UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

O uso de grafos como motivação para o estudo de matrizes

Outubro de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O uso de grafos como motivação para o estudo de matrizes

Francisco Rafael Cáceres

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Amarildo de Vicente (Orientador)
Tasia Hickmann
Rosangela Villwock

Cascavel, Outubro de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Cáceres, Francisco Rafael
O uso de grafos como motivação para o estudo de matrizes / Francisco Rafael Cáceres; orientador Amarildo de Vicente. -- Cascavel, 2021.
68 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2021.

1. Matriz de custo. 2. Caminho mínimo. 3. Algoritmo de Dijkstra. I. Vicente, Amarildo de, orient. II. Título.

Programa de Pós-graduação em Matemática – PROFMAT

ATA DA DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO FINAL – PROFMAT DE FRANCISCO RAFAEL CÁCERES, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROFMAT DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ - UNIOESTE, E DE ACORDO COM A RESOLUÇÃO DO PROGRAMA E O REGIMENTO GERAL DA UNIOESTE E NORMAS NACIONAIS DO PROFMAT.

Aos 06 dias do mês de outubro de 2021 às 14 horas, de forma remota síncrona, via software GoogleMeet, conforme regulamentação dada pela Resolução nº052/2020-CEPE, realizou-se a sessão pública da Defesa do Trabalho de Conclusão Final - PROFMAT do candidato Francisco Rafael Cáceres aluno do Programa de pós-graduação em Matemática - Profmat - nível de Mestrado, na área de concentração em Ensino de matemática. A comissão examinadora da Defesa Pública foi aprovada pelo Colegiado do Programa de pós-graduação em Matemática - Profmat. Integraram a referida Comissão os(as) Professores(as) Doutores(as): Tásia Hickmann, Rosangela Villwock, Amarildo de Vicente. Os trabalhos foram presididos pelo Professor Amarildo de Vicente. Tendo satisfeito todos os requisitos exigidos pela legislação em vigor, o aluno foi admitido à Defesa de TRABALHO DE CONCLUSÃO FINAL – PROFMAT, intitulado: "O uso de grafos como motivação para o estudo de matrizes". O Senhor Presidente declarou abertos os trabalhos, e em seguida, convidou o candidato a discorrer, em linhas gerais, sobre o conteúdo do trabalho. Feita a explanação, o candidato foi arguido sucessivamente, pelos(as) professores(as) doutores(as): Tásia Hickmann, Rosangela Villwock. Findas as arguições, o Senhor Presidente suspendeu os trabalhos da sessão pública, a fim de que, em sessão secreta, a Comissão expressasse o seu julgamento sobre o Trabalho de Conclusão Final - PROFMAT. Efetuado o julgamento, o candidato foi **aprovado**. A seguir, o Senhor Presidente reabriu os trabalhos da sessão pública e deu conhecimento do resultado. E, para constar, o Coordenador do Programa de pós-graduação em Matemática - Profmat, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE - Campus de Cascavel, lavra a presente ata, e assina juntamente com os membros da Comissão Examinadora e o candidato.

Orientador – Prof. Dr. Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Tásia Hickmann

Profa. Dra. Tásia Hickmann
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Rosangela Villwock.

Profa. Dra. Rosangela Villwock
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

UNIOESTE
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ / *CAMPUS* DE CASCAVEL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA – MESTRADO PROFISSIONAL
Rua: Universitária, 2069 – Jardim Universitário – 88119-110 – Cascavel – PR Tel. (45) 3220 7292
PROFMAT

Programa de Pós-graduação em Matemática – PROFMAT

ATA DA DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO FINAL – PROFMAT DE FRANCISCO RAFAEL CÁCERES, ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROFMAT DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ - UNIOESTE, E DE ACORDO COM A RESOLUÇÃO DO PROGRAMA E O REGIMENTO GERAL DA UNIOESTE E NORMAS NACIONAIS DO PROFMAT.

Francisco Rafael Cáceres

Francisco Rafael Cáceres
Aluno

Prof. Dr. André Vicente
Coordenador do Programa de pós-graduação em Matemática - Profmat

Agradecimentos

O ser humano em quase todas suas realizações não está sozinho. O Criador coloca em nossos caminhos pessoas que fazem a caminhada na Terra mais agradável e divertida, mesmo com obstáculos.

Agradeço àquele onipotente e onipresente, que faz diariamente tudo acontecer na minha vida de uma maneira privilegiada e especial, Deus.

À minha família, que está sempre ao meu lado e nunca mediu esforços para que eu realizasse meus sonhos. Por todo amor, orações, educação e carinho.

Aos meus colegas de mestrado Elisangela, Gilderleia, Jessica, Marcos, Marta e Waleska. Vocês me deram forças para eu não desistir naquela tarde de agosto de 2019. Grato aos momentos descontraídos, grupos de estudos e troca de mensagens. Em minha memória há um espaço especial a todos.

Ao meu grupo de amigos carinhosamente denominado Cães. Por todo desabafo, conversas e memes compartilhados.

Aos meus parceiros de auxílio gramatical, organizacional, psicológico e temperamental, Ana Claudia, Bruno Fernandes e Kelly Kananda. Sem vocês eu jamais chegaria neste momento.

Aos professores do programa de mestrado, em especial ao meu orientador Dr. Amarildo de Vicente. Grato pelas ideias, paciência e didática com que me conduziu neste trabalho.

A cada um de vocês, obrigado.

Resumo

No ensino médio o conteúdo de matrizes, em sua maioria, é tratado de forma vaga. O foco principal deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino de matrizes com o uso de grafos. Para tal, define-se inicialmente o conceito de grafo, nomenclaturas e tipos. Em seguida, uma breve revisão de matrizes é abordada, com suas operações e principais propriedades. Na sequência algumas aplicações de grafos são exibidas, como centro de emergência e o algoritmo de Dijikstra, onde uma situação problema é modelada por um grafo e resolvida por meio de matrizes. Por fim, atividades voltadas ao ensino médio são indicadas visando abordar matrizes de uma maneira mais eficaz, prazerosa e que faz sentido ao cotidiano do aluno, auxiliando docentes e discentes no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-Chave: Matriz de Custo. Caminho Mínimo. Algoritmo de Dijkstra.

Abstract

In high school the study of matrices has been mostly treated in a non-specific way. This work aim to present a proposition for teaching matrices using graphs. First the concept of graph, nomenclatures and types were defined. Then a short review of matrices was presented, including their operations and properties. Next, some applications of graphs were shown, as the emergence center and the Dijikstra's algorithm, a problem situation modeled with graphs and solved with matrices. Finally, activities for the high school were indicated to teach matrices in a more effective and pleasurable way, relatated to the student's life, to help teachers and students in the teaching and learning process.

Keywords: Cost Matrix. Minimum Way. Dijkstra's Algorithm.

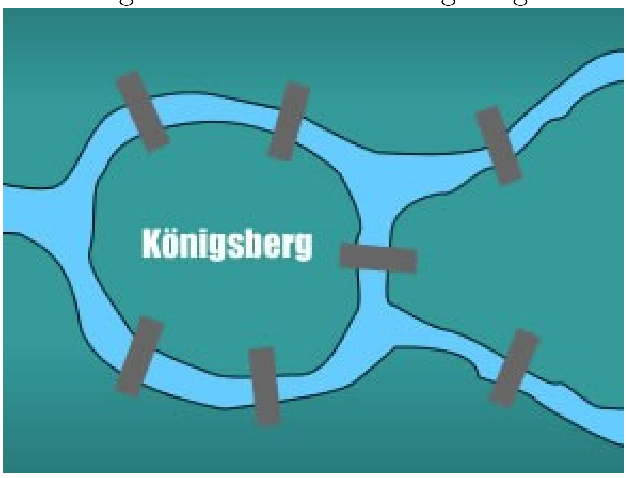
Lista de Figuras

Sumário

Introdução

De uma famosa situação do século XVIII, conhecida como o problema das pontes de Königsberg, um importante matemático e físico suíço, Leonhard Euler[1], desenvolveu resultados matemáticos hoje conhecidos como a Teoria dos Grafos. Em Königsberg, cidade russa atualmente chamada Kaliningrado, existiam sete pontes sobre o rio Pregel que faziam diferentes ligações entre a cidade, conforme a Figura 1. A problemática apresentada aos cidadãos na época, era verificar a possibilidade de se fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, passando em cada ponte uma única vez. Euler em seus estudos provou a impossibilidade da solução em 1736.

Figura 1: Cidade de Königsberg.



Fonte: CIÊNCIA (2011).

Na fase inicial da Teoria de Grafos não foi dada sua real importância e aplicabilidade. Somente anos mais tarde, em 1847, o Teorema da Matriz Árvore publicado por Kirchhoff[2], que conecta Teoria Matricial e de Grafos, é reconhecido como um dos primeiros resultados desta conjectura. Mesmo que Kirchhoff tenha direcionado seus estudos a circuitos elétricos, o resultado possui uma gama de utilidades. Outro destaque que se deve ressaltar é Cayley[3] que em 1878 associou a Teoria de Grupos a Teoria de Grafos.

[1]Leonhard Paul Euler (1707-1783): matemático e físico suíço que viveu maior parte da sua vida na Rússia e Alemnha; fez importantes descobertas em Cálculo e Teoria de Grafos.

[2]Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887): físico alemão principal nome na teoria de circuitos elétricos.

[3]Arthur Cayley (1821-1895): matemático britânico com contribuições na multiplicação de matrizes.

Com o passar do tempo muitas aplicações se desenvolveram nas áreas da química, física, matemática, engenharia, computação, urbanismo e etc. Um exemplo lúdico e bastante utilizado para ilustrar seu uso é o de rotas feitas por motoristas em entregas ou sistemas de coleta, onde este deve passar por todos os locais evitando passar duas vezes no mesmo endereço, a fim de não haver desperdício de tempo e dinheiro e ainda questões ambientais, como a poluição. Na indústria também se faz presente, onde um dado produto deve passar por vários processos uma única vez seguindo uma rota determinada. Outra situação onde se emprega a teoria é na localização de construções que devem ser estratégicas para a sociedade, como a de um hospital, que em cidades projetadas possuem a menor distância entre pontos específicos, como escolas, asilos e fábricas.

Segundo Falcón (2015) o uso de grafos aliados a *softwares* permite que projetos de evacuação de edifícios públicos e privados, escolas, hospitais, hotéis entre outros, sejam realizados, testados e implementados, desde que as distâncias percorridas estejam baseadas na geometria euclidiana.

O ensino de matrizes em boa parte dos materiais didáticos é abordado de forma vaga e meramente teórico, fazendo com que os estudantes não compreendam de fato suas possíveis aplicações. O objetivo central desta pesquisa é apresentar uma possibilidade de ensino de matrizes, visto que, segundo Lucas (2017), a matemática é como se possuísse uma língua, com suas regras e características, e nem sempre os alunos apresentam conhecimento desta linguagem e por esse motivo nota-se dificuldade na compreensão e resolução de problemas matemáticos.

Várias teorias matemáticas são desenvolvidas constantemente e nem sempre estas são inseridas no ensino básico, como

> A Teoria de Grafos não faz parte do currículo de matemática no Ensino Médio, mas pode ser relacionada a outros conteúdos do currículo disciplinar regular do Ensino Médio, como por exemplo o estudo das Matrizes, análise combinatória, problemas nas áreas de informática, engenharia e química. (FAVERO, 2017, p. 42).

E ainda, a esta conjectura

> Pode ser um elemento norteador para a resolução de situações problemas, algumas delas relacionadas ao cotidiano como, por exemplo: rotas de voos entre aeroportos, distribuição de gasolinas em postos, rotas de viagens, caminhos entre cidades, entre outras. Em todas essas situações a ideia de grafos pode desempenhar um papel integrador para a construção do conhecimento matemático. (GUALANDI, 2012, p. 26).

Neste trabalho no primeiro capítulo serão apresentados os principais conceitos de grafos, suas representações, nomenclaturas, tipos e estruturas. No capítulo dois será abordada uma breve revisão de matrizes, com definições, operações e suas propriedades. No terceiro capítulo aplicações a teoria de grafos serão expostas, voltadas principalmente a matriz de custo, localização do centro de emergência e o algoritmo de Dijkstra. No capítulo quatro propostas de atividades que podem ser usadas na educação básica serão retratadas, relacionando-se os conceitos de grafos e matrizes, mostrando a aplicabilidade e a ligação dos mesmos no cotidiano do aluno. No quinto capítulo algumas considerações serão feitas em torno da teoria e das possibilidades de variações que as atividades permitem.

Capítulo 1

Conceitos

O objetivo deste capítulo é abordar os principais conceitos que servem de base para a Teoria de Grafos, incluindo definições, tipos e representações. As referências básicas adotadas são Lucchesi (1979) e Prestes (2016).

Definição 1. *Um grafo $G(V, A)$ consiste em:*

i. Um conjunto finito V de elementos chamados vértices;

ii. Um conjunto finito A de elementos denominados arestas e;

iii. Uma função de incidência $\psi(\alpha)$ que associa a cada aresta α de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G, chamados de extremos de α.

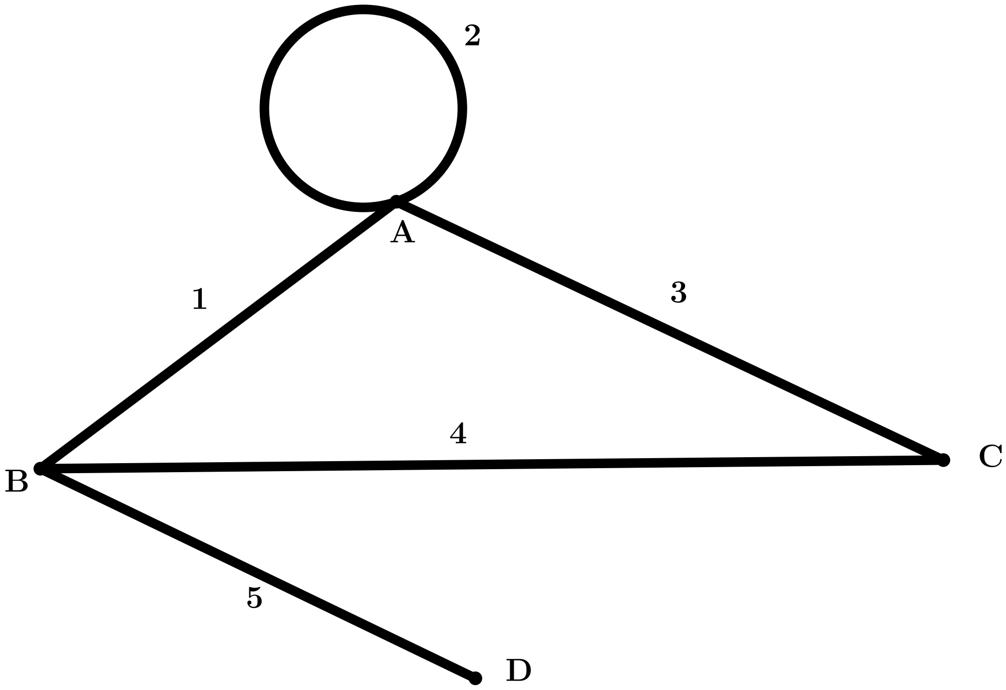
O número de vértices de $G(V, A)$, denotado por $|V|$, indica a ordem de G e o número de arestas é denotado por $|A|$.

Uma das principais representações de grafos é por meio de diagramas, onde cada vértice é dado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos dos seus extremos.

Grande parte dos termos desta teoria vem de sua representação. A Figura 2 apresenta um exemplo de grafo com quatro vértices: A, B, C e D. As arestas são os segmentos 1, 2, 3, 4 e 5. Uma aresta será denominada laço, se seus extremos coincidem e, ligação, caso contrário. Na Figura 2 tem-se que a aresta 2 é um laço, as outras são todas ligações. O conjunto dado pela função de incidência se dá pelas associações das arestas. Por exemplo, A tem um elo com ele mesmo, um com B e um com C, já o vértice B, além do elo com A, tem um com C e um com D.

O tamanho de um grafo $G(V, A)$ é o número dado por $|V| + |A|$, isto é, a soma do número de vértices com o número de arestas. No caso do grafo da Figura 2, seu tamanho é 9. Caso o grafo seja vazio, seu tamanho é zero.

Figura 2: Grafo com Quatro Vértices.



Fonte: o autor.

O grafo da Figura 2 pode também ser representado por:

$$V = \{A, B, C, D\}$$

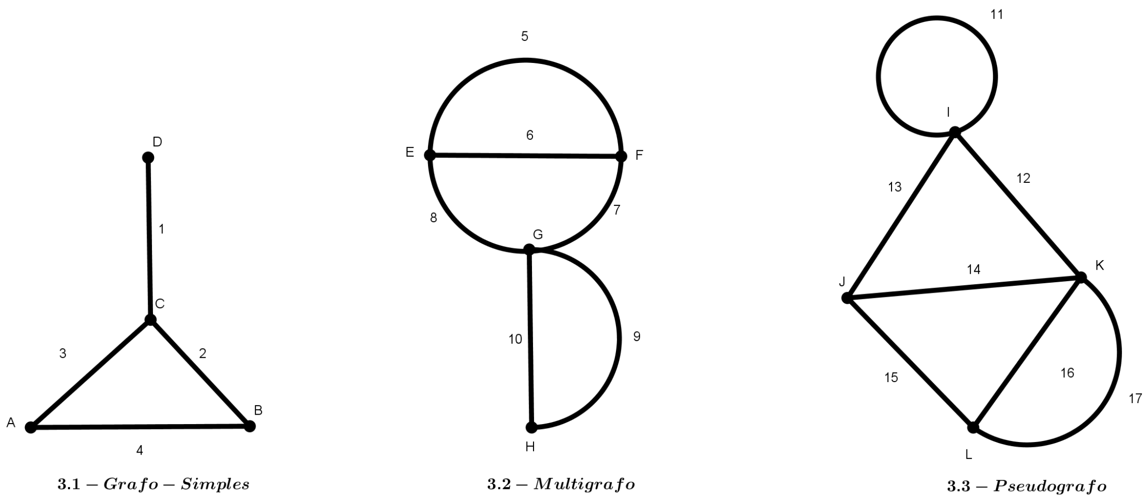
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \psi(\alpha) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \{A, B\} \\ 2 & \{A\} \\ 3 & \{A, C\} \\ 4 & \{B, C\} \\ 5 & \{B, D\} \end{bmatrix} \end{array}$$

Grafo Z

Um grafo que possui apenas arestas conectando vértices distintos é dito grafo simples. Se contém múltiplas arestas e não possuir laços então é denominado multigrafo, porém, se possuir laços é chamado pseudografo. A seguir, temos a representação de um grafo simples, com vértices {A, B, C, D}, um multigrafo com vértices {E, F, G, H} e um pseudografo com vértices {I, J, K, L}.

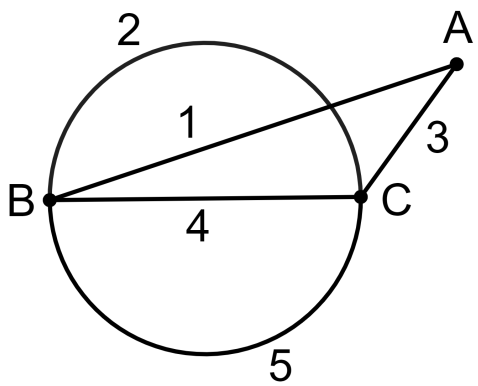
Figura 3: Tipos de Grafos.



Fonte: o autor.

O grau de um vértice, denotado por $gr(v)$, é o número de arestas que chegam nele, sendo que cada laço é contado duas vezes. Agora, quando um par de vértices está associado a K arestas distintas, dizemos que ele possui multiplicidade k.

Figura 4: Multiplicidade.



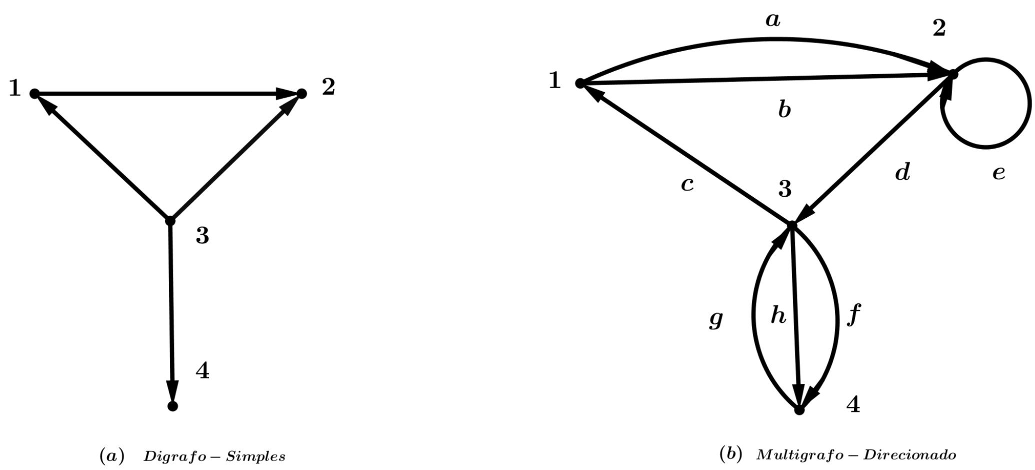
Fonte: o autor.

Na Figura 4 tem-se que a multiplicidade do par {B, C} é 3, já a multiplicidade de {A, B} e {A, C} é 1. Em um grafo simples a multiplicidade de todos os vértices deve ser no máximo um.

Quando se tem um multigrafo ou um pseudografo, caso sejam retirados os laços e todas as arestas múltiplas de cada par de vértices, ele se transforma em um grafo simples. Este novo grafo recebe o nome de grafo simples subjacente ou somente grafo subjacente.

Os grafos podem representar as mais diversas situações do mundo, o que faz com que o sentido de uma aresta nem sempre seja duplo. Em uma situação problema de uma indústria onde um fluido passe em somente um sentido, por exemplo, faz com que um par (A, B) não seja igual ao par (B, A). No sentido de A para B diz-se que A domina B ou ainda, B é dominado por A. Nesta conjectura, denomina-se grafo direcionado (orientado) ou digrafo. Analogamente, um digrafo pode possuir laços e múltiplas arestas em um mesmo par de vértices. Caso não possua laços e arestas (arcos) múltiplas é dito digrafo simples ou grafo direcionado simples. Agora, se possuir arestas múltiplas de um par de vértices, será denominado multigrafo direcionado. Vale ressaltar que o conjunto dos grafos direcionados contém o conjunto dos digrafos simples e também o conjunto dos multigrafos direcionados.

Figura 5: Digrafo Simples e Multigrafo Direcionado.



Fonte: o autor.

A Figura 5 (a) mostra um grafo orientado simples, já a Figura 5 (b) mostra um multigrafo direcionado. Note que neste último, caso fossem retirados os arcos b, h e e, poderíamos classificá-lo como digrafo simples.

Definição 2. *Um Digrafo $D = (V_d, A_d, \psi_d)$ é um conjunto não vazio de vértices V_d, um conjunto de arestas A_d, e uma função de incidência $\psi_d : A_d \to V_d \times V_d$ que associa toda aresta a um par ordenado formado pelos vértices de D.*

Assim como nos grafos, o número de vértices de D será denotado por $|V_d|$, já o número de arestas será denotado por $|A_d|$.

Teorema 1. *Dado um grafo $G = (V, A)$ temos que*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2|A|.$$

Note que para cada vértice v no conjunto V, tem-se que a contagem do $gr(v)$ é dada por todas as arestas que partem ou chegam a este vértice. Como cada aresta tem um ponto de saída e de chegada, calculando o grau de um vértice dado, conta-se a aresta com uma dada origem e com uma determinada chegada. Agora, partindo do vértice de chegada indo em direção ao vértice de saída, conta-se essa aresta novamente, isto é, cada aresta será contada duas vezes. Portanto a soma de todos os graus de cada vértice resulta no dobro do número de arestas.

Uma outra maneira de representar um grafo, principal objeto de estudo neste trabalho, é por meio de matrizes. Uma matriz, segundo Boldrini e Costa (1980) é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Assim, um grafo $G = (V, A)$, com $|V| = n$ e $|A| = m$ pode ser representado por uma matriz de adjacência e por uma matriz de incidência. A matriz de adjacência é uma matriz M simétrica $n \times n$ que exibe a relação entre os vértices. Cada elemento é dado por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j. \\ m, \text{ onde } m \text{ é a quantidade de arestas incidentes tanto em } i \text{ quanto em } j\ (i \neq j). \\ p, \text{ onde } p \text{ é quantidade de laços incidentes em } i = j. \end{cases}$$

A matriz de adjacência do grafo da Figura 4 é exibido a seguir. Vale ressaltar que os vértices B e C possuem 3 arestas incidentes, por isso na tabela, o elemento $m_{23} = m_{32} = 3$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Adjacência do grafo da Figura 4

A matriz de incidência B é uma matriz $n \times m$, que associa os vértices as arestas, onde cada vértice i se relaciona à aresta j da seguinte maneira

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } j \text{ não é adjacente a } i. \\ 1, \text{ se } j \text{ é ou não um laço e } i \text{ é uma das suas extremidades.} \end{cases}$$

A matriz de incidência do grafo da Figura 4 é mostrado a seguir. Note que o elemento b_{23} é o único elemento nulo da segunda linha, visto que, a aresta 3 não incide no vértice B, analogamente, temos $b_{31} = 0$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Incidência da Figura 4

Para um digrafo podemos também utilizar matrizes para sua representação, uma matriz de adjacência e de incidência. A matriz de adjacência $A = [a_{ij}]$ é dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j. \\ m, \text{ onde } m \text{ é a quantidade de arestas com origem em } i \text{ e destino em } j. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Adjacência da Figura 5(b)

Perceba que a matriz de adjacência de um digrafo não é necessariamente simétrica. No exemplo acima, o vértice 1 tem duas arestas com origem nele e destino no vértice 2, por isso o elemento $a_{12} = 2$. Já o vértice 2 não possui nenhuma aresta com origem em 2 e destino no vértice 1, motivo pelo qual o elemento $a_{21} = 0$.

Para um digrafo, sua matriz de incidência $B = [b_{ij}]$ terá cada entrada relacionada da seguinte maneira

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ se } j \text{ tem origem em } i. \\ 0, \text{ se } j \text{ não é incidente em } i. \\ 1, \text{ se } j \text{ tem destino em } i. \end{cases}$$

No caso do digrafo da Figura 5 (b) sua matriz de incidência será dada por

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Incidência da Figura 5(b)

Vale para este caso analisarmos o vértice 2. Note que este possui um laço, isto é, o elemento $b_{25} = 1$. Ainda neste mesmo vértice, duas outras arestas têm ponto de chegada nele, por isso os elementos $b_{21} = b_{22} = 1$. Já a aresta d parte de 2 e tem como ponto final o vértice 3. Desta forma, $b_{24} = -1$ e os demais elementos da segunda linha são todos zeros. De maneira geral, uma matriz de incidência possui muitos elementos nulos o que, pensando em armazenamento computacional, pode gerar um gasto de memória desnecessário.

Matrizes também são usadas no estudo de grafos em problemas de distância e custo, onde as arestas podem ser vistas como trajetos a serem percorridos e os vértices como os destinos desejados.

Tendo conhecimento do que é grafo, digrafo e algumas de suas representações, serão apresentados alguns tipos especiais de grafos. Estes são os que mais surgem em aplicações associadas a problemas de engenharia, robótica, redes neurais entre outras.

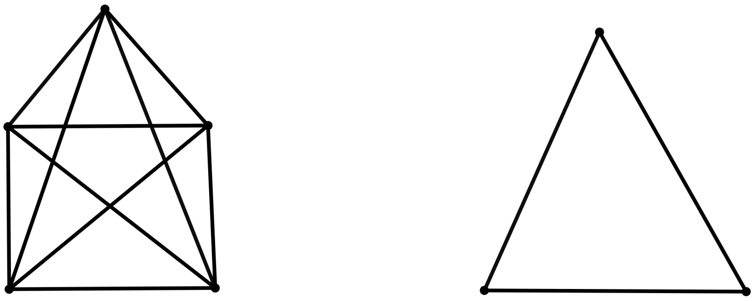
Um grafo será dito **trivial** quando possuir apenas um vértice. Caso ele não possua nenhum é denominado **grafo vazio**. E será chamado de grafo totalmente desconexo se não possuir arestas unindo seus vértices.

Um **grafo completo** ou totalmente convexo é um grafo simples que possui uma aresta entre qualquer par de vértices (exemplos na Figura 6). Assim, caso um grafo completo possua n vértices ele irá possuir $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestas. Este resultado é totalmente plausível pensando-se no número de diagonais de um polígono convexo.

De maneira análoga, tais definições podem ser ampliadas para digrafos. Um **digrafo completo** recebe essa nomenclaura se para qualquer par de vértices (x, y), com $x \neq y$ existirem arestas simétricas (x, y) e (y, x). Agora, um digrafo será dito **semicompleto** se para cada par de vértices distintos (x, y) existir a aresta (x, y) ou a aresta (y, x) ou ambos.

Um grafo $G = (V, A)$ é definido como **regular** de ordem r se todos os vértices tiverem o mesmo grau r, isto é, para todo $v \in V$ tivermos que $gr(v) = r$. Outra notação utilizada neste caso é **grafo r-regular**. Vale ressaltar que um grafo completo de n vértices

Figura 6: Grafos Completos.

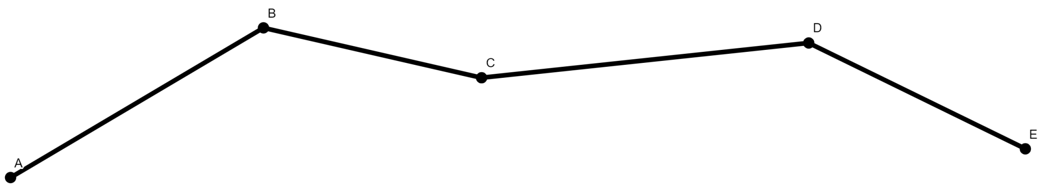


Fonte: o autor.

é $(n-1)$ - regular, visto que, cada vértice terá ligação com todos os outros.

Agora, um grafo será denominado **grafo caminho**, P_n, se ele tiver exatamente um caminho de comprimento n-1, isto quer dizer que o grau do vértice inicial e final será 1 e os demais serão de grau 2.

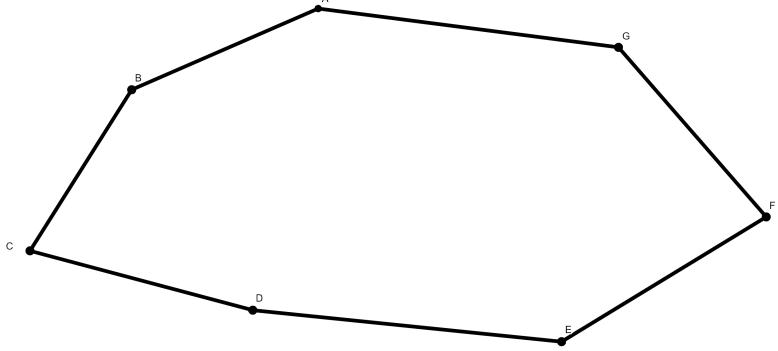
Figura 7: Grafo Caminho.



Fonte: o autor.

Um grafo será chamado de **grafo ciclo** C_n, com $n \geq 3$, se for composto por n vértices e n arestas. Estas formarão um ciclo de tamanho n se todos os vértices possuírem grau 2.

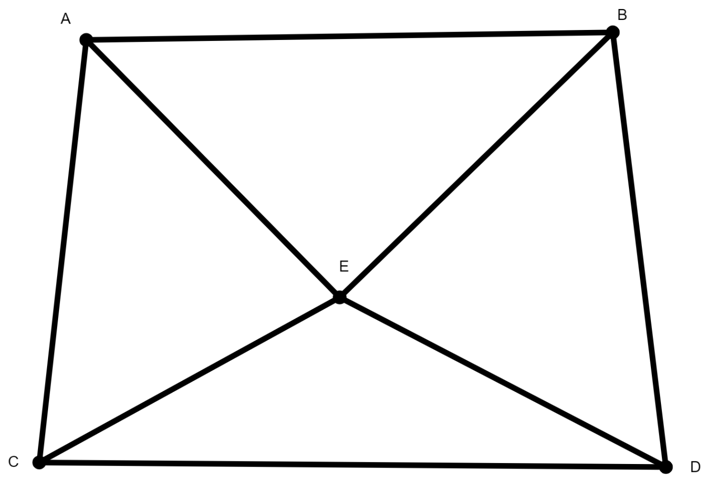
Figura 8: Grafo Ciclo.



Fonte: o autor.

Um grafo será dito **grafo roda** W_n com $n \geq 3$, quando se adiciona um vértice adjacente a todos os outros. Perceba que um grafo roda se trata de um grafo ciclo adicionando-se um novo vértice que se liga a todos os outros já existentes.

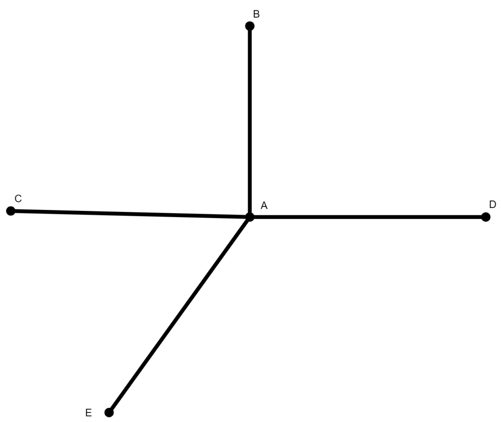
Figura 9: Grafo Roda.



Fonte: o autor.

Um grafo será denominado como **grafo estrela** S_n, com $n > 1$, se for um grafo W_n sem as arestas que compõe o grafo C_n. Ele possui n arestas e $n + 1$ vértices.

Figura 10: Grafo Estrela.

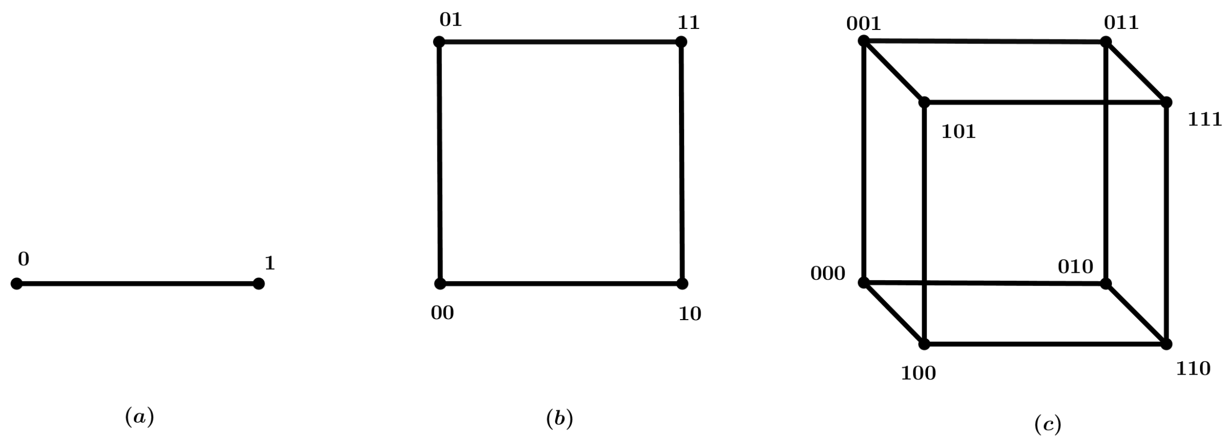


Fonte: o autor.

Por fim, um grafo Q_k é chamado **grafo** $k - cubo$ ou $k - dimensional$, quando seus vértices são formados por sequências binárias de tamanho K. Neste tipo de grafo, dois vértices serão ditos adjacentes se as sequências binárias forem diferentes apenas em uma posição.

Perceba que um grafo $k - cubo$ se trata de um grafo regular de grau k. Note ainda que na Figura 11 (c), o vértice 100 não é adjacente ao vértice 001, visto que as sequências binárias diferem em duas posições.

Figura 11: Grafos k-Cubo.



Fonte: o autor.

Tendo conhecimento destes conceitos fundamentais da teoria de grafos, pode-se agora introduzir as ideias iniciais de matrizes, tópico da próxima sessão. Serão abordados definições, tipos e operações. Tais conceitos servirão de base para as aplicações.

Capítulo 2

Matrizes

O objetivo central desta sessão é trazer os conceitos fundamentais de matrizes que são abordados na educação básica. Um dos primeiros registros de matrizes aparecem no livro “Os Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática”, de Liu Hiu, escrito entre os séculos I e II a. C. Na obra surge o primeiro registro do famoso Quadrado Mágico com três linhas e três colunas, onde a soma dos elementos das linhas, colunas e diagonais devem sempre resultar na constante 15. Nesta mesma obra, Liu aborda o método de triangularizar uma matriz, técnica esta publicada por Johann Carl Friedrich Gauss em 1826, quase dois mil anos depois, amplamente usada e denominada como Método de Eliminação de Gauss.

As definições, nomenclaturas e propriedades serão embasadas em Steinbruch e Winterle (1987) e Boldrini e Costa (1980).

Definição: Chama-se matriz de ordem $m \times n$ um quadro com m por n elementos dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz $\mathbf{A_{m\times n}}$

Vale ressaltar que cada elemento da matriz pode ser um número, um polinômio, uma função ou até mesmo uma nova matriz. Um dado elemento está associado a dois índices, sua posição na linha i e sua posição na coluna j: a_{ij}.

2.1 Representação e Ordem de uma Matriz

Uma matriz A pode ser representada de maneira simplificada por $A = [a_{ij}]$, onde i varia de 1 a m e j varia da 1 a n. Define-se como ordem de uma matriz a quantidade de linhas e colunas que ela possui. Assim, se uma matriz A tiver 4 linhas e 5 colunas, escreve-se simplesmente $A_{4\times5}$. A diagonal de uma matriz será composta pelos elementos $[a_{ij}]$, com $i = j$.

2.2 Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada: é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Por exemplo, a matriz $A_{3\times3}$ e a matriz $B_{1\times1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} sen\, 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes Quadradas A e B

Matriz Nula: é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Matriz Coluna: é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

$$F_{41} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Coluna F

Matriz Linha: é aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Matriz Diagonal: é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são iguais a zero. Por exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal C

Matriz Identidade Quadrada: se trata de um caso de uma matriz diagonal, onde $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e zero nos demais casos. A notação será dada por I_n. Por exemplo, a matriz I_2 é dada por:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz $\mathbf{I_2}$ - Identidade de Ordem 2

Matriz Triangular Superior: é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Isto é, os elementos abaixo da diagonal são nulos.

Matriz Triangular Inferior: é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Por exemplo:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz T - Triangular Inferior

Matriz Simétrica: é uma matriz onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

Um conceito bastante intuitivo no estudo de matrizes é o de igualdade de matrizes. Duas matrizes $A = a_{ij}$ e $B = b_{ij}$ são ditas iguais quando apresentam a mesma dimensão e cada elemento é igual ao seu correspondente na outra matriz, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Atualmente, trabalhar com matrizes representa uma das ferramentas mais úteis da matemática, pois possibilita simplificar cálculos que, se utilizados outros métodos, se tornariam longos e complexos. As matrizes são utilizadas em vários métodos de validação científica, em modelos econômicos e nas mais diversas áreas. Com isso, será abordado agora, as principais operações com matrizes.

2.3 Operações com Matrizes

Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$ que se denota por $A + B$, cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B. Assim

$$A + B = \left[\begin{array}{c} a_{ij} + b_{ij} \end{array} \right]_{m \times n}$$

Assim se $A_{2\times 2}$ onde $a_{ij} = i + j$ e $B_{2\times 2}$ onde $b_{ij} = i – j$ temo-se que a matriz resultante de $A + B$ é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+(-1) \\ 3+1 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz A + B

Dadas três matrizes A, B e C de mesma ordem, tem-se as seguintes propriedades:

i) $A + B = B + A$;

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

iii) $A + \mathbf{0} = A$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula de mesma ordem de A.

Multiplicação por Escalar: Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e k um número (real ou complexo). Então, define-se uma nova matriz

$$k \cdot A = \left[\begin{array}{c} ka_{ij} \end{array} \right]_{m \times n}$$

Por exemplo, tomando a matriz T, vista anteriormente, tem-se que -3T é dada por:

$$-3T = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -12 & -24 & 0 \\ -15 & -18 & -21 \end{bmatrix}$$

Matriz -3T

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem e dois escalares k e p, valem as seguintes propriedades:

i) $k(A + B) = kA + kB$;

ii) $(k + p)A = kA + pA$;

iii) $0.A = \mathbf{0}$ (Matriz nula de mesma ordem de A);

iv) $k(pA) = (kp)A$

Transposição: Dada uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]$, pode-se obter uma nova matriz denotada por A^T, onde $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, desta forma, $b_{ji} = a_{ij}$. A matriz A^T é chamada transposta de A.

Por exemplo, se $A_{3\times 2}$ onde $a_{ij} = i + j$, tem-se que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrizes A e $\mathbf{A^T}$

Propriedades:

i) Uma matriz será simétrica, se e somente se, ela é igual a sua transposta;

ii) A trasposta da transposta retorna a matriz inicial;

iii) A transposta da soma de duas matrizes é igual a soma das transpostas;

iv) $(kA)^T = kA^T$, onde k é um escalar qualquer e A uma matriz de ordem $m \times n$.

Multiplicação de Matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Define-se como $AB = [c_{uv}]_{m\times p}$ onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + ... + a_{un}b_{nv}$$

Vale ressaltar que o produto entre duas matrizes só é possível de ser realizado se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda. E ainda, a ordem da matriz resultante terá a mesma quantidade linhas da primeira matriz e a mesma quantidade de colunas da segunda matriz.

Cada elemento c_{ij} da matriz resultante do produto é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando-se todos estes produtos.

Por exemplo, se $A_{3\times 2}$ onde $a_{ij} = i+j$ e $B_{2\times 2}$ onde $b_{ij} = i–j$ tem-se que $C = AB$ será dado por:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Produto de Matrizes

Para o produto de matrizes valem as seguintes propriedades:

i) A multiplicação matricial não é, em geral, comutativa;

ii) Dadas as matrizes A, B e C de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$, respectivamente, tem-se que $(AB)C = A(BC)$;

iii) Dadas as matrizes A, B e C de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$, respectivamente, tem-se que $(A + B)C = AC + BC$;

iv) Dadas as matrizes A, B e C de ordem $m \times n$, $n \times p$ e $p \times r$, respectivamente, tem-se que $C(A + B) = CA + CB$;

v) Sendo A de ordem $m \times n$, tem-se que $I_m A = A I_n = A$;

vi) Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, tem-se que para todo escalar k: $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Tendo conhecimento do produto de matrizes é possível definir uma nova matriz.

Matriz Inversa: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Caso exista uma matriz B, da mesma ordem de A, tal que $AB = BA = I_n$, então B é chamada matriz inversa de A, e utiliza-se a seguinte notação A^{-1}.

Por exemplo, dadas as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz A e sua Inversa B

Tem-se que o produto entre elas resulta em:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (2) \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Produto de Matriz e sua Inversa

Dentre os tópicos apresentados, os que serão utilizados são soma e transposição de matrizes, o que possibilita ainda mais sua aplicabilidade em sala de aula. Assim, com os conceitos de matrizes e suas principais operações, pode-se abordar exemplos a problemas cotidianos, sobretudo aos que podem ser explorados no ambiente escolar. O foco principal será a chamada Matriz de Custo, usada em redes de transporte, comunicação entre outros.

Capítulo 3

Aplicações

O foco desta sessão é abordar situações onde as matrizes são utilizadas no que compete a grafos. A pergunta natural que surge em sala de aula "Onde eu uso isso professor?" relacionado a matrizes, quando se tem várias aplicações envolvidas, deve ser respondida de maneira intrínseca. O estudo estará direcionado a Matriz de Custo e Distâncias, onde um problema de menor caminho será escrito como um grafo e representado por uma matriz. O algoritmo que estará por trás da resolução é denominado Algoritmo de Dijkstra. Os conceitos serão embasados em Rabuske (1992), Goldbard e Luna (2005) e Neto (2003).

3.1 Matriz de Custo

Um grafo, no qual um número w_{ij} está associado a cada aresta, é denominado de grafo valorado e o número w_{ij} é chamado custo da aresta. Este custo pode representar valores de distâncias em problemas de menor caminho, quantidade de fluido em industrias, velocidade em problemas de física, entre outros.

Um grafo simples valorado pode ser representado por sua matriz de custo $W = [w_{ij}]$, onde

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{custo da aresta, se } (v_i, v_j) \in A. \\ 0 \text{ ou } \infty\text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Vale ressaltar neste momento que o custo da aresta está relacionado a um deslocamento entre os vértices do grafo, pelos caminhos definidos pelas arestas.

3.2 Listas de Arestas

Se um grafo possui um número reduzido de arestas é denominado esparso. Para este tipo específico a representação pode ser feita de maneira mais eficiente, utilizando-se duas listas de vértices, onde a primeira lista contém os inícios das arestas e a segunda os respectivos términos.

3.3 Distâncias

Dados dois vértices v e w pertencentes ao grafo $G(V, A)$, denomina-se distância, entre v e w, o comprimento do menor caminho entre esses dois vértices. No caso da não existência desse caminho, considera-se a distância infinita. Será usado $d(v, w)$ como a notação de distância entre os vértices v e w.

Um grafo $G(V, A)$ é dito conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices e desconexo caso contrário. Para grafos conexos, a distância é uma medida, ou seja, para todo vértice u, v e w de $G(V, A)$, tem-se que

1. $d(u, v) \geq 0$ com $d(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$ ocorre apenas quando o grafo é não orientado;
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Com a distância desta forma apresentada, pode-se definir o conceito de Excentricidade, Raio e Centro. Excentricidade, denotada por $[e(v)]$, de um vértice v, é a máxima das distâncias $d(v, u)$, isto é, $\forall u \in G$, $e(v) = MAXd(v, u)$. Agora, o raio, denotado por $[r(G)]$, de um grafo $G(V, A)$ é o $MIN(e(v))$. Por fim, centro de $G(V, A)$ é definido pelo conjunto de vértices v tais que $e(v) = r(G)$.

3.4 Localização do Centro de Emergência

O centro de emergência é o centro de um grafo onde o tempo de ida e volta seja mínimo. Uma aplicação bastante útil está presente em cidades e bairros planejados, onde tal centro representa geralmente a localização de hospitais, bombeiros ou polícia.

A excentricidade e o raio serão respectivamente determinados como

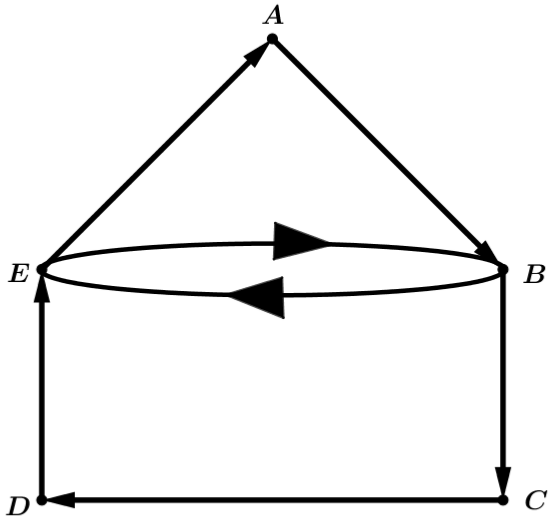
$$e_{sr}(x_1) = MAX_{x_1 \in V}\{v_j[d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i)]\} \text{ e;}$$

$$r(G) = MIN_{x_1 \in V}[e_{sr}(x_1)],$$

onde o índice sr significa saída e retorno, e v_j é o peso do vértice x_i.

A fim de facilitar a compreensão, observe o digrafo a seguir com valores unitários atribuídos às arestas.

Figura 12: Exemplo de Digrafo Centro de Emergência.



Fonte: o autor.

Vale salientar que em casos mais simples as distâncias podem ser obtidas de maneira visual, mas em geral, isto fica inviável em grafos mais complexos. Nesses casos o algoritmo de Dijkstra pode ser utilizado,além de *softwares* geométricos, que apresentam de maneira automática o menor percurso a ser realizado, como é o caso do programa gratuito Geogebra.

Para o digrafo da Figura 12 a matriz das distâncias, onde cada aresta representa uma distância unitária, é exibida a seguir.

$$D(G) = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz das Distâncias

Perceba que na matriz $D(G)$ os elementos representam as distâncias entre cada par de vértices. Por exemplo o elemento d_{32} é três, pois o trajeto de C para B passa por três arestas unitárias.

A matriz onde todas as máximas distâncias nas saídas são exibidas, é definida como **matriz de excentricidade** $e_s(x_i)$. Desta forma, nesta matriz os valores devem ser analisados em linhas.

Suponha, por exemplo, que uma ambulância esteja no vértice A. Observando a Figura 12, note que para atender uma ocorrência no vértice B, ela terá que se deslocar uma unidade; se a ocorrência for no vértice C terá que percorrer duas unidades; para o vértice D, três unidades; para o vértice E, duas unidades fazendo o trajeto passando por B. A pior situação ocorreria se fosse necessário atender o vértice D, e esta é a excentricidade do vértice A. Analogamente a excentricidade pode ser feita para cada vértice. O objetivo do centro de emergência é buscar o local onde a distância mais longa a ser percorrida seja a menor entre todos os vértices disponíveis. Neste exemplo, pensando apenas na ida, isso ocorre se a ambulância estiver no vértice B, como mostra a matriz a seguir.

$$\begin{array}{cc} Linhas & e_s(x_i) \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Excentricidade de Saída

Já a matriz de excentricidade $e_r(x_i)$, que é a matriz onde todas as máximas distâncias de retorno são exibidas, mostra que a melhor situação ocorre se a ambulância estiver no vértice E, como pode ser visto na matriz abaixo, onde os valores são analisados em colunas.

$$\begin{array}{cc} Colunas & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ e_r(x_i) & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Excentricidade de Retorno

O raio em relação à saída é igual a dois por ser o valor da menor excentricidade. Desta forma, o centro do grafo é formado pelo conjunto {B}. Já o raio em relação ao retorno é formado pelo conjunto {E}.

Desta forma, para obter-se o centro de emergência, é necessário computar a ida e a volta, visto que, em deslocamentos da vida real, atendimentos nem sempre são realizados apenas no local dos incidentes, sendo preciso em grande parte dos casos retornar o mais rápido possível.

O centro de emergência é determinado por meio da matriz resultante de $D(G)+D^T(G)$, onde $D^T(G)$ é a transposta de $D(G)$. A matriz simétrica resultante é mostrada a seguir.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz do Centro de Emergência

Agora a matriz de centro de emergência $e_{sr}(x_i)$, onde as máximas distâncias de saída e retorno são exibidas, é dada pela matriz a seguir.

$$\begin{array}{c c} Vértice & e_{sr}(x_i) \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de Excentricidade de Saída e Retorno

Assim, podemos concluir que o raio do digrafo da Figura 12 é quatro e o centro de emergência é dado pelo conjunto {B,E}, isto é, em uma situação real, um hospital deveria ser alocado no vértice B ou no vértice E visando atender a todos os vértices de maneira mais rápida e eficiente.

3.5 Algoritmo de Dijkstra

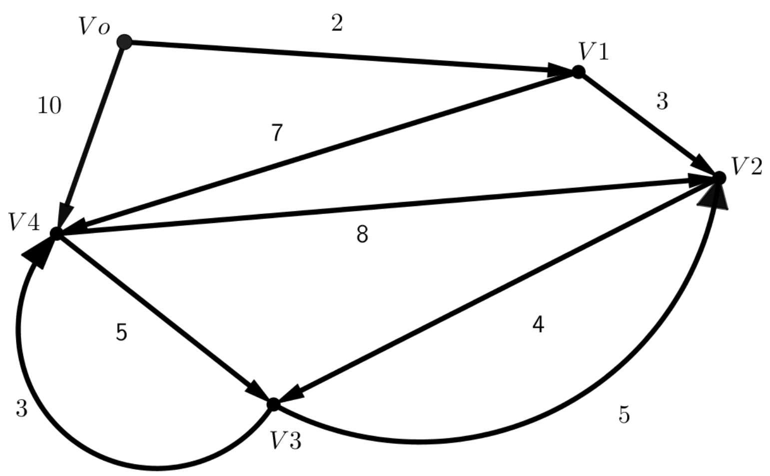
O algoritmo de Dijkstra, desenvolvido pelo cientista holandês Edsger Dijkstra (1930-2002), tem como principal aplicação problemas de menor caminho, sendo utilizado em digrafos com arestas não negativas. Assim, seja um digrafo $D(V, A)$ e uma função distância L que associe a cada aresta (v, w) a um número real não negativo $L(v, w)$ e também um vértice fixo v_0 em V, denominado fonte. A problemática consiste em determinar os caminhos de v_0 para cada vértice v de D de tal forma que a somatória das distâncias das arestas envolvidas seja mínima. Isto é o mesmo que determinar um caminho $v_0, v_1, ..., v_k$ tal que $\sum_{i=0}^{k-1} L(v_i, v_{i+1})$ seja mínimo.

Considere um digrafo $D(V, A)$, uma fonte v_0 e uma função L que associe cada aresta a um número real não negativo, então

$$L(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, \text{ se não existe a aresta } (v_i, v_j) \\ 0, \text{ se } v_i = v_j \\ \text{custo, se } v_i \neq v_j \text{ e existe a aresta } (v_i, v_j) \end{cases}$$

Um conjunto S_i que contém os vértices cujo comprimento seja mínimo de v_0 a cada v_j, desde que esses valores sejam conhecidos. A cada passo deve-se adicionar ao conjunto S um vértice pertencente a $V - S$ tal que o comprimento do caminho v_0 a v_j seja menor que o correspondente de qualquer outro vértice $V - S$. Desta forma, pode-se garantir que o caminho mínimo de v_0 a qualquer vértice v em S contém somente vértices pertencentes a S. Assim, será desenvolvido o algoritmo para o digrafo da Figura 13.

Figura 13: Exemplo de Digrafo a Ser Aplicado no Algoritmo de Dijkstra.



Fonte: o autor.

Aplicando o algoritmo de Dijkstra, onde $It.$ significa iteração e w é o vértice de destino, tem-se a seguinte tabela.

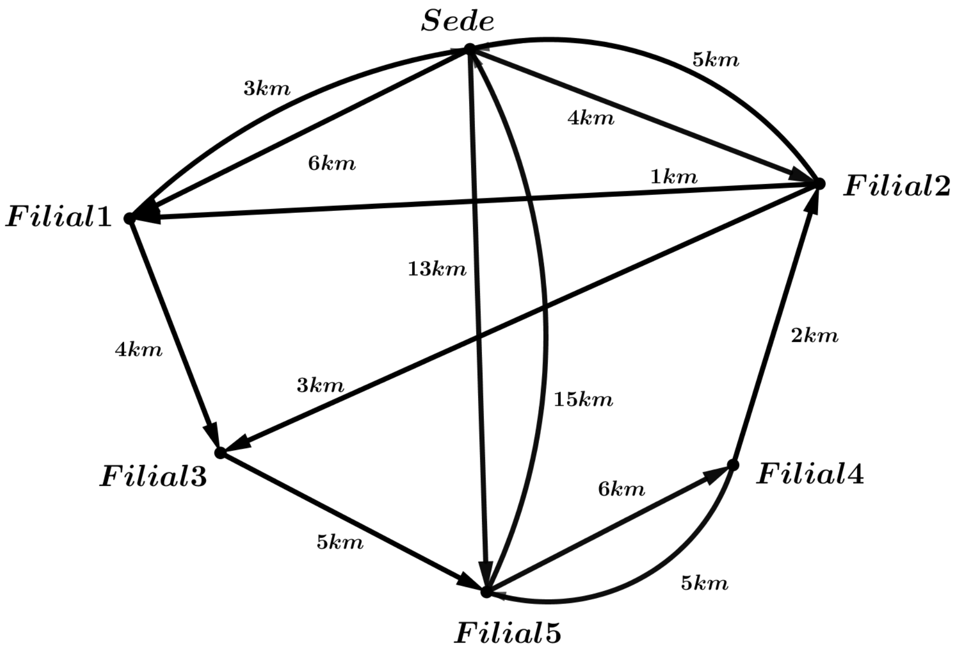
It.	*Rota*	*Destino*	$D[w]$	$D[v_1]$	$D[v_2]$	$D[v_3]$	$D[v_4]$
Início	v_0	–	–	2	∞	∞	10
1	v_0, v_1	v_1	2	–	5	∞	9
2	v_0, v_1, v_2	v_2	5	–	–	9	9
3	v_0, v_1, v_2, v_3	v_3	9	–	–	–	9
4	v_0, v_1, v_4	v_4	9	–	–	–	–

Tabela de Excentricidade de Saída e Retorno

Com o auxílio da matriz, nota-se facilmente a menor distância de v_0 a qualquer um dos vértices. Por exemplo, a menor distância de v_0 a v_4 é 9. E o trajeto ocorre passando por v_1. Já a menor distância de v_0 a v_3 também é 9, e tal distância ocorre passando-se pelos vértices v_1 e v_2.

O exemplo acima é bastante didático, visto que os vértices vão em ordem crescente quando se deseja sair de v_0. Imagine agora a seguinte situação. Uma empresa guarda todo seu estoque na sede e abastece suas cinco filiais sempre que necessário. O grupo de engenheiros que trabalha na logística, decidiu montar as rotas de abastecimento das filiais com o objetivo de minimizar os custos com o trajeto e descartando as rotas de retorno. O digrafo com as rotas e as distâncias em quilômetros é exibido a seguir.

Figura 14: Digrafo da Empresa.



Fonte: o autor.

Tendo o digrafo com as distâncias e aplicando o algoritmo de Dijkstra obtém-se a tabela a seguir.

It.	*Rota*	*Destino*	$D[w]$ (km)	$D[F.1]$ (km)	$D[F.2]$ (km)	$D[F.3]$ (km)	$D[F.4]$ (km)	$D[F.5]$ (km)
Início	E	–	–	6	4	∞	∞	13
1	$E, 2$	2	4	5	–	7	∞	13
2	$E, 2, 1$	1	5	–	–	7	∞	13
3	$E, 2, 3$	3	7	–	–	–	∞	13
4	$E, 5$	5	13	–	–	–	19	–
5	$E, 5, 4$	4	19	–	–	–	–	–

Tabela do Algoritmo de Dijsktra para Rota de uma Empresa

Desta forma, tendo o algoritmo aplicado, tem-se todas as rotas da sede para suas filiais de maneira otimizada. Por exemplo, caso se deseje sair da sede e ir até a filial 4, deve-se ir até a filial 5 para então ir a filial 4, percorrendo nesse trajeto 19 km. Porém, caso se deseje ir a filial 3 o total da rota será de 7 km e deve-se passar pela filial 2. Agora, caso se deseje ir a filial 1, mesmo existindo uma rota direta, o menor trajeto se dá passando pela filial 2, resultando em um percurso de 5 km.

O algoritmo estende-se a qualquer quantidade de variáveis desejadas. Como já dito, basta que o custo de cada aresta seja um número real não negativo. Este tipo de aplicação do algoritmo é amplamente utilizado em empresas de transporte que possuem um suporte técnico de otimização de rotas.

Assim, conhecendo-se grafos, matriz de custo e o algoritmo de Dijkstra, no próximo capítulo serão propostas atividades que podem ser aplicadas na educação básica, principalmente no ensino médio, onde está presente o conteúdo de matrizes.

Capítulo 4

Propostas de Atividades

O objetivo principal desta sessão é apresentar atividades que podem ser direcionadas a alunos do ensino médio, visando aplicações reais voltadas ao estudo de matrizes. Logo em seu primeiro parágrafo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz a importância do ensino da matemática com aplicações a realidade (2017, p. 527)

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2017, P. 527).

E ainda, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) orientam que

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69).

Assim, um ensino cada vez mais dinâmico, aplicado e prático deve ser inserido aos alunos em sala de aula, possibilitando uma formação mais completa, onde os conceitos científicos, experiências cotidianas e realidade escolar possam se unificar.

Com base nos conhecimentos apresentados serão agora expostas atividades que envolvem o conhecimento de grafo, digrafo, matrizes e o algoritmo de Dijkstra. Em cada atividade busca-se conectar os conteúdos ao dia a dia do aluno, como torneios esportivos, redes sociais e jogos.

4.1 Atividade 1 – Conhecendo um Grafo no Torneio da Escola

Em uma escola um torneio de basquete está sendo realizado, com uma equipe representante de cada turma. O sistema do torneio é do tipo "todos contra todos", onde todas as equipes participantes devem ter um confronto com cada equipe. Participam desse torneio seis turmas: 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B. Algumas partidas já foram realizadas:

1A jogou com 2A, 2B e 3B

1B jogou com 2A, 3A e 3B

2A jogou com 1A e 1B

2B jogou com 1A e 3B

3A jogou com 1B e 3B

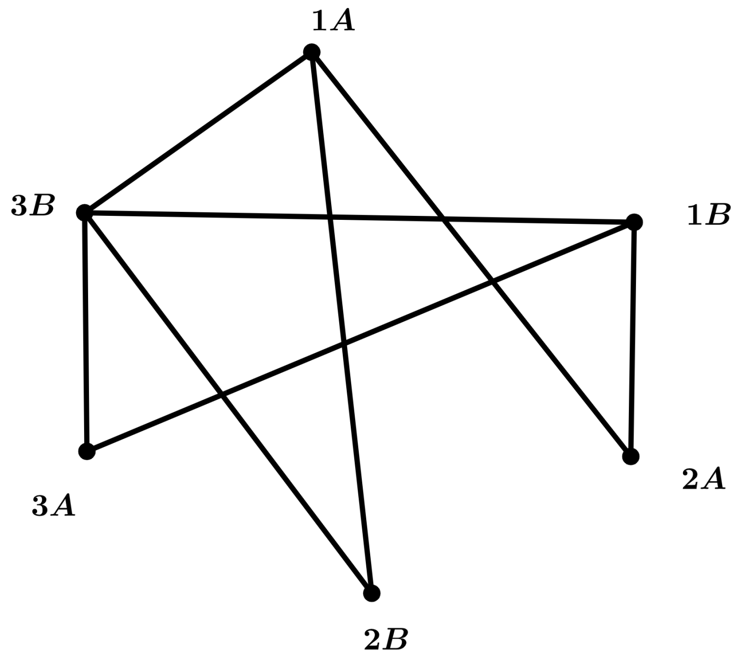
3B jogou com 1A, 1B, 2B e 3A

A forma como essas informações estão dispostas dificulta identificar se faltou algum confronto ou não. Com isso, será utilizado um ponto para representar cada turma e um segmento ligando cada turma onde um confronto já foi realizado. A estrutura resultante está representada na Figura 15.

A Figura 15 é denominada grafo, uma notação com pontos que representam as turmas e as ligações por meios de segmentos. Com as informações dadas e a maneira como elas estão agora exibidas responda as seguintes perguntas:

- Com quais turmas o 2B ainda precisa jogar? E o 3A?
- Quantos jogos faltam para o 1B terminar sua participação no torneio?
- Faça o grafo completo onde todas as equipes tenham jogado todas as partidas do torneio.

Figura 15: Grafo Torneio de Basquete.



Fonte: o autor.

4.2 Atividade 2 – Conhecendo um Digrafo com o Instragram

Atualmente há no mercado digital muitos aplicativos de redes sociais. Um dos mais utilizados é chamado Instagram, uma rede social de fotos para usuários dos sistemas Android ou iOs. Nele é possível tirar fotos, editá-las, postá-las e compartilhar com sua rede de contatos.

Dentro do Instragram é possível que um usuário siga pessoas famosas, amigos e familiares e vice versa, porém, pode acontecer de uma pessoa não seguir novamente ou deixar de seguir, termo amplamente conhecido na rede como *unfollow*.

Em um grupo de seis pessoas composto por Bruno, Ana, Laura, Tati, Felipe e Marlene, no Instagram, ocorre a seguinte configuração:

Bruno segue Ana, Laura e Felipe;

Ana segue Bruno e Tati;

Tati segue Ana e Marlene;

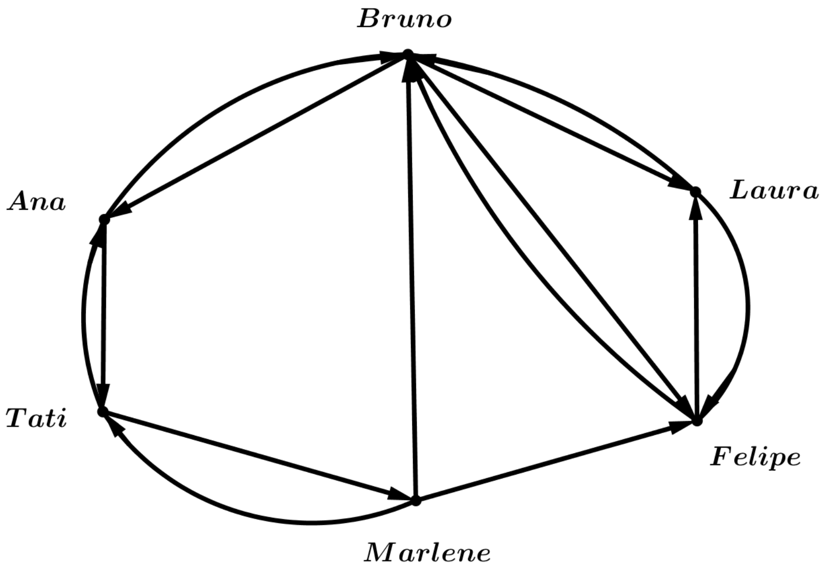
Marlene segue Bruno, Tati e Felipe;

Felipe segue Bruno e Laura;

Laura segue Bruno e Felipe.

A situação descrita em palavras pode ser representada por meio de um digrafo. A estrutura é bastante semelhante a já apresentada, com a diferença que as arestas terão agora um sentido, isto é, como Bruno segue a Ana, por exemplo, do vértice que representa Bruno sairá um segmento com uma seta na direção de Ana. Utilizando as informações citadas, o digrafo resultante está representado na Figura 16.

Figura 16: Conhecendo um Digrafo.



Fonte: o autor.

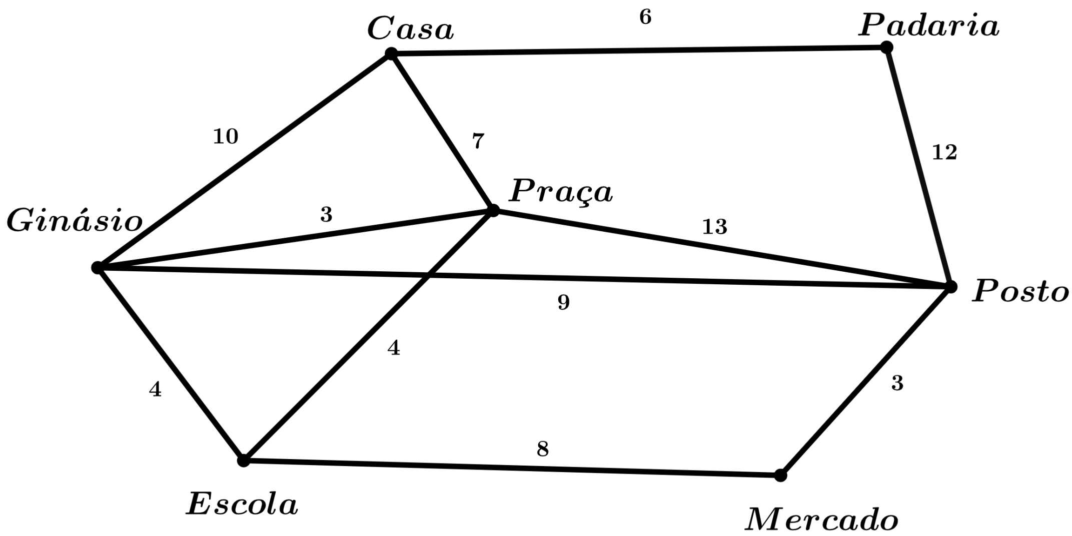
Analisando o digrafo, responda as seguintes perguntas:

- Quem possui mais seguidores?
- Quem possui menos seguidores?
- Quem segue mais pessoas?
- Quem segue menos pessoas?
- Supondo que Bruno deixe de ter o Instagram e exclua sua conta. Como seria a nova configuração? Faça o esboço do novo digrafo.

4.3 Atividade 3 – Construindo uma Matriz de Custo

Imagine que Camila more em uma pequena vila com poucos trajetos. De sua casa ela pode chegar diretamente à padaria, ao ginásio de esportes e à praça. Para ir a outro local, diferente desses já citados, ela deve obrigatoriamente passar pela padaria, ginásio de esportes ou pela praça. Em sua vila há também um posto de saúde, uma escola e um mercado. As distâncias em centenas de metros estão representadas no grafo valorado a seguir. Cada vértice representa um local e cada aresta, a distância entre eles, podendo ser percorrida em ambos os sentidos, isto é, ida e volta.

Figura 17: Vila da Camila.



Fonte: o autor.

Assim, por exemplo, para Camila sair de sua casa e chegar até a padaria ela deverá andar 600 metros. Se desejar ir de sua casa até o posto de saúde, ela pode ir passando pela padaria, passando pela praça entre outros.

Todas essas informações podem ser representadas em uma matriz, que é denominada Matriz de Custo. O nome custo vem do "gasto" que se tem para se deslocar de um dado local para outro. Por exemplo, se Camila desejar ir ao posto e fizer o trajeto Casa – Ginásio – Praça - Posto, terá que percorrer as distâncias 1000 m + 300 m + 1300 m, que resulta em um trajeto de 2600 m. Agora, se Camila fizer o trajeto Casa-Padaria-Posto, terá que fazer as distâncias 600 m + 1200 m, que resulta em 1800 m, isto é, 800 m a menos que o trajeto Casa – Ginásio – Praça - Posto. Assim, colocando as distâncias dos menores trajetos em uma matriz tem-se o seguinte:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} Casa & Padaria & Ginásio & Praça & Posto & Escola & Mercado \end{array} \\
\begin{array}{c} Casa \\ Padaria \\ Ginásio \\ Praça \\ Posto \\ Escola \\ Mercado \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 6 & 10 & 7 & 18 & 11 & 19 \\
6 & 0 & 16 & 13 & 12 & 17 & 15 \\
10 & 16 & 0 & 3 & 9 & 4 & 12 \\
7 & 13 & 3 & 0 & 13 & 4 & 12 \\
18 & 12 & 9 & 13 & 0 & 11 & 3 \\
11 & 17 & 4 & 4 & 11 & 0 & 8 \\
19 & 15 & 12 & 12 & 3 & 8 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz dos Custos – Vila da Camila

Analisando a matriz das distâncias responda:

- Qual a distância entre a casa de Camila e a Escola?
- Qual a distância entre o Mercado e o Ginásio?
- Qual a distância entre a Padaria e a Escola?
- Por que a diagonal principal da matriz de custo é toda nula?
- Montando uma matriz apenas com os valores das distâncias podemos notar que ela tem uma propriedade. Que propriedade é essa?

4.4 Atividade 4 – Localizando um Centro de Emergência

Em muitos casos reais, determinar um ponto central ou de menor distância entre todos os outros pontos é de suma importância. Ainda para a vila da Camila, da Atividade 3, buscaremos o seu centro, denominado Centro de Emergência.

Para se determinar tal centro, no caso da Vila da Camila que os trajetos de saída e retorno são iguais, basta analisar os valores máximos em cada linha. Assim, temos a seguinte matriz

$$
\begin{array}{cc}
\textit{Local} & \textit{Máxima Distância Percorrida}(m) \\
\begin{array}{c} Casa \\ Padaria \\ Ginásio \\ Praça \\ Posto \\ Escola \\ Mercado \end{array} &
\begin{bmatrix} 1900 \\ 1700 \\ 1600 \\ 1300 \\ 1800 \\ 1700 \\ 1900 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz das Máximas Distâncias

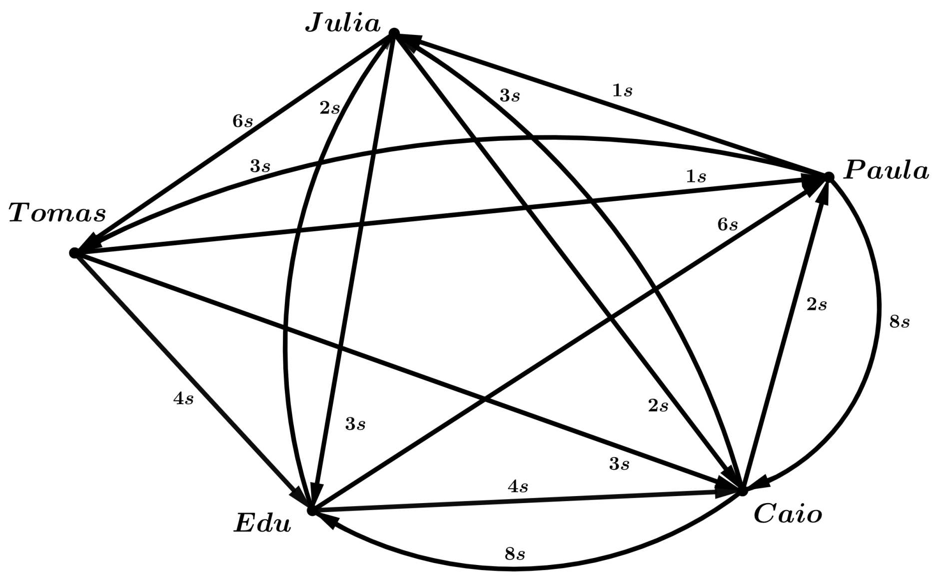
Com o auxílio da Matriz das Máximas Distâncias e da Matriz de Custo da Vila da Camila responda:

- O Posto de Saúde, que deve ser localizado em um local estratégico para minimizar o tempo de atendimento, está bem localizado?
- Se fosse possível a construção de um novo Posto de Saúde, qual seria o local ideal?
- Caso o local ideal não fosse possível, qual seria a segunda opção?
- Em seu bairro há algum hospital? Ele está localizando no centro de emergência?
- Suponha que fosse feito uma nova via entre a Padaria e o Posto de Saúde com uma nova distância de 400 m. Nessa nova configuração, o Posto passaria a ser o centro de emergência?

4.5 Atividade 5 – Desvendando o Algoritmo de Dijkstra

Um importante cientista de computação, Edsger Wybe Dijkstra, conhecido mundialmente como Dijkstra, desenvolveu um algoritmo que recebe seu nome, capaz de resolver problemas de menor caminho. O algoritmo consiste em se tomar um ponto de partida e, a partir deste ponto, analisar as menores rotas que existam, deste que se tenha uma ligação direta. Caso não exista uma ligação direta, usa-se a notação de infinito (∞) para representar a distância entre esses dois locais. Por exemplo, um jogo consiste em que cada jogador destrua todos os jogadores oponentes no menor tempo possível. A cada rodada o jogador parte do ponto inicial. Cinco amigos decidem participar: Julia, Tomas, Edu, Caio e Paula. O campo de batalha é montado de maneira automática, com a seguinte restrição, todos os participantes têm três saídas. O tempo que cada jogador leva para chegar em um determinado oponente e derrotá-lo é exibido na Figura 18 a seguir:

Figura 18: Digrafo do Jogo.



Fonte: o autor.

Com o digrafo exposto, se analisarmos Paula, por exemplo, suas três primeiras opções de ataque são Julia, Tomas e Caio com tempos de 1, 3 e 8 s respectivamente.

Se montarmos o algoritmo de Dijsktra para Tomas na primeira rodada tem-se a seguinte configuração.

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Paula(s)
Início	Tomas	Tomas	-	∞	4	3	1

Tabela Inicial para Tomas

Analisando o passo inicial para Tomas, nota-se que, ele leva 1 s para destruir Paula. E ainda que Tomas não tem rota até Julia e, por esse motivo, aparece o símbolo ∞. Na matriz também aparece o símbolo -, pois Tomas não gastou nada do seu tempo no jogo até então. Assim, na próxima rodada, Tomas poderá passar por Paula e a configuração na tabela será a seguinte:

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Paula(s)
Início	Tomas	Tomas	-	∞	4	3	1
1	Tomas/ Paula	Paula	1	2	4	3	-

Tabela da Rodada 1 para Tomas

Agora, a menor rota na segunda rodada para Tomas é atacar Julia passando por Paula. Para esssa jogada ele levará 2 s. Assim, sua nova matriz será:

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Paula(s)
Início	Tomas	Tomas	-	∞	4	3	1
1	Tomas/ Paula	Paula	1	2	4	3	-
2	Tomas/ Paula/ Julia	Julia	2	-	4	3	-

Tabela da Rodada 2 para Tomas

Note que até este passo, Tomas gastou 3 s e derrotou Paula e Julia nesta ordem e que, no passo seguinte, deve ir até Caio, pois é o menor tempo. Perceba ainda que na coluna de Julia e Paula aparece o símbolo -, pois Tomas já fez sua passagem por esses oponentes. Logo, sua nova configuração será:

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Paula(s)
Início	Tomas	Tomas	-	∞	4	3	1
1	Tomas/ Paula	Paula	1	2	4	3	-
2	Tomas/ Paula/ Julia	Julia	2	-	4	3	-
3	Tomas/ Caio	Caio	3	-	4	-	-

Tabela da Rodada 3 para Tomas

Desta forma pode-se montar a tabela com as quatro rodadas que Tomas deve fazer para finalizar suas jogadas.

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Paula(s)
Início	Tomas	Tomas	-	∞	4	3	1
1	Tomas/ Paula	Paula	1	2	4	3	-
2	Tomas/ Paula/ Julia	Julia	2	-	4	3	-
3	Tomas/ Caio	Caio	3	-	4	-	-
4	Tomas/ Edu	Edu	4	-	-	-	-

Tabela da Rodada 4 para Tomas

As jogadas que Tomas deve fazer para derrotar todos os seus oponentes no menor tempo são: ir até Paula e destruí-la gastando 1 s; destruir Julia, seguindo a rota que passa por Paula, gastando nessa rodada 2 s; atacar Caio de maneira direta, gastando 3 s; derrotar Edu, também de maneira direta, gastando para isso 4 s. Desta forma, Tomas levará 1 s + 2 s + 3 s + 4 s para concluir seu jogo de maneira otimizada, totalizando 10 s.

Tendo como modelo o desenvolvimento do algoritmo de Dijkstra para Tomas responda as seguintes perguntas:

- O que mudaria se, na primeira rodada, Tomas ficasse nervoso e fosse atacar o oponente Caio?
- Sem fazer a construção do algoritmo de Dijkstra para Julia, Edu, Caio e Paula é possível dizer que algum destes oponentes faça um tempo menor que Tomas?
- Construa a matriz do algoritmo de Dijkstra para Paula. Paula consegue destruir todos os oponentes em menos de 10 s e vencer Tomas?

4.6 Uma Análise da Atividade 3 no GeoGebra

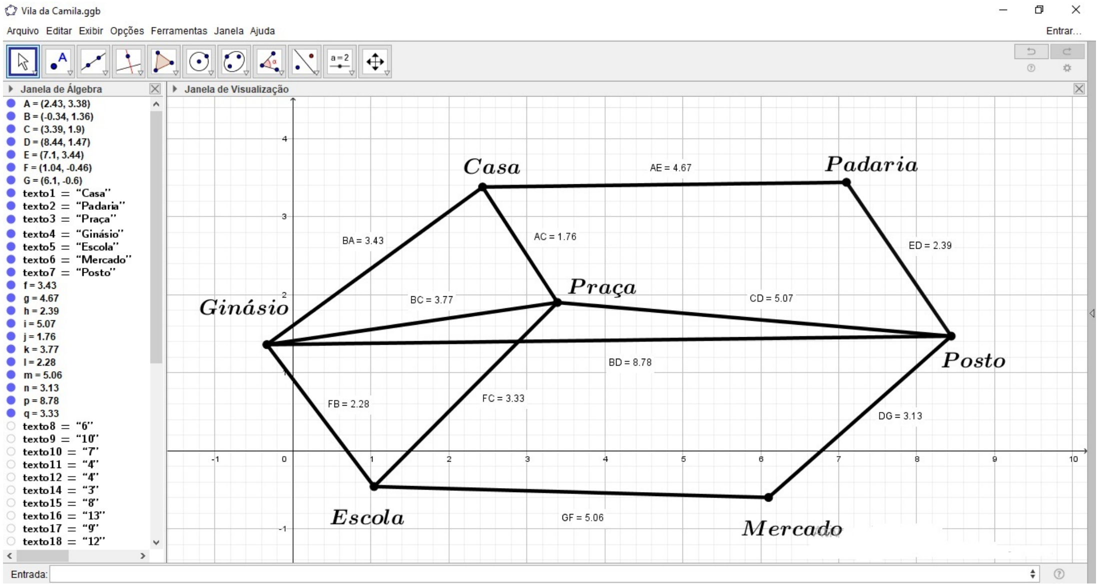
Além da resolução das atividades por meio de matrizes é possível emprega-las em *softwares* matemáticos. Dentre os mais utilizados no Brasil e no mundo, está o GeoGebra, programa livre e gratuito. Neste, é possível abordar, de maneira bastante intuitiva, desde elementos da geometria plana à otimização.

O uso de ferramentas digitais contribui no processo de ensino e aprendizagem que, segundo Perrenoud (2000) ajudam a construir conhecimentos ou competências, porque tornam acessíveis operações e manipulações impossíveis ou muito desencorajadoras se reduzidas ao papel e lápis.

O software GeoGebra possui um comando chamado “Caminho Mínimo” que, em um dado conjunto de vértices e segmentos, gera a menor rota possível entre dois vértices.

No comando “Caminho Mínimo” é possível inserir vértices com rotas, isto é, um grafo. Para a Vila da Camila da Atividade 3, por exemplo, considerando as distâncias euclidianas conforme aparecem no plano cartesiano, no GeoGebra o grafo que a representa está na Figura 19.

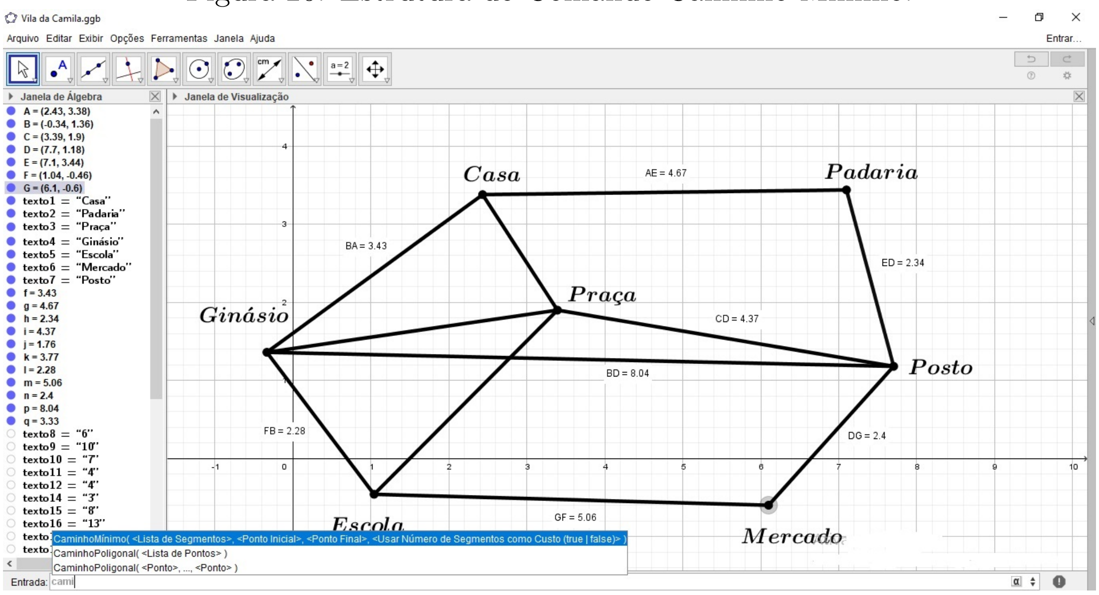
Figura 19: Vila da Camila no GoeGebra.



Fonte: o autor.

Perceba que, cada local é representado como um ponto com coordenadas no plano cartesiano e cada rota como um segmento valorado, por exemplo, a distância do ginásio até a escola agora é de 2,28 unidades de comprimento (u. c.). Para inserir o comando "Caminho Mínimo", basta digitá-lo na caixa de entrada localizada na parte inferior esquerda. Ao iniciar a escrita do comando, sua estrutura é exibida, como se nota na Figura 20.

Figura 20: Estrutura do Comando Caminho Mínimo.

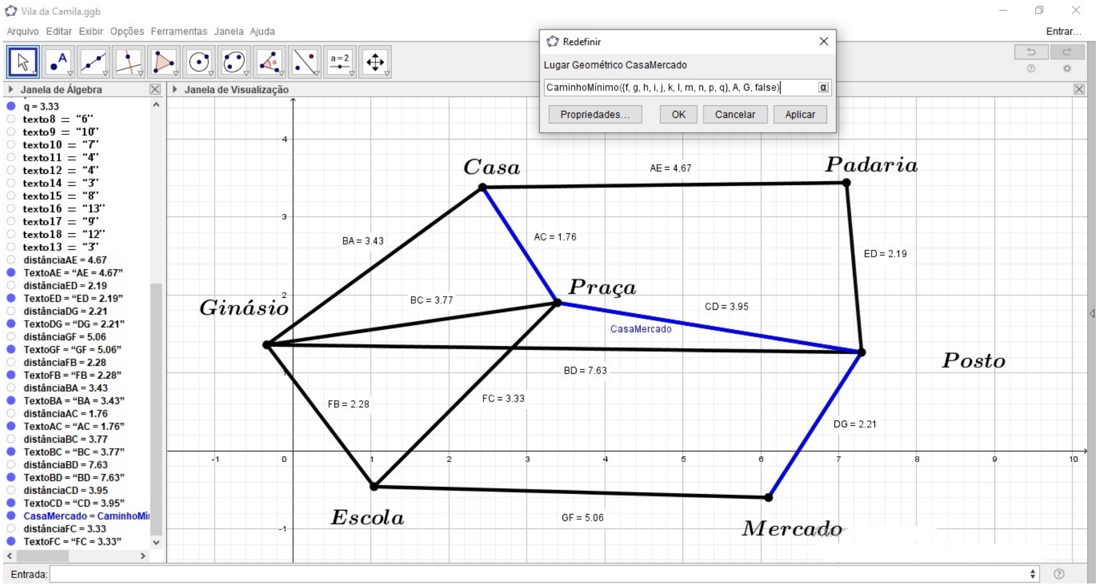


Fonte: o autor.

Assim, será necessário inserir incialmente a lista dos segmentos, em seguida o ponto de onde se deseja iniciar a rota, o ponto final e por fim, inserir a palavra *true* (verdade) onde o comprimento do segmento será levado em consideração na criação da menor rota, ou a palavra *false* (falso) que, neste caso, apenas as quantidades de arestas serão levadas em consideração, isto é, quanto menos arestas a rota passar, melhor.

Inserindo a lista de segmentos que representa cada ligação dos vértices da vila, o ponto inicial sendo a casa de Camila e o ponto final sendo o Mercado e com o comando true implementado, visto que as distâncias são determinantes, gera-se a Figura 21.

Figura 21: Menor Caminho Casa - Mercado.

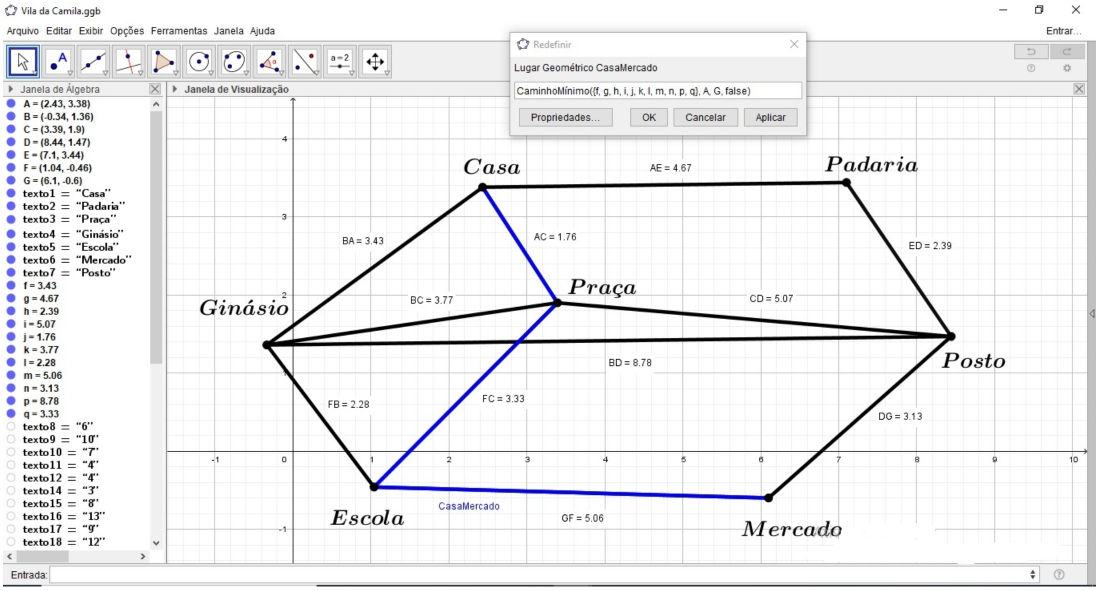


Fonte: o autor.

Note que nesta configuração, os segmentos são f, g, h, i, j, k, l, m, n, p e q, o ponto de partida é o ponto A, que representa a casa e o ponto de chegada é o ponto G, que representa o mercado, seguido da palavra *true*. Assim, na solução destacada em azul, Camila sairia de casa e iria até a praça percorrendo 1,76 u. c., iria da praça até o posto que distam 3,95 u. c., para então ir ao mercado, descolocando-se mais 2,21 u. c., totalizando assim um deslocamento total de 7,92 u. c.

Vale ressaltar que, caso seja efetuado um deslocamento no ponto D = (7,7;1,18) para a nova localização D = (8,44;1,47), sendo este o vértice que representa o posto, aumentam-se as distâncias dadas inicialmente nos vértices que este possui ligação. Desta maneira, a rota exibida pelo GeoGebra será alterada. Neste novo formato, Camila deve fazer o trajeto Casa – Praça – Escola – Mercado, fazendo um percurso total de 10,15 u. c., como mostra a Figura 22.

Figura 22: Nova Rota Casa - Mercado.



Fonte: o autor.

Desta forma, nota-se que com esta ferramenta do programa GeoGebra e os conceitos exibidos é possível explorar ainda mais as atividades propostas, podendo-se sugerir variações em um mesmo problema, gerando ainda mais aplicações, como inserir mapas ou figuras, marcar os pontos desejados e otimizar rotas. Assim, os alunos têm inicialmente os conceitos matemáticos que estão por trás do comando, atrelando-se teoria, prática e vida real.

Considerações Finais e Conclusões

Durante o desenvolvimento do trabalho notou-se o quanto a matemática é rica e aplicável nas mais diversas situações. A busca incessante em deixar esta disciplina mais atrativa se faz cada dia mais necessária, visto que, as novas gerações, desde cedo, têm uma gama de ferramentas disponíveis e aquilo que não faz sentido algum aos olhos do estudante pode ser deixado de lado.

Pode-se notar esse tipo de atitude quando o conteúdo de matrizes é abordado, já que é quase unânime o seguinte questionamento: “pra que aprender isso, professor?”. Partindo desse pressuposto, buscou-se trazer um conceito que permitisse, de maneira bastante intuitiva, aplicar os conceitos de matrizes. Em livros didáticos e provas para ingressar em universidades públicas e privadas, essa temática vem quase sempre empregada sem ligações a ações cotidianas dos alunos.

Com o estudo de grafos, além de facilitar a visualização de alguns problemas, é possível a aplicação de matrizes, o que permite que os alunos tragam temáticas que possam ser resolvidas com o algoritmo de Dijkstra. Grande parte dos alunos do ensino médio faz uso das redes sociais e notou-se, por intermédio das atividades propostas, que por trás das redes sociais há grafos, e se há grafos, há matrizes. O mesmo ocorre em jogos que, muitos em sua essência, têm por objetivo algum processo de otimização de menor rota ou menor tempo e assim, novamente, pode ser escrito como um grafo, para então ser resolvido e otimizado com o uso de matrizes.

Os conceitos de menor rota podem ainda ser aplicados a futuras construções em cidades e bairros planejados, colocando nos centros de emergência hospitais e escolas, por exemplo, proporcionando bem estar e qualidade de vida à sociedade como um todo.

Sabe-se que a atividade docente atualizada e com proposta de metodologias ativas voltadas ao que os alunos dominam e manipulam diariamente requer bastante estudo e preparo. Neste trabalho os conceitos, as possíveis aplicações e atividades que podem ser aplicadas foram exibidas, porém o clímax, que seria a execução das atividades com alunos do ensino médio, ficou prejudicada e não pode ser realizada por questões sanitárias.

Assim, sugere-se que professores do ensino médio façam uso do que foi apresentado, realizem novos roteiros e façam possíveis adequações, para mostrarem aos alunos o poder que a matemática tem de estar presente onde eles menos esperam.

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. R. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harba, 1980.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais —Ensino Médio.** Brasília, 2006. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf⟩. Acesso em: 09 jun. 2021.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 08 jun. 2021.

CIÊNCIA, G. **Entenda o enigma das pontes de Konigsberg que instigou a geometria**. [S.l.], 2011. Disponível em: ⟨http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html⟩. Acesso em: 08 jul. 2020.

FALCÓN, R. M. **Designing Evacuation Routes with GeoGebra.** Universidade de Sevilla, 2015. Disponível em: ⟨https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/69095/Designing\%20evacuation\%20routes\%20with\%20GeoGebra.pdf?sequence=1⟩. Acesso em: 04 ago. 2021.

FAVERO, F. F. **A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos digitais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual Paulista, Campus Rio Claro, 2017. Disponível em: ⟨http://hdl.handle.net/11449/152457⟩. Acesso em: 16 jul. 2020.

GOLDBARD, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**: Modelos e algoritmos. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

GUALANDI, J. H. **Investigações matemáticas com grafos para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Pontíficia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Disponível em: ⟨http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_GualandiJH_1.pdf.pdf⟩. Acesso em: 20. jul. 2020.

LUCAS, T. M. **Grafos no ensino médio**: uma proposta de atividades. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campus do Goytacazes, 2017. Disponível em: ⟨https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2018/05/24112017Talmo-Moraes-Lucas.pdf⟩. Acesso em: 17 jul. 2020.

LUCCHESI, C. L. **Introdução à Teoria de Grafos**. Rio de Janeiro: [s.n.], 1979.

NETO, P. O. B. **Grafos**: Teoria, modelos e algoritmos. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2003.

PERRENOUD, P. **Dez Novas Competências para Ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PRESTES, E. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Porto Alegre: [s.n.], 2016.

RABUSKE, M. A. **Introdução à Teoria dos Grafos**. 1. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 1992.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Anexos

Resolução da Atividade 1

- Com quais turmas o 2B ainda precisa jogar? E o 3A?

  O 2B não jogou com o 1B, 2A e 3A. Já o 3A não jogo com 1A, 2A e 2B.

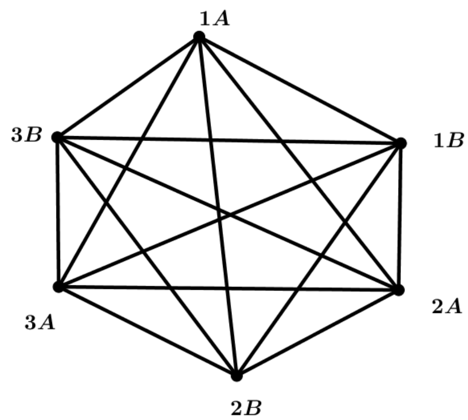
- Quantos jogos faltam para o 1B terminar sua participação no torneio?

  Faltam dois jogos.

- Faça o grafo completo onde todas as equipes tenham jogado todas as partidas do torneio.

  O grafo resultante é:

Figura 23: Grafo Completo - Torneio da Escola.



Fonte: o autor.

Resolução da Atividade 2

- Quem possui mais seguidores?

  Bruno é o que mais possui seguidores.

- Quem possui menos seguidores?

  Marlene possui menos seguidores.

- Quem segue mais pessoas?

  Marlene é quem segue mais pessoas

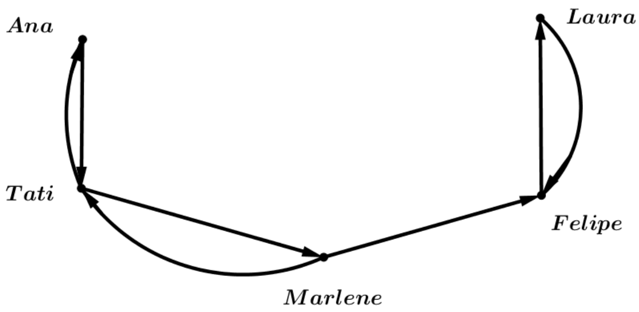
- Quem segue menos pessoas?

  Laura, Felipe, Tati e Ana seguem menos pessoas.

- Supondo que Bruno deixe de ter o Instagram e exclua sua conta. Como seria a nova configuração? Faça o esboço do novo digrafo.

  O novo digrafo é o seguinte:

Figura 24: Digrafo sem Bruno.



Fonte: o autor.

Resolução da Atividade 3

- Qual a distância entre a casa de Camila e a Escola?

  A distância é 1100 metros.

- Qual a distância entre o Mercado e o Ginásio?

  A distância é 1200 metros.

- Qual a distância entre a Padaria e a Escola?

  A distância é 1700 metros.

- Por que a diagonal principal da matriz de custo é toda nula?

  Porque a distância de um ponto a ele mesmo é zero.

- Montando uma matriz apenas com os valores das distâncias podemos notar que ela tem uma propriedade. Que propriedade é essa?

  Ela é uma matriz simétrica, isto é, sua original é igual a sua transposta.

Resolução da Atividade 4

- O Posto de Saúde, que deve ser localizado em um local estratégico para minimizar o tempo de atendimento, está bem localizado?

  Não, ele não está bem localizado, como se pode notar na matriz das máximas distâncias.

- Se fosse possível a construção de um novo Posto de Saúde, qual seria o local ideal?

  O ideal seria a construção no local da praça.

- Caso o local ideal não fosse possível, qual seria a segunda opção?

  A segunda opção seria no ginásio, visto que tem o segundo menor valor na matriz das máximas distâncias.

- Em seu bairro há algum hospital? Ele está localizando no centro de emergência?

  Resposta pessoal.

- Suponha que fosse feito uma nova via entre a Padaria e o Posto de Saúde com uma nova distância de 400 m.

  Nessa nova configuração, o Posto passaria a ser o centro de emergência? Sim, e a máxima distância se igualaria a da praça.

Resolução da Atividade 5

- O que mudaria se, na primeira rodada, Tomas ficasse nervoso e fosse atacar o oponente Caio?

  Nada, visto que, a menor rota para o oponente Caio é direta.

- Sem fazer a construção do algoritmo de Dijkstra para Julia, Edu, Caio e Paula é possível dizer que algum destes oponentes faça um tempo menor que Tomas?

  Não, os outros oponentes fazem um tempo maior.

- Construa a matriz do algoritmo de Dijkstra para Paula. Paula consegue destruir todos os oponentes em menos de 10 s e vencer Tomas?

  Com a construção da matriz nota-se que Paula demora 11 s para destruir todos seus oponentes, isto é, não consegue vencer a Tomas.

Rodada	Rota	Destino	Tempo Total Gasto(s)	Tempo até Julia(s)	Tempo até Edu(s)	Tempo até Caio(s)	Tempo até Tomas(s)
Início	Paula	Paula	-	1	∞	8	3
1	Paula/ Julia	Julia	1	-	4	3	3
2	Paula/ Tomas	Tomas	3	-	4	3	-
3	Paula/ Julia / Caio	Caio	3	-	4	-	-
4	Paula/ Julia / Edu	Edu	4	-	-	-	-

Tabela do Algoritmo de Dijkstra Para a Jogadora Paula