x}_i são obtidos a partir de s_i , através de uma sequência de $(n - 1)$ filtros passa-baixa de primeira ordem. Logo, por decorrência, as j -ésimas derivadas $\tilde{x}_i^{(j)}$, também podem ser obtidas a partir de s_i através de uma sequência de $n - (j + 1)$ filtros passa-baixa de primeira ordem, para $j = 0, \dots, n - 1$. Portanto, limites na função s_i podem ser diretamente traduzidos em limites no vetor de erro de rastreamento $\tilde{\mathbf{x}}_i = [\tilde{x}_i \ \tilde{x}_i^{(1)} \ \dots \ \tilde{x}_i^{(j)} \ \dots \ \tilde{x}_i^{(n-1)}]^T$, fazendo que o escalar s_i represente uma medida real de desempenho de rastreamento. Especificamente, uma vez satisfeita a condição⁴ (4.2), de Utkin et al. (1999) temos que as correspondentes transformações de medidas de desempenho podem ser quantificadas a partir de,

$$\forall t \geq 0, \quad |s_i(t)| \leq \omega_i \quad \Rightarrow \quad |\tilde{x}_i^{(j)}(t)| \leq (2\lambda_i)^j \epsilon_i \quad j = 0, \dots, n - 1, \quad (4.5)$$

em que $\epsilon_i = \omega_i / \lambda_i^{n-1}$ e ω_i é um escalar estritamente positivo. A partir disso, o problema de primeira ordem de manter o escalar s_i em zero pode ser tratado através da escolha da lei de controle u em (4.1), que satisfaça as condições de existência dos modos deslizantes no sistema. É importante também notar que as condições de existência dos modos deslizantes, dadas no Teorema 3.1, não só garantem a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para as i -ésimas superfícies de chaveamento S_i , mas também transformam os conjuntos S_i em *conjuntos invariantes*. Por tal motivo, a dinâmica do sistema em modos deslizantes é expressa pelas próprias equações das superfícies de chaveamento S_i

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^{n-1} \tilde{x}_i = 0, \quad (4.6)$$

que além de caracterizar uma dinâmica, também caracterizam um lugar geométrico. Contudo, quando a condição inicial (4.2) não for satisfeita, as condições de estabilidade estabelecidas no Teorema 3.1, irão garantir a convergência das trajetórias do sistema para a superfície S_i em um

³Isto porque, desde que em (4.3), a expressão de s contém $\tilde{x}^{(n-1)}$, somente é preciso diferenciar em (4.3) uma vez para que a entrada de controle, u , apareça na expressão.

⁴No caso da condição inicial $\tilde{\mathbf{x}}(0) \neq 0$, os limites (4.5) são obtidos assintoticamente, i.e., dentro de uma constante de tempo curta $(n - 1)/\lambda$.

tempo finito menor do que $|s_i(0, \mathbf{x}_i)|/\mu$, onde μ é uma constante estritamente positiva. Esta fase de convergência para as superfícies S_i em tempo finito é denominada *fase de alcance*, e nela não há garantia de robustez no sistema. Por tal motivo, existe um elevado esforço de controle necessário para lidar com as incertezas do sistema. Para tratar este problema, os sistemas CEV-MD com superfícies de chaveamento de tipo integral, procuram eliminar a fase de alcance a fim de outorgar garantia de robustez ao sistema, para qualquer condição inicial dada.

4.1.1 Superfícies de Chaveamento de Tipo Integral

A robustez de um sistema CEV-MD é garantida somente quando este se encontra em modos deslizantes. Entretanto, durante a fase de alcance dos modos deslizantes, não há garantia de robustez no sistema. Os sistemas CEV-MD com superfícies de chaveamento de tipo integral, procuram eliminar a fase de alcance, forçando a existência de modos deslizantes durante toda a resposta do sistema (Utkin et al., 1999).

Nas superfícies de chaveamento de tipo integral, o termo integral $\int \tilde{x}_i dt$ substitui a pela variável controlada \tilde{x}_i , com o qual o sistema (4.1) passa a ter ordem $n + 1$. Assim, a partir de (4.3), o vetor de funções de medição do erro de rastreamento é dado por

$$s_{I_i}(t, \mathbf{x}_i) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^n \int \tilde{x}_i dt. \quad (4.7)$$

Com isso, as i -ésimas superfícies de chaveamento de tipo integral selecionadas para expressar a dinâmica desejada de rastreamento de posição de um determinado sistema mecânico, são dadas por

$$s_{I_i}(t, \mathbf{x}_i) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i \right)^n \int \tilde{x}_i dt = 0. \quad (4.8)$$

Portanto, os sistemas CEV-MD com superfícies de chaveamento de tipo integral não apresentam redução de ordem em modos deslizantes, devido à utilização do termo integral $\int \tilde{x}_i dt$ nas i -ésimas superfícies S_i . No entanto, este termo garante robustez de rastreamento, para qualquer condição inicial $\mathbf{x}_i(0)$. Na seguinte subseção, os vetores (4.7) e (4.8) são aplicados ao rastreamento de posição de um veículo subaquático autônomo (VSA).

4.1.2 Superfícies de Chaveamento para o Rastreamento de Posição de um Veículo Subaquático Autônomo (VSA)

A partir da modelagem cinemática e dinâmica do movimento de um veículo subaquático autônomo (VSA) expressa pelas equações (2.15) e (2.2) respectivamente, e a partir de (4.7),

o vetor de medição dos erros de rastreamento do sistema CEV-MD aplicado ao controle de posição de um VSA, pode ser definido por

$$s_I(t, \eta) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \int \tilde{\eta} dt, \quad (4.9)$$

onde $\tilde{\eta} = \eta - \eta_d$ é o vetor erro de posições, $\eta = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$ é o vetor de posições atuais, $\eta_d = [x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d]^T$ é o vetor de posições desejadas e $\lambda > 0$, é uma matriz escalar de dimensão adequada que satisfaz as condições de Hurwitz. Desenvolvendo em (4.9) obtemos,

$$s_I(t, \eta) = \dot{\tilde{\eta}} + 2\lambda\tilde{\eta} + \lambda^2 \int \tilde{\eta} dt. \quad (4.10)$$

Para facilitar a manipulação algébrica na seleção das leis de controle CEV-MD apresentadas nas seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, é introduzida a variável auxiliar η_r , denominada *variável virtual*. A qual é definida tal que o vetor de funções de medição (4.10) seja expresso como

$$s_I(t, \eta) = \dot{\eta} - \dot{\eta}_r, \quad (4.11)$$

onde, $\dot{\eta}_r = -\dot{\eta}_d - 2\lambda\tilde{\eta} - \lambda^2 \int \tilde{\eta} dt$ é o vetor de velocidades virtuais, $\dot{\eta}_d$ é o vetor de velocidades desejadas, $\dot{\eta}$ é o vetor de velocidades atuais e $\tilde{\eta}$ é o vetor de erros de posição do veículo. Logo, a diferencial no tempo do vetor (4.11) é dada por,

$$\dot{s}_I(t, \eta) = \ddot{\eta} - \ddot{\eta}_r, \quad (4.12)$$

onde $\ddot{\eta}_r = -\ddot{\eta}_d - 2\lambda\dot{\tilde{\eta}} - \lambda^2\tilde{\eta}$ é o vetor de acelerações virtuais, $\ddot{\eta}_d$ é o vetor de acelerações desejadas, $\ddot{\eta}$ é o vetor de acelerações atuais e $\dot{\tilde{\eta}}$ é o vetor de erros de velocidades. Dessa forma, o vetor de superfícies de chaveamento de tipo integral que descreve a dinâmica desejada de rastreamento de posição do VSA, é dado por

$$s_I(t, \eta) = \dot{\eta} - \dot{\eta}_r = 0. \quad (4.13)$$

Além disso, considerando que no Capítulo 2, a modelagem matemática do movimento do veículo é desenvolvida utilizando dois sistemas de coordenadas de referência: um inercial para a cinemática e um fixo ao corpo para a dinâmica, e que o vetor de posições atuais η , está definido no referencial inercial, as i -ésimas superfícies de chaveamento (4.13) também estão definidas no referencial inercial. Logo, através da utilização dos Ângulos de Euler, apresentados com maior detalhe no Capítulo 2, é possível realizar uma transformação de referencial do vetor (4.13) para o referencial do corpo, como mostra a seguinte subseção.

4.1.3 Transformação de Referencial das Superfícies de Chaveamento

Nas seções 4.2, 4.3 e 4.4, a seleção das respectivas leis de controle CEV-MD é realizada a partir da dinâmica do veículo no referencial do corpo (2.2) e a partir de condições de estabilidade nas i -ésimas superfícies de chaveamento. Devido a isso, o vetor de superfícies de chaveamento do veículo no referencial inercial (4.11), deve ser transformado para o referencial do corpo. Assim, utilizando a matriz não singular de transformação de referenciais J , definida em (2.3), temos que

$$s_I(t, \nu) = J^{-1}(\eta)s_I(t, \eta), \quad (4.14)$$

é o vetor de medição do erro de rastreamento do veículo no referencial do corpo. Logo, substituindo (4.11) em (4.14), obtemos

$$s_I(t, \nu) = \nu - \nu_r, \quad (4.15)$$

onde ν e ν_r são os vetores de velocidades atuais e virtuais no referencial do corpo respectivamente, são dados por

$$\nu = J^{-1}(\eta)\dot{\eta} \quad \text{e} \quad \nu_r = J^{-1}(\eta)\dot{\eta}_r. \quad (4.16)$$

Logo, aplicando a regra da cadeia em (4.16), temos que

$$\dot{\nu} = J^{-1}(\eta) \left[\ddot{\eta} - \dot{J}(\eta)J^{-1}(\eta)\dot{\eta} \right] \quad \text{e} \quad \dot{\nu}_r = J^{-1}(\eta) \left[\ddot{\eta}_r - \dot{J}(\eta)J^{-1}(\eta)\dot{\eta}_r \right], \quad (4.17)$$

são os vetores de acelerações atuais e virtuais do veículo no referencial do corpo respectivamente, onde \dot{J} é a diferencial no tempo da matriz de transformação de referencial⁵ J . Assim temos que

$$\dot{s}_I(t, \nu) = \dot{\nu} - \dot{\nu}_r, \quad (4.18)$$

é a diferencial no tempo do vetor de funções de medição s_I . Portanto, nas seções 4.2, 4.3 e 4.4, a seleção das leis de controle CEV-MD no referencial do corpo é realizada de forma a satisfazer as condições de estabilidade em s_I estabelecidas no Teorema 3.1. Assim, uma vez

⁵A matriz J possui elementos limitados e diferenciáveis $\forall [\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^3 - \left\{ [0, \frac{\pi}{2}, 0]^T \right\}$, os quais dependem de funções trigonométricas periódicas.

que a convergência do vetor s_I para zero seja garantida tem-se que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_I(t, \eta) = 0. \quad (4.19)$$

Logo, a partir de (4.14) e (4.19), a convergência do vetor s_I para zero, no referencial inercial, também será garantida

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_I(t, \nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} J(\eta) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} s_I(t, \nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} J(\eta) \cdot 0 = 0, \quad (4.20)$$

desde que a matriz J é limitada. Portanto, uma vez que (4.19) seja satisfeita, por decorrência (4.20) também será satisfeita. E a convergência do vetor s_I para zero, no referencial inercial, também será garantida.

Nas seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, são apresentadas quatro estratégias diferentes de controle de posição CEV-MD aplicadas a um veículo subaquático autônomo (VSA). Estas são o controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade de Lyapunov, o controle CEV-MD baseado no controle equivalente, o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída e o controle CEV-MD adaptativo respectivamente.

4.2 Controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov

Nesta seção, a lei de controle CEV-MD é obtida diretamente de forma a satisfazer as condições de existência dos modos deslizantes para um determinado domínio do espaço de estados definido pela função de Lyapunov selecionada. Para tal segue a prova de estabilidade.

4.2.1 Prova de Estabilidade

Seja a seguinte função candidata como de Lyapunov

$$V(t, s_I) = \frac{1}{2} s_I^T M s_I, \quad (4.21)$$

onde $M = M^T > 0$ é a matriz de inércia⁶ da dinâmica do veículo (2.15) e s_I é o vetor de

⁶Pelas características hidrodinâmicas do veículo, a matriz de inércia M , é uma matriz simétrica e definida positiva. Para mais detalhes ver o Capítulo 2

medição dos erros de rastreamento. Diferenciando (4.21) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{V}(t, s_I) = \frac{1}{2} \left(\dot{s}_I^T M s_I + s_I^T \dot{M} s_I + s_I^T M \dot{s}_I \right), \quad (4.22)$$

e devido à propriedade simétrica da matriz M , temos que $\dot{s}_I^T M s_I = s_I^T M \dot{s}_I$. Dessa forma, a diferencial (4.22) pode ser reescrita como,

$$\dot{V}(t, s_I) = s_I^T M \dot{s}_I + \frac{1}{2} s_I^T \dot{M} s_I. \quad (4.23)$$

Além disso, somando $s_I^T [C(\nu_R) - C(\nu_R)] s_I$ em ambos os lados de (4.23), obtemos

$$\dot{V}(t, s_I) = s_I^T [M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I] + \frac{1}{2} s_I^T [\dot{M} - 2C(\nu_R)] s_I, \quad (4.24)$$

onde $C(\nu_R)$ é a matriz de Coriolis e centrípeta da equação dinâmica do veículo (2.15), que a partir das características hidrodinâmicas do veículo, satisfaz a propriedade

$$s_I^T [\dot{M} - 2C(\nu_R)] s_I = 0. \quad (4.25)$$

Sendo assim, substituindo (4.25) em (4.24) temos que

$$\dot{V}(t, s_I) = s_I^T [M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I]. \quad (4.26)$$

Por outro lado, a partir de (2.2), (2.16), (4.15) e (4.18) é possível obter a seguinte expressão para $M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I$,

$$\begin{aligned} M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I &= \tau + \tau_d - D(\nu_R) s_I - M \dot{\nu}_r - C(\nu_R) \nu_r - D(\nu_R) \nu_r - g \\ &\quad + C(\nu_R) \nu_c + D(\nu_R) \nu_c, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $D(\nu_R)$ é a matriz de amortecimento hidrodinâmico, $\nu_R = \nu - \nu_c$ é o vetor de velocidades relativas e ν_c é o vetor de velocidades das correntes marinhas no referencial do corpo. Substituindo (4.27) em (4.26), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) &= -s_I^T D(\nu_R) s_I + s_I^T [\tau + \tau_d - M \dot{\nu}_r - C(\nu_R) \nu_r - D(\nu_R) \nu_r - g + \\ &\quad + C(\nu_R) \nu_c + D(\nu_R) \nu_c]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dessa forma, selecionando a lei de controle τ , como sendo

$$\begin{aligned} \tau = & \hat{M}\dot{\nu}_r + \hat{C}(\nu_R)\nu_r + \hat{D}(\nu_R)\nu_r + \hat{g} - \hat{C}(\nu_R)\nu_c - \hat{D}(\nu_R)\nu_c - \\ & -K \operatorname{sgn}(s_I), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde \hat{M} , $\hat{C}(\nu_R)$, $\hat{D}(\nu_R)$, \hat{g} são estimativas paramétricas das matrizes desconhecidas M , $C(\nu_R)$, $D(\nu_R)$, g respectivamente e $K > 0$ é a matriz escalar de ganho de controle, produz-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) = & -s_I^T D(\nu_R)s_I + s_I^T [\tau_d + \tilde{M}\dot{\nu}_r + \tilde{C}(\nu_R)\nu_r + \tilde{D}(\nu_R)\nu_r + \tilde{g} - \\ & -\tilde{C}(\nu_R)\nu_c - \tilde{D}(\nu_R)\nu_c - K \operatorname{sgn}(s_I)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

em que $\tilde{M} = (\hat{M} - M)$, $\tilde{C} = (\hat{C} - C)$, $\tilde{D} = (\hat{D} - D)$ e $\tilde{g} = (\hat{g} - g)$ são matrizes de erros paramétricos. Além disso, fazendo

$$h(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta) = \tilde{M}\dot{\nu}_r + \tilde{C}(\nu_R)\nu_r + \tilde{D}(\nu_R)\nu_r + \tilde{g} - \tilde{C}(\nu_R)\nu_c - \tilde{D}(\nu_R)\nu_c, \quad (4.31)$$

e desde que $s_I^T K \operatorname{sgn}(s_I) = |s_I^T|K$, a diferencial (4.30) pode ser reescrita como

$$\dot{V}(t, s_I) = -s_I^T D(\nu_R)s_I + s_I^T \tau_d + s_I^T h(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta) - |s_I^T|K, \quad (4.32)$$

que satisfaz,

$$\dot{V}(t, s_I) \leq -s_I^T D(\nu_R)s_I + |s_I^T| [|\tau_d| + |h(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)| - K]. \quad (4.33)$$

Logo, estabelecendo o ganho de controle K como sendo,

$$K > \tau_{d_{max}} + F(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta) + \mu, \quad \mu > 0 \quad (4.34)$$

onde $\tau_{d_{max}}$ e F são funções conhecidas que satisfazem $|\tau_d| \leq \tau_{d_{max}}$ e $|h(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)| \leq F(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)$ respectivamente, e substituindo (4.34) em (4.33) obtemos

$$\dot{V}(t, s_I) < -s_I^T D(\nu_R)s_I - |s_I^T|\mu < 0, \quad (4.35)$$

desde que a matriz de amortecimento hidrodinâmico $D(\nu_R)$ é uma matriz diagonal estritamente

positiva e definida positiva em sinal. Por tanto, temos que $V(t, s_I) \leq V(0, s_I), \forall t \geq 0$. Dessa forma, o vetor de funções de medição s_I é limitado e \dot{V} é uniformemente contínua, logo pelo lema de Barbalat, temos que $s_I \rightarrow 0$. O que implica que $s_I \rightarrow 0$ e $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

4.3 Controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente

A lei de controle CEV-MD baseada no controle equivalente, está conformada por um termo de controle nominal denominado controle equivalente τ_{eq} , e por um termo de controle chaveado denominado controle robusto τ_{rob} . O termo de controle equivalente é encarregado de manter os estados do sistema sobre a superfície de chaveamento, enquanto que o termo de controle robusto é encarregado de lidar com as incertezas do sistema.

A partir disso, nesta seção, a seleção da lei de controle CEV-MD é realizada em dois estágios. Inicialmente o termo de controle equivalente τ_{eq} , é selecionado assumindo que em um determinado tempo t_0 o sistema alcança a superfície de chaveamento $S_I = \{\eta \in \mathbb{R}^6 / s_I(t, \eta) = 0\}$ e que para todo $t \geq t_0$, o sistema satisfaz as condições de existência dos modos deslizantes⁷, i.e., o conjunto S_I é um conjunto invariante para $t \geq t_0$. Assim, o vetor de funções de medição s_I , satisfaz

$$\dot{s}_I(t, \eta) = 0 \quad \text{e} \quad s_I(t, \eta) = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.36)$$

onde, a partir de (4.18), \dot{s}_I pode ser expressa como

$$\dot{s}_I(t, \eta) = \dot{\nu} - \dot{\nu}_r = 0. \quad (4.37)$$

Logo, isolando $\dot{\nu}$ da equação dinâmica do veículo (2.15), e substituindo a expressão resultante em (4.41) obtemos,

$$\dot{s}_I = M^1 [\tau - C(\nu_R)\nu_R - D(\nu_R)\nu_R - g] - \dot{\nu}_r = 0, \quad (4.38)$$

e resolvendo em (4.38) para τ , produz-se

$$\tau_{eq} = M\dot{\nu}_r + C(\nu_R)\nu_R + D(\nu_R)\nu_R + g, \quad (4.39)$$

a lei de controle equivalente que outorga a propriedade da invariância ao conjunto S_I . Note que a lei de controle (4.39) atua como um controle linearizante e desconsidera a existência de incertezas e distúrbios na planta (2.15). Além disso, pela transformação de coordenadas

⁷Estas condições fazem do conjunto S_I , um conjunto invariante.

(4.14), a lei (4.39) também garante a invariância do conjunto $S_I = \{\eta \in \mathbb{R}^6 / s_I(t, \eta) = 0\}$ no referencial inercial. Porém, na existência de incertezas na planta, a lei de controle equivalente (4.39) não consegue garantir a propriedade da invariância ao conjunto S_I , logo o termo robusto τ_{rob} é acrescentado a esta. Tal que, tanto a convergência das trajetórias do sistema para S_I quanto a propriedade da invariância em S_I sejam garantidas como mostra a seguinte prova de estabilidade.

4.3.1 Prova de Estabilidade

Considere a seguinte função candidata como de Lyapunov,

$$V(t, s_I) = \frac{1}{2} s_I^2 \quad (4.40)$$

onde s_I , é o vetor de funções de medição do erro de rastreamento no referencial do corpo. Diferenciando (4.40) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{V}(t, s_I) = \dot{s}_I s_I \quad (4.41)$$

e substituindo (4.18) em (4.41),

$$\dot{V}(t, s_I) = (\dot{\nu} - \dot{\nu}_r) s_I. \quad (4.42)$$

Logo, isolando $\dot{\nu}$ da equação dinâmica do veículo (2.15), e substituindo a expressão resultante em (4.42), produz-se

$$\dot{V}(t, s_I) = M^{-1} [-M\dot{\nu}_r - C(\nu_R)\nu_R - D(\nu_R)\nu_R - g + \tau + \tau_d] s_I. \quad (4.43)$$

Dessa forma, a lei de controle $\tau = \tau_{eq} + \tau_{rob}$ é selecionada como sendo,

$$\tau = \hat{M}\dot{\nu}_r + \hat{C}(\nu_R)\nu_R + \hat{D}(\nu_R)\nu_R + \hat{g} - K \operatorname{sgn}(s_I), \quad (4.44)$$

onde \hat{M} , $\hat{C}(\nu_R)$, $\hat{D}(\nu_R)$, \hat{g} são as matrizes de parâmetros estimados e $K > 0$, é uma matriz escalar de ganho de controle. De fato, substituindo (4.44) em (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) &= M^{-1} [\tilde{M}\dot{\nu}_r + \tilde{C}(\nu_R)\nu_R + \tilde{D}(\nu_R)\nu_R + \tilde{g} + \\ &\quad + \tau_d - K \operatorname{sgn}(s_I)] s_I \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde $\tilde{M} = (\hat{M} - M)$, $\tilde{C} = (\hat{C} - C)$, $\tilde{D} = (\hat{D} - D)$, $\tilde{g} = (\hat{g} - g)$ são as matrizes de erros paramétricos. Definindo,

$$\tilde{f}(\nu_R, \eta) = \tilde{M}\dot{\nu}_r + \tilde{C}(\nu_R)\nu_R + \tilde{D}(\nu_R)\nu_R + \tilde{g} \quad (4.46)$$

temos que (4.45) pode ser reescrita como

$$\dot{V}(t, s_I) = M^{-1}[\tilde{f}(\nu_R, \eta) + \tau_d]s_I - M^{-1}K|s_I| \quad (4.47)$$

desde que $s_I \text{sgn}(s_I) = |s_I|$. Logo pela desigualdade triangular temos que,

$$\dot{V}(t, s_I) \leq \left[|M^{-1}(\tilde{f} + \tau_d)| - M^{-1}K \right] |s_I| \quad (4.48)$$

Assim, para satisfazer a condição de existência dos modos deslizantes $\dot{V}(t, s_I) < 0$, a matriz de ganhos de controle K deve ser tal que,

$$K > F + \tau_{d_{max}} + \mu \quad (4.49)$$

onde F e $\tau_{d_{max}}$ são funções conhecidas que satisfazem $|\tilde{f}| \leq F$ e $|\tau_d| \leq \tau_{d_{max}}$ respectivamente, desde que tanto as incertezas do sistema quanto os distúrbios são considerados limitados. De fato, substituindo (4.49) em (4.48), temos que

$$\dot{V}(t, s_I) < -\mu|s_I| < 0. \quad (4.50)$$

Logo, $V(t, s_I) \leq V(0, s_I)$, $\forall t \geq 0$ e o vetor de medição dos erros de rastreamento no referencial do corpo s_I , é limitado. Portanto, \dot{V} é uniformemente contínua e pelo lema de Barbalat temos que $\dot{V} \rightarrow 0$, então $s_I \rightarrow 0$. Além disso, pela transformação (4.14), temos que $s_I \rightarrow 0$ no referencial inercial. Assim, as trajetórias do sistema $(\eta, \dot{\eta})$ convergem para o estado desejado $(\eta_d, \dot{\eta}_d)$ em tempo finito.

4.4 Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída

A lei de controle CEV-MD baseada na estabilidade entrada-saída do sistema é selecionada considerando que o sistema possui saídas limitadas para entradas limitadas. A partir disso, uma matriz de regressão do sistema é utilizada para encontrar as entradas de controle adequadas de forma a produzir um desempenho de rastreamento satisfatório e garantir a estabilidade do sistema sem um elevado esforço de controle, como mostra a prova de estabilidade desenvolvida

a seguir.

4.4.1 Prova de Estabilidade

Considerando a seguinte função candidata como de Lyapunov

$$V(t, s_I) = \frac{1}{2} s_I^T M s_I \quad (4.51)$$

onde s_I é uma função escalar definida em (4.15), $M = M^T > 0$, é a matriz de inércia do veículo e V é continuamente diferenciável e definida positiva em sinal. Diferenciando (4.51) em relação ao tempo, temos

$$\dot{V}(t, s_I) = \frac{1}{2} (\dot{s}_I^T M s_I + s_I^T \dot{M} s_I + s_I^T M \dot{s}_I) \quad (4.52)$$

e desde que $\dot{s}_I^T M s_I = s_I^T M \dot{s}_I$, devido à propriedade $M = M^T > 0$, então

$$\dot{V}(t, s_I) = s_I^T M \dot{s}_I + \frac{1}{2} s_I^T \dot{M} s_I. \quad (4.53)$$

Além disso, por propriedades matriciais $s_I^T [\dot{M} - 2C(\nu_R)] = 0$, logo

$$\dot{V}(t, s_I) = s_I^T [M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I]. \quad (4.54)$$

Por outro lado, das equações (2.15), (2.2), (4.15) e (4.18), obtemos a seguinte expressão para $M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I$,

$$\begin{aligned} M \dot{s}_I + C(\nu_R) s_I &= -D(\nu_R) s_I + \tau + \tau_d - M \dot{\nu}_r - C(\nu_R) \nu_r - D(\nu_R) \nu_r - g + \\ &\quad + C(\nu_R) \nu_c + D(\nu_R) \nu_c \end{aligned} \quad (4.55)$$

logo, substituindo (4.55) em (4.54), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) &= -s_I^T D(\nu_R) s_I + s_I^T [\tau + \tau_d - M \dot{\nu}_r - C(\nu_R) \nu_r - D(\nu_R) \nu_r - g + \\ &\quad + C(\nu_R) \nu_c + D(\nu_R) \nu_c] \end{aligned} \quad (4.56)$$

em que $D(\nu_R)$, é uma matriz diagonal estritamente positiva devido às características hidrodinâ-

micas do veículo. Além disso, utilizando as seguintes parametrizações,

$$M\dot{\nu}_r + C(\nu_R)\nu_r + D(\nu_R)\nu_r + g(\eta) \triangleq \Phi(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)\Theta \quad (4.57)$$

$$M\dot{\nu}_c + C(\nu_R)\nu_c + D(\nu_R)\nu_c \triangleq \Phi_1(\dot{\nu}_c, \nu_c, \nu_R)\Theta \quad (4.58)$$

onde Θ , é o vetor de parâmetros desconhecidos e Φ , Φ_1 são *matrizes de regressão* limitadas⁸, conhecidas e de dimensão apropriada⁹, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) = & -s_I^T D(\nu_R)s_I + \\ & +s_I^T [\tau + \tau_d - \Phi(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)\Theta + \Phi_1(\dot{\nu}_c, \nu_c, \nu_R)\Theta]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dessa forma, a partir de (4.59), a lei de controle é selecionada como sendo

$$\tau = [\Phi(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta) - \Phi_1(\dot{\nu}_c, \nu_c, \nu_R)]\hat{\Theta} - \tau_{s_I} \quad (4.60)$$

onde $\hat{\Theta}$, é o vetor de parâmetros estimados e τ_{s_I} , é o termo de controle robusto definido por,

$$\tau_{s_I} = K \operatorname{sgn}(s_I) + s_I = \begin{bmatrix} K_1 \operatorname{sgn}(s_{I_1}) + s_{I_1} \\ K_2 \operatorname{sgn}(s_{I_2}) + s_{I_2} \\ K_3 \operatorname{sgn}(s_{I_3}) + s_{I_3} \\ K_4 \operatorname{sgn}(s_{I_4}) + s_{I_4} \\ K_5 \operatorname{sgn}(s_{I_5}) + s_{I_5} \\ K_6 \operatorname{sgn}(s_{I_6}) + s_{I_6} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

em que $K_i > 0$ representa o i -ésimo ganho de controle necessário para garantir a convergência da função s_{I_i} , para a i -ésima superfície deslizante S_{I_i} em tempo finito, i.e., para garantir $\dot{V}(t, s_{I_i}) < 0$. Logo, substituindo a lei de controle (4.60) na equação (4.59), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I) = & -s_I^T D(\nu_R)s_I + \\ & +s_I^T [\tau_d + (\Phi - \Phi_1)\tilde{\Theta} - K \operatorname{sgn}(s_I) - s_I], \end{aligned} \quad (4.62)$$

⁸Devido a que considerando que o sistema é entrada-saída estável, uma entrada limitada no sistema produzirá uma saída limitada.

⁹Da parametrização usada neste trabalho temos que, $\Theta_{33 \times 1}$, $\Phi_{6 \times 33}$ e $\Phi_{16 \times 33}$.

onde $\tilde{\Theta}$ é o vetor de erros paramétricos. Além disso, desde que $s_I^T K \text{sgn}(s_I) = |s_I^T| K$, temos que

$$\dot{V}(t, s_I) = -s_I^T D(\nu_R) s_I + s_I^T [\tau_d + (\Phi - \Phi_1) \tilde{\Theta}] - |s_I^T| K - s_I^2, \quad (4.63)$$

onde $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta$, é o vetor de erros paramétricos. E desde que o sistema é considerado entrada-saída estável, as matrizes Φ , Φ_1 e o vetor Θ são considerados limitados, i.e., $|\tilde{\Theta}_j| \leq \bar{\Theta}_j$, $|\Phi_{ij}| \leq \bar{\Phi}_{ij}$ e $|\Phi_{1ij}| \leq \bar{\Phi}_{1ij}$ para cada grau de liberdade $i = 1, \dots, 6$ e cada erro paramétrico $j = 1, \dots, 33$. Além disso, desde que o distúrbio τ_d é considerado limitado, i.e., $|\tau_d| \leq \bar{\tau}_d$ onde $\bar{\tau}_d$ é uma função positiva conhecida, podemos escolher K_i como sendo

$$K_i = \sum_{i=1}^6 \bar{\tau}_{d_i} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{33} (\bar{\Phi}_{ij} + \bar{\Phi}_{1ij}) \bar{\Theta}_j \quad (4.64)$$

logo, temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_1, t) &= - \sum_{i=1}^6 s_{1_i} D_{ii} + \sum_{i=1}^6 s_{1_i} \tau_{d_i} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{33} s_{1_i} [\Phi_{ij} + \Phi_{1ij}] \tilde{\Theta}_j - \\ &\quad - \sum_{i=1}^6 |s_{1_i}| \bar{\tau}_{d_i} - \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{33} |s_{1_i}| [\bar{\Phi}_{ij} + \bar{\Phi}_{1ij}] \bar{\Theta}_j - \sum_{i=1}^6 s_{1_i}^2 \\ &\leq - \sum_{i=1}^6 s_{1_i} D_{ii} - \sum_{i=1}^6 |s_{1_i}| \bar{\tau}_{d_i} - \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{33} |s_{1_i}| [\bar{\Phi}_{ij} + \bar{\Phi}_{1ij}] \bar{\Theta}_j - \\ &\quad - \sum_{i=1}^6 s_{1_i}^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

que satisfaz,

$$\dot{V}(t, s_I) < - \sum_{i=1}^6 s_{1_i}^2 < 0. \quad (4.66)$$

Dessa forma, $V(t, s_I) \leq V(0, s_I)$, $\forall t \geq 0$, logo o vetor de medição dos erros de rastreamento s_I é limitado e \dot{V} é uniformemente contínua. Assim, pelo lema de Barbalat temos que $s_I \rightarrow 0$, que, pela transformação linear bijetora (4.14), implica em $s_I \rightarrow 0$ e $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ no referencial inercial.

4.5 Controle CEV-MD Adaptativo

Esta seção introduz o projeto de controle de posição CEV-MD adaptativo aplicado à dinâmica de veículo apresentada no Capítulo 2. Nesta estratégia, a lei de controle robusto possui tanto um termo de controle descontínuo quanto uma lei de atualização de parâmetros estimados em tempo real. Enquanto o ganho do termo de controle descontínuo é encontrado a partir dos limites de incerteza do sistema, a lei de atualização de parâmetros é encontrada de forma a satisfazer as condições de estabilidade do vetor de erros de rastreamento s_I , no referencial inercial. Note também que na prova de estabilidade desta estratégia, embora a lei de controle selecionada esteja no referencial do corpo, tanto a dinâmica do sistema quanto a função candidata de Lyapunov considerada estão no referencial inercial.

4.5.1 Prova de Estabilidade

Sendo que de Fossen (1994) e Fossen e Sagatun (1991), a equação dinâmica do veículo (2.15) pode ser reescrita como,

$$M_\eta(\eta)\ddot{\eta}_R + C_\eta(\nu_R, \eta)\dot{\eta}_R + D_\eta(\nu_R, \eta)\dot{\eta}_R + g_\eta(\eta) = J^{-T}(\eta)\tau \quad (4.67)$$

onde, $\ddot{\eta}_R = \ddot{\eta} - \ddot{\eta}_c$, $\dot{\eta}_R = \dot{\eta} - \dot{\eta}_c$, e as matrizes $M_\eta(\eta)$, $C_\eta(\nu_R, \eta)$, $D_\eta(\nu_R, \eta)$, e $g_\eta(\eta)$ são definidas respectivamente a partir de,

$$M_\eta(\eta) = J^T M J^{-1} \quad (4.68)$$

$$C_\eta(\nu_R, \eta) = J^{-T} [C(\nu_R) - M J^{-1} \dot{J}] J^{-1} \quad (4.69)$$

$$D_\eta(\nu_R, \eta) = J^{-T} D(\nu_R) J^{-1} \quad (4.70)$$

$$g_\eta(\eta) = J^{-T} g. \quad (4.71)$$

Considera-se a seguinte função candidata como de Lyapunov,

$$V(t, s_I, \tilde{\Theta}) = \frac{1}{2} \left[s_I^T M_\eta(\eta) s_I + \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} \right] \quad (4.72)$$

onde s_I é o vetor de medições dos erros de rastreamento no referencial inercial, $M_\eta = M_\eta^T > 0$ é a matriz de inércia da dinâmica do veículo no referencial inercial (4.67), Γ é uma matriz de peso definida positiva e simétrica de dimensão apropriada e $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \Theta$, é um vetor de erros paramétricos da equação dinâmica do veículo. Diferenciando (4.72) com respeito ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) &= \frac{1}{2} [\dot{s}_I^T M_\eta(\eta) s_I + s_I^T \dot{M}_\eta(\eta) s_I + s_I^T M_\eta(\eta) \dot{s}_I + \\ &\quad + \dot{\tilde{\Theta}} \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta} \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta} \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

E pelas propriedades simétricas das matrizes M_η e Γ , temos que

$$\dot{s}_I^T M_\eta(\eta) s_I = s_I^T M_\eta(\eta) \dot{s}_I \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{\Theta}} \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} = \tilde{\Theta} \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\Theta} \quad (4.74)$$

logo, a equação diferencial (4.73) pode ser reescrita como,

$$\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) = s_I^T M_\eta(\eta) \dot{s}_I + \frac{1}{2} s_I^T \dot{M}_\eta(\eta) s_I + \dot{\tilde{\Theta}} \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}. \quad (4.75)$$

Além disso, pelas configurações hidrodinâmicas do veículo temos que as matrizes M_η e C_η , satisfazem a propriedade $s_I^T [\dot{M}_\eta(\eta) - 2C_\eta(\nu, \eta)] s_I = 0, \forall s_I, \nu, \eta \in \mathfrak{R}^n$, logo

$$\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) = s_I^T [M_\eta(\eta) \dot{s}_I + C_\eta(\nu_R, \eta) s_I] + \dot{\tilde{\Theta}} \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}. \quad (4.76)$$

E de (4.67), (4.11), (4.12) e $\dot{\eta}_R = \dot{\eta} - \dot{\eta}_c$, é possível obter a seguinte expressão para $M_\eta(\eta) \dot{s}_I + C_\eta(\nu_R, \eta) s_I$,

$$\begin{aligned} M_\eta(\eta) \dot{s}_I + C_\eta(\nu_R, \eta) s_I &= -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta) s_I + s_I^T J^{-T} \tau + s_I^T J^{-T} \tau_d + \\ &\quad + s_I^T [-M_\eta(\eta) \ddot{\eta}_r - C_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_r - D_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_r - g_\eta(\eta) \\ &\quad + M_\eta(\eta) \ddot{\eta}_c + C_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_c + D_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_c]. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Além disso, considerando que

$$\begin{aligned} &M_\eta(\eta) \ddot{\eta}_r + C_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_r + D_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_r + g_\eta(\eta) \\ &= J^{-T}(\eta) [M \dot{\nu}_r + C(\nu_R) \nu_r + D(\nu_R) \nu_r + g(\eta)] \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} &M_\eta(\eta) \ddot{\eta}_c + C_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_c + D_\eta(\nu_R, \eta) \dot{\eta}_c \\ &= J^{-T}(\eta) [M \dot{\nu}_c + C(\nu_R) \nu_c + D(\nu_R) \nu_c], \end{aligned} \quad (4.79)$$

e utilizando seguintes parametrizações,

$$M\dot{\nu}_r + C(\nu_R)\nu_r + D(\nu_R)\nu_r + g(\eta) \triangleq \Phi(\dot{\nu}_r, \nu_r, \nu_R, \eta)\Theta \quad (4.80)$$

$$M\dot{\nu}_c + C(\nu_R)\nu_c + D(\nu_R)\nu_c \triangleq \Phi_1(\dot{\nu}_c, \nu_c, \nu_R)\Theta, \quad (4.81)$$

onde Θ , é o vetor de parâmetros desconhecidos e Φ , Φ_1 , são matrizes de regressão conhecidas de dimensão apropriada. De (4.77) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) &= -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta)s_I + \dot{\tilde{\Theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + s_I^T J^{-T} \tau_d + \\ &+ [J^{-1}(\eta)s_I]^T [\tau - (\Phi - \Phi_1)\Theta]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Dessa forma, selecionando a lei de controle como sendo

$$\tau = (\Phi - \Phi_1)\hat{\Theta} - J^T K \operatorname{sgn}(s_I), \quad (4.83)$$

onde $K > 0$, é uma matriz reguladora de ganho definida positiva em sinal, simétrica de dimensão apropriada e, $\hat{\Theta}$ é o vetor de parâmetros estimados, temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) &= -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta)s_I - |s_I^T|K + s_I^T J^{-T} \tau_d + \\ &+ \tilde{\Theta}^T [\Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} + (\Phi - \Phi_1)^T J^{-1}(\eta)s_I]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Além disso, a partir da seguinte escolha para a Lei de atualização de parâmetros,

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma(\Phi - \Phi_1)^T J^{-1}(\eta)s_I \quad (4.85)$$

e considerando $\dot{\tilde{\Theta}} = 0$, obtemos que

$$\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) = -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta)s_I - |s_I^T|K + s_I^T J^{-T} \tau_d. \quad (4.86)$$

Logo, pela desigualdade triangular temos que

$$\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) \leq -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta) s_I + |s_I^T|[-K + |J^{-T} \tau_d|], \quad (4.87)$$

Assim, a matriz de ganho de controle K deve ser tal que,

$$K > J^{-T} \tau_{d_{max}} + \mu, \quad \mu > 0 \quad (4.88)$$

onde $\tau_{d_{max}}$ é uma função positiva que satisfaz $|\tau_d| \leq \tau_{d_{max}}$. De fato, substituindo (4.88) em (4.87) obtemos

$$\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta}) < -s_I^T D_\eta(\nu_R, \eta) s_I - |s_I^T| \mu < 0, \quad (4.89)$$

$\forall \nu_R, \eta \in \mathfrak{R}^n$. Assim, a partir do Lema de Barbalat, a convergência de s_I para a superfície S_I é garantida. E, como $\dot{V}(t, s_I, \tilde{\Theta})$ é limitada logo, s_I e $\tilde{\Theta}$ também são limitadas.

4.6 Eliminação do *Chattering*

Com o objetivo de eliminar o fenômeno do *chattering*, cada uma das leis de controle descontínuo apresentadas acima pode ser suavizada em uma fina camada limite das vizinhanças da superfície de chaveamento S_I , dada por

$$B = \{(\eta, \dot{\eta})/s_I \leq \omega\}, \quad (4.90)$$

onde ω é a espessura da camada limite. O método da camada limite realiza uma suavização das leis de controle descontínuo através substituição a função $sgn(*)$, pela função

$$sat(*/\omega) = \begin{cases} sgn(*) & se \quad |*/\omega| > 1 \\ */\omega & se \quad |*/\omega| \leq 1. \end{cases} \quad (4.91)$$

Assim, a função descontínua $sgn(s_I)$ utilizada nas leis de controle (4.29), (4.44), (4.60), e (4.83) é interpolada linearmente dentro de uma fina camada limite da superfície S_I , tal que fora dessa camada limite, as leis de controle não tenham sua estrutura alterada. Portanto, a escolha apropriada da espessura da camada limite ω , outorga uma estrutura de filtro passa baixa à dinâmica de s_I , que elimina o *chattering* desde que largura de banda de controle λ , é menor quando comparada à frequência dos primeiros modos no sistema. Logo, de Yoerger e Slotine

(1985) e Yoerger et al. (1985) temos que a espessura desejada pode ser encontrada a partir de,

$$\omega = [\beta \bar{M} K_{max}] / \lambda \quad (4.92)$$

onde $\beta^{-1} \leq \frac{\bar{M}}{M} \leq \beta$, sendo que $\bar{M} = (M_{min} M_{max})^{1/2}$, e $0 < M_{min} \leq M^{-1} \leq M_{max}$, em que M^{-1} é a inversa da matriz de inércia da dinâmica do veículo M . Logo, desde que os limites especificados dos distúrbios e incertezas paramétricas não sejam excedidos, o sistema permanecerá dentro da camada limite, enquanto a condição de existência dos modos deslizantes¹⁰ seja satisfeita. Portanto, a espessura da camada limite ω , é obtida diretamente a partir dos limites máximos das incertezas paramétricas, os distúrbios não modelados e a largura de banda de controle λ . Além disso, de (4.9) temos que a correspondente precisão de rastreamento é dada por,

$$\epsilon = \omega / \lambda. \quad (4.93)$$

Assim, na hipótese do modelo de veículo ser de baixa ordem ou pobremente conhecido, a estabilidade do sistema ainda pode ser garantida e os efeitos no desempenho do sistema ser vistos diretamente em termos da precisão de rastreamento. Dessa forma, a partir deste método é possível abordar a robustez do sistema desde um ponto de vista prático e direto.

4.7 Conclusões

Neste capítulo foram desenvolvidos quatro projetos CEV-MD aplicados ao controle de posição de um veículo subaquático autônomo (VSA). Todos os projetos desenvolvidos foram baseados nos modelos dinâmico e cinemático do veículo definidos no Capítulo 2. Inicialmente, na seção 4.1, a partir de Slotine e Li (1991) foi introduzida uma superfície de chaveamento genérica para o rastreamento de posição de sistemas mecânicos quaisquer. Para logo definir a superfície de chaveamento para o rastreamento de posição do veículo, a qual foi selecionada de forma a expressar uma dinâmica estável dos erros de posição, com convergência exponencial para a zero.

Nas seções 4.2, 4.3, 4.4, e 4.5, foram selecionadas as respectivas leis de controle robusto CEV-MD que garantem a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para a superfície de chaveamento (4.9). Esta seleção foi realizada a partir de critérios de estabilidade assintótica da superfície de chaveamento através da teoria de estabilidade de Lyapunov, e ditos critérios foram estabelecidos nas Condições de Existência dos Modos Deslizantes na seção 3.5 do Capítulo 3.

¹⁰Pelo método da camada limite, as trajetórias do sistema não convergem mais para a superfície de chaveamento S_I , senão para uma vizinhança da mesma.

Finalmente na seção 4.6, utilizando o método da camada limite, as leis de controle descontínuo foram suavizadas dentro de uma vizinhança B da superfície de chaveamento (4.90), a fim de eliminar o fenômeno do *chattering*. Além disso, foi mostrado que a seleção da vizinhança B depende dos limites máximos de incertezas e distúrbios do sistema. E a partir dessa escolha, introduziu-se uma abordagem prática e direta para avaliar o desempenho do sistema em termos da precisão de rastreamento.

No seguinte capítulo, são apresentados resultados de simulações numéricas efetuadas para as quatro leis de controle desenvolvidas neste capítulo. Assim, como também são efetuadas análises e comparações de estabilidade e de desempenho de rastreamento entre os respectivos projetos CEV-MD.

Capítulo 5

Resultados de Simulação

Neste capítulo são apresentadas as correspondentes simulações numéricas das quatro estratégias de controle de posição CEV-MD desenvolvidas no capítulo anterior. Para estas simulações foram consideradas as especificações do veículo subaquático autônomo Biointeractive-B1 do grupo de Ciências marinhas e tecnológicas da Universidade de Tóquio, cujas configurações hidrodinâmicas foram obtidas a partir de Choi e Kondo (2010). As simulações foram realizadas utilizando o editor gráfico Simulink[®] integrado ao software Matlab[®] e procuram o rastreamento de posição do veículo em cinco graus de liberdade, considerando que as posições do centro de massa e centro de gravidade do Biointeractive-B1 estabilizam o movimento de rolamento¹. Em todas elas considerou-se a influência de correntes marinhas, ondas e ventos.

Inicialmente, na seção 5.1 são apresentadas as configurações hidrodinâmicas do veículo Biointeractive-B1, as configurações do atuador e os parâmetros de controle utilizados nas simulações de cada respectiva estratégia de controle. Logo, as seções 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os respectivos resultados de simulação das estratégias apresentadas no capítulo 4. E finalmente as seções 5.7 e 5.8 apresentam as respectivas discussões e conclusões dos resultados de simulação obtidos.

5.1 Parâmetros de Simulação

Nas simulações para cada estratégia de controle apresentada, o veículo realizou o rastreamento de posição de três trajetórias desejadas diferentes: duas retilíneas e uma helicoidal. As trajetórias desejadas retilíneas foram geradas por polinômios de quinta ordem e a trajetória helicoidal foi gerada a partir de polinômios de quinta ordem utilizando coordenadas polares (Santos, 2006). O tempo de simulação foi de 1000 s. utilizando um passo fixo de integração de 0,1 s. para o solver *ode45* do Matlab[®], o qual resolve numericamente as EDO's do sistema utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

¹As forças restauradoras compostas pelas forças de peso e empuxo estabilizam os movimentos de rolamento e arfagem do veículo Biointeractive-B1 (Choi e Kondo, 2010).

5.1.1 Parâmetros da Dinâmica do Veículo, Propulsores e Atuadores

Os parâmetros utilizados para a simulação da dinâmica do veículo foram extraídos de Choi e Kondo (2010) e os parâmetros para a simulação da dinâmica dos atuadores foram extraídos de Tavares (2003). Ambos estão listados na Tabela 5.1.

Massa do veículo	$m = 390 \text{ kg}$
Momentos de inércia	$I_x = 26.34 \text{ kgm}^2$ $I_y = 305.67 \text{ kgm}^2$ $I_z = 305.67 \text{ kgm}^2$
Derivadas da massa adicional	$X_{\dot{u}} = -49.12$ $Y_{\dot{v}} = -311.52$ $Z_{\dot{w}} = -311.52$ $K_{\dot{p}} = 0$ $M_{\dot{q}} = -87.63$ $X_{\dot{u}} = -87.63$
Coefficientes de fricção linear da camada externa do veículo	$X_u = -20$ $Y_v = -200$ $Z_w = -200$ $K_p = -10$ $M_q = -200$ $N_r = -200$
Coefficientes de amortecimento quadrático	$X_{ u u} = -30$ $Y_{ v v} = -300$ $Z_{ w w} = -300$ $K_{ p p} = -10$ $M_{ q q} = -300$ $N_{ r r} = -300$
Centro de gravidade	$x_G = 0 \text{ m}$ $y_G = 0 \text{ m}$ $z_G = -0.15 \text{ m}$
Centro de massa	$x_B = 0 \text{ m}$ $y_B = 0 \text{ m}$ $z_B = -0.15 \text{ m}$
Peso	$P = 3822 \text{ N.}$
Empuxo	$E = P$
Coefficientes de empuxo e torque dos hélices	$T_{ n n} = 0.78896 \frac{\text{N}}{\text{rps}^2}$ $Q_{ n n} = 0.0604 \frac{\text{N}}{\text{rps}^2}$
Constante de torque do motor	$K_m = 0.362 \text{ Nm/A}$
Momentos de inércia do motor	$J_p = 0.1 \text{ kgm}^2$
Resistência de armadura	$R_a = 0.072 \Omega$

Tabela 5.1: Parâmetros de simulação para as dinâmicas do veículo, dos propulsores e dos atuadores.

Para as estratégias de controle CEV-MD baseado na estabilidade de Lyapunov e CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída, considerou-se um grau de 5% de incerteza dos parâmetros reais da dinâmica do veículo. Enquanto que no controle CEV-MD adaptativo, a lei

adaptativa estimou os parâmetros desconhecidos da dinâmica do veículo a partir das variáveis de saídas. E considerando uma velocidade constante das correntes marinhas, foram utilizados os seguintes valores $\dot{\nu}_c = \vec{0}$ m/s², $\nu_c = [0.29, 0.29, 0, 0, 0, 0]^T$ m/s e $\tau_d = [50, 50, 50, 0, 0, 0]^T$ N.

5.1.2 Parâmetros da Matriz de Configuração dos Propulsores

O Biointeractive-B1 possui seis propulsores, dos quais quatro são horizontais e dois são verticais. A configuração geométrica dos propulsores, representada de forma simplificada na Figura 5.1, produz a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} \tau_H \\ \tau_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_H & O_{3 \times 2} \\ O_{3 \times 2} & B_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_H \\ T_V \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde τ_H e τ_V são as forças e momentos resultantes que agem nas direções horizontal e vertical do veículo respectivamente, T_H e T_V são as forças de propulsão dos propulsores horizontais e verticais respectivamente e B_H e B_V são as matrizes de configuração geométrica dos propulsores, cujos elementos dependem da posição de cada propulsor na Figura 5.1.

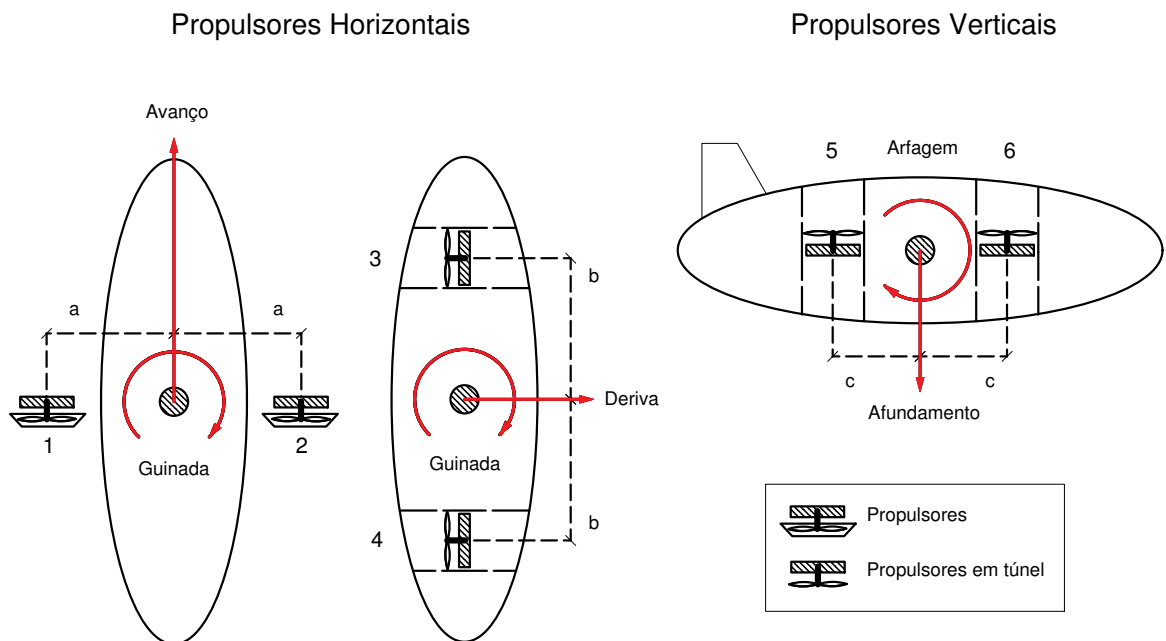


Figura 5.1: Configuração geométrica dos propulsores do veículo Biointeractive-B1. Fonte: Choi e Kondo, 2010.

A partir da Figura 5.1 e da expressão (5.1), os movimentos horizontais de avanço, deriva e guinada são produzidos pelos propulsores 1, 2, 3 e 4. Enquanto que os movimentos verticais de afundamento e arfagem são produzidos pelos propulsores 5 e 6. Dessa forma, as forças e

momentos resultantes na direção horizontal do veículo τ_H , são dadas por

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -a & a & b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

onde F_x e F_y são as forças resultantes nas direções de avanço e deriva do veículo respectivamente, M_z é o momento da força resultante na direção de afundamento do veículo, a e b são as distâncias horizontais do centro do veículo até o eixo dos propulsores 1 e 2 e até o eixo dos propulsores 3 e 4 respectivamente e T_1, T_2, T_3 e T_4 são as forças de propulsão dos propulsores 1, 2, 3 e 4 respectivamente. Da mesma forma as forças e momentos resultantes na direção vertical do veículo τ_V , podem ser dadas por

$$\begin{bmatrix} F_z \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

onde F_z é a força resultante na direção de afundamento do veículo, M_y é o momento da força resultante na direção de deriva do veículo e c é a distância horizontal do centro do veículo até o eixo dos propulsores 5 e 6. As forças de propulsão verticais T_V , necessárias para a obtenção de determinados movimentos verticais desejados podem ser encontradas a partir da simples inversão da matriz B_V da expressão (5.3). Porém, para encontrar as forças de propulsão horizontais T_H , necessárias para a obtenção de determinados movimentos horizontais desejados, deve ser utilizada a matriz pseudo-inversa (Choi e Kondo, 2010) definida por,

$$T_H = W_H^{-1} B_H^T (B_H W_H^{-1} B_H^T)^{-1} \tau_H \quad (5.4)$$

onde, $W_H = \text{diag}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ é uma matriz de ponderação, $w_i > 0$. Nas simulações realizadas neste capítulo utilizou-se $W_H = I_{4 \times 4}$ devido a que considerou-se que nenhum dos propulsores apresenta faltas. E os valores utilizados para as distâncias a, b e c foram $a = 0.47$ m, $b = 0.8$ m e $c = 0.63$ m respectivamente.

5.1.3 Parâmetros de Controle

A partir das análises realizadas em Yoerger e Slotine (1985), os parâmetros de controle para todas as estratégias CEV-MD foram sintonizados manualmente via simulações numéricas. Inicialmente é importante observar que deve se manter o valor da largura de banda de controle λ , abaixo da frequência dos primeiros modos não modelados, tipicamente 0.4 vezes abaixo do primeiro modo não modelado ou menos. Porém, uma escolha muito conservativa pode

limitar grandemente o desempenho do sistema. E considerando que a espessura da camada limite ω atua como um filtro passa-baixa da dinâmica de s , uma adequada escolha do valor de ω reduzirá a largura de banda de controle inicial λ para uma frequência abaixo dos primeiros modos não modelados do sistema, eliminando com isto o problema do *chattering*. Assim, para sistemas de segunda ordem, o valor da escolha da espessura da camada limite ω possui um efeito inversamente proporcional ao valor da escolha da largura de banda de controle λ . Portanto, a razão ω/λ constitui num limitante do vetor de erros de rastreamento e a escolha da largura de banda de controle λ pode ser diretamente traduzida em desempenho de rastreamento.

De Yoerger e Slotine (1985), o valor máximo escolhido para a espessura da camada limite ω é baseado nos limites máximos das incertezas paramétricas. Especificamente, o valor de ω cresce proporcionalmente com a média geométrica $(M_{max}/M_{min})^{1/2}$, onde M_{max} e M_{min} são os limites máximos e mínimos de variação da matriz de inércia do veículo M . Por outro lado a escolha do ganho de controle K está diretamente ligada aos limites de incerteza nos termos hidrodinâmicos dependentes da velocidade, i.e., aos termos $C(\nu_R)\nu_R$, $D(\nu_R)\nu_R$ e $g(\eta)\nu_R$ da dinâmica do veículo. Além disso, de Fossen (1994), enquanto que os estados do sistema (ν, ν_c, η) são realimentados para serem utilizados na síntese de cada uma das leis de controle², o distúrbio τ_d não possui nenhum tipo de compensação por parte das estratégias de controle. E embora que problemas relativos a dificuldades na medição e estimação de estados para realimentação não tenham sido abordados durante as simulações, a robustez do controle CEV-MD a tais erros de estimação pode ser encontrada em trabalhos como o de Slotine (1985).

Considerando os critérios acima, em todas as estratégias de controle foi estabelecido um limite de banda de controle de 0.5 Hz ($\lambda = \pi$ rad/s). Sendo que as simulações digitais foram realizadas a uma frequência de 30 Hz para o veículo e de 10 Hz para o controlador. Os parâmetros utilizados para cada estratégia de controle estão listados na Tabela 5.2.

Estratégias de Controle	Parâmetros			
	ω	K	λ	Γ
CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov	0.015	$72 \times I_{6 \times 6}$	$0.3 \times I_{6 \times 6}$	
CEV-MD Baseado no Controle Equivalente	0.01	$70 \times I_{6 \times 6}$	$0.3 \times I_{6 \times 6}$	
CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída	0.15		$0.3 \times I_{6 \times 6}$	
CEV-MD Adaptativo	0.0125	$112 \times I_{6 \times 6}$	$2 \times I_{6 \times 6}$	$100 \times I_{6 \times 6}$

Tabela 5.2: Parâmetros de controle utilizados nas simulações numéricas.

Na seção 4.4, o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída tem a sua matriz de ganho de controle K , obtida a partir dos valores máximos da matriz de regressão, do vetor de erros paramétricos e do vetor de distúrbios do sistema. E no Capítulo 4, a matriz de peso Γ , é utilizada unicamente pela estratégia CEV-MD adaptativa. A seguir, são apresentadas as três trajetórias desejadas para o rastreamento de posição do veículo subaquático autônomo.

²Assumindo que através da utilização de sensores, a velocidade das correntes marinhas ν_c pode ser estimada.

5.2 Trajetórias Desejadas

A Figura 5.2 a seguir, apresenta as três trajetórias desejadas utilizadas para as simulações. Duas retilíneas e uma helicoidal. A primeira trajetória desejada, representada em vermelho na imagem, tem um comprimento de 110 m. A segunda trajetória desejada, representada em azul, possui um comprimento de 13.52 m. E a terceira trajetória desejada, representada na cor magenta na imagem, tem um comprimento de 65.52 m.

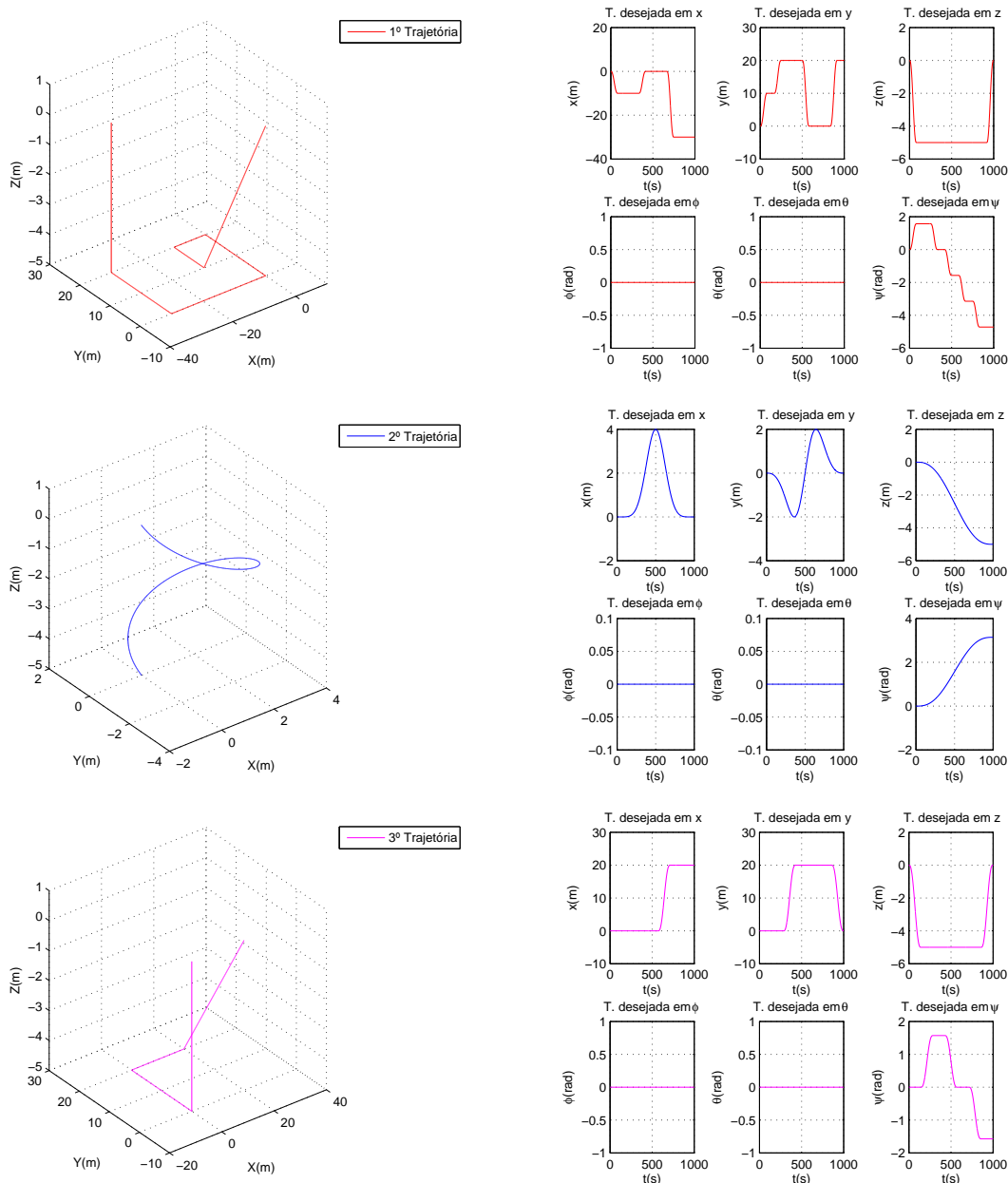


Figura 5.2: Trajetórias desejadas utilizadas para o rastreamento de posição do veículo.

Todas as trajetórias iniciam no ponto $[0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ no referencial inercial e foram obtidas a partir de polinômios de quinta ordem. A seguir são apresentados os resultados de simulação das respectivas estratégias CEV-MD introduzidas no Capítulo 4.

5.3 Resultados de Simulação: CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação do controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade de Lyapunov aplicado ao rastreamento das três trajetórias propostas na seção anterior. Os resultados apresentados consideram respectivamente os erros de posição, deslocamentos, entradas e saídas de controle, convergências das trajetórias do sistema para as superfícies de chaveamento para cada grau de liberdade e correspondentes forças de propulsão. A Figura 5.3 ilustra os resultados obtidos para o rastreamento da primeira trajetória desejada.

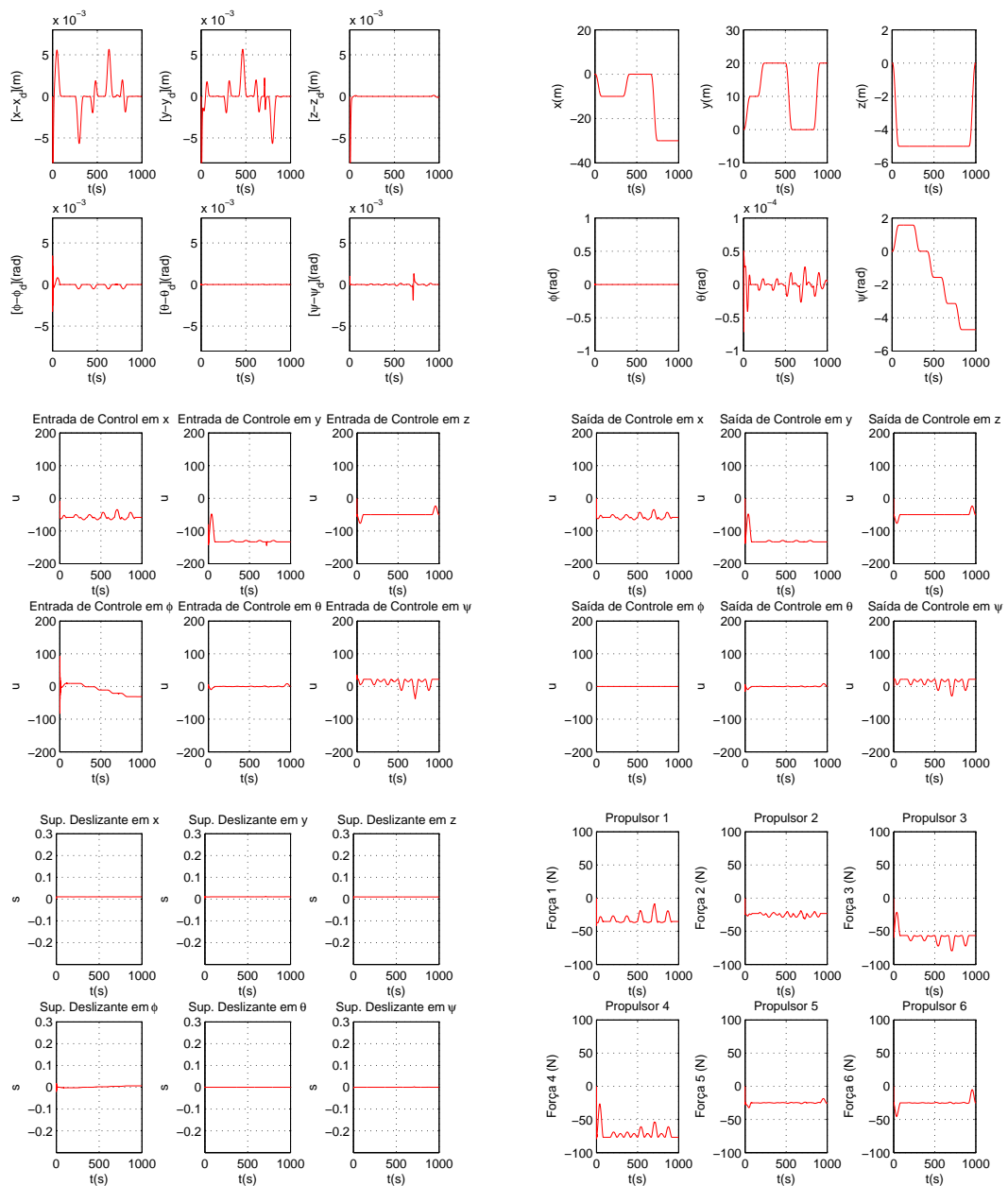


Figura 5.3: Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.

A seguir, na Figura 5.4, são ilustrados os resultados de simulação do controle CEV-MD baseado na estabilidade de Lyapunov aplicado ao rastreamento de posição da segunda trajetória proposta. Nas Figuras 5.3 e 5.4, os resultados de simulação para a primeira e segunda trajetória exibem baixos erros de rastreamento em regime permanente para todos os graus de liberdade do sistema. Assim como mostram uma saída de controle nula para o quarto grau de liberdade ou movimento de rolamento devido a que o mesmo é auto-estabilizado pelas forças reguladoras a partir da configuração geométrica do centro de massa e empuxo do veículo.

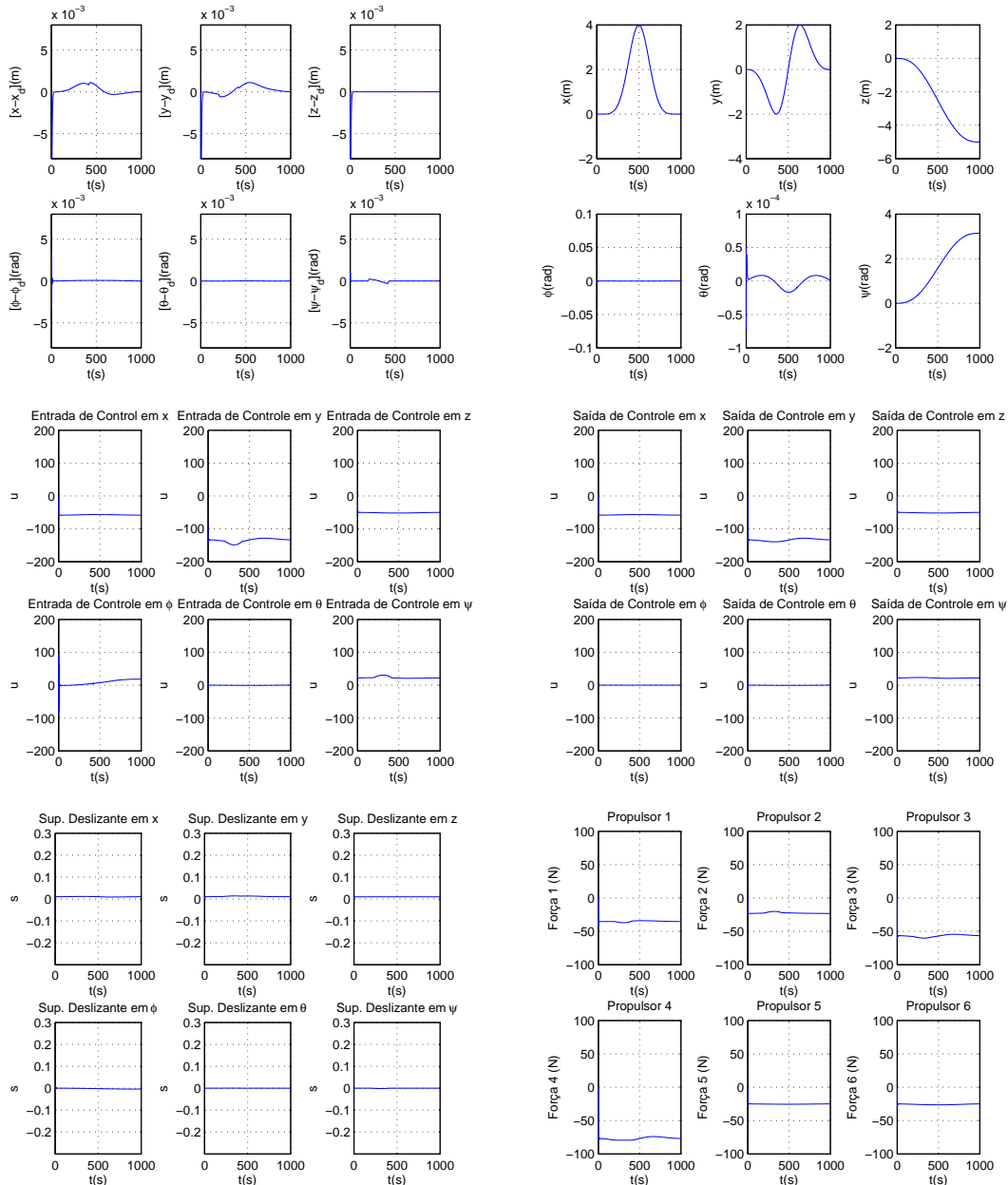


Figura 5.4: Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.

A seguir, a Figura 5.5 apresenta os resultados de simulação do controle CEV-MD baseado na estabilidade de Lyapunov aplicado ao rastreamento de posição da terceira trajetória proposta.

Similarmente aos anteriores resultados, na Figura 5.5 pode verificar-se baixos erros de rastreamento em regime permanente assim como uma ação de controle nula para o movimento de rolamento. A partir das Figuras 5.3, 5.4 e 5.5, é possível verificar que o veículo consegue rastrear a trajetória helicoidal com maior facilidade do que as trajetórias retilíneas.

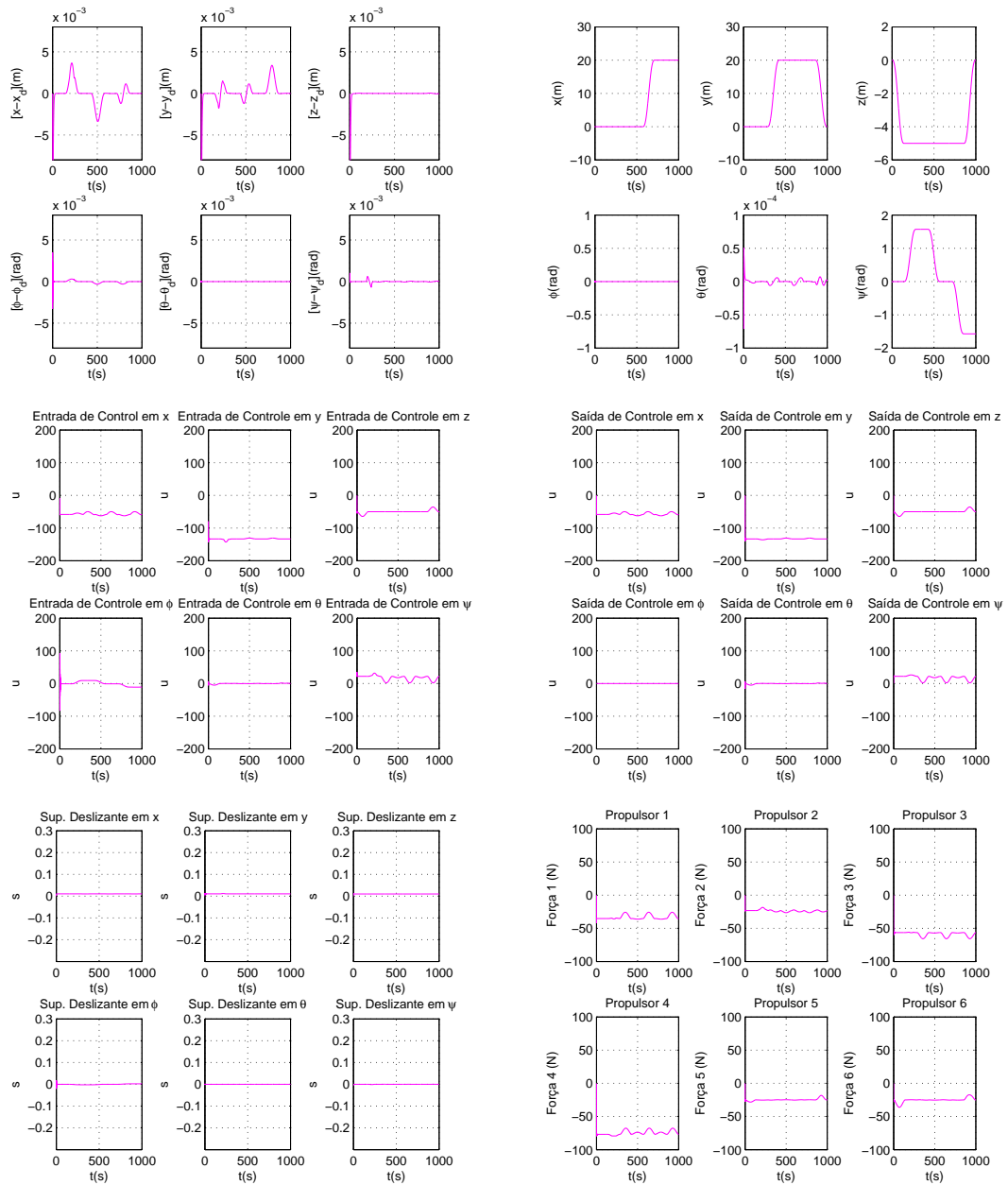


Figura 5.5: Resultados de simulação do controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.

Também é possível observar maiores esforços de controle e propulsão para os movimentos horizontais de avanço, deriva e guinada. Todos os resultados apresentados também exibem um desempenho livre de *chattering* para todas as trajetórias propostas. Ao tempo que as trajetórias do sistema se mantêm em uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento devido à utilização do método da camada limite.

5.4 Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação da estratégia CEV-MD baseada no controle equivalente aplicada ao rastreamento das três trajetórias desejadas introduzidas na seção 5.2. Os resultados apresentados ilustram respectivamente os erros de rastreamento, deslocamentos, entradas e saídas de controle, convergências das trajetórias do sistema para as superfícies deslizantes para cada grau de liberdade e as forças de propulsão de cada propulsor.

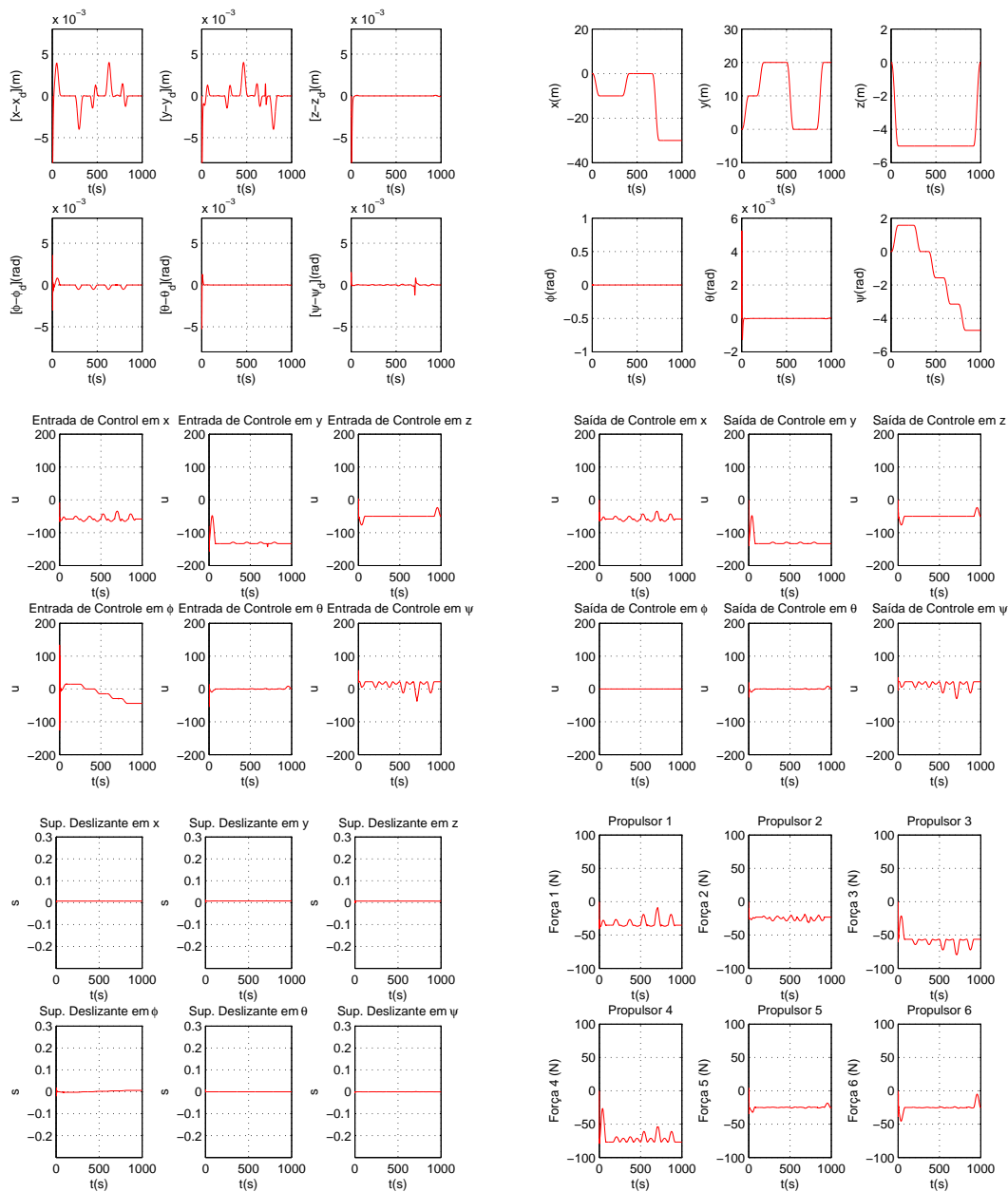


Figura 5.6: Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.

A seguir, na Figura 5.7, são ilustrados os resultados de simulação do controle CEV-MD

baseado no controle equivalente aplicado ao rastreamento de posição da segunda trajetória desejada. Nas Figuras 5.6 e 5.7, é possível verificar baixos erros de rastreamento em regime permanente para todos os graus de liberdade do sistema. Assim como também verifica-se uma ação de controle nula para o movimento de rolamento.

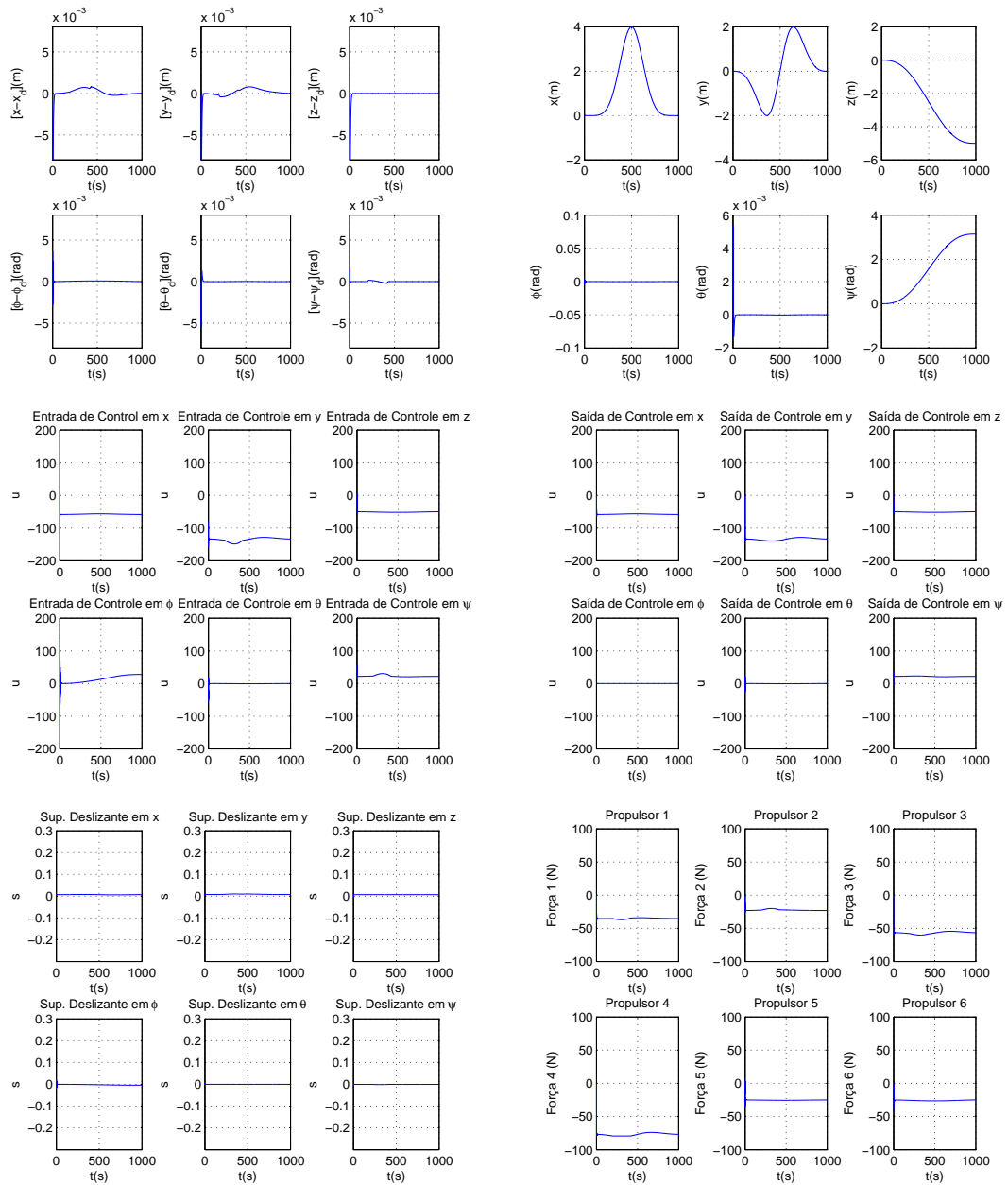


Figura 5.7: Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.

E na Figura 5.8, a seguir, ilustram-se os resultados de simulação do controle CEV-MD baseado no controle equivalente aplicado ao rastreamento de posição da terceira trajetória desejada. Os resultados na Figura 5.8 também mostram baixos erros de rastreamento em regime permanente assim como uma saída de controle nula para quarto grau de liberdade. A partir dos resultados apresentados nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8, esta estratégia de controle exibe um melhor

desempenho de rastreamento para a trajetória helicoidal. Além disso é possível verificar maiores esforços de controle nos movimentos horizontais assim como maiores forças de propulsão para os propulsores horizontais 1, 2, 3 e 4. O que é coincidente com a magnitude dos erros de rastreamento dos movimentos de avanço, deriva e guinada³.

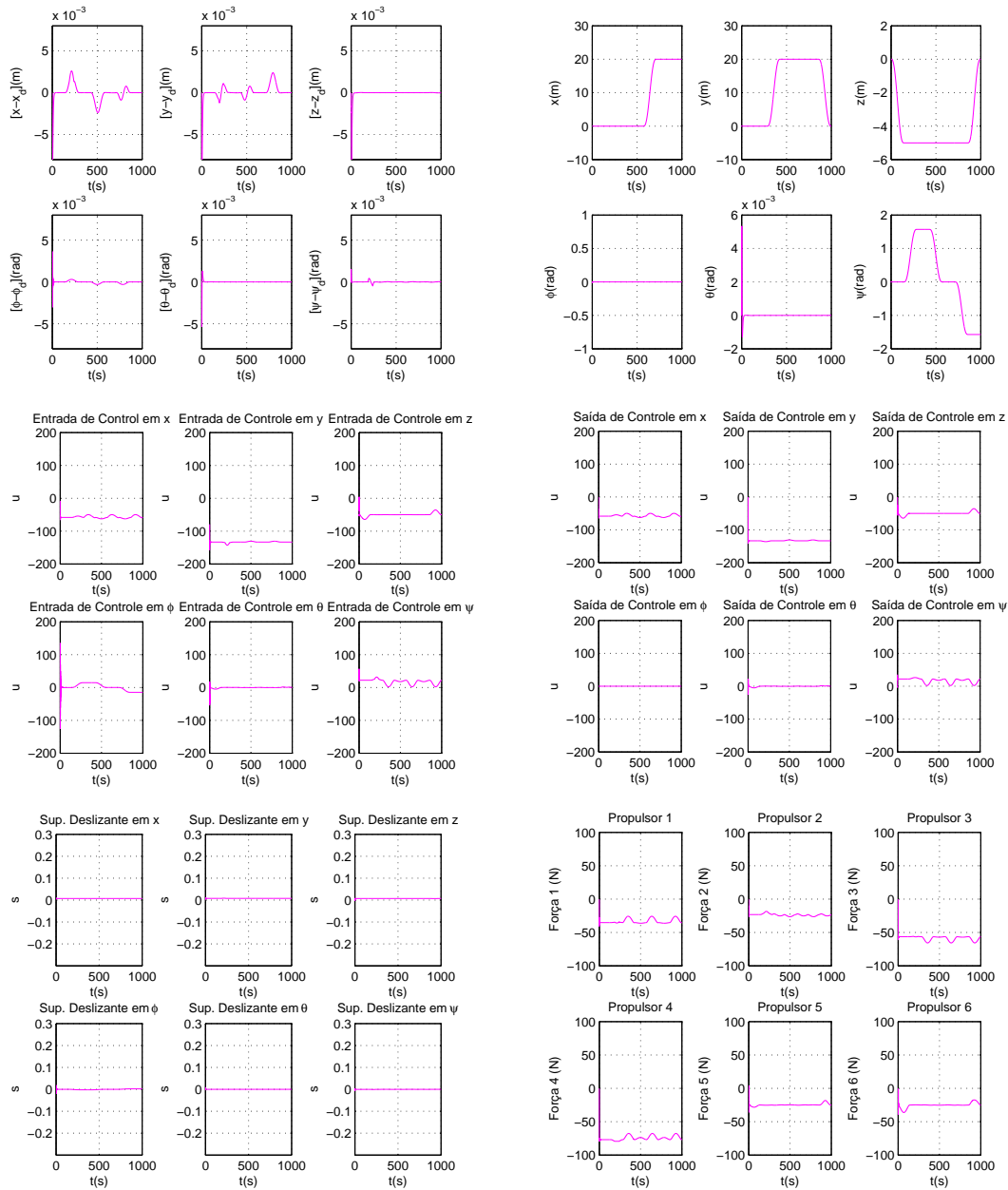


Figura 5.8: Resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado no Controle Equivalente para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.

Além disso, todos os resultados mostram ausência de *chattering* sem interferir no desempenho de rastreamento do sistema. Assim como uma rápida convergência para uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento.

³Desconsiderando o movimento de rolamento, devido a que não há ação de controle agindo sobre o mesmo.

5.5 Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída

Esta seção apresenta os resultados de simulação da estratégia CEV-MD baseada na estabilidade entrada-saída aplicada ao rastreamento de posição das três trajetórias desejadas propostas na seção 5.2. Os resultados apresentados exibem os correspondentes erros de rastreamento, deslocamentos, entradas e saídas de controle, convergências para as superfícies de chaveamento em cada grau de liberdade e forças de propulsão para cada propulsor utilizado respectivamente. A Figura 5.9 apresenta os resultados de simulação para a primeira trajetória desejada.

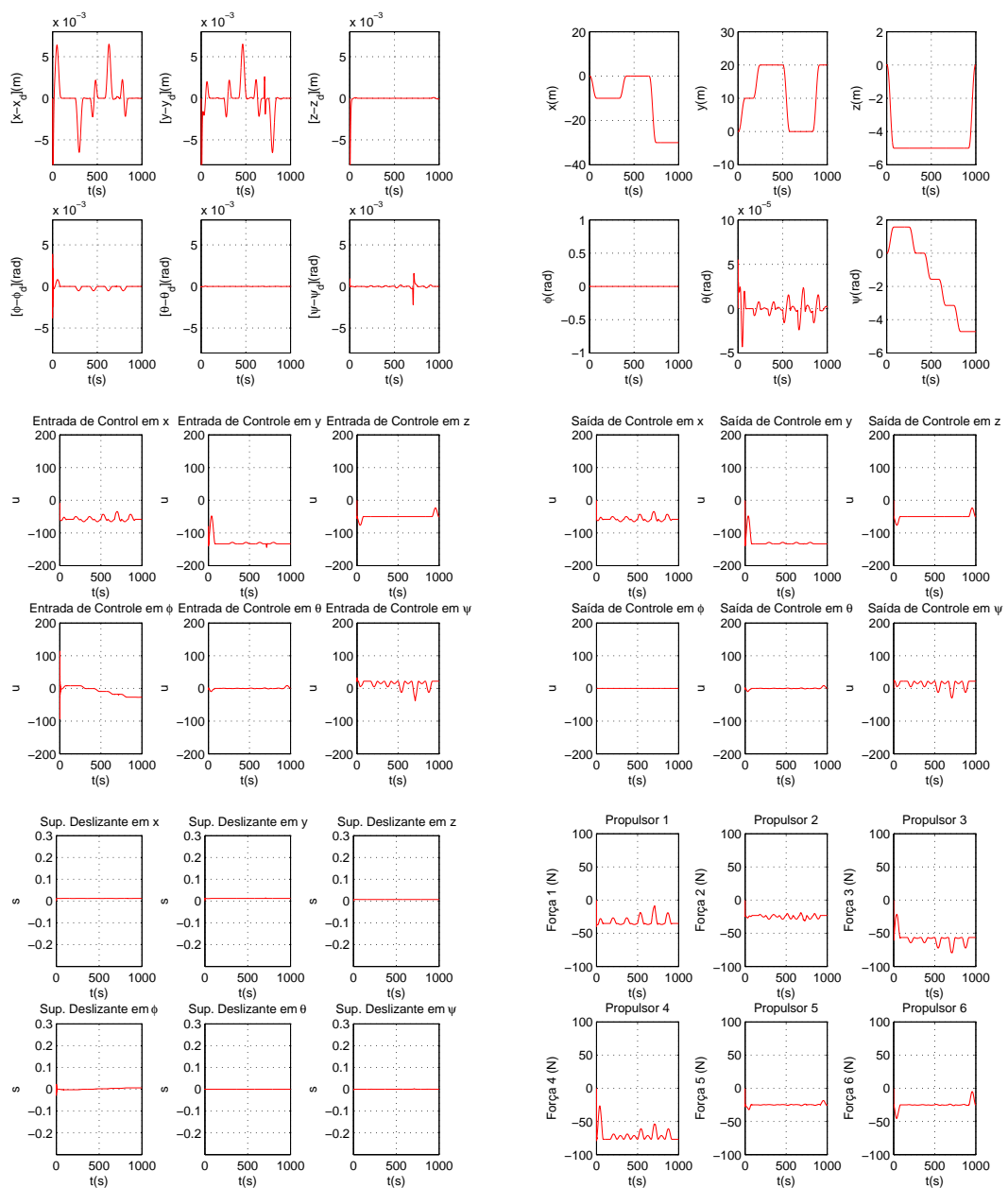


Figura 5.9: Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional Baseado na Estabilidade Entrada-Saída para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.

A Figura 5.10 mostra os resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída aplicado ao rastreamento de posição da segunda trajetória. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram baixos erros de rastreamento em regime permanente e a inexistência de ação de controle no quarto grau de liberdade.

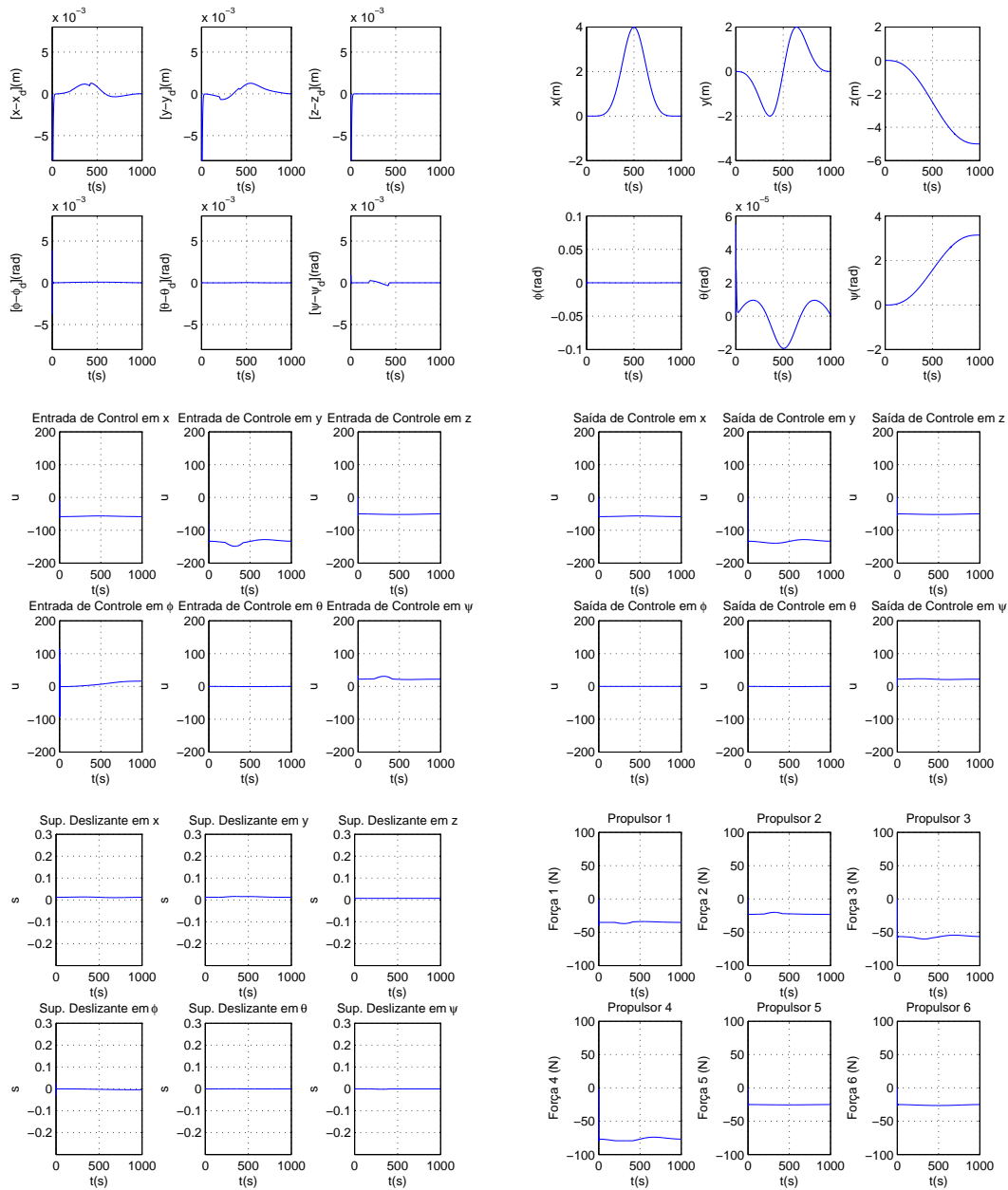


Figura 5.10: Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade entrada-saída para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.

A Figura 5.11 mostra os resultados de simulação do controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída aplicado ao rastreamento de posição da terceira trajetória. Os resultados também mostram baixos erros de rastreamento em regime permanente assim como ação de controle nula para o movimento de rolamento. A partir das Figuras 5.9, 5.10 e 5.11, é possível observar um melhor desempenho de rastreamento do veículo na trajetória helicoidal. E assim

como nos resultados para as anteriores estratégias, é possível verificar maiores módulos nas forças de propulsão dos propulsores 1, 2, 3 e 4, encarregados de executar os movimentos horizontais do veículo. Enquanto que as forças responsáveis pelos movimentos verticais do veículo, i.e., as forças dos propulsores 5 e 6 possuem módulos menores. Esta situação coincide com as dinâmicas dos erros de rastreamento, as quais apresentam menor magnitude nos movimentos de afundamento e arfagem⁴.

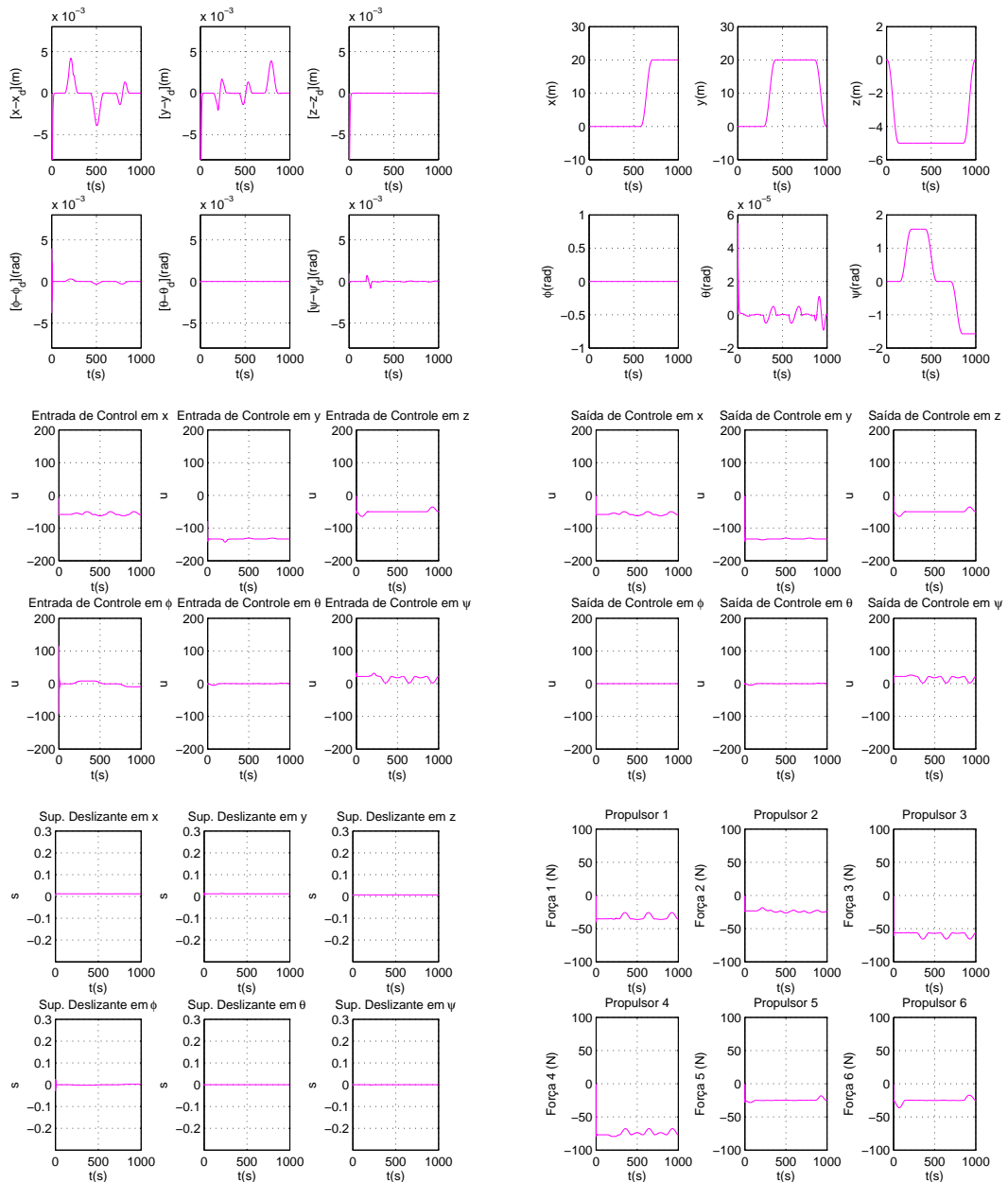


Figura 5.11: Resultados de simulação do controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade entrada-saída para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.

Todos os resultados mostram tanto ausência de *chattering* quanto uma rápida convergência para uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento.

⁴Desconsiderando o movimento de rolamento, pois o mesmo não possui ação de controle agindo sobre ele.

5.6 Resultados de Simulação: Controle CEV-MD Adaptativo

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação da estratégia CEV-MD adaptativa aplicada ao rastreamento de posição das três trajetórias desejadas propostas na seção 5.2. As figuras exibem respectivamente os erros de rastreamento, deslocamentos efetuados, entradas e saídas de controle, convergências para as superfícies de chaveamento para cada grau de liberdade e correspondentes forças de propulsão de cada propulsor.

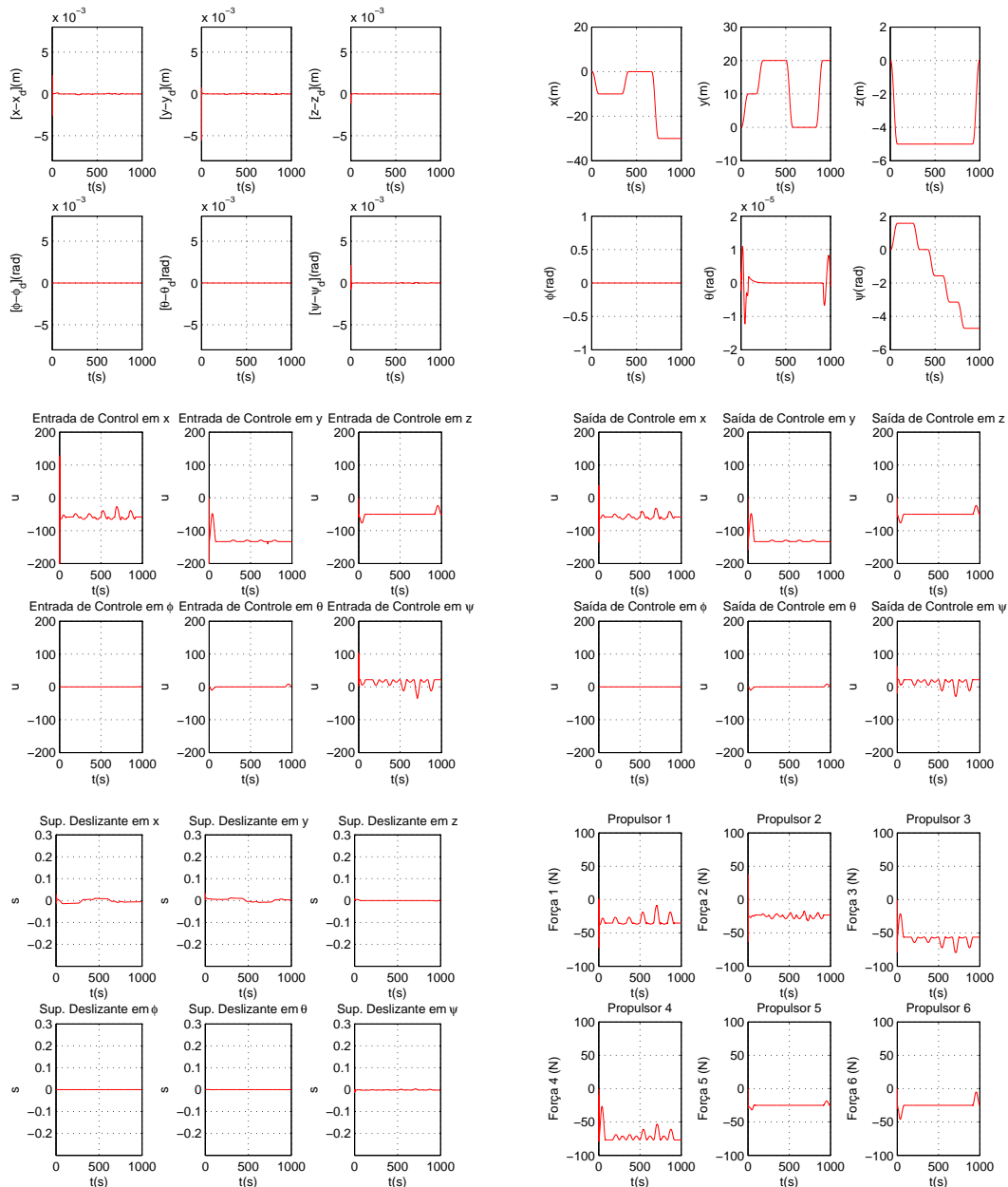


Figura 5.12: Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada.

A Figura 5.12 introduz os resultados de simulação para o rastreamento de posição da primeira trajetória desejada. Estes resultados exibem erros de rastreamento quase nulos em

regime permanente. Assim como uma saída de controle nula para o movimento de rolamento. A Figura 5.13 apresenta os resultados de simulação do controle CEV-MD adaptativo aplicado ao rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.

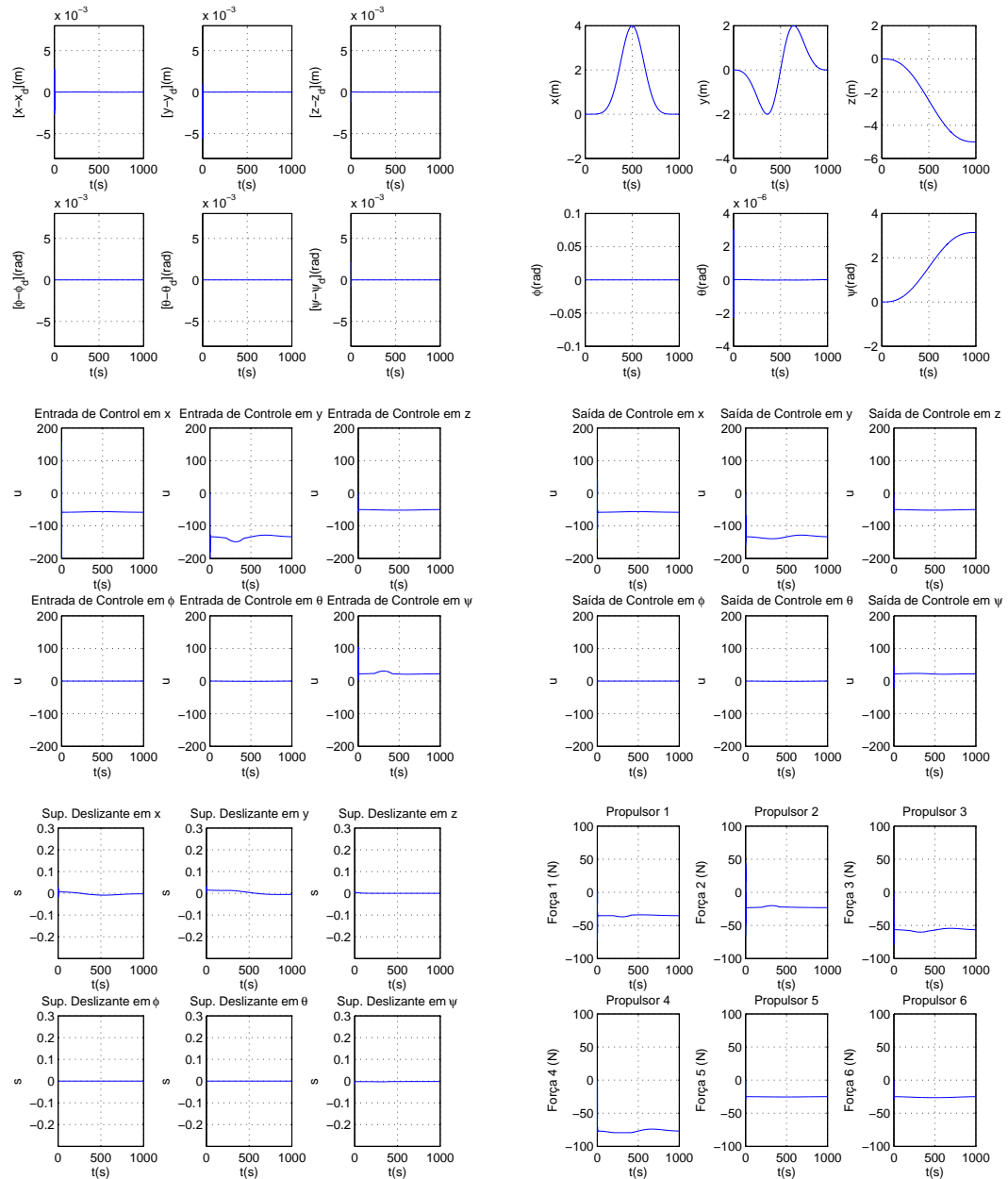


Figura 5.13: Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da segunda trajetória desejada.

Para a segunda trajetória, os resultados exibem erros de rastreamento praticamente nulos tanto no regime transitório quanto no permanente. As entradas e saídas de controle são dadas por sinais suaves. Como esperado, o sinal da saída de controle para o movimento de rolamento é também nulo. A Figura 5.14 apresenta os resultados de simulação do controle CEV-MD adaptativo aplicado ao rastreamento de posição da terceira trajetória desejada. Nestes resultados também é possível verificar erros de rastreamento quase nulos em regime permanente, assim

como um sinal de controle nulo para o movimento de rolamento. A partir das Figuras 5.12, 5.13 e 5.14, os resultados para a estratégia de controle CEV-MD adaptativa mostraram um melhor desempenho de rastreamento para a segunda trajetória desejada, i.e., a trajetória helicoidal. Além disso, em todos os resultados pode verificar-se ausência de *chattering*, assim como uma rápida convergência das trajetórias do sistema para uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento. Como também é possível observar esforços maiores nos propulsores responsáveis por executar os movimentos horizontais do veículo. Isto é, nos propulsores 1, 2, 3 e 4.

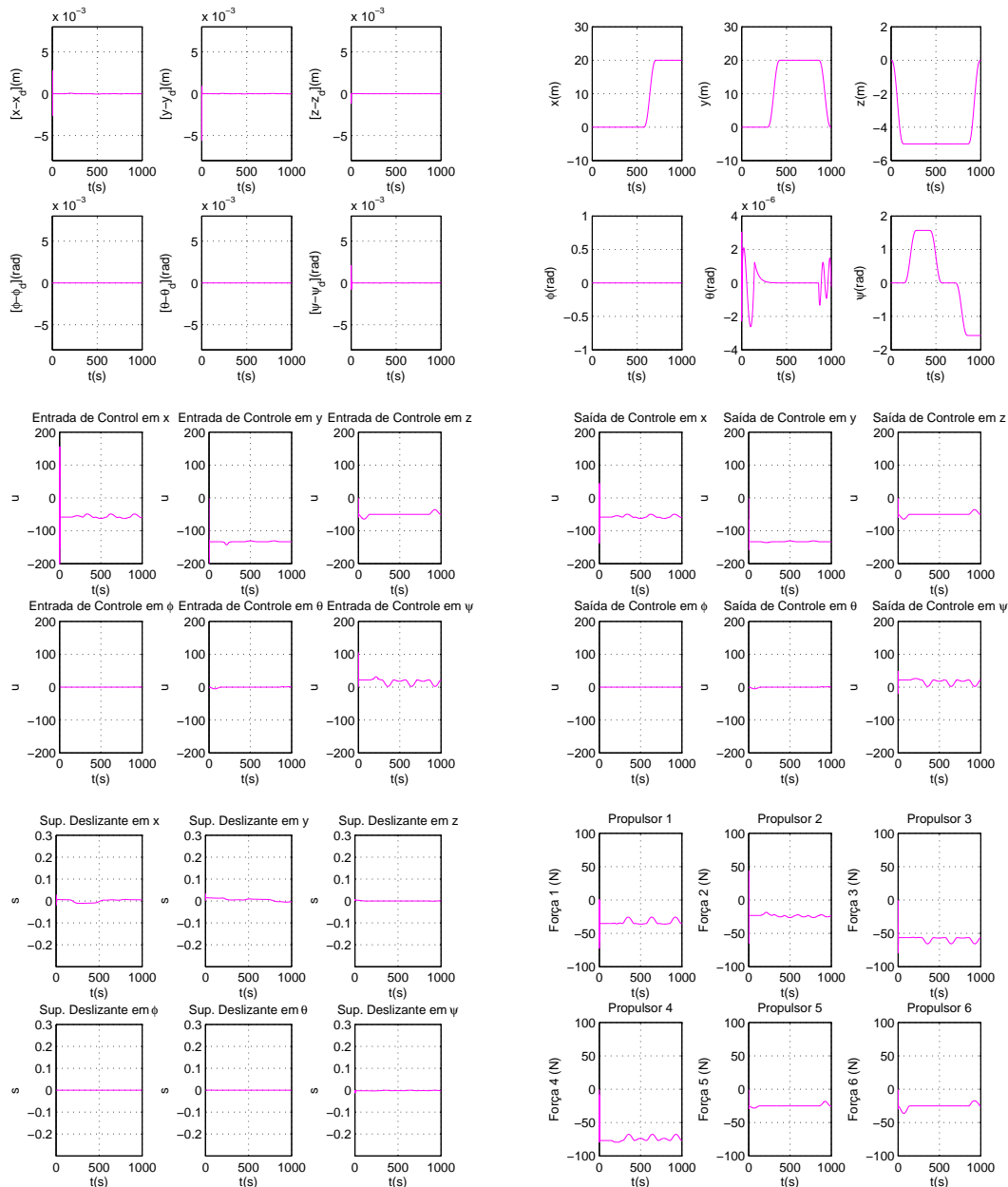


Figura 5.14: Resultados de simulação do controle CEV-MD Adaptativo para o rastreamento de posição da terceira trajetória desejada.

A seguir, na seguinte seção são realizadas algumas discussões relativas aos resultados de simulação obtidos para todas as estratégias de controle CEV-MD apresentadas.

5.7 Discussões

Todos os resultados apresentados para as quatro estratégias de controle CEV-MD mostraram um desempenho de rastreamento satisfatório livre de *chattering* com erros baixos em regime transitório e erros quase nulos em regime permanente para todos os graus de liberdade. Os resultados de simulação do controle CEV-MD adaptativo apresentados na seção 5.6 mostraram o melhor desempenho de controle de rastreamento entre todas as estratégias CEV-MD introduzidas no Capítulo 4. Com o objetivo de realizar comparações entre os respectivos resultados, as seções 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 utilizaram as mesmas escalas de medição para cada medida de desempenho. Ainda, para uma melhor análise, devido a que os erros de rastreamento de posição do controle CEV-MD adaptativo são muito baixos, a Figura 5.15 a seguir, apresenta os mesmos erros de rastreamento numa escala maior de medição.

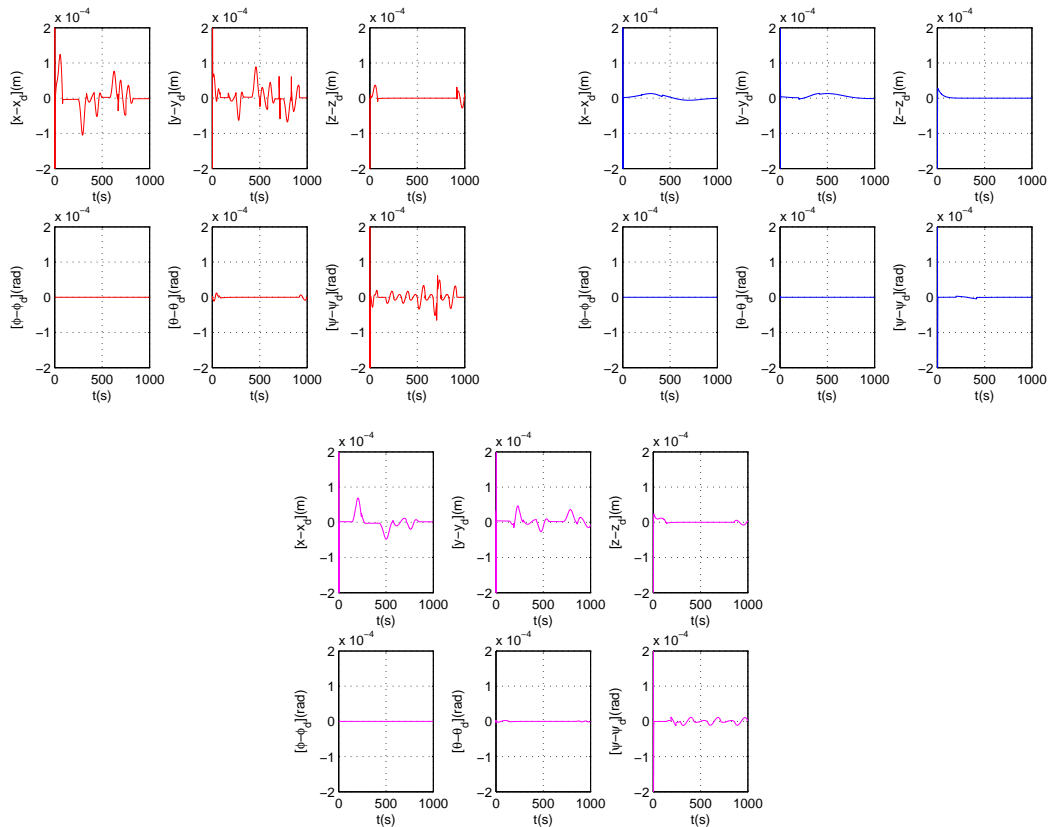


Figura 5.15: Erros de rastreamento do controle CEV-MD Adaptativo para a primeira, segunda e terceira trajetórias desejadas respectivamente.

A partir da Figura 5.15 é possível verificar que para todas as trajetórias desejadas, os erros de rastreamento do controle CEV-MD adaptativo não ultrapassam⁵ de 0.2 mm. Embora o movimento de rolamento não possua correspondente sinal de ação de controle agindo sobre ele, este consegue uma rápida estabilização do seu movimento em comparação com as outras estratégias apresentadas. Assim, o controle CEV-MD adaptativo exibe erros praticamente nulos

⁵No entanto nos instantes iniciais, os erros de rastreamento não ultrapassam os 0.5 mm.

para os movimentos de rolamento em todas as trajetórias desejadas rastreadas pelo veículo.

Como mencionado no Capítulo 3, a propriedade de desacoplamento dos controladores CEV-MD permitiu que seis controladores de segunda ordem fossem projetados -um para cada grau de liberdade- ao invés de um único controlador de ordem doze⁶. Sendo que pode constatar-se que todas as saídas de controle foram dadas por sinais suaves livres do fenômeno do *chattering*. E devido à utilização do método da camada limite para eliminar dito fenômeno, houve uma convergência das trajetórias do sistema para uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento, i.e., para uma camada limite da superfície de chaveamento.

Desde que a espessura da camada limite ω atua como um filtro passa-baixa que diminui tanto a largura de banda de controle λ quanto o ganho de controle K , este possui um efeito de aumento nas imprecisões de rastreamento do controle de posição do veículo. Em todas as estratégias de controle acima apresentadas utilizou-se baixos valores para a espessura da camada limite ω , exceto no controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída, que também utilizou uma baixa largura de banda de controle λ , conforme mostra a Tabela 5.2. Esta situação ocasionou que o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída apresentasse o mais baixo desempenho de rastreamento entre todas as estratégias CEV-MD introduzidas no Capítulo 4. Enquanto que o controle CEV-MD adaptativo utilizou o menor e maior valor respectivamente para a espessura da camada limite e a largura de banda de controle.

Por outro lado, o bom desempenho alcançado pelo controle CEV-MD adaptativo é relativo ao baixo grau de incerteza dos parâmetros do sistema, devido a que a lei adaptativa obteve parâmetros estimados bastante aproximados dos reais. A partir disso, pôde atribuir-se à largura de banda de controle λ , um valor mais elevado do que os atribuídos para as outras estratégias CEV-MD apresentadas e com isto o controle CEV-MD adaptativo conseguiu o melhor desempenho de rastreamento de posição, conforme indicado na subseção 5.1.3. Isto porque o baixo grau de incerteza do sistema produz uma frequência maior para o primeiro modo não modelado, o que permitiu a utilização de uma largura de banda de controle mais elevada para esta estratégia, conforme Tabela 5.2.

Além disso, considerando que para sistemas de segunda ordem a largura de banda de controle λ representa o declive da superfície de chaveamento no plano de estados, e que de Yoerger e Slotine (1985), a espessura da camada limite ω representa a distância vertical entre a camada limite e a superfície de chaveamento, como mostra a Figura 3.7, da relação trigonométrica $\lambda = \omega/\epsilon$, temos que os limites máximos para os erros de rastreamento são dados por $\epsilon = \omega/\lambda$. Assim, a partir da Tabela 5.2, os limites máximos para os resultados dos erros de rastreamento das estratégias de controle CEV-MD apresentados nas seções 5.3, 5.4, 4.89 e 5.6 são dadas na Tabela 5.3. Situação que é satisfeita pelos resultados obtidos para as três trajetórias desejadas propostas.

Finalmente é importante observar que todos os resultados mostraram esforços de controle

⁶Note que a matriz $J_2(\eta_2)$ não está definida quando o ângulo de arfagem for $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Estratégias de Controle	Espessura da Camada limite (ω)	Largura de Banda de Controle (λ)	Limites Máximos de Erros de Rastreamento ($\epsilon = \omega/\lambda$)
CEV-MD Convencional Baseado Estabilidade de Lyapunov	0.015	$0.3 \times I_{6 \times 6}$	0.05
CEV-MD Baseado no Controle Equivalente	0.01	$0.3 \times I_{6 \times 6}$	0.033
CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída	0.15	$0.3 \times I_{6 \times 6}$	0.5
CEV-MD Adaptativo	0.0125	$2 \times I_{6 \times 6}$	0.006

Tabela 5.3: Limites máximos de erros de rastreamento para cada estratégia apresentada.

e forças de propulsão elevados no tempo inicial. Isto porque no tempo inicial são necessárias altas compensações para que as trajetórias do sistema alcancem a camada limite da superfície de chaveamento com uma constante de tempo muito curta. Na primeira e terceira trajetórias desejadas, também foi possível constatar maiores esforços de controle para os movimentos horizontais de avanço, deriva e guinada e correspondentemente maiores forças de propulsão nos propulsores horizontais 1, 2, 3 e 4. Para as mesmas trajetórias também verificou-se dois sinais diferentes nas saídas de controle para os movimentos de afundamento, um para a descida do veículo no início das trajetórias e outro para a subida do veículo no final das trajetórias. Além disso, houve também dois sinais opostos nas saídas de controle dos movimentos de arfagem, um negativo no início das trajetórias para estabilizar o veículo na descida e outro positivo no final das trajetórias para estabilizar o veículo na subida do mesmo até as posições finais. É possível constatar que estes sinais das saídas de controle para os movimentos verticais de afundamento e arfagem foram correspondentemente executados pelos propulsores verticais 5 e 6.

Por sua vez, na segunda trajetória desejada, também foi possível constatar maiores esforços de controle para os movimentos horizontais de avanço, deriva e guinada. Assim como maiores forças de propulsão para os propulsores horizontais 1, 2, 3 e 4 correspondentemente. Ao tempo que os sinais de saída de controle para os movimentos verticais de afundamento e arfagem foram negativos para o primeiro e nulos para segundo respectivamente, devido a que o veículo efetua uma descida de cinco metros enquanto executa o movimento helicoidal. Logo, para tal descida são empregados os propulsores verticais 5 e 6 correspondentemente.

5.8 Conclusões

Nesta seção foram apresentados os resultados de simulação das estratégias de controle CEV-MD apresentadas no Capítulo 4. Para isto foram utilizadas as especificações do veículo subaquático autônomo Biointeractive-B1 desenvolvido pela Universidade de Tóquio. Todas as simulações foram realizadas utilizando o software Matlab[®] e enquanto que os parâmetros da dinâmica do veículo foram extraídos de Choi e Kondo (2010), os parâmetros da dinâmica dos

propulsores foram extraídos de (Tavares, 2003). Os parâmetros de controle foram sintonizados manualmente via simulações numéricas, considerando os critérios estabelecidos em Yoerger e Slotine (1985). Além disso, foram utilizadas as mesmas configurações geométricas dos propulsores que em (Choi e Kondo, 2010). Outras diferentes abordagens à sintonização de parâmetros de controladores CEV-MD podem ser encontradas nos trabalhos de Lakhekar e Saundarmal (2013) e Zhang et al. (2012).

As simulações consideraram a influência de correntes marinhas e distúrbios de ondas e ventos. A estratégia que apresentou o melhor desempenho livre de *chattering* foi o controle CEV-MD adaptativo, o qual produziu erros menores a 0.2 mm em regime transitório e erros quase nulos em regime permanente durante todo o desempenho de rastreamento das três trajetórias desejadas propostas na Seção 5.2.

Os resultados de simulação obtidos para o controle CEV-MD convencional baseado na estabilidade de Lyapunov e o controle CEV-MD baseado na estabilidade entrada-saída mostraram desempenhos de rastreamento similares. Entretanto o controle CEV-MD baseado no controle equivalente apresentou melhor desempenho de rastreamento que estes últimos com uma relativa facilidade de implementação. É importante também notar que a largura de banda de controle das estratégias CEV-MD convencional baseada na estabilidade de Lyapunov, CEV-MD baseada no controle equivalente e CEV-MD baseada na estabilidade entrada-saída é aproximadamente sete vezes menor do que a largura de banda do controle CEV-MD adaptativo (ver Tabela 5.2). Isto devido a que a estimação de parâmetros realizada pela lei adaptativa produz uma boa aproximação dos parâmetros incertos. A continuação, o capítulo 6 apresenta as respectivas conclusões do presente trabalho.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo são apresentadas as respectivas conclusões do trabalho. Inicialmente, em correspondência às metas estabelecidas na seção 1.3, são apresentadas algumas considerações importantes formuladas no sentido de interpretar as principais contribuições de cada capítulo e de estabelecer novos desafios a partir das limitações encontradas durante o seu desenvolvimento.

- No Capítulo 2, a inclusão dos efeitos das correntes marinhas na dinâmica do veículo somente foi possível desde que as correntes oceânicas foram consideradas irrotacionais e desde que a matriz de Coriolis e centrípeta do corpo rígido $C_{RB}(\nu)$ foi parametrizada de forma a depender unicamente das velocidades angulares atuais do veículo $\nu_2 = [\phi, \theta, \psi]^T$, desde que $\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$. Logo, a partir dessas duas suposições e do Teorema 2.3 mostrou-se que a dinâmica do veículo como corpo rígido pode ser dada por,

$$\tau_{RB} = M_{RB}\dot{\nu} + C_{RB}(\nu)\nu = M_{RB}\dot{\nu}_R + C_{RB}(\nu_R)\nu_R.$$

Entretanto, uma nova abordagem poderia considerar os efeitos rotacionais das correntes oceânicas desconsiderados neste trabalho.

- Os sistemas dinâmicos que pretendam representar um fenômeno físico devem necessariamente possuir solução. Do contrário nada representariam. O Capítulo 3 afirma que sistemas CEV-MD violam a condição de Lipschitz, portanto a existência e unicidade de solução deste tipo de sistemas não pode ser tratada pela teoria convencional de equações diferenciais. No entanto, abordando as descontinuidades como não linearidades, a análise e síntese de controladores CEV-MD pode ser realizada a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov segundo estabelece a teoria de controle moderno. Situação que torna a teoria de estabilidade de Lyapunov um dos principais alicerces da teoria de sistemas dinâmicos.
- A análise e síntese das diferentes leis de controle CEV-MD desenvolvidas no Capítulo 4 foi realizada seguindo a metodologia de projeto de controle CEV-MD da seção 3.6. A dinâmica desejada do sistema na superfície de chaveamento foi a mesma para todas as estratégias, uma dinâmica de erro de trajetória exponencialmente estável. Enquanto que as respectivas leis de controle foram obtidas a partir das condições de existência dos

modos deslizantes, dadas na seção 3.5. Com o objetivo de suavizar a lei de controle descontínua em uma pequena vizinhança da superfície de chaveamento e assim evitar o *chattering*, o método da camada limite foi aplicado em todas as estratégias CEV-MD desenvolvidas. Além disso, foi utilizada uma superfície de chaveamento de tipo integral para diminuir o erro de seguimento em regime permanente e conseguir um baixo tempo de convergência das trajetórias do sistema para a camada limite.

- As simulações numéricas foram implementadas considerando três trajetórias desejadas, duas retilíneas e uma circular, e os parâmetros de controle foram sintonizados manualmente em base aos critérios de Yoerger e Slotine (1985). Embora a utilização da camada limite tenha produzido uma leve diminuição tanto nos desempenhos de rastreamento na robustez do sistema, os resultados mostram baixo tempo de convergência e erros de rastreamento menores a 8 mm para todas as estratégias de controle CEV-MD desenvolvidas.

De forma geral todas as estratégias de controle CEV-MD desenvolvidas apresentaram robustez a distúrbios de ondas e ventos e baixos erros de rastreamento em regime permanente. Entretanto, o controle CEV-MD adaptativo foi a estratégia que apresentou o melhor desempenho. Isto devido a que a adaptação de parâmetros em tempo real, que a lei adaptativa realiza, garante menores incertezas paramétricas no sistema. O que permite a utilização de uma espessura de camada limite menor quando comparada às outras estratégias, assim como uma largura de banda de controle maior. Propostas futuras de trabalho poderiam considerar novas estratégias de sintonização de parâmetros de controle. Assim como situações de faltas nos propulsores e novos tratamentos ao fenômeno do *chattering* a partir da utilização de técnicas como a lógica difusa e redes neurais entre outras.

Referências Bibliográficas

- Akakaya, H., Yildiz, H., Saglam, G. e Gurleyen, F. (2009). Sliding mode control of autonomous underwater vehicle, *International Conference on Electrical and Electronics Engineering, 2009. ELECO 2009.*, pp. II-332-II-336.
- Antonelli, G. (2004). Open control problems in underwater robotics, *Proceedings of the Fourth International Workshop on Robot Motion and Control, 2004. RoMoCo'04.*, pp. 219-229.
- Antonelli, G., Chiaverini, S., Sarkar, N. e West, M. (2001). Adaptive control of an autonomous underwater vehicle: Experimental results on ODIN, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **9**(5): 756-765.
- Bean, S. P. (2003). Uma abordagem qr para estabilidade regional de sistemas chaveados, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* **4**(2): 197-206.
- Chatchanayuenyong, T. e Parnichkun, M. (2006). Neural network based-time optimal sliding mode control for an autonomous underwater robot, *Mechatronics* **16**(8): 471 - 478.
- Choi, J.-K. e Kondo, H. (2010). On fault-tolerant control of a hovering auv with four horizontal and two vertical thrusters, *IEEE OCEANS 2010 - Sydney*, pp. 1-6.
- Cristi, R., Papoulias, F. e Healey, A. (1990). Adaptive sliding mode control of autonomous underwater vehicles in the dive plane, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **15**(3): 152-160.
- Cunha, F. B. (2002). *Análise e controle de sistemas de estrutura variável*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- DeCarlo, R., Zak, S. e Matthews, G. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial, *Proceedings of the IEEE* **76**(3): 212-232.
- Draženić, B. (1969). The invariance conditions in variable structure systems, *Automatica* **5**(3): 287 - 295.
- Emelyanov, S. V. (1970). *Theory of Variable Structure Systems*, Nauka, Moscow, URSS.
- Filippov, A. F. (1964). Differential equation with discontinuous right-hand sides. *Mathematicheskii Sbornik*, 51(1), em Russo. traduzido ao inglês por, *Am. Math. Soc. Trans.* **62**(199).
- Fossen, T. I. (1994). *Guidance and control of Ocean Vehicles*, John Wiley & Sons Ltd.
- Fossen, T. I. (2012). How to incorporate wind, waves and ocean currents in the marine craft equations of motion, *Proceedings of the 9th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC 2012)*, Vol. 9, pp. 126-131.

- Fossen, T. e Sagatun, S. I. (1991). Adaptive control of nonlinear underwater robotic systems, *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1991. Proceedings.*, Vol. 2, pp. 1687–1694.
- Franklin, G. F., Powell, J. e Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de Controle para Engenharia*, Bookman, Porto Alegre, Brasil.
- Guedes, A. S. (2010). *Análise da técnica de modos deslizantes no acionamento de máquinas de indução com implementação em DPS*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Guo, J., Chiu, F.-C. e Huang, C.-C. (2003). Design of a sliding mode fuzzy controller for the guidance and control of an autonomous underwater vehicle, *Ocean Engineering* **30**(16): 2137 – 2155.
- Healey, A. e Lienard, D. (1993). Multivariable sliding mode control for autonomous diving and steering of unmanned underwater vehicles, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **18**(3): 327–339.
- Hong, E. Y., Soon, H. G. e Chitre, M. (2010). Depth control of an autonomous underwater vehicle STARFISH, *IEEE OCEANS 2010 - Sydney*, pp. 1–6.
- Itkis, U. (1976). *Control Systems of Variable Structure*, Wiley, New York, USA.
- Joe, H., Kim, M. e Yu, S.-c. (2014). Second-order sliding-mode controller for autonomous underwater vehicle in the presence of unknown disturbances, *Nonlinear Dynamics* **78**(1): 183–196.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-014-1431-0>
- Junior, R. R. T. (1999). *Simulador de robôs autônomos em ambiente não controlado*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Kamman, J. W. (2014). *Lecture notes in Multibody Dynamics: Moments and Products of Inertia and the Inertia Matrix*, Western Michigan University, Kalamazoo, USA.
- Kim, T. e Yuh, J. (2001). A novel neuro-fuzzy controller for autonomous underwater vehicles, *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2001.*, Vol. 3, pp. 2350–2355 vol.3.
- Lakhekar, G. e Saundarmal, V. (2013). Novel adaptive fuzzy sliding mode controller for depth control of an underwater vehicles, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ) 2013*, pp. 1–7.
- Lakhekar, G. e Waghmare, L. (2015). Dynamic fuzzy sliding mode control of underwater vehicles, in A. T. Azar e Q. Zhu (eds), *Advances and Applications in Sliding Mode Control systems*, Vol. 576 of *Studies in Computational Intelligence*, Springer International Publishing, pp. 279–304.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-11173-5_10
- Liu, J. e Wang, X. (2012). *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical System*, Springer.
- Luque, J. C. C. (2007). *Controle robusto multivariável para um veículo submersível autônomo*, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

- Monsees, G. (2002). *Discrete-time Sliding Mode Control*, PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Netherlands.
- Oliveira, T. R. (2006). *Controle por modos deslizantes de sistemas incertos com direção de controle desconhecido*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Rhif, A. (2014). Sliding mode-multimodel stabilising control using single and several sliding surfaces: simulation on an autonomous underwater vehicle, *International Journal of Modelling, Identification and Control* **22**(2): 126–138.
Disponível em: <http://inderscience.metapress.com/content/N4398033761Q86H7>
- Rhif, A., Kardous, Z. e Braiek, N. B. (2013). First and high order sliding mode-multimodel stabilizing control synthesis using single and several sliding surfaces for nonlinear systems: Simulation on an autonomous underwater vehicles (AUV), *International Conference on Control, Engineering & Information Technology* **1**: 100–110.
- Salgado-Jimenez, T. e Jouvencel, B. (2003). Using a high order sliding modes for diving control a torpedo autonomous underwater vehicle, *Proceedings OCEANS 2003*, Vol. 2, pp. 934–939.
- Salgado-Jiménez, T., Spiewak, J.-M., Fraisse, P. e Jouvencel, B. (2004). A robust control algorithm for auv: based on a high order sliding mode, *OCEANS '04. MTTs/IEEE TECHNO-OCEAN '04*, Vol. 1, pp. 276–281 Vol.1.
- Santos, C. H. F. D. (2006). *Movimento Coordenado de Sistemas Veículo-Manipulador Submarinos Utilizando Técnicas de Inteligência Artificial e Sistemas Híbridos*, Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Shi, J. (2006). Design of sliding mode autopilot with steady-state error elimination for autonomous underwater vehicles, *TENCON 2006. 2006 IEEE Region 10 Conference*, pp. 1–4.
- Shtessel e Buffington, J. (1998). Finite-reaching-time continuous sliding mode controller for MIMO nonlinear systems, *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, pp. 1934–1935.
- Slotine, J.-J. E. (1985). The robust control of robot manipulators, *The International Journal of Robotics Research* **4**(2): 49–64.
- Slotine, J. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, New Jersey, USA.
- Song, F. e Smith, S. (2000). Design of sliding mode fuzzy controllers for an autonomous underwater vehicle without system model, *OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition*, Vol. 2, pp. 835–840.
- Takahashi, R. H. C. (1991). *Contribuição à teoria dos modos quase-deslizantes amostrados: Uma abordagem geométrica aplicada ao estudo de sistemas monovariáveis*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Tavares, A. M. (2003). *Um estudo sobre a modelagem e o controle de veículos subaquáticos não tripulados*, Dissertação de Mestrado, Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Brasil.

- Utkin, V., Guldner, J. e Shi, J. (1999). *Sliding Mode Control in Electromechanical System*, Taylor & Francis.
- Utkin, V. I. (1978). *Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems*, MIR Publishers, Moscow, URSS.
- Van de Ven, P. W. J., Flanagan, C. e Toal, D. (2005). Neural network control of underwater vehicles, *Eng. Appl. Artif. Intell.* **18**(5): 533–547.
- Yoerger, D. e Slotine, J.-J. (1985). Robust trajectory control of underwater vehicles, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **10**(4): 462–470.
- Yoerger, D., Slotine, J.-J., Newman, J. e Schempf, H. (1985). Robust trajectory control of underwater vehicles, *Proceedings of the 1985 4th International Symposium on Unmanned Untethered Submersible Technology*, Vol. 4, pp. 184–197.
- Yu, S., Yu, X., Shirinzadeh, B. e Man, Z. (2005). Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode, *Automatica* **41**(11): 1957 – 1964.
- Zhang, B., Pi, Y. e Luo, Y. (2012). Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor, *ISA Transactions* **51**(5): 649 – 656.
- Zhou, H.-Y., Liu, K.-Z. e Feng, X.-S. (2011). State feedback sliding mode control without chattering by constructing hurwitz matrix for auv movement, *International Journal of Automation and Computing* **8**(2): 262–268.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11633-011-0581-5>

Apêndice A

Códigos MATLAB[®]

Neste apêndice são apresentados os códigos utilizados no aplicativo Matlab[®] para as simulações numéricas das respectivas estratégias CEV-MD introduzidas no Capítulo 4. As simulações foram realizadas a partir modelos construídos no editor gráfico Simulink[®], cujos diagramas de blocos são apresentados na seção A.5. A continuação, as seções A.1, A.2 e A.3 introduzem os códigos dos blocos de controle dos correspondentes modelos das estratégias CEV-MD apresentadas respectivamente em 4.2, 4.3 e 4.4. Logo, a seção A.4 apresenta tanto os códigos do bloco da lei adaptativa quanto os códigos do bloco de controle do correspondente modelo da estratégia CEV-MD introduzida em 4.5.

A.1 Controle CEV-MD Convencional Baseado na Estabilidade de Lyapunov

```
%Variável de Entrada: u
%Variável de Saída: T
function[T]=torque(u)

%Posições, Velocidades e Acelerações Desejadas
xd=u(1);
yd=u(2);
zd=u(3);
phid=u(4);
thetad=u(5);
psid=u(6);

xpd=u(7);
ypd=u(8);
zpd=u(9);
phipd=u(10);
thetapd=u(11);
psipd=u(12);
```

```
xppd=u(13);  
yppd=u(14);  
zppd=u(15);  
phippd=u(16);  
thetappd=u(17);  
psippd=u(18);
```

```
%Posições e Orientações do VSA
```

```
x=u(19);  
y=u(20);  
z=u(21);  
phi=u(22);  
theta=u(23);  
psi=u(24);
```

```
%Velocidades Relativas do VSA
```

```
u1R=u(25);  
vR=u(26);  
wR=u(27);  
pR=u(28);  
qR=u(29);  
rR=u(30);
```

```
%Integrais dos Erros de Posição
```

```
erroix=u(31);  
erroiy=u(32);  
erroiz=u(33);  
erroiphi=u(34);  
erroitheta=u(35);  
erroipsi=u(36);
```

```
%Velocidades Atuais no Referencial Inercial
```

```
xp=u(37);  
yp=u(38);  
zp=u(39);  
phip=u(40);  
thetap=u(41);  
psip=u(42);
```

```
%Velocidades das Correntes Marinhas no Referencial do Corpo
```

```
u1cm=u(43);  
vcm=u(44);  
wcm=u(45);  
pcm=u(46);  
qcm=u(47);  
rcm=u(48);
```

```

%Parâmetros da Dinâmica do VSA
global m Ix Iy Iz Xup Yvp Zwp Kpp1 Mqp Nrp
global Xu Yv Zw Kp Mq Nr Xuu Yvv Zww Kpp Mqq Nrr
global xG yG zG xB yB zB b c g kp kv ktheta kw
global W B

%Vetor das Integrais dos Erros de Posição
erroI=[erroix;erroiy;erroiz;erroiphi;erroitheta;erroipsi];

%Vetor de Parâmetros da Dinâmica do VSA
pa= [m*xG,m*yG,m*zG,m,Xup,Yvp,Zwp,Kpp1,Mqp,Nrp,...
     W,B,Xu,Xuu,Yv,Yvv,Zw,Zww,Kp,Kpp,Mq,Mqq,Nr,...
     Nrr,Ix,Iy,Iz,yG*W,yB*B,zG*W,zB*B,xG*W,xB*B];

%Vetor de Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep=(0.95)*pa;

%Vetor de Posições e Orientações do VSA
X=[x;y;z;phi;theta;psi];

%Vetor de Velocidades Atuais do VSA no referencial Inercial
Xp=[xp;v;zp;phip;thetap;psip];

%Vetor de Posições Desejadas do VSA
Xd=[xd;yd;zd;phid;thetad;psid];

%Vetor de Velocidades Desejadas do VSA
Xdp=[xpd;ypd;zpd;phipd;thetapd;psipd];

%Vetor de Acelerações Desejadas do VSA
Xdpp=[xppd;yppd;zppd;phippd;thetappd;psippd];

%Vetor de Velocidade Relativas do VSA
VR=[ulR;vR;wR;pR;qR;rR];

%Vetor de Velocidade das Correntes Marinhas
VC=[ulcm;vcm;wcm;pcm;qcm;rcm];

%Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep1=ep(1);
ep2=ep(2);
ep3=ep(3);
ep4=ep(4);
ep5=ep(5);
ep6=ep(6);
ep7=ep(7);
ep8=ep(8);
ep9=ep(9);

```

```

ep10=ep(10);
ep11=ep(11);
ep12=ep(12);
ep13=ep(13);
ep14=ep(14);
ep15=ep(15);
ep16=ep(16);
ep17=ep(17);
ep18=ep(18);
ep19=ep(19);
ep20=ep(20);
ep21=ep(21);
ep22=ep(22);
ep23=ep(23);
ep24=ep(24);
ep25=ep(25);
ep26=ep(26);
ep27=ep(27);
ep31=ep(28);
ep32=ep(29);
ep33=ep(30);
ep34=ep(31);
ep35=ep(32);
ep36=ep(33);

%Matriz de Transformação das Velocidades Lineares
a1 = [cos(psi)*cos(theta),-sin(psi)*cos(phi)+cos(psi)*
      sin(theta)*sin(phi),sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*
      cos(phi)*sin(theta);sin(psi)*cos(theta),cos(psi)*
      cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi),-cos(psi)*
      sin(phi)+sin(theta)*sin(psi)*cos(phi);-sin(theta),
      cos(theta)*sin(phi),cos(theta)*cos(phi)];

%Matriz de Transformação das Velocidades Angulares
b1 = [1,sin(phi)*tan(theta),cos(phi)*tan(theta);
      0,cos(phi),-sin(phi);0,sin(phi)/cos(theta),
      cos(phi)/cos(theta)];

%Matriz Identidade de Ordem 3
N0=zeros(3,3);

%Matriz de Transformação de Referencial J
J=[a1 N0;N0 b1];

%Matriz de Inércia
M_p = [ep4-ep5, 0, 0, 0, ep3, -ep2;
        0, ep4-ep6, 0, -ep3, 0, ep1;
        0, 0, ep4-ep7, ep2, -ep1, 0;

```

```

0, -ep3, ep2, ep25-ep8, 0, 0;
ep3, 0, -ep1, 0, ep26-ep9, 0;
-ep2, ep1, 0, 0, 0, ep27-ep10];

%Matrizes Estimadas da Dinâmica do Veículo
CRB_p=[0 -rR*ep4 qR*ep4 (rR*ep3+qR*ep2) -qR*ep1 -rR*ep1
rR*ep4 0 -pR*ep4 -pR*ep2 (rR*ep3+pR*ep1) -rR*ep2
-qR*ep4 pR*ep4 0 -pR*ep3 -qR*ep3 (qR*ep2+pR*ep1)
-(rR*ep3+qR*ep2) pR*ep2 pR*ep3 0 -ep27*rR ep26*qR
qR*ep1 -(rR*ep3+pR*ep1) qR*ep3 ep27*rR 0 -ep25*pR
rR*ep1 rR*ep2 -(qR*ep2+pR*ep1) -ep26*qR ep25*pR 0];

CA_p=[0,0,0,0,-ep7*wR,ep6*vR;
0,0,0,ep7*wR,0,-ep5*u1R;
0,0,0,-ep6*vR,ep5*u1R,0;
0,-ep7*wR,ep6*vR,0,-ep10*rR,ep9*qR;
ep7*wR,0,-ep5*u1R,ep10*rR,0,-ep8*pR;
-ep6*vR,ep5*u1R,0,-ep9*qR,ep8*pR,0];

C_p = CRB_p+CA_p;

d_p=[ep13+ep14*abs(u1R), ep15+ep16*abs(vR), ep17+ep18*abs(wR),
ep19+ep20*abs(pR), ep21+ep22*abs(qR), ep23+ep24*abs(rR)];

D_p=-diag(d_p);

CD_p=C_p+D_p;

%Vetor de Forças Restauradoras
Gn_p=[(ep11-ep12)*sin(theta);-(ep11-ep12)*cos(theta)*
sin(phi);-(ep11-ep12)*cos(theta)*cos(phi);
-(ep31-ep32)*cos(theta)*cos(phi)+(ep33-ep34)*
cos(theta)*sin(phi);(ep33-ep34)*sin(theta)+
(ep35-ep36)*cos(theta)*cos(phi);-(ep35-ep36)*
cos(theta)*sin(phi)-(ep31-ep32)*sin(theta)];

%Erros de Posição
e=X-Xd;

%Erros de Velocidades no Referencial Inercial
de=Xp-Xdp;

%Largura de Banda de Controle
Fai=0.3*eye(6);

%Velocidades Virtuais no Referencial Inercial
Xrp=Xdp-2*Fai*e-(Fai*Fai)*erroI;

```

```

%Acelerações Virtuais no Referencial Inercial
Xrpp=Xdpp-2*Fai*de-(Fai*Fai)*e;

%Velocidades Virtuais no Referencial do Corpo
Vr=inv(J)*Xrp;

%Derivada da Matriz de Transformação de Referencial J
Jder=[-sin(psi)*psip*cos(theta)+cos(psi)*-sin(theta)*
    thetap, (-cos(psi)*psip*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi)*
    phip)+(-sin(psi)*psip*sin(theta)*sin(phi)+
    cos(psi)*(cos(theta)*thetap*sin(phi)+sin(theta)*
    cos(phi)*phip)), (cos(psi)*psip*sin(phi)+sin(psi)*
    cos(phi)*phip)+(-sin(psi)*psip*cos(phi)*sin(theta)+
    cos(psi)*(-sin(phi)*phip*sin(theta)+cos(phi)*
    cos(theta)*thetap)), 0,0,0;cos(psi)*psip*cos(theta)
-sin(psi)*sin(theta)*thetap, (-sin(psi)*psip*
    cos(phi)-cos(psi)*sin(phi)*phip)+(cos(phi)*phip*
    sin(theta)*sin(psi)+sin(phi)*(cos(theta)*thetap*
    sin(psi)+sin(theta)*cos(psi)*psip)), (sin(psi)*
    psip*sin(phi)-cos(psi)*cos(phi)*phip)+(cos(theta)*
    thetap*sin(psi)*cos(phi)+sin(theta)*(cos(psi)*
    psip*cos(phi)-sin(psi)*sin(phi)*phip)), 0,0,0;-
    cos(theta)*thetap, -sin(theta)*thetap*sin(phi)+
    cos(theta)*cos(phi)*phip, -sin(theta)*thetap*
    cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*phip, 0,0,0;0,0,0,0,
    cos(phi)*phip*tan(theta)+(sin(phi)/(cos(theta))^2)*
    thetap, -sin(phi)*phip*tan(theta)+(cos(phi)/
    (cos(theta))^2)*thetap;0,0,0,0,-sin(phi)*phip,
    -cos(phi)*phip;0,0,0,0,((cos(phi)*phip*cos(theta))+
    (sin(phi)*sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2),
    ((-sin(phi)*phip*cos(theta))+cos(phi)*
    sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2)];

%Acelerações Virtuais no Referencial do Corpo
Vrp=inv(J)*(Xrpp-Jder*inv(J)*Xrp);

%Velocidade Atuais no Referencial do Corpo
V=inv(J)*Xp;

%Função Escalar do Erro de Trajetória 's'
s=V-Vr;

%Ganho de Controle
Dl=72;

%Camada Limite
delta=0.015;
kk=1/delta;

```



```

    if abs(s)>delta
        sat=sign(s);
    else
        sat=kk*s;
    end

%Lei de Controle CEV-MD Conv. Baseada na Estabil. de Lyapunov
tor=M_p*Vrp+CD_p*Vr+Gn_p-(CD_p*VC)-(Dl*sat);

%Vetor de Entradas de Controle e Funções Escalares 's'
T=[tor;s];

```

A.2 Controle CEV-MD Baseado na Controle Equivalente

```

%Variável de Entrada: u
%Variável de Saída: T
function[T]=torque(u)

%Posições, Velocidades e Acelerações Desejadas
xd=u(1);
yd=u(2);
zd=u(3);
phid=u(4);
thetad=u(5);
psid=u(6);

xpd=u(7);
ypd=u(8);
zpd=u(9);
phipd=u(10);
thetapd=u(11);
psipd=u(12);

xppd=u(13);
yppd=u(14);
zppd=u(15);
phippd=u(16);
thetappd=u(17);
psippd=u(18);

%Posições e Orientações do VSA
x=u(19);
y=u(20);
z=u(21);

```

```

phi=u(22);
theta=u(23);
psi=u(24);

%Velocidades Relativas do VSA
u1R=u(25);
vR=u(26);
wR=u(27);
pR=u(28);
qR=u(29);
rR=u(30);

%Integrais dos Erros de Posição
erroix=u(31);
erroiy=u(32);
erroiz=u(33);
erroiphi=u(34);
erroitheta=u(35);
erroipsi=u(36);

%Velocidades Atuais no Referencial Inercial
xp=u(37);
yp=u(38);
zp=u(39);
phip=u(40);
thetap=u(41);
psip=u(42);

%Velocidades das Correntes Marinhas no Referencial do Corpo
ulcm=u(43);
vcm=u(44);
wcm=u(45);
pcm=u(46);
qcm=u(47);
rcm=u(48);

%Parâmetros da Dinâmica do VSA
global m Ix Iy Iz Xup Yvp Zwp Kppl Mqp Nrp
global Xu Yv Zw Kp Mq Nr Xuu Yvv Zww Kpp Mqq Nrr
global xG yG zG xB yB zB b c g kp kv ktheta kw
global W B

%Vetor das Integrais dos Erros de Posição
erroI=[erroix;erroiy;erroiz;erroiphi;erroitheta;erroipsi];

%Vetor de Parâmetros da Dinâmica do VSA
pa= [m*xG,m*yG,m*zG,m,Xup,Yvp,Zwp,Kppl,Mqp,Nrp,...
     W,B,Xu,Xuu,Yv,Yvv,Zw,Zww,Kp,Kpp,Mq,Mqq,Nr,...

```

```

    Nrr, Ix, Iy, Iz, yG*W, yB*B, zG*W, zB*B, xG*W, xB*B];

%Vetor de Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep=(0.95)*pa;

%Vetor de Posições e Orientações do VSA
X=[x;y;z;phi;theta;psi];

%Vetor de Velocidades Atuais do VSA no referencial Inercial
Xp=[xp;yp;zp;phip;thetap;psip];

%Vetor de Posições Desejadas do VSA
Xd=[xd;yd;zd;phid;thetad;psid];

%Vetor de Velocidades Desejadas do VSA
Xdp=[xpd;ypd;zpd;phipd;thetapd;psipd];

%Vetor de Acelerações Desejadas do VSA
Xdpp=[xppd;yppd;zppd;phippd;thetappd;psippd];

%Vetor de Velocidade Relativas do VSA
VR=[ulR;vR;wR;pR;qR;rR];

%Vetor de Velocidade das Correntes Marinhas
VC=[ulcm;vcm;wcm;pcm;qcm;rcm];

%Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep1=ep(1);
ep2=ep(2);
ep3=ep(3);
ep4=ep(4);
ep5=ep(5);
ep6=ep(6);
ep7=ep(7);
ep8=ep(8);
ep9=ep(9);
ep10=ep(10);
ep11=ep(11);
ep12=ep(12);
ep13=ep(13);
ep14=ep(14);
ep15=ep(15);
ep16=ep(16);
ep17=ep(17);
ep18=ep(18);
ep19=ep(19);
ep20=ep(20);
ep21=ep(21);

```

```

ep22=ep(22);
ep23=ep(23);
ep24=ep(24);
ep25=ep(25);
ep26=ep(26);
ep27=ep(27);
ep31=ep(28);
ep32=ep(29);
ep33=ep(30);
ep34=ep(31);
ep35=ep(32);
ep36=ep(33);

%Matriz de Transformação das Velocidades Lineares
a1 = [cos(psi)*cos(theta),-sin(psi)*cos(phi)+cos(psi)*
      sin(theta)*sin(phi),sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*
      cos(phi)*sin(theta);sin(psi)*cos(theta),cos(psi)*
      cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi),-cos(psi)*
      sin(phi)+sin(theta)*sin(psi)*cos(phi);-sin(theta),
      cos(theta)*sin(phi),cos(theta)*cos(phi)];

%Matriz de Transformação das Velocidades Angulares
b1 = [1,sin(phi)*tan(theta),cos(phi)*tan(theta);
      0,cos(phi),-sin(phi);0,sin(phi)/cos(theta),
      cos(phi)/cos(theta)];

%Matriz Identidade de Ordem 3
N0=zeros(3,3);

%Matriz de Transformação de Referencial J
J=[a1 N0;N0 b1];

%Matriz de Inércia
M_p = [ep4-ep5, 0, 0, 0, ep3, -ep2;
        0, ep4-ep6, 0, -ep3, 0, ep1;
        0, 0, ep4-ep7, ep2, -ep1, 0;
        0, -ep3, ep2, ep25-ep8, 0, 0;
        ep3, 0, -ep1, 0, ep26-ep9, 0;
        -ep2, ep1, 0, 0, 0, ep27-ep10];

%Matrizes Estimadas da Dinâmica do Veículo
CRB_p=[0 -rR*ep4 qR*ep4 (rR*ep3+qR*ep2) -qR*ep1 -rR*ep1
        rR*ep4 0 -pR*ep4 -pR*ep2 (rR*ep3+pR*ep1) -rR*ep2
        -qR*ep4 pR*ep4 0 -pR*ep3 -qR*ep3 (qR*ep2+pR*ep1)
        -(rR*ep3+qR*ep2) pR*ep2 pR*ep3 0 -ep27*rR ep26*qR
        qR*ep1 -(rR*ep3+pR*ep1) qR*ep3 ep27*rR 0 -ep25*pR
        rR*ep1 rR*ep2 -(qR*ep2+pR*ep1) -ep26*qR ep25*pR 0];

```

```

CA_p=[0,0,0,0,-ep7*wR,ep6*vR;
      0,0,0,ep7*wR,0,-ep5*u1R;
      0,0,0,-ep6*vR,ep5*u1R,0;
      0,-ep7*wR,ep6*vR,0,-ep10*rR,ep9*qR;
      ep7*wR,0,-ep5*u1R,ep10*rR,0,-ep8*pR;
      -ep6*vR,ep5*u1R,0,-ep9*qR,ep8*pR,0];

C_p = CRB_p+CA_p;

d_p=[ep13+ep14*abs(u1R),ep15+ep16*abs(vR),ep17+ep18*abs(wR),
      ep19+ep20*abs(pR), ep21+ep22*abs(qR), ep23+ep24*abs(rR)];

D_p=-diag(d_p);

CD_p=C_p+D_p;

%Vetor de Forças Restauradoras
Gn_p=[(ep11-ep12)*sin(theta);-(ep11-ep12)*cos(theta)*
      sin(phi);-(ep11-ep12)*cos(theta)*cos(phi);
      -(ep31-ep32)*cos(theta)*cos(phi)+(ep33-ep34)*
      cos(theta)*sin(phi);(ep33-ep34)*sin(theta)+
      (ep35-ep36)*cos(theta)*cos(phi);-(ep35-ep36)*
      cos(theta)*sin(phi)-(ep31-ep32)*sin(theta)];

%Erros de Posição
e=X-Xd;

%Erros de Velocidades no Referencial Inercial
de=Xp-Xdp;

%Largura de Banda de Controle
Fai=0.3*eye(6);

%Velocidades Virtuais no Referencial Inercial
Xrp=Xdp-2*Fai*e-(Fai*Fai)*erroI;

%Acelerações Virtuais no Referencial Inercial
Xrpp=Xdpp-2*Fai*de-(Fai*Fai)*e;

%Velocidades Virtuais no Referencial do Corpo
Vr=inv(J)*Xrp;

%Derivada da Matriz de Transformação de Referencial J
Jder=[-sin(psi)*psip*cos(theta)+cos(psi)*-sin(theta)*
      thetap,(-cos(psi)*psip*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi)*
      phip)+(-sin(psi)*psip*sin(theta)*sin(phi)+
      cos(psi)*(cos(theta)*thetap*sin(phi)+sin(theta)*
      cos(phi)*phip)),(cos(psi)*psip*sin(phi)+sin(psi)*

```

```

cos(phi)*phip)+(-sin(psi)*psip*cos(phi)*sin(theta)+
cos(psi)*(-sin(phi)*phip*sin(theta)+cos(phi)*
cos(theta)*thetap)),0,0,0;cos(psi)*psip*cos(theta)
-sin(psi)*sin(theta)*thetap,(-sin(psi)*psip*
cos(phi)-cos(psi)*sin(phi)*phip)+(cos(phi)*phip*
sin(theta)*sin(psi)+sin(phi)*(cos(theta)*thetap*
sin(psi)+sin(theta)*cos(psi)*psip)),(sin(psi)*
psip*sin(phi)-cos(psi)*cos(phi)*phip)+(cos(theta)*
thetap*sin(psi)*cos(phi)+sin(theta)*(cos(psi)*
psip*cos(phi)-sin(psi)*sin(phi)*phip)),0,0,0;-
cos(theta)*thetap,-sin(theta)*thetap*sin(phi)+
cos(theta)*cos(phi)*phip,-sin(theta)*thetap*
cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*phip,0,0,0;0,0,0,0,
cos(phi)*phip*tan(theta)+(sin(phi)/(cos(theta))^2)*
thetap,-sin(phi)*phip*tan(theta)+(cos(phi)/
(cos(theta))^2)*thetap;0,0,0,0,-sin(phi)*phip,
-cos(phi)*phip;0,0,0,0,((cos(phi)*phip*cos(theta))+
(sin(phi)*sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2),
((-sin(phi)*phip*cos(theta))+cos(phi)*
sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2)];

```

```
%Acelerações Virtuais no Referencial do Corpo
```

```
Vrp=inv(J)*(Xrpp-Jder*inv(J)*Xrp);
```

```
%Velocidades Atuais no Referencial do Corpo
```

```
V=inv(J)*Xp;
```

```
%Função Escalar do Erro de Trajetória 's'
```

```
s=V-Vr;
```

```
%Ganho de Controle
```

```
Dl=70;
```

```
%Camada Limite
```

```
delta=0.01;
```

```
kk=1/delta;
```

```
if abs(s)>delta
```

```
    sat=sign(s);
```

```
else
```

```
    sat=kk*s;
```

```
end
```

```
%Lei de controle CEV-MD Baseada no Controle Equivalente
```

```
tor=M_p*Vrp+CD_p*V+Gn_p-(CD_p*VC)-(Dl*sat);
```

```
%Vetor de Entradas de Controle e Funções Escalares 's'
```

```
T=[tor;s];
```

A.3 Controle CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída

```

%Variável de Entrada: u
%Variável de Saída: T
function[T]=torque(u)

%Posições, Velocidades e Acelerações Desejadas
xd=u(1);
yd=u(2);
zd=u(3);
phid=u(4);
thetad=u(5);
psid=u(6);

xpd=u(7);
ypd=u(8);
zpd=u(9);
phipd=u(10);
thetapd=u(11);
psipd=u(12);

xppd=u(13);
yppd=u(14);
zppd=u(15);
phippd=u(16);
thetappd=u(17);
psippd=u(18);

%Posições e Orientações do VSA
x=u(19);
y=u(20);
z=u(21);
phi=u(22);
theta=u(23);
psi=u(24);

%Velocidades Relativas do VSA
u1R=u(25);
vR=u(26);
wR=u(27);
pR=u(28);
qR=u(29);
rR=u(30);

%Integrais dos Erros de Posição
erroix=u(31);
erroiy=u(32);

```

```

erroiz=u(33);
erroiphi=u(34);
erroitheta=u(35);
erroipsi=u(36);

%Velocidades Atuais no Referencial Inercial
xp=u(37);
yp=u(38);
zp=u(39);
phip=u(40);
thetap=u(41);
psip=u(42);

%Velocidades das Correntes Marinhas no Referencial do Corpo
ulcm=u(43);
vcm=u(44);
wcm=u(45);
pcm=u(46);
qcm=u(47);
rcm=u(48);

%Parâmetros da Dinâmica do VSA
global m Ix Iy Iz Xup Yvp Zwp Kppl Mqp Nrp
global Xu Yv Zw Kp Mq Nr Xuu Yvv Zww Kpp Mqq Nrr
global xG yG zG xB yB zB b c g kp kv ktheta kw
global W B

%Vetor das Integrais dos Erros de Posição
erroI=[erroix;erroiy;erroiz;erroiphi;erroitheta;erroipsi];

%Vetor de Parâmetros da Dinâmica do VSA
pa= [m*xG,m*yG,m*zG,m,Xup,Yvp,Zwp,Kppl,Mqp,Nrp,...
     W,B,Xu,Xuu,Yv,Yvv,Zw,Zww,Kp,Kpp,Mq,Mqq,Nr,...
     Nrr,Ix,Iy,Iz,yG*W,yB*B,zG*W,zB*B,xG*W,xB*B];

%Vetor de Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep=(0.95)*pa;

%Vetor de Posições e Orientações do VSA
X=[x;y;z;phi;theta;psi];

%Vetor de Velocidades Atuais do VSA no referencial Inercial
Xp=[xp;yp;zp;phip;thetap;psip];

%Vetor de Posições Desejadas do VSA
Xd=[xd;yd;zd;phid;thetad;psid];

%Vetor de Velocidades Desejadas do VSA

```



```

Xdp=[xpd;ypd;zpd;phipd;thetapd;psipd];

%Vetor de Acelerações Desejadas do VSA
Xdpp=[xppd;yppd;zppd;phippd;thetappd;psippd];

%Vetor de Velocidade Relativas do VSA
VR=[ulR;vR;wR;pR;qR;rR];

%Vetor de Velocidade das Correntes Marinhas
VC=[ulcm;vcm;wcm;pcm;qcm;rcm];

%Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep1=ep(1);
ep2=ep(2);
ep3=ep(3);
ep4=ep(4);
ep5=ep(5);
ep6=ep(6);
ep7=ep(7);
ep8=ep(8);
ep9=ep(9);
ep10=ep(10);
ep11=ep(11);
ep12=ep(12);
ep13=ep(13);
ep14=ep(14);
ep15=ep(15);
ep16=ep(16);
ep17=ep(17);
ep18=ep(18);
ep19=ep(19);
ep20=ep(20);
ep21=ep(21);
ep22=ep(22);
ep23=ep(23);
ep24=ep(24);
ep25=ep(25);
ep26=ep(26);
ep27=ep(27);
ep31=ep(28);
ep32=ep(29);
ep33=ep(30);
ep34=ep(31);
ep35=ep(32);
ep36=ep(33);

%Matriz de Transformação das Velocidades Lineares
a1 = [cos(psi)*cos(theta),-sin(psi)*cos(phi)+cos(psi)*

```

```

sin(theta)*sin(phi),sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*
cos(phi)*sin(theta);sin(psi)*cos(theta),cos(psi)*
cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi),-cos(psi)*
sin(phi)+sin(theta)*sin(psi)*cos(phi);-sin(theta),
cos(theta)*sin(phi),cos(theta)*cos(phi)];

```

```
%Matriz de Transformação das Velocidades Angulares
```

```

b1 = [1,sin(phi)*tan(theta),cos(phi)*tan(theta);
      0,cos(phi),-sin(phi);0,sin(phi)/cos(theta),
      cos(phi)/cos(theta)];

```

```
%Matriz Identidade de Ordem 3
```

```
N0=zeros(3,3);
```

```
%Matriz de Transformação de Referencial J
```

```
J=[a1 N0;N0 b1];
```

```
%Matriz de Inércia
```

```

M_p = [ep4-ep5, 0, 0, 0, ep3, -ep2;
       0, ep4-ep6, 0, -ep3, 0, ep1;
       0, 0, ep4-ep7, ep2, -ep1, 0;
       0, -ep3, ep2, ep25-ep8, 0, 0;
       ep3, 0, -ep1, 0, ep26-ep9, 0;
       -ep2, ep1, 0, 0, 0, ep27-ep10];

```

```
%Matrizes Estimadas da Dinâmica do Veículo
```

```

CRB_p=[0 -rR*ep4 qR*ep4 (rR*ep3+qR*ep2) -qR*ep1 -rR*ep1
       rR*ep4 0 -pR*ep4 -pR*ep2 (rR*ep3+pR*ep1) -rR*ep2
       -qR*ep4 pR*ep4 0 -pR*ep3 -qR*ep3 (qR*ep2+pR*ep1)
       -(rR*ep3+qR*ep2) pR*ep2 pR*ep3 0 -ep27*rR ep26*qR
       qR*ep1 -(rR*ep3+pR*ep1) qR*ep3 ep27*rR 0 -ep25*pR
       rR*ep1 rR*ep2 -(qR*ep2+pR*ep1) -ep26*qR ep25*pR 0];

```

```

CA_p=[0,0,0,0,-ep7*wR,ep6*vR;
      0,0,0,ep7*wR,0,-ep5*u1R;
      0,0,0,-ep6*vR,ep5*u1R,0;
      0,-ep7*wR,ep6*vR,0,-ep10*rR,ep9*qR;
      ep7*wR,0,-ep5*u1R,ep10*rR,0,-ep8*pR;
      -ep6*vR,ep5*u1R,0,-ep9*qR,ep8*pR,0];

```

```
C_p = CRB_p+CA_p;
```

```

d_p=[ep13+ep14*abs(u1R),ep15+ep16*abs(vR),ep17+ep18*abs(wR),
     ep19+ep20*abs(pR), ep21+ep22*abs(qR), ep23+ep24*abs(rR)];

```

```
D_p=-diag(d_p);
```

```
CD_p=C_p+D_p;
```

```

%Vetor de Forças Restauradoras
Gn_p=[(ep11-ep12)*sin(theta);-(ep11-ep12)*cos(theta)*
      sin(phi);-(ep11-ep12)*cos(theta)*cos(phi);
      -(ep31-ep32)*cos(theta)*cos(phi)+(ep33-ep34)*
      cos(theta)*sin(phi);(ep33-ep34)*sin(theta)+
      (ep35-ep36)*cos(theta)*cos(phi);-(ep35-ep36)*
      cos(theta)*sin(phi)-(ep31-ep32)*sin(theta)];

%Erros de Posição
e=X-Xd;

%Erros de Velocidades no Referencial Inercial
de=Xp-Xdp;

%Largura de Banda de Controle
Fai=0.3*eye(6);

%Velocidades Virtuais no Referencial Inercial
Xrp=Xdp-2*Fai*e-(Fai*Fai)*erroI;

%Acelerações Virtuais no Referencial Inercial
Xrpp=Xdpp-2*Fai*de-(Fai*Fai)*e;

%Velocidades Virtuais no Referencial do Corpo
Vr=inv(J)*Xrp;

%Derivada da Matriz de Transformação de Referencial J
Jder=[-sin(psi)*psip*cos(theta)+cos(psi)*-sin(theta)*
      thetap,(-cos(psi)*psip*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi)*
      phip)+(-sin(psi)*psip*sin(theta)*sin(phi)+
      cos(psi)*(cos(theta)*thetap*sin(phi)+sin(theta)*
      cos(phi)*phip)),(cos(psi)*psip*sin(phi)+sin(psi)*
      cos(phi)*phip)+(-sin(psi)*psip*cos(phi)*sin(theta)+
      cos(psi)*(-sin(phi)*phip*sin(theta)+cos(phi)*
      cos(theta)*thetap)),0,0,0;cos(psi)*psip*cos(theta)
      -sin(psi)*sin(theta)*thetap,(-sin(psi)*psip*
      cos(phi)-cos(psi)*sin(phi)*phip)+(cos(phi)*phip*
      sin(theta)*sin(psi)+sin(phi)*(cos(theta)*thetap*
      sin(psi)+sin(theta)*cos(psi)*psip)),(sin(psi)*
      psip*sin(phi)-cos(psi)*cos(phi)*phip)+(cos(theta)*
      thetap*sin(psi)*cos(phi)+sin(theta)*(cos(psi)*
      psip*cos(phi)-sin(psi)*sin(phi)*phip)),0,0,0;-
      cos(theta)*thetap,-sin(theta)*thetap*sin(phi)+
      cos(theta)*cos(phi)*phip,-sin(theta)*thetap*
      cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*phip,0,0,0;0,0,0,0,
      cos(phi)*phip*tan(theta)+(sin(phi)/(cos(theta))^2)*
      thetap,-sin(phi)*phip*tan(theta)+(cos(phi)/

```



```

-pR*pcm-qR*qcm, pR*vcm-qR*ulcm,ulR*qcm,-vR*pcm,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,-wcm,-wcm*abs(wR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0;0,-qR*ulcm+pR*vcm,-rR*ulcm+pR*wcm,0,0,vR*wcm,-wR*vcm,
0,qR*rcm,-rR*qcm,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-pcm,-pcm*abs(pR),0,0,
0,0,0,qR*rcm,-rR*qcm,0,0,0,0,0,0;qR*ulcm-pR*vcm,0,-rR*
vcm+qR*wcm,0,-ulR*wcm,0,wR*ulcm,-pR*rcm,0,rR*pcm,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,-qcm,-qcm*abs(qR),0,0,-rcm,0,rR*pcm,0,0,0,
0,0,0;rR*ulcm-pR*wcm,rR*vcm-qR*wcm,0,0,ulR*vcm,-vR*ulcm,
0,pR*qcm,-qR*pcm,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-rcm,-rcm*
abs(rR),pR*qcm,-qR*pcm,0,0,0,0,0,0,0,0];

%Camada Limite
delta=0.15;
kk=1/delta;
    if abs(s)>delta
        sat=sign(s);
    else
        sat=kk*s;
    end

%Limites da Matriz de Regressão
Phi_max=abs(Phi)+abs(Phil)+0.9;

%Limites do Vetor de Erros Paramétricos
ep_up=abs(ep-pa)+1.5;

%Ganho de Controle
k=Phi_max*ep_up';

%Termo de Controle Robusto
tols=[sats(1) 0 0 0 0 0; 0 sats(2) 0 0 0 0;
      0 0 sats(3) 0 0 0; 0 0 0 sats(4) 0 0;
      0 0 0 0 sats(5) 0; 0 0 0 0 0 sats(6)]*k+s;

%Lei de controle CEV-MD Baseada Estabil. Entrada-Saída
tol=M_p*Vrp+CD_p*Vr+Gn_p-(CD_p*VC)-tols;

%Vetor de Entradas de Controle e Funções Escalares 's'
T=[tor;s];

```

A.4 Controle CEV-MD Adaptativo

A.4.1 Lei Adaptativa

```
%Variável de Entrada: u
%Variável de Saída: LeiA
function[LeiA]=adaptive(u)

%Posições, Velocidades e Acelerações Desejadas
xd=u(1);
yd=u(2);
zd=u(3);
phid=u(4);
thetad=u(5);
psid=u(6);

xpd=u(7);
ypd=u(8);
zpd=u(9);
phipd=u(10);
thetapd=u(11);
psipd=u(12);

xppd=u(13);
yppd=u(14);
zppd=u(15);
phippd=u(16);
thetappd=u(17);
psippd=u(18);

%Posições e Orientações do VSA
x=u(19);
y=u(20);
z=u(21);
phi=u(22);
theta=u(23);
psi=u(24);

%Velocidades Atuais no Referencial Inercial
xp=u(25);
yp=u(26);
zp=u(27);
phip=u(28);
thetap=u(29);
psip=u(30);

%Integrais dos Erros de Posição
erroix=u(31);
erroiy=u(32);
erroiz=u(33);
erroiphi=u(34);
erroitheta=u(35);
```

```

erroipsi=u(36);

%Velocidades Relativas do VSA
ulR=u(37);
vR=u(38);
wR=u(39);
pR=u(40);
qR=u(41);
rR=u(42);

%Velocidades das Correntes Marinhas no Referencial do Corpo
ulcm=u(43);
vcm=u(44);
wcm=u(45);
pcm=u(46);
qcm=u(47);
rcm=u(48);

%Vetor das Integrais dos Erros de Posição
erroI=[erroix;erroiy;erroiz;erroiphi;erroitheta;erroipsi];

%Vetor de Posições e Orientações do VSA
X=[x;y;z;phi;theta;psi];

%Vetor de Velocidades Atuais do VSA no referencial Inercial
Xp=[xp;yp;zp;phip;thetap;psip];

%Vetor de Posições Desejadas do VSA
Xd=[xd;yd;zd;phid;thetad;psid];

%Vetor de Velocidades Desejadas do VSA
Xdp=[xpd;ypd;zpd;phipd;thetapd;psipd];

%Vetor de Acelerações Desejadas do VSA
Xdpp=[xppd;yppd;zppd;phippd;thetappd;psippd];

%Vetor de Velocidade Relativas do VSA
VR=[ulR;vR;wR;pR;qR;rR];

%Vetor de Velocidade das Correntes Marinhas
VC=[ulcm;vcm;wcm;pcm;qcm;rcm];

%Matriz de Transformação das Velocidades Lineares
al = [cos(psi)*cos(theta), -sin(psi)*cos(phi)+cos(psi)*
      sin(theta)*sin(phi), sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*
      cos(phi)*sin(theta); sin(psi)*cos(theta), cos(psi)*
      cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi), -cos(psi)*
      sin(phi)+sin(theta)*sin(psi)*cos(phi); -sin(theta),

```

```

cos(theta)*sin(phi),cos(theta)*cos(phi)];

%Matriz de Transformação das Velocidades Angulares
bl = [1,sin(phi)*tan(theta),cos(phi)*tan(theta);
      0,cos(phi),-sin(phi);0,sin(phi)/cos(theta),
      cos(phi)/cos(theta)];

%Matriz Identidade de Ordem 3
N0=zeros(3,3);

%Matriz de Transformação de Referencial J
J=[a1 N0;N0 bl];

%Erros de Posição
e=X-Xd;

%Erros de Velocidades no Referencial Inercial
de=Xp-Xdp;

%Matriz Constante Gamma
gama=100*eye(33);

%Largura de Banda de Controle
Fai=2*eye(6);

%Função Escalar do Erro de Trajetória 's'
s=de+2*Fai*e+(Fai*Fai)*erroI;

%Velocidades Virtuais no Referencial Inercial
Xrp=Xp-s;

%Acelerações Virtuais no Referencial Inercial
Xrpp=Xdpp-2*Fai*de-(Fai*Fai)*e;

%Velocidades Virtuais no Referencial do Corpo
Vr=inv(J)*Xrp;

%Derivada da Matriz de Transformação de Referencial J
Jder=[-sin(psi)*psip*cos(theta)+cos(psi)*-sin(theta)*
      thetap,(-cos(psi)*psip*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi)*
      phip)+(-sin(psi)*psip*sin(theta)*sin(phi)+
      cos(psi)*(cos(theta)*thetap*sin(phi)+sin(theta)*
      cos(phi)*phip)),(cos(psi)*psip*sin(phi)+sin(psi)*
      cos(phi)*phip)+(-sin(psi)*psip*cos(phi)*sin(theta)+
      cos(psi)*(-sin(phi)*phip*sin(theta)+cos(phi)*
      cos(theta)*thetap)),0,0,0;cos(psi)*psip*cos(theta)
      -sin(psi)*sin(theta)*thetap,(-sin(psi)*psip*

```



```

Phil=[-qR*qcm-rR*rcm,qR*pcm,rR*pcm,qR*wcm-rR*vcm,0,vR*rcm,-wR*
qcm,0,0,0,0,0,-ulcm,-ulcm*abs(ulR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;pR*qcm,-rR*rcm-pR*pcm,rR*qcm,-pR*wcm+
rR*ulcm,-ulR*rcm,0,wR*pcm,0,0,0,0,0,0,0,0,-vcm,-vcm*
abs(vR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;pR*rcm,qR*rcm,
-pR*pcm-qR*qcm, pR*vcm-qR*ulcm,ulR*qcm,-vR*pcm,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,-wcm,-wcm*abs(wR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0;0,-qR*ulcm+pR*vcm,-rR*ulcm+pR*wcm,0,0,vR*wcm,-wR*vcm,
0,qR*rcm,-rR*qcm,0,0,0,0,0,0,0,0,-pcm,-pcm*abs(pR),0,0,
0,0,0,qR*rcm,-rR*qcm,0,0,0,0,0,0;qR*ulcm-pR*vcm,0,-rR*
vcm+qR*wcm,0,-ulR*wcm,0,wR*ulcm,-pR*rcm,0,rR*pcm,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,-qcm,-qcm*abs(qR),0,0,-rcm,0,rR*pcm,0,0,0,
0,0,0;rR*ulcm-pR*wcm,rR*vcm-qR*wcm,0,0,ulR*vcm,-vR*ulcm,
0,pR*qcm,-qR*pcm,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-rcm,-rcm*
abs(rR),pR*qcm,-qR*pcm,0,0,0,0,0,0,0,0];

```

```
%Lei Adaptativa
```

```
LeiA=-(gama)*(Phi-Phil) '*inv(J)*s;
```

A.4.2 Lei de Controle

```
%Variável de Entrada: u
```

```
%Variável de Saída: T
```

```
function[T]=torque(u)
```

```
%Posições, Velocidades e Acelerações Desejadas
```

```
xd=u(1);
```

```
yd=u(2);
```

```
zd=u(3);
```

```
phid=u(4);
```

```
thetad=u(5);
```

```
psid=u(6);
```

```
xpd=u(7);
```

```
ypd=u(8);
```

```
zpd=u(9);
```

```
phipd=u(10);
```

```
thetapd=u(11);
```

```
psipd=u(12);
```

```
xppd=u(13);
```

```
yppd=u(14);
```

```
zppd=u(15);
```

```
phippd=u(16);
```

```
thetappd=u(17);
```

```
psippd=u(18);

%Posições e Orientações do VSA
x=u(19);
y=u(20);
z=u(21);
phi=u(22);
theta=u(23);
psi=u(24);

%Velocidades Atuais no Referencial Inercial
xp=u(25);
yp=u(26);
zp=u(27);
phip=u(28);
thetap=u(29);
psip=u(30);

%Estimativas Paramétricas
ep1=u(31);
ep2=u(32);
ep3=u(33);
ep4=u(34);
ep5=u(35);
ep6=u(36);
ep7=u(37);
ep8=u(38);
ep9=u(39);
ep10=u(40);
ep11=u(41);
ep12=u(42);
ep13=u(43);
ep14=u(44);
ep15=u(45);
ep16=u(46);
ep17=u(47);
ep18=u(48);
ep19=u(49);
ep20=u(50);
ep21=u(51);
ep22=u(52);
ep23=u(53);
ep24=u(54);
ep25=u(55);
ep26=u(56);
ep27=u(57);
ep31=u(58);
ep32=u(59);
```

```
ep33=u(60);
ep34=u(61);
ep35=u(62);
ep36=u(63);
```

```
%Integrais dos Erros de Posição
erroix=u(64);
erroiy=u(65);
erroiz=u(66);
erroiphi=u(67);
erroitheta=u(68);
erroipsi=u(69);
```

```
%Velocidades Relativas do VSA
u1R=u(70);
vR=u(71);
wR=u(72);
pR=u(73);
qR=u(74);
rR=u(75);
```

```
%Velocidades das Correntes Marinhas no Referencial do Corpo
u1cm=u(76);
vcm=u(77);
wcm=u(78);
pcm=u(79);
qcm=u(80);
rcm=u(81);
```

```
%Vetor das Integrais dos Erros de Posição
erroI=[erroix;erroiy;erroiz;erroiphi;erroitheta;erroipsi];
```

```
%Vetor de Posições e Orientações do VSA
X=[x;y;z;phi;theta;psi];
```

```
%Vetor de Velocidades Atuais do VSA no referencial Inercial
Xp=[xp;yp;zp;phip;thetap;psip];
```

```
%Vetor de Posições Desejadas do VSA
Xd=[xd;yd;zd;phid;thetad;psid];
```

```
%Vetor de Velocidades Desejadas do VSA
XdP=[xpd;ypd;zpd;phipd;thetapd;psipd];
```

```
%Vetor de Acelerações Desejadas do VSA
XdPP=[xppd;yppd;zppd;phippd;thetappd;psippd];
```

```
%Vetor de Velocidade Relativas do VSA
```

```

VR=[ulR;vR;wR;pR;qR;rR];

%Vetor de Velocidade das Correntes Marinhas
VC=[ulcm;vcm;wcm;pcm;qcm;rcm];

%Vetor de Parâmetros Estimados da Dinâmica do VSA
ep=[ep1;ep2;ep3;ep4;ep5;ep6;ep7;ep8;ep9;ep10;ep11;ep12;ep13;
    ep14;ep15;ep16;ep17;ep18;ep19;ep20;ep21;ep22;ep23;ep24;
    ep25;ep26;ep27;ep31;ep32;ep33;ep34;ep35;ep36];

%Matriz de Transformação das Velocidades Lineares
a1 = [cos(psi)*cos(theta), -sin(psi)*cos(phi)+cos(psi)*
      sin(theta)*sin(phi), sin(psi)*sin(phi)+cos(psi)*
      cos(phi)*sin(theta); sin(psi)*cos(theta), cos(psi)*
      cos(phi)+sin(phi)*sin(theta)*sin(psi), -cos(psi)*
      sin(phi)+sin(theta)*sin(psi)*cos(phi); -sin(theta),
      cos(theta)*sin(phi), cos(theta)*cos(phi)];

%Matriz de Transformação das Velocidades Angulares
b1 = [1, sin(phi)*tan(theta), cos(phi)*tan(theta);
      0, cos(phi), -sin(phi); 0, sin(phi)/cos(theta),
      cos(phi)/cos(theta)];

%Matriz Identidade de Ordem 3
N0=zeros(3,3);

%Matriz de Transformação de Referencial J
J=[a1 N0;N0 b1];

%Erros de Posição
e=X-Xd;

%Erros de Velocidades no Referencial Inercial
de=Xp-Xdp;

%Largura de Banda de Controle
Fai=2*eye(6);

%Função Escalar do Erro de Trajetória 's'
s=de+2*Fai*e+Fai^2*erroI;

%Velocidades Virtuais no Referencial Inercial
Xrp=Xp-s;

%Acelerações Virtuais no Referencial Inercial
Xrpp=Xdpp-2*Fai*de-(Fai*Fai)*e;

%Ganho de Controle

```

```

kd=112*eye(6);

%Velocidades Virtuais no Referencial do Corpo
Vr=inv(J)*Xrp;

%Derivada da Matriz de Transformação de Referencial J
Jder=[-sin(psi)*psip*cos(theta)+cos(psi)*-sin(theta)*
      thetap, (-cos(psi)*psip*cos(phi)+sin(psi)*sin(phi)*
      phip)+(-sin(psi)*psip*sin(theta)*sin(phi)+
      cos(psi)*(cos(theta)*thetap*sin(phi)+sin(theta)*
      cos(phi)*phip)), (cos(psi)*psip*sin(phi)+sin(psi)*
      cos(phi)*phip)+(-sin(psi)*psip*cos(phi)*sin(theta)+
      cos(psi)*(-sin(phi)*phip*sin(theta)+cos(phi)*
      cos(theta)*thetap)), 0,0,0;cos(psi)*psip*cos(theta)
      -sin(psi)*sin(theta)*thetap, (-sin(psi)*psip*
      cos(phi)-cos(psi)*sin(phi)*phip)+(cos(phi)*phip*
      sin(theta)*sin(psi)+sin(phi)*(cos(theta)*thetap*
      sin(psi)+sin(theta)*cos(psi)*psip)), (sin(psi)*
      psip*sin(phi)-cos(psi)*cos(phi)*phip)+(cos(theta)*
      thetap*sin(psi)*cos(phi)+sin(theta)*(cos(psi)*
      psip*cos(phi)-sin(psi)*sin(phi)*phip)), 0,0,0;-
      cos(theta)*thetap, -sin(theta)*thetap*sin(phi)+
      cos(theta)*cos(phi)*phip, -sin(theta)*thetap*
      cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*phip, 0,0,0;0,0,0,0,
      cos(phi)*phip*tan(theta)+(sin(phi)/(cos(theta))^2)*
      thetap, -sin(phi)*phip*tan(theta)+(cos(phi)/
      (cos(theta))^2)*thetap;0,0,0,0,-sin(phi)*phip,
      -cos(phi)*phip;0,0,0,0,((cos(phi)*phip*cos(theta))+
      (sin(phi)*sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2),
      ((-sin(phi)*phip*cos(theta))+cos(phi)*
      sin(theta)*thetap))/((cos(theta))^2)];

%Acelerações Virtuais no Referencial do Corpo
Vrp=inv(J)*(Xrpp-Jder*inv(J)*Xrp);

%Matriz de Regressão Phi
Phi=[-qR*Vr(5)-rR*Vr(6),qR*Vr(4)-Vrp(6),Vrp(5)+rR*Vr(4),Vrp(1)+
      wR*Vr(5)-vR*Vr(6),Vrp(1),-vR*Vr(6),wR*Vr(5),0,0,0,
      -sin(theta),sin(theta),-Vr(1),-Vr(1)*abs(uLr),0,0,0,0,0,0,
      0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;Vrp(6)+pR*Vr(5),-rR*Vr(6)-pR*Vr(4),
      -Vrp(4)+rR*Vr(5),-wR*Vr(4)+Vrp(2)+uLr*Vr(6),-uLr*Vr(6),
      Vrp(2),wR*Vr(4),0,0,0,cos(theta)*sin(phi),-cos(theta)*
      sin(phi),0,0,-Vr(2),Vr(2)*abs(vR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
      0,0,0,0;-Vrp(5)+pR*Vr(6),Vrp(4)+qR*Vr(6),-pR*Vr(4)-qR*Vr(5),
      Vrp(3)+vR*Vr(4)-uLr*Vr(5),uLr*Vr(5),-vR*Vr(4),Vrp(3),0,0,0,
      cos(theta)*cos(phi),-cos(theta)*cos(phi),0,0,0,0,-Vr(3),Vr(3)*
      abs(wR),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0;0,Vrp(3)-qR*Vr(1)+
      pR*Vr(2),-rR*Vr(1)-Vrp(2)+pR*Vr(3),wR*Vr(2)-vR*Vr(3),0,vR*

```


A.5 Modelos para Simulação em Simulink[®]

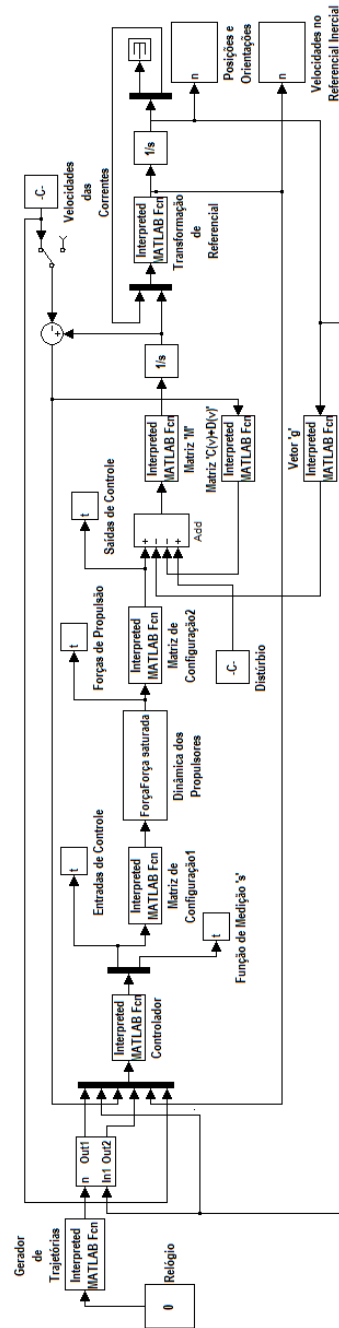


Figura A.1: Diagrama utilizado para simular o CEV-MD Baseado na Estabilidade de Lyapunov, CEV-MD Baseado no Controle Equivalente e CEV-MD Baseado na Estabilidade Entrada-Saída.

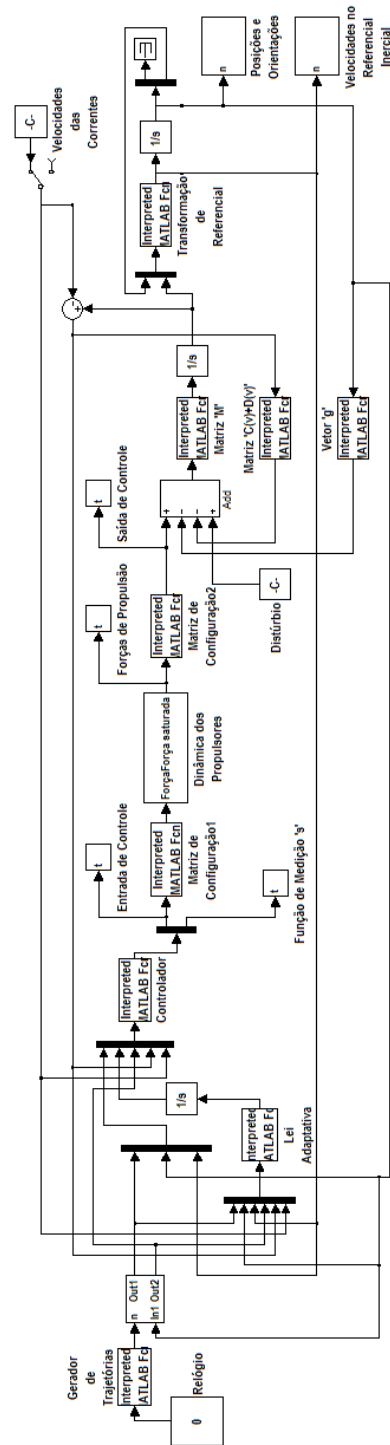


Figura A.2: Diagrama de blocos utilizado para simular o CEV-MD Adaptativo.

Apêndice B

Matrizes de Regressão Φ e Φ_1

Neste apêndice são apresentadas as Matrizes de regressão Φ e Φ_1 utilizadas nas estratégias CEV-MD das seções 4.4 e 4.5. Estas matrizes, definidas de forma a satisfazer (4.57) e (4.58) respectivamente, possuem termos conhecidos dependentes das velocidades relativas ν_R , virtuais ν_r , das acelerações relativas $\dot{\nu}_r$ e das posições e orientações η . A matriz Φ é dada por,

$$\Phi = \begin{bmatrix} -q_R q_r - r_R r_r & q_R p_r - \dot{r}_r & \dot{q}_r + r_R p_r & \dot{u}_r + q_R w_r - r_R v_r & \dot{u}_r \\ \dot{r}_r + p_R q_r & -r_R r_r - p_R p_r & -\dot{p}_r + r_R q_r & -p_R w_r + \dot{v}_r + r_R u_r & -u_R r_r \\ -\dot{q}_r + p_R r_r & \dot{p}_r + q_R r_r & -p_R p_r - q_R q_r & \dot{w}_r + v_R p_r - u_R q_r & u_R q_r \quad \dots \\ 0 & \dot{w}_r - q_R u_r + p_R v_r & -r_R u_r - \dot{v}_r + p_R w_r & w_R v_r - v_R w_r & 0 \\ q_R u_r - \dot{w}_r - p_R v_r & 0 & \dot{u}_r - r_R v_r + q_R w_r & -w_R u_r + u_R w_r & -u_R w_r \\ \dot{v}_r + r_R u_r - p_R w_r & -\dot{u}_r + r_R v_r - q_R w_r & 0 & v_R u_r - u_R v_r & u_R v_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -v_R r_r & w_R q_r & 0 & 0 & 0 & -s(\theta) & s(\theta) & -u_r & -u_r |u_R| \\ \dot{v}_r & w_R p_r & 0 & 0 & 0 & c(\theta)s(\phi) & -c(\theta)s(\phi) & 0 & 0 \\ -v_R p_r & \dot{w}_r & 0 & 0 & 0 & c(\theta)c(\phi) & -c(\theta)c(\phi) & 0 & 0 \quad \dots \\ \dots & v_R w_r & -w_R v_r & \dot{p}_r & q_R r_r & -r_R q_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_R u_r & -p_R r_r & \dot{q}_r & r_R p_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_R u_r & 0 & p_R q_r & -q_R p_r & \dot{r}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_r & v_r |v_R| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -w_r & w_r |w_R| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_r & -p_r |p_R| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_r & -q_r |q_R| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_r & r_r |r_R| \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{p}_r & -q_R r_r & r_R q_r & c(\theta)c(\phi) & -c(\theta)c(\phi) & c(\theta)s(\phi) & -c(\theta)s(\phi) & 0 & 0 \\ -r_r & \dot{q}_r & r_R p_r & 0 & 0 & s(\theta) & -s(\theta) & c(\theta)c(\phi) & -c(\theta)c(\phi) \\ -p_R q_r & q_R p_r & \dot{r}_r & -s(\theta) & -s(\theta) & 0 & 0 & c(\theta)s(\phi) & -c(\theta)s(\phi) \end{bmatrix}$$

Enquanto que a matriz Φ_1 é dada por,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -qRq_c - rRr_c & qRp_c & rRp_c & qRw_c - rRv_c & 0 \\ pRq_c & -rRr_c - pRp_c & rRq_c & -pRw_c + rRu_c & -uRr_c \\ pRr_c & qRr_c & -pRp_c - qRq_c & pRv_c - qRu_c & uRq_c & \dots \\ 0 & -qRu_c + pRv_c & -rRu_c + pRw_c & 0 & 0 \\ qRu_c - pRv_c & 0 & -rRv_c + qRw_c & 0 & -uRw_c \\ rRu_c - pRw_c & rRv_c - qRw_c & 0 & 0 & uRv_c \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} vRr_c & -wRq_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_c & -u_c|uR| \\ 0 & wRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -vRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & vRw_c & -wRv_c & 0 & qRr_c & -rRq_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & wRu_c & -pRr_c & 0 & rRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -vRu_c & 0 & pRq_c & -qRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_c & -v_c|vR| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & -w_c & -w_c|wR| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p_c & -p_c|pR| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_c & -q_c|qR| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_c & -r_c|rR| \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qRr_c & -rRq_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_c & 0 & rRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pRq_c & -qRp_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$