UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Ensino de tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas

Setembro de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Ensino de tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas

Kelly Kananda Teixeira Antunez

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Rosangela Villwock (Orientador)
Amarildo de Vicente
Rosilei de Souza Novak

Cascavel, Setembro de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Teixeira Antunez, Kelly Kananda
Ensino de tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas / Kelly Kananda Teixeira Antunez; orientadora Rosangela Villwock. -- Cascavel, 2021.
110 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2021.

1. Metodologias ativas. 2. TIC. 3. Excel. I. Villwock, Rosangela, orient. II. Título.

Kelly Kananda Teixeira Antunez

Ensino de tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Rosangela Villwock.

Orientadora – Profa. Dra.Rosangela Villwock

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Profa. Dra. Rosilei de Souza Novak

Universidade de Rio Verde

Prof. Dr. Amarildo de Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 28 de setembro de 2021.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo folego de vida e pela sabedoria que Ele me concedeu.

Agradeço à minha família que me apoiaram e me deram o suporte necessário para que eu continuasse meus estudos.

Agradeço aos docentes do PROFMAT da Unioeste, campus de Cascavel, por todo conhecimento transposto. Em especial, à minha orientadora Rosangela Villwock que me auxiliou na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso pelas horas de estudos compartilhadas e, em especial, aos meus companheiros de viagem (Dany, Marcos, Léia e Chico) pelas caronas e pelas risadas, conselhos e experiências compartilhadas durante o trajeto entre Foz do Iguaçu e Cascavel.

Agradeço à direção e à coordenação do Colégio Interativa de Foz do Iguaçu por permitir que a proposta metodológica elaborada neste trabalho fosse aplicada. Também, aos alunos da 3ª série do Ensino Médio (ano letivo de 2021) que aceitaram participar do projeto.

Resumo

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) assegura que é direito do estudante compreender as tecnologias digitais de informação e comunicação para utilizá-las em suas práticas sociais. Visando contemplar tais direitos e reconhecendo a importância de trabalhar com metodologias ativas para estimular o interesse e a autonomia do estudante, foi elaborada e aplicada uma proposta metodológica. Tal proposta objetivou o ensino de tópicos de Geometria Analítica com o auxílio do Excel para alunos da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Interativa da rede privada de ensino da cidade de Foz do Iguaçu. Para isso, através de pesquisas bibliográficas, foi elaborado um referencial teórico para conhecer as ações governamentais brasileiras de incentivo ao uso de tecnologias na educação e para identificar condições favoráveis ou contrárias de tal uso na visão de professores. Esses afirmam que o uso de tecnologias pode incentivar o raciocínio e a criatividade dos estudantes, mas também revelar a precariedade de infraestrutura ou a falta de formação profissional. Também, citam-se os primeiros indícios de criação/descoberta da Geometria Analítica e as orientações de documentos oficiais, como a BNCC e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Paraná (DCE), sobre o ensino dessa geometria na Educação Básica. Estes documentos enfatizam a importância de se trabalhar com conceitos como distância entre pontos, equações de reta e circunferência e representações no sistema cartesiano, o que permitirá ao estudante relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento e reconhecer suas aplicabilidades. Para auxiliar na compreensão das atividades da proposta metodológica, alguns tópicos de Geometria Analítica foram apresentados por meio de definições, proposições e teoremas. A aplicação da proposta objetivou analisar os benefícios da inserção de tecnologias (planilha eletrônica) no desenvolvimento de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio, além de contribuir para o desenvolvimento social dos educandos e incentivar a sua participação no processo de construção do conhecimento. Para avaliar tais benefícios, foi feito um comparativo entre avaliação diagnóstica e avaliação pós aplicação da metodologia proposta. Além disso, foi aplicado um questionário para analisar se, na visão dos alunos, a metodologia utilizada auxiliou no aprendizado. Os resultados obtidos com as avaliações não foram satisfatórios, o que nos levou a considerar possíveis dificuldades em interpretar questões e em trabalhar com matemática básica, dado o que os alunos afirmaram através do questionário.

Neste, os estudantes disseram que aumentaram seus conhecimentos acerca do Excel e que entenderam os conceitos trabalhados. Assim, as tecnologias podem tornar as aulas mais significativas, porém, diante de empecilhos como falta de infraestrutura e de capacitação, há de se pensar em políticas públicas que forneçam o necessário para garantir, sob todas as suas formas, um ensino de qualidade.

Palavras-chave: Metodologias ativas, TIC, Excel.

Abstract

The National Curriculum Common Base (BNCC) ensures that is the student's right to understand the digital information and communication technologies to use them in their social practices. Aiming to contemplate such rights and recognizing the importance to work with active methodologies to stimulate the interest and autonomy from the student, we elaborate and develop a methodological proposal. This proposal aimed the teach topics of Analytical Geometry with the support of Excel for students of the third grade of high school at "Colégio Interativa" from the private school system of Foz do Iguaçu city. For this, through bibliographical research, we elaborate a theoretical reference to meet the Brazilian government actions of incentive to use of technologies in education and to identify favorable or contrary conditions of such use in the teacher's view. These claim that the use of technologies can encourage student's reasoning and creativity, but also to reveal the precariousness of infrastructure or the lack of professional profissional. We also cite the first signs of the creation/discovery of Analytical Geometry and the guidelines of official documents, such as the BNCC and the Curriculum Guidelines for Basic Mathematics Education in Paraná (DCE), on the teaching of this geometry in Basic Education. These documents emphasize the importance of working with concepts such as distance between points, straight and circle equations and representations in the Cartesian system, which will allow the student to relate Mathematics with other areas of knowledge and recognize its applicability. To help understand the activities applied in the methodological proposal, we developed some topics of Analytical Geometry through definitions, propositions and theorems. The application of the proposal aimed to analyze the benefits of inserting technologies (electronic spreadsheet) in the development of contents of Analytical Geometry in High School, in addition to contributing to the social development of students and encouraging their participation in the process of knowledge construction. To assess these benefits, a comparison was made between diagnostic evaluation and evaluation after application of the proposed methodology. In addition, a questionnaire was applied to analyze if, in the student's view, the methodology used helped in learning. The results obtained with the assessments were not satisfactory, which led us to consider possible difficulties in interpreting questions and in working with basic mathematics, given what the students said through the questionnaire. In this one, the students said that they increased their knowledge about Excel and that they understood the concepts worked. We realize that technologies can make classes more meaningful, however, against of obstacles such as lack of infrastructure and training, there is a need to think about public policies that provide what is necessary to ensure, in all its forms, quality education.

Key-words Active methodologies, ICT, Excel.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Duas gerações de nativos digitais, a geração Z e a geração Alpha, estão cursando a educação básica atualmente. A geração Z, composta pelos nascidos entre 2000 e 2009, é caracterizada pela impaciência e imediatismo, pelo domínio das redes sociais e, entre outras coisas, pelo acesso a informação de forma instantânea através da internet (INDALÉCIO; RIBEIRO, 2017).

A geração Alpha, constituída pelos nascidos após 2010, ainda está sendo estudada. Acredita-se que essa geração terá cada vez mais domínio da tecnologia, e será mais inteligente devido ao acesso à educação e à informação (INDALÉCIO; RIBEIRO, 2017). Porém, segundo Flynn (2009, apud INDALÉCIO; RIBEIRO, 2017), as habilidades de raciocínio matemático e linguagem têm diminuído.

> [...] no entanto, estes indivíduos serão capazes de focar várias atividades ao mesmo tempo; capacidade de realizar observações dinâmicas; formular hipóteses; definir estratégias; responder rapidamente a estímulos; e ler e interpretar imagens tridimensionais. Neste contexto, portanto, cabe a indagação: a escola está preparada para este ‘novo aluno’? (INDALÉCIO; RIBEIRO, 2017, p. 146).

Pensando nessas gerações, um desafio presente é encontrar ferramentas para tornar as aulas mais interativas e utilizar de metodologias ativas, que são menos expositivas e estimulam a autonomia do estudante, para que o aluno participe de forma efetiva do processo de ensino-aprendizagem (EDUCAÇÃO, 2020).

Portanto, visando que o estudante participe do processo de construção do conhecimento e amplie suas habilidades, apresenta-se uma proposta de atividade utilizando a planilha eletrônica como ferramenta para trabalhar alguns conteúdos de geometria analítica no Ensino Médio.

Espera-se proporcionar uma maior familiarização dessa ferramenta que está presente na maioria dos computadores e é utilizada no mercado de trabalho. Também, pretende-se que os alunos “[...] possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos [...]” (BRASIL, 2017a,

p. 528).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que sejam trabalhadas diferentes representações de objetos no plano, entre elas a planilha eletrônica, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental para que o aluno desenvolva a noção de coordenadas cartesianas de forma gradual (BRASIL, 2017a), o que poderá resultar em um melhor entendimento de tópicos da geometria analítica.

Assim, este trabalho teve como objetivo geral analisar os benefícios da inserção de tecnologias (planilha eletrônica) no desenvolvimento de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio. Como objetivos específicos, este trabalho objetivou:

- Desenvolver tópicos de Geometria Analítica utilizando metodologias ativas;
- Incentivar a participação dos estudantes no processo de construção do conhecimento;
- Contribuir para o desenvolvimento social dos educandos.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro, por meio de uma pesquisa bibliográfica, citam-se algumas ações desenvolvidas pelo governo para incentivar o uso de tecnologias na educação, e a visão de professores sobre as condições favoráveis ou contrárias de tal uso.

Também, reconhecendo a importância de conhecer e de utilizar a história da Matemática, no capítulo um, descreveu-se os primeiros indícios de criação/descoberta da geometria analítica. Ainda, apresentam-se a visão da BNCC e das Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Paraná (DCE) sobre o ensino dessa geometria na Educação Básica.

No segundo capítulo, apresentam-se alguns tópicos de Geometria Analítica, como: distância entre pontos, equações da reta e da circunferência, posição entre ponto e circunferência, área de triângulo a partir de seus vértices e colinearidade de três pontos. Enunciam-se definições, proposições, teoremas e exemplos para auxiliar na compreensão das atividades que serão apresentadas na sequência.

No terceiro capítulo, apresenta-se uma proposta de atividades que foi aplicada no Ensino Médio. Essa atividade foi aplicada no Colégio Interativa da rede privada da cidade de Foz do Iguaçu. A escolha do colégio se deve ao fato de estarmos familiarizados com realidade do mesmo, pois é o local de trabalho da autora.

No quarto e último capítulo, faz-se um relato de experiência para descrever como foi a aplicação das atividades propostas. Nesse capítulo, os resultados dessa aplicação são analisados por meio de comparativo entre avaliações diagnósticas que foram realizadas antes e após realização das atividades, e por meio de um questionário em que os alunos puderam avaliar a metodologia proposta. Após este capítulo, seguem as considerações finais.

Capítulo 1

Referencial teórico

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta dez competências gerais que identificam os direitos de aprendizagem que devem ser assegurados ao longo dos anos que constituem a Educação Básica. Entre elas, destaca-se a quinta competência:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017a, p.9).

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN), as tecnologias da informação e comunicação estão em constante desenvolvimento, "**a começar pelo giz e os livros, todos podendo apoiar e enriquecer as aprendizagens**" (BRASIL, 2013, p. 25, grifo do autor). Este trabalho, restringe-se às tecnologias digitais de informação e comunicação (TIC), isto é, à tecnologia informática (TI).

1.1 Tecnologias e educação - Algumas ações no Brasil

No Brasil, a informática educativa, voltada para o ensino superior, está presente desde a década de 1960 (NIC.BR, 2016). A partir de 1980, o uso das TIC na educação básica começou a ser discutido e incentivado. Um fato que marcou o início desse período foi a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa, em 1981 (BORBA; PENTEADO, 2016). Ao longo da década de 80, tecnologias como calculadoras, computadores e *softwares* começaram a ser estudadas, destacando-se o *software* LOGO que relaciona linguagem de programação e pensamento matemático (BORBA; SILVA; GA-

DANIDIS, 2015). Projetos governamentais, como Educom[1] , Formar[2] e Proninfe[3] , foram desenvolvidos para incentivar pesquisas sobre a utilização das tecnologias na Educação e para capacitar professores para trabalhar com essas tecnologias (BORBA; PENTEADO, 2016).

Na década seguinte, o uso de computadores pessoais passa a se popularizar, e "Professores passaram a encontrar, em cursos de formação continuada, suporte e alternativas para que TI fossem utilizadas em suas aulas" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 15), sendo desafiados a saírem de sua zona de conforto e assumirem os desafios que essas tecnologias podem gerar.

Nessa fase, Borba, Silva e Gadanidis (2015) destacam o uso de softwares de representação gráfica e de geometria dinâmica com caráter visual e experimental, que não exigem um saber aprofundado sobre linguagem da programação.

Um programa criado nesta década foi o Programa Nacional de Informática na Educação[4] (ProInfo) que, juntamente com estados e municípios, buscava "[...]promover o uso da tecnologia como ferramenta de aprimoramento do ensino, centrando-se na instalação de laboratórios de informática na escola" (NIC.br, 2016, p. 27). Para participar do programa, o estado deveria possuir um Programa Estadual de Informática na Educação que garantisse a infraestrutura necessária e a formação de professores (BORBA; PENTEADO, 2016). Em 2007 o ProInfo foi reestruturado e passou a promover o uso pedagógico das TIC na educação básica (BRASIL, 2020).

Por volta de 1999, a internet começa a ser utilizada como veículo de comunicação e informação, facilitando, por exemplo, a realização de cursos a distância (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015). A partir de 2004, com o aprimoramento da internet e das tecnologias digitais, alguns aspectos como diversidade no modo de comunicação, ambientes virtuais de aprendizagem, tecnologias móveis ou portáteis e redes sociais, "trazem inquietações, questionamentos e perguntas a serem ainda formuladas [...]" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 26), criando um "[...] cenário exploratório, fértil ao desenvolvimento de investigações e à realização de pesquisas" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 26).

Em 2007, o governo federal iniciou o projeto Um Computador por Aluno (UCA) que passou a ser coordenado pelo ProInfo e beneficiou alunos de escola pública do

[1]COMputadores na EDUcação, implementado em 1983 pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e pela Secretaria Especial de Informática (BORBA; PENTEADO, 2016).

[2]Curso destinado à formação de professores. Foi realizado em duas etapas: Formar I, em 1987, e Formar II, em 1989 (VALENTE, 2006).

[3]Programa Nacional de Informática Educativa, criado em 1989 pelo MEC, apoiava, entre outras coisas, a criação de Centros de Informática na Educação e a capacitação de professores (BRASIL, 1994).

[4]Criado em 1997 pela Secretaria de Educação a Distância (SEED/MEC) (BORBA; PENTEADO, 2016).

Ensino Fundamental e Médio (NIC.BR, 2016).

Vale ressaltar que essas ações não atendem todas as escolas e não garantem que as tecnologias serão bem utilizadas. Também, há uma preocupação que mudanças políticas afetem, por exemplo, as verbas destinadas ao incentivo do uso das TIC na educação (BORBA; PENTEADO, 2016).

> É preciso enfatizar que, num país com as dimensões do Brasil, não é possível pensarmos num programa nacional de informática que seja adequado a todas as escolas. O sucesso das ações de larga escala depende, em muito, de sua articulação com as ações isoladas. Será através dessas articulações que poderemos ter uma área de informática educativa em consonância com as particularidades de cada região brasileira [...]. (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 21).

Um dos mais recentes programas do Governo federal voltado para o uso de tecnologias na Educação Básica, é o Programa de Inovação Educação Conectada, instituído em 2017, "[...]com o objetivo de apoiar a universalização do acesso à internet em alta velocidade e fomentar o uso pedagógico de tecnologias digitais na educação básica" (BRASIL, 2017b).

1.1.1 Prós e contras do uso das TIC na Educação

O uso das TIC na educação gera uma série de questionamentos. Borba e Penteado (2016) apresentam argumentos usados para defender ou condenar tal uso. Para alguns profissionais da educação, utilizar calculadoras e computadores em sala de aula para fazer contas ou esboçar gráficos pode gerar uma dependência no aluno, fazendo com que este não aprenda os conceitos que estão sendo trabalhados. Os autores rebatem esse posicionamento questionando se o lápis e papel também não deveriam ser considerados inadequados para o aprendizado, uma vez que, também causam dependência.

> Para nós, entretanto, sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento. Dessa forma, essa dependência sempre existirá e estará bastante relacionada ao contexto educacional em que nos encontremos. (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 11).

Outro argumento utilizado é que o investimento em tecnologias agrava os problemas econômicos relacionados à educação, pois sugerem que o dinheiro utilizado para comprar dispositivos tecnológicos poderia ser revertido para a melhora do ambiente escolar e aumento do salário dos professores. Uma contrariedade dessa argumentação é que existem leis que não permitem a transferência de recursos para segmentos diferentes dos quais eles foram destinados. Outro problema com essa alegação é que o uso dos computadores e o acesso à internet não são tidos como essenciais e direito dos alunos (BORBA; PENTEADO, 2016), o que, atualmente, contraria as competências garantidas pela BNCC.

Alguns apoiadores do uso das tecnologias na educação argumentam que a utilização de novas mídias pode incentivar o aperfeiçoamento profissional de professores, trazendo novas perspectivas e possibilidades para a educação. Também, argumentam que o uso do computador pode solucionar o problema da desmotivação dos alunos devido ao seu dinamismo, à sua riqueza visual e à sua importância no meio social. Porém, a motivação gerada pode ser passageira e com o tempo as novas mídias passam a ser domesticadas e se tornam enfadonhas (BORBA; PENTEADO, 2016).

Argumenta-se também que o uso das TIC na educação prepara o aluno para o mercado de trabalho, que tem se transformado e exigindo cada vez mais o conhecimento de tecnologias informáticas. Porém, Borba e Penteado (2016) alertam que não deve-se pensar na educação apenas como preparação para o mundo do trabalho, pois assim a educação passaria "[...] a ter seu currículo e sua própria organização totalmente subordinados às grandes empresas que ditam o que é adequado para este setor" (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 13). Acredita-se que

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma "alfabetização tecnológica". Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 14).

Kramer (2005 *apud* Sanches, 2018) afirma que, as tecnologias digitais usadas no ensino

> colaboram para que se excedam as barreiras das "velhas tecnologias" (exemplificadas pelo quadro-de-giz e por materiais impressos); solucionam empecilhos pedagógicos com os quais o professor se depara; bem como enfrentam questões sociais mais extensas. (p. 50).

Algumas divergências quanto a opinião de professores sobre o uso das TIC são citadas por Sanches (2018). Para alguns, a tecnologia pode ser uma ferramenta utilizada para melhorar a prática docente. Para outros, "[...] adotando a tecnologia como instrumento de aprendizagem, revela-se um processo ativo, permitindo ao aluno atingir participação efetiva e relevante na vida social" (SANCHES, 2018, p. 54). Enquanto, há professores mais conservadores que defendem o uso do computador voltado para exercícios escolares, sem alterar o ambiente escolar.

Em uma pesquisa realizada por Penha (2019) com quatro professores do 1º segmento do Ensino Fundamental do município de Nova Iguaçu (RJ), foi possível constatar que a indisciplina dos alunos, as salas superlotadas, a falta de conhecimento sobre o assunto por parte dos professores e a falta de tempo para preparar aulas diferenciadas, são fatores que desmotivam e desencorajam os docentes a fazer uso de tecnologias.

Vale destacar que pode-se encontrar outras dificuldades e desafios ao trabalhar com as TIC na Educação Básica. Alguns desses são abordados no trabalho do NIC.br (2016), que detalha uma pesquisa realizada, entre os anos de 2010 e 2013, sobre o uso das TIC no ambiente escolar de 12 escolas públicas das regiões Sul, Sudeste e Nordeste.

Da mesma forma, a pesquisa realizada por Oliveira (2014), investiga como as TIC foram utilizadas em 19 escolas de Ensino Fundamental da rede pública de Bauru (SP), aplicando questionários a 54 professores de Matemática e entrevistando seis coordenadores pedagógicos. Os fatos mais comentados foram a falta de preparo dos professores, a precariedade em suas condições de trabalho, a má estrutura física dos laboratórios de informática, a falta de manutenção dos dispositivos e o acesso limitado a internet.

Além desses limites, Borba e Penteado (2016) também destacam que, em algumas escolas, a sala de informática é subutilizada ou inacessível devido às regras rigorosas de uso impostas pela direção do colégio.

Ao analisar a pesquisa realizada por Damascena (2017), com 32 professores de Matemática do Ensino Médio da rede pública de Parnaíba (PI), constata-se que eles enfrentam todas as dificuldades citadas anteriormente, ou seja, não se trata apenas de um problema regional, mas sim de nível nacional.

Algumas défices ficaram mais evidentes com a implementação de aulas remotas, não presenciais, durante a pandemia da Covid-19. Em um estudo realizado com 254 professores de diferentes níveis e redes de ensino de Pernambuco, Leite, Lima e Carvalho (2020) constataram que a falta de formação, de estrutura e de tempo para preparar aulas e atividades adaptadas ao ensino remoto, foram problemas enfrentados pelos professores.

Outro ponto destacado pelas autoras, foi a questão da desigualdade social, principalmente entre escolas públicas e particulares, uma vez que alguns alunos também foram prejudicados pela falta de equipamentos, de conexão com a internet e devido a organização familiar.

Apesar desses contratempos e de alguns professores resistirem ao uso de tecnologias em suas aulas, quando questionados sobre como as TIC podem aprimorar o processo de ensino, os professores que participaram da pesquisa de Damascena (2017) responderam que

> - Facilita a compreensão de gráficos e figuras geométricas;
> - Facilitam a compreensão dos conteúdos;
> - Melhor visualização da prática do uso dos conteúdos matemáticos no dia a dia;
> - Desperta o interesse dos alunos, tornando as aulas mais participativas;
> - Proporciona maior entendimento do conteúdo explicado;
> - Incentivam o raciocínio e a criatividade dos alunos;
> - Aulas mais dinâmicas;
> - Proporciona uma melhor visualização das figuras geométricas;
> - Estabelece uma ligação entre o domínio, à prática e a teoria, refletindo de forma significativa no desenvolvimento matemático;
> - Traz uma visão mais abrangente dos conteúdos. (DAMASCENA, 2017, p. 48)

1.2 Geometria analítica – Primeiros relatos históricos

De acordo com Eves (2011), a geometria analítica é um método da geometria em que sua essência "[...] reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente" (EVES, 2011, p. 383).

Se analisar estudos sobre os berços da civilização, observa-se que os babilônicos e os egípcios se preocupavam com problemas práticos de mensuração envolvendo cálculo de área e volume. Mas um fato curioso é que os problemas mais complexos escritos em forma geométrica pelos babilônicos eram problemas algébricos não triviais, utilizando equações quadráticas, sistemas de equações e equação cúbica (EVES, 2011).

Considerando agora o berço da matemática demonstrativa, isto é, os gregos, observa-se uma constância em resolver problemas algébricos de forma engenhosa, devido à falta de notação algébrica. Como era usual representar um número por um comprimento, forma-se uma álgebra geométrica, atribuída aos pitagóricos e encontrada nos Elementos de Euclides [5] em forma de proposições (EVES, 2011).

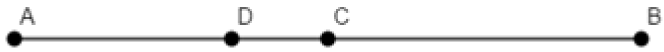
[5]Euclides é um dos gigantes da matemática conhecido pela escrita de os Elementos, constituído de 13 livros sobre geometria, teoria dos números e álgebra elementar (EVES, 2011).

Por exemplo, a proposição 5 do livro II dos Elementos que diz

> [...] *Dividindo-se uma reta em partes iguais e em partes desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção, e igual ao quadrado sobre a metade da reta dada.* (EVES, 2011, p. 108, grifo do autor).

A reta[6] citada nessa proposição pode ser representada pela figura abaixo (Figura 1), em que os pontos A e B são os extremos do segmento de reta, o ponto C é o ponto médio de AB, e o ponto D divide AB em partes desiguais.

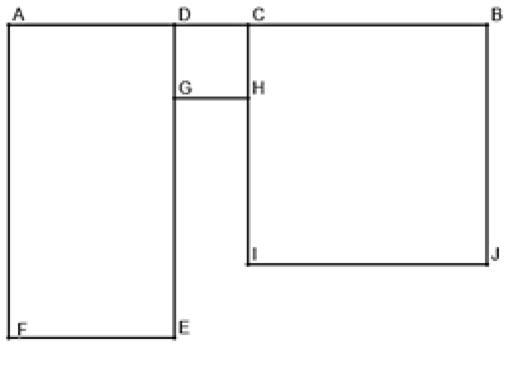
Figura 1: Representação geométrica das hipóteses da proposição 5 dos Elementos.



Fonte: a própria autora.

Na figura 2, os lados do retângulo ADEF têm a mesma medida que as partes desiguais (AD e DB), e DCHG e CBJI são quadrados, representando assim, a tese da proposição.

Figura 2: Representação geométrica da tese da proposição 5 dos Elementos.



Fonte: a própria autora.

Atualmente, transformando o problema geométrico anterior em uma linguagem algébrica, a tese é que $(\overline{AD})(\overline{DB}) + (\overline{DC})^2 = (\overline{CB})^2$, de simples demonstração. De fato, sejam $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{DC} = b$, então $(\overline{AD})(\overline{DB})+(\overline{DC})^2 = (\overline{AB}-\overline{DB})(\overline{DC}+\overline{CB})+(\overline{DC})^2 = (2a–b-a)(b+a)+b^2 = (a-b)(a+b)+b^2 = a^2+ab–ab–b^2+b^2 = a^2 = (\overline{CB})^2$. Notemos que podemos reescrever a igualdade acima como $(\overline{AD})(\overline{DB}) = (\overline{CB})^2 - (\overline{DC})^2$, obtendo assim a identidade $(a–b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Um grego que se destacou foi Apolônio (225 a.C.), principalmente por seu estudo denominado Secções cônicas, tornando-se conhecido como o Grande Geômetra.

[6] "[...] na formulação euclidiana, uma reta determinada por dois pontos A e B correspondia, na verdade, ao segmento AB, [...]" (PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010, p. 22) e pode ser estendida infinitamente em qualquer sentido.

Ele introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola e obtinha as secções cônicas através de um cone circular duplo. "[...] Apolônio deduziu o cerne de sua geometria das secções cônicas de equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas [...]" (EVES, 2011, p. 382). "Fatos como esse levam alguns a defender a tese de que a geometria analítica foi uma invenção dos gregos" (EVES, 2011, p. 199).

Por sua vez, há quem defenda que o francês Nicole Oresme (1323 – 1382) foi o inventor da geometria analítica. Oresme denominava "qualidade uniformemente disforme" aquela que varia de forma linear (ROQUE, 2012), o que "[...] seria a primeira manifestação explicita da equação da reta [...]" (EVES, 2011, p. 383). Para Oresme, uma qualidade possui intensidades diferentes podendo variar com o tempo. Isso "[...] pode ser representado por um gráfico de duas dimensões no qual a linha horizontal representa a extensão (o tempo ou o espaço) e a linha vertical, a intensidade da qualidade" (ROQUE, 2012, p. 224).

Porém, conforme afirma Roque (2012), Oresme não relacionava as grandezas algebricamente, e seus gráficos tinham um propósito filosófico. "Um século depois de ter sido escrito, o texto de Oresme mereceu várias tiragens; dai que pode ter influenciado matemáticos posteriores" (EVES, 2011, p. 383).

Foi necessário desenvolver o simbolismo e métodos algébricos para que a geometria analítica pudesse ser melhor trabalhada. Por isso, a maioria dos historiadores nomeiam os franceses René Descartes e Pierre de Fermat como os criadores dessa geometria. "Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados" (EVES, 2011, p. 383).

Um dos trabalhos mais importantes do filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) é o Discurso do método, que continha três apêndices: um sobre óptica, outro sobre fenômenos meteorológicos ou atmosféricos e outro sobre geometria, intitulado A Geometria (EVES, 2011).

Em A Geometria é que se encontra a contribuição de Descartes para a geometria analítica. De acordo com Roque (2012), nessa obra, Descartes introduz um sistema de coordenadas, nem sempre ortogonais, para representar equações indeterminadas. Apesar de a geometria apresentada por Descartes ter poucos elementos da geometria analítica utilizada hoje em dia, sua obra "[...] representou um significativo avanço da álgebra formal, tanto em termos de notação como de interpretação geométrica" (MOL, 2013, p. 96).

Ao mesmo tempo que Descartes, mas de forma independente, o matemático Pierre de Fermat (1601 – 1665) também se dedicava a problemas envolvendo geometria e álgebra. "[...] onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente" (EVES, 2011, p. 389).

Fermat se dedicou à análise de equações de retas e de cônicas, e "estudou curvas do tipo $y = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, hoje conhecidas como "parábolas" ou "hipérboles de Fermat", nos casos em que n é positivo ou negativo, respectivamente" (MOL, 2013, p. 98). Apesar de não fazer parte do nosso estudo, não pode-se deixar de citar que Fermat contribuiu significativamente para a teoria dos números e para o cálculo diferencial (EVES, 2011; ROQUE, 2012; MOL, 2013).

1.2.1 Geometria analítica na Educação Básica

De acordo com a BNCC, a Matemática no Ensino Fundamental é responsável pelo letramento matemático, ou seja, desenvolver "[...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...]" (BRASIL, 2017a, p, 266), de modo a

> [...] reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2017a, p. 266).

Os conceitos básicos da Geometria Analítica fazem parte desse processo. A partir do 5º ano do Ensino Fundamental, o estudante começa a ter contato com o plano cartesiano, para que possa desenvolver habilidades como

> Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. (BRASIL, 2017a, p. 297).

A partir dos anos finais do Ensino Fundamental, inicia-se uma

> [...] aproximação da Álgebra com a Geometria [...]. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica. (BRASIL, 2017a, p. 272).

Esse aprofundamento deve ocorrer a partir do 6º ano do Ensino Fundamental, com a associação de pares ordenados a pontos do plano cartesiano. E continuar no 7º ano, quando os alunos deverão representar polígonos no plano cartesiano e transformá-los, ampliando ou reduzindo, através da multiplicação das coordenadas dos seus vértices por um número real (BRASIL, 2017a).

A utilização da geometria analítica no Ensino Fundamental é mais evidente a partir do 8º ano, quando é esperado que o estudante adquira as seguintes habilidades:

> (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
> (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
> [...]
> (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (BRASIL, 2017a, p. 313).

As noções de ponto médio de um segmento e de distância entre pontos no plano cartesiano, devem ser trabalhadas no 9º ano, mas sem a utilização de fórmulas (BRASIL, 2017a).

Assim, no progresso ano a ano, novas ferramentas vão sendo compreendidas e utilizadas, podendo aumentar a complexidade das situações-problema trabalhadas (BRASIL, 2017a).

No Ensino Médio, os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental devem ser consolidados e aprofundados. Na área de Matemática e suas Tecnologias, novos conhecimentos podem ser agregados para auxiliar na resolução de problemas mais complexos. Os estudantes "[...] devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade" (BRASIL, 2017a, p. 471).

As habilidades a serem alcançadas no Ensino Médio, de acordo com a BNCC, não são organizadas por séries. Desse modo, as instituições de ensino têm liberdade para organizar seus currículos e propostas pedagógicas. Cada habilidade está associada a uma competência específica de Matemática que deve ser desenvolvida ao longo do ensino Médio (BRASIL, 2017a).

A Geometria Analítica não aparece explicitamente nas competências e habilidades que o estudante deve desenvolver durante o Ensino Médio. O plano cartesiano é citado apenas quando se trata da habilidade de representar funções geometricamente.

Apesar disso, a BNCC destaca que outras habilidades podem ser adotadas para contemplar "[...] especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas" (BRASIL, 2017a, p. 542), uma vez que a nova estrutura do Ensino Médio "[...] adota a flexibilidade como princípio de organização curricular [...]" (BRASIL, 2017a, p. 468), levando em consideração que

> [...] é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais. (BRASIL, 2017a, p. 542).

Ao analisar outro documento oficial, observa-se que as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Paraná (DCE) enfatizam que, no Ensino Fundamental, os alunos devem compreender "[...] noções de geometria analítica utilizando o sistema cartesiano [...]" (PARANÁ, 2008, p. 56).

No Ensino Médio, os alunos devem ser capazes de analisar os "[...] elementos que estruturam a geometria euclidiana, através da representação algébrica, ou seja, a geometria analítica plana" (PARANÁ, 2008, p. 56). Logo, "[...] é imprescindível o estudo das distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de área de figuras geométricas no plano e estudo de posições" (PARANÁ, 2008, p. 56).

Capítulo 2

Tópicos de Geometria Analítica

O objetivo desse capítulo é fundamentar a parte matemática das atividades que serão desenvolvidas na próxima seção. Os resultados aqui apresentados foram fundamentados nos livros de Delgado, Frensel e Crissaff (2017), Lima (2013) e Iezzi (2013).

2.1 Reta real

Seja r uma reta na qual fixamos os pontos distintos O e A. Sem perda de generalidade, tomamos A à direita de O. O ponto O será chamado origem e divide r em duas semirretas. Chamamos a semirreta que contém A como semirreta positiva, e a que não contém, como semirreta negativa.

Definimos que se um ponto X pertence à semirreta positiva, então está à direita de O. Também, se X pertence à semirreta negativa, então está à esquerda de O.

Se $X \in r$, então existe um número real x, chamado abscissa de X, que é a medida do segmento OX, se X está à direita de O, ou essa medida precedida do sinal menos, se X está à esquerda de O. Tal correspondência é biunívoca.

Da Geometria Euclidiana Real, a cada par de pontos X e Y corresponde um número real, denominado a distância entre X e Y, ou comprimento do segmento XY. Denotaremos tal distância por $d(X, Y)$.

2.1.1 Distância entre pontos na reta real

Proposição 1. *Se x e y são as abscissas dos pontos X e Y, respectivamente, então*

$$d(X, Y) = |x - y|.$$

Demonstração. Baseada em Delgado, Frensel e Crissaff (2017):

Se $X = Y$, a distância entre eles é nula. Dado que $d(O, X) = d(O, Y) = x = y$,

$$d(X, Y) = 0 = |x - x| = |x - y|$$

Se $X = O$, sua abcissa é $x = 0$, então

$$d(X, Y) = d(O, Y) = |y| = |0 - y| = |x - y|$$

De forma análoga, se $Y = O$, $d(X, Y) = |x - y|$.

Para os casos a seguir, sem perda de generalidade, consideremos $x < y$.

Se X e Y estão à direita de O, então $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$. Logo,

$$d(X, Y) = d(O, Y) - d(O, X) = y - x = |y - x| = |x - y|$$

Se X e Y estão a esquerda de O, então $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = -y$. Logo,

$$d(X, Y) = d(O, X) - d(O, Y) = -x - (-y) = -x + y = |-x + y| = |x - y|$$

Se X está à esquerda de O e Y está à direita de O, então $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = y$. Logo,

$$d(X, Y) = d(O, X) + d(O, Y) = -x + y = |-x + y| = |x - y|.$$

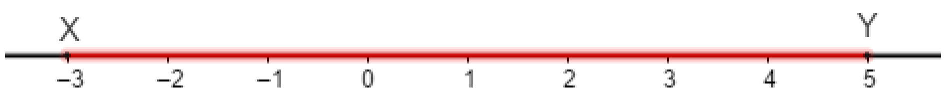
□

Exemplo 1. *Sejam -3 e 5 as abscissas dos pontos X e Y, respectivamente, então*

$$d(X, Y) = |-3 - 5| = |-8| = 8.$$

Isto é, a distância entre X e Y é igual a 8. A Figura 3 faz uma representação geométrica do segmento XY de comprimento 8 unidades de medida.

Figura 3: Representação do segmento XY na reta.



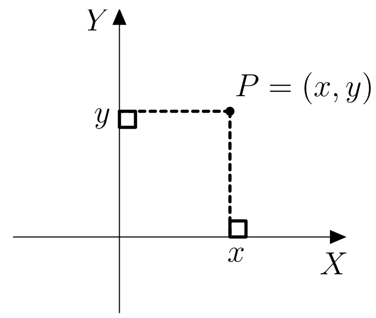
Fonte: a própria autora.

2.2 Plano cartesiano

Sejam X e Y dois conjuntos. Chamamos de produto cartesiano $X \times Y$ o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$. Um caso particular de produto cartesiano é o $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde os elementos (x, y) são pares ordenados de números reais.

Seja π um plano que possui um par de eixos fixos, OX e OY, que se intersectam perpendicularmente em O, chamado origem do sistema de coordenadas. O par $(x, y) \in R^2$ é uma coordenada cartesiana de um ponto P do plano π. Sendo x a coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, o nomeamos como abscissa ou primeira coordenada de P. Sendo y a coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY, o nomeamos como ordenada ou segunda coordenada de P. Chamaremos de plano cartesiano o plano π descrito.

Figura 4: Representação do ponto P no plano cartesiano.



Fonte: a própria autora.

2.2.1 Distância entre pontos no plano cartesiano

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos do plano cartesiano. A distância entre A e B, denotada por $d(A, B)$, é a medida da hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC, em que $C = (x_B, y_A)$.

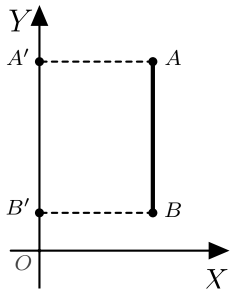
Proposição 2. *Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então a distância de A à B é dada por*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Demonstração. Vamos analisar três casos distintos.

Caso 1: A e B têm a mesma abscissa.

Figura 5: Caso 1 da Proposição 2.



Fonte: a própria autora.

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $x_A = x_B = x$. Notemos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{OY}$, então existem pontos $A^{'} = (0, y_A)$ e $B^{'} = (0, y_B)$ da reta real OY tais que

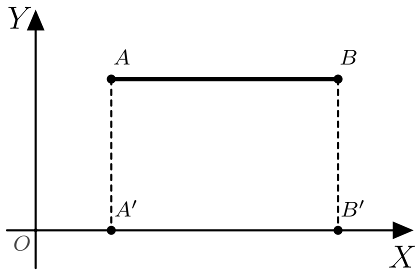
$$d(A, B) = d(A^{'}, B^{'})$$

Pela Proposição 1,

$$d(A, B) = d(A^{'}, B^{'}) = |y_A - y_B|$$
$$= \sqrt{(y_A - y_B)^2} = \sqrt{0 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Caso 2: A e B têm a mesma ordenada.

Figura 6: Caso 2 da Proposição 2.



Fonte: a própria autora.

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $y_A = y_B = y$. Notemos que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{OX}$, então existem pontos $A^{'} = (x_A, 0)$ e $B^{'} = (x_B, 0)$ da reta real OX tais que

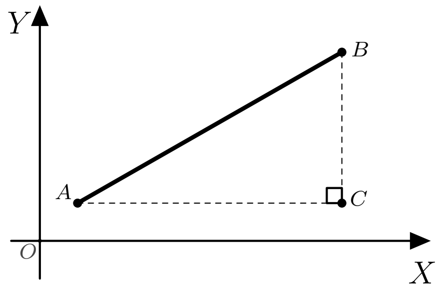
$$d(A, B) = d(A^{'}, B^{'})$$

Pela Proposição 1,

$$
\begin{gathered}
d(A,B) = d(A',B') = |x_A - x_B| \\
= \sqrt{(x_A - x_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + 0} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.
\end{gathered}
$$

Caso 3: o segmento AB não é paralelo aos eixos coordenados OX e OY.

Figura 7: Caso 3 da Proposição 2.



Fonte: a própria autora.

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Consideremos o ponto $C = (x_B, y_A)$. Notemos que $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{OY}$. Logo, ABC forma um triângulo retângulo em C. Pelo teorema de Pitágoras, e pelos casos 1 e 2, temos:

$$
\begin{gathered}
\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (d(A,C))^2 + (d(B,C))^2 \\
= (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \\
\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}
\end{gathered}
$$

Portanto,

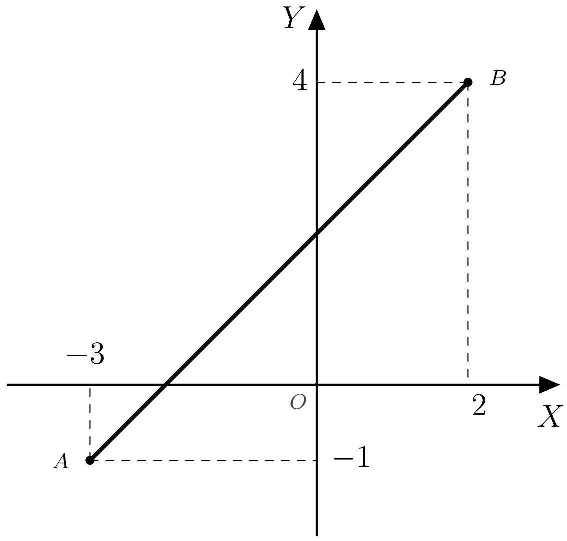
$$
d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.
$$

□

Exemplo 2. *Sejam* $A = (-3,-1)$ *e* $B = (2,4)$*, então*

$$
\begin{gathered}
d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1-4)^2} \\
= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.
\end{gathered}
$$

Figura 8: Distância entre os pontos $A = (-3, -1)$ e $B = (2, 4)$.



Fonte: a própria autora.

2.2.2 Circunferência

Delgado, Frensel e Crissaff (2017) definem circunferência conforme a Definição 1.

Definição 1. *A circunferência C de centro $A \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto de pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:*

$$C = \{P \in \pi; d(P, A) = r\}$$

Então, conhecendo a fórmula usada para calcular a distância entre dois pontos (Proposição 2) e a definição de circunferência (Definição 1), podemos encontrar uma equação que indique os pontos pertencentes à circunferência, relacionando a abscissa com a ordenada de cada um dos seus pontos. Seja C uma circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio r situada no plano cartesiano, então

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in C &\Leftrightarrow d(P, A) = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

A equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é chamada equação reduzida da circunferência. Através de algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Tomando $c = -2a$, $d = -2b$ e $e = a^2 + b^2 - r^2$, temos
$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Essa última equação é chamada de equação geral da circunferência. A partir dela, completando quadrados, podemos obter a equação reduzida da circunferência. Ou também, basta observar que

$$a = -\frac{c}{2}, \quad b = -\frac{d}{2} \quad e \quad r^2 = a^2 + b^2 - e \tag{2.1}$$

Assim, dados o centro $A = (a, b)$ e o raio r da circunferência, podemos facilmente escrever sua equação reduzida.

Exemplo 3. *Sejam $A = (3, 7)$ o centro de uma circunferência e $r = 2$ a medida do seu raio. Então, a equação reduzida da circunferência é*
$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 2^2$$
ou ainda,
$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 4.$$

Exemplo 4. *Se abrirmos os quadrados da diferença encontrados no Exemplo 3, e deixarmos todos os termos diferentes de zero do mesmo lado da igualdade, encontramos*
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 - 4 = 0$$
ou ainda,
$$x^2 + y^2 - 6x - 14y + 54 = 0.$$

Esta última é a equação geral da circunferência de centro $A = (3, 7)$ e raio $r = 2$.

Exemplo 5. *Seja $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 19 = 0$ a equação de uma circunferência. Vamos encontrar as coordenadas do seu centro e a medida do seu raio. Manipulando os termos da equação, obtemos*

$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 - 16 + y^2 - 2 \cdot 1y + 1 - 1 - 19 = 0$$
$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 36.$$

Logo, as coordenadas do centro são $(-4, 1)$ e o raio mede 6.

Poderíamos, também, ter usado as fórmulas descritas em 2.1. Seja (a, b) o centro e r a medida do raio, então

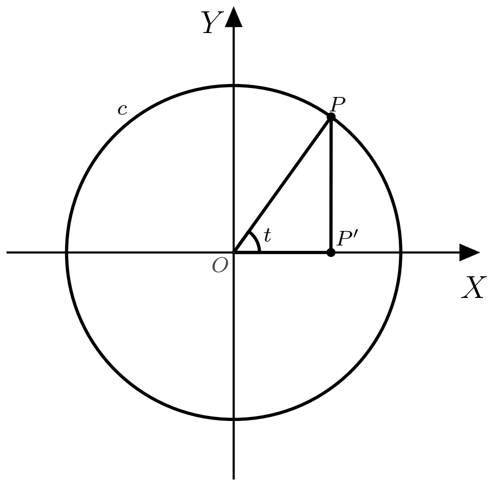
$$a = -\frac{8}{2} = -4$$
$$b = -\frac{-2}{2} = 1$$
$$r^2 = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 - (-19)} = 36 \Leftrightarrow r = 6.$$

As equações reduzida e geral da circunferência são as que aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio, e são elas que usaremos para desenvolver as atividades propostas no próximo capítulo. Em especial, implementaremos a equação reduzida da circunferência no Excel 2016 para calcular alguns pontos da circunferência.

Essa implementação seria simplificada se parametrizássemos a equação da circunferência.

Considere uma circunferência C de raio r, centrada na origem O do plano cartesiano. Seja $P = (x, y)$ um ponto de C e $P' = (x, 0)$ o pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX. Seja $P\hat{O}P$ o ângulo tomado no sentido positivo que mede t radianos (Figura 9). Notemos que $P'OP$ é um triângulo retângulo em P', então

Figura 9: Representação da circunferência C de raio r centrada na origem do plano cartesiano.



Fonte: a própria autora.

$$sen\, t = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \text{ e } \cos t = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$$
$$\Leftrightarrow sen\, t = \frac{y}{r} \text{ e } \cos t = \frac{x}{r}$$
$$\Leftrightarrow y = r\, sen\, t \text{ e } x = r \cos t$$

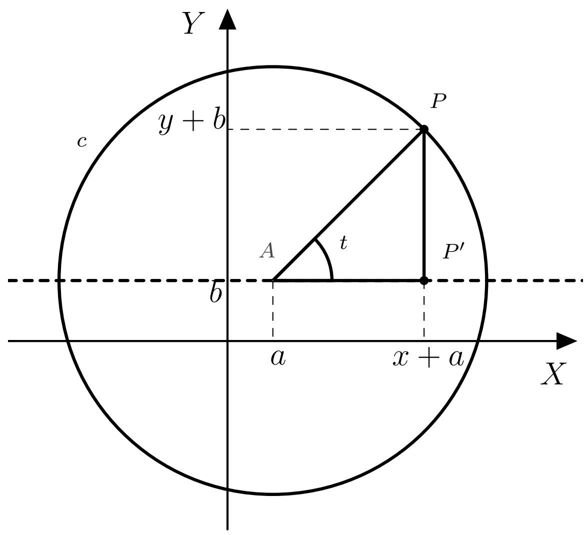
Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos da circunferência. Logo,

$$C = \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,sen\,t \end{cases}$$

é uma possível parametrização da circunferência C.

Se deslocarmos o centro da circunferência para o ponto $A = (a, b)$, então o ponto P da circunferência é dado por $P = (x + a, y + b) = (x', y')$ e $P' = (x + a, 0 + b)$ é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta que passa por A e é paralela ao eixo OX (Figura 10) . De forma análoga, temos

Figura 10: Representação de uma circunferência com centro deslocado da origem do plano cartesiano.



Fonte: a própria autora.

$$sen\,t = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AP}} \text{ e } \cos t = \frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}}$$
$$\Leftrightarrow sen\,t = \frac{y' - b}{r} \text{ e } \cos t = \frac{x' - a}{r}$$
$$\Leftrightarrow y' = b + r\,sen\,t \text{ e } x' = a + r\cos t$$

em que (x', y') é um ponto da circunferência. De modo genérico, sendo (x, y) um ponto da circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio r, uma equação paramétrica dessa circunferência é:

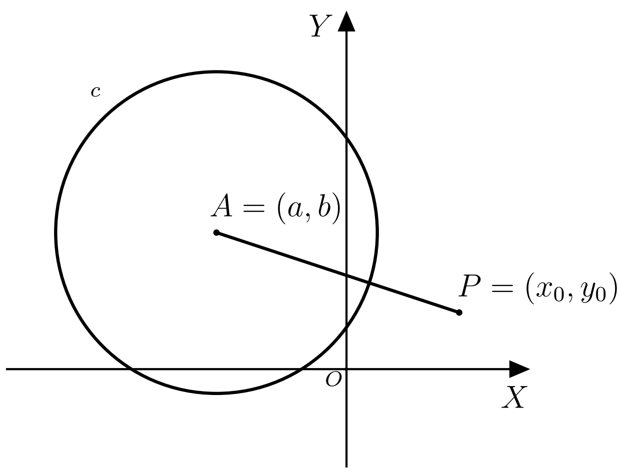
$$C = \begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\,sen\,t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

2.2.3 Posição relativa entre ponto e circunferência

Sejam C uma circunferência de centro $A = (a, b)$, raio r e $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano que contém C. Há três possibilidades para P:

1ª possibilidade: P é exterior a C.

Figura 11: Ponto exterior a circunferência.



Fonte: a própria autora.

Isso ocorre se, e somente se, $d(P, A) > r$, ou seja

$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} > r \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$$

ou ainda,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0.$$

2ª possibilidade: P pertence a C.

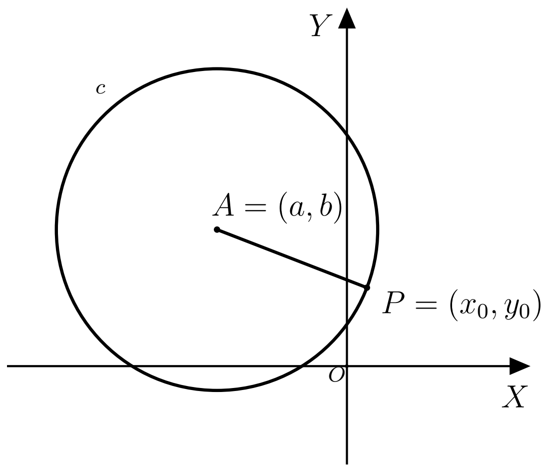
Neste caso, P satisfaz a definição de circunferência (Definição 1), logo

$$d(P, A) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = r \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

ou ainda,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0.$$

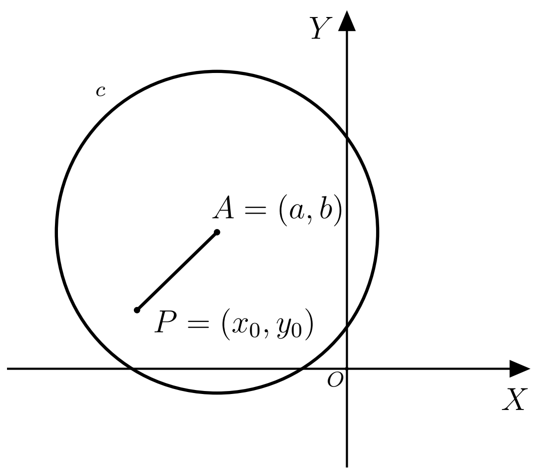
Figura 12: Ponto pertencente a circunferência.



Fonte: a própria autora.

$3^{\underline{a}}$ possibilidade: P é interior a C.

Figura 13: Ponto interior a circunferência.



Fonte: a própria autora.

Isso ocorre se, e somente se, $d(P, A) < r$, isto é

$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} < r \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$$

ou ainda,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0.$$

2.2.4 Pontos colineares

Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. A seguir, será apresentada a condição de colinearidade de três pontos, que será usada posteriormente para encontrar a equação de uma reta.

Teorema 1. *Três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se, verificam a igualdade:*

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A).$$

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Parte 1 – Suponhamos que os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares. Então, consideremos três casos:

1º caso: dois pontos coincidem.

Sem perda de generalidade, suponhamos $A = B$. Então $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$. Logo,

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_A - x_A)(y_C - y_B) = 0 \cdot (y_C - y_B) = 0$$

e

$$(x_C - x_B)(y_B - y_A) = (x_C - x_B)(y_A - y_A) = (x_C - x_B) \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A).$$

2º caso: três pontos distintos e pertencentes a mesma reta paralela a um dos eixos coordenados.

Suponhamos que A, B e C pertençam a uma reta paralela ao eixo OX[7] . Então $y_A = y_B = y_C$. Logo,

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_B - x_A)(y_B - y_B) = (x_B - x_A) \cdot 0 = 0$$

e

$$(x_C - x_B)(y_B - y_A) = (x_C - x_B)(y_A - y_A) = (x_C - x_B) \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A).$$

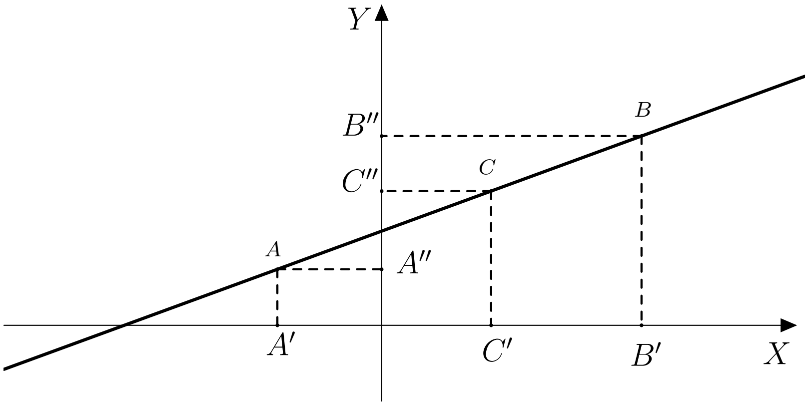
3º caso: os três pontos pertencem a uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados.

Sejam $A' = (x_A, 0)$, $B' = (x_B, 0)$ e $C' = (x_C, 0)$ os pés das perpendiculares baixadas de A,B e C sobre o eixo OX, respectivamente. E $A'' = (0, y_A)$, $B'' = (0, y_B)$

[7] O caso em que A, B e C pertençam a uma reta paralela ao eixo OY fica a cargo do leitor.

e $C'' = (0, y_C)$ os pés das perpendiculares baixadas de A, B e C sobre o eixo OY, respectivamente (Figura 14).

Figura 14: Exemplo de pontos A, B e C colineares.



Fonte: a própria autora.

Pelo teorema de Tales, considerando as retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$, a razão r que C divide o segmento AB é dada por

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} \tag{2.2}$$

Pelo teorema de Tales, considerando as retas paralelas $\overleftrightarrow{AA''}$, $\overleftrightarrow{BB''}$ e $\overleftrightarrow{CC''}$, a razão r que C divide o segmento AB é dada por

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A''C''}}{\overline{C''B''}} \tag{2.3}$$

Logo, de 2.2 e de 2.3,

$$r = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$$
$$\Leftrightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_C) = (x_B - x_C)(y_C - y_A).$$

Parte 2 – Agora, sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, suponhamos que

$$(x_C - x_A)(y_B - y_C) = (x_B - x_C)(y_C - y_A) \tag{2.4}$$

Analisaremos três casos:

$1^{\underline{o}}$ caso: $x_B - x_C = 0$. Assim, $x_B = x_C$. De 2.4 temos:

$$(x_C - x_A)(y_B - y_C) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_C - x_A = 0 \text{ ou } y_B - y_C = 0$$

Se $x_C - x_A = 0$, então $x_C = x_A$, portando, $x_C = x_A = x_B$ e os pontos A, B e C pertencem à mesma reta (paralela a OY), isto é, são colineares.

Se $y_B - y_C = 0$, então $y_B = y_C$ e, como $x_B = x_C$, $B = C$. Portanto, existe uma reta contendo $B = C$ e A, isto é, A, B e C são colineares.

Se $x_C - x_A = 0$ e $y_B - y_C = 0$, então $B = C$ e A, B, C pertencem à mesma reta (paralela ao eixo OY), isto é, são colineares.

$2^{\underline{o}}$ caso: $y_C - y_A = 0$. Então, $y_C = y_A$. De 2.4 temos:

$$(x_C - x_A)(y_B - y_C) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_C - x_A = 0 \text{ ou } y_B - y_C = 0$$

Se $x_C - x_A = 0$, então $x_C = x_A$ e, como $y_C = y_A$, $A = C$. Portando, existe uma reta contendo $A = C$ e B, isto é, A, B e C são colineares.

Se $y_B - y_C = 0$, então $y_B = y_C = y_A$, portanto, os pontos A, B e C pertencem à mesma reta (paralela a OX), isto é, são colineares.

Se $x_C - x_A = 0$ e $y_B - y_C = 0$, então $A = C$ e A, B, C pertencem à mesma reta (paralela a OX), isto é, são colineares.

$3^{\underline{o}}$ caso: $x_B - x_C \neq 0$ e $y_C - y_A \neq 0$. Neste caso, de 2.4 temos:

$$(x_C - x_A)(y_B - y_C) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x_C - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_C \neq 0.$$

Ainda de 2.4,

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \tag{2.5}$$

Chamaremos os quocientes acima de r e consideremos o ponto $D = (x_D, y_D)$ que divide o segmento AB na razão r (neste caso A, B e D são colineares). Usando o mesmo raciocínio usado na primeira parte da demonstração,

$$r = \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = \frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} \tag{2.6}$$

De 2.5 e de 2.6, temos:

$$\frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = \frac{x_c - x_A}{x_B - x_C} \text{ e } \frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$$

Da primeira igualdade, segue

$$\begin{aligned} x_B x_D - x_C x_D - x_A x_B + x_A x_C &= x_B x_C - x_A x_B - x_C x_D + x_A x_D \\ \Leftrightarrow x_D x_B + x_A x_C &= x_B x_C + x_A x_D \\ \Leftrightarrow x_D x_B - x_A x_D &= x_B x_C - x_A x_C \\ \Leftrightarrow x_D(x_B - x_A) &= x_C(x_B - x_A) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_D = x_C \tag{2.7}$$

De forma análoga, desenvolvendo a segunda igualdade, obtemos

$$y_D = y_C \tag{2.8}$$

Logo, de 2.7 e de 2.8, concluímos que $C = D$.

Portanto, como A, B, D são colineares e $D = C$, temos que A, B, C são colineares. □

Nota 1. *Notemos que*

$$\begin{aligned} (x_C - x_A)(y_B - y_C) &= (x_B - x_C)(y_C - y_A) \\ \Leftrightarrow (x_A - x_C)(y_B - y_C) + (x_B - x_C)(y_C - y_A) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) - x_C(y_C - y_A) - x_C(y_B - y_C) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_A y_B - x_A y_C + x_B y_C - x_B y_A - x_C y_C + x_C y_A - x_C y_B + x_C y_C &= 0 \\ \Leftrightarrow x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_A y_C - x_B y_A - x_C y_B &= 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.5 Retas no plano

De acordo com a Geometria Euclidiana, "Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles" (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 3).

O teorema a seguir garante a existência da chamada equação geral da reta.

Teorema 2. *A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r.*

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Sejam $A = (x_A, y_B)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos da reta r. Consideremos $P = (x, y)$ pertencente a r. Logo, A, B e P são colineares. Pela Nota 1, temos

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos

$$\begin{gathered} y_A x + x_B y + x_A y_B - y_B x - x_A y - x_B y_A = 0 \\ x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_A y_B - x_B y_A = 0 \end{gathered}$$

Tomando $a = (y_A - y_B)$, $b = (x_B - x_A)$ e $c = x_A y_B - x_B y_A$, concluímos que para todo $P \in r$ verifica a equação

$$ax + by + c = 0.$$

□

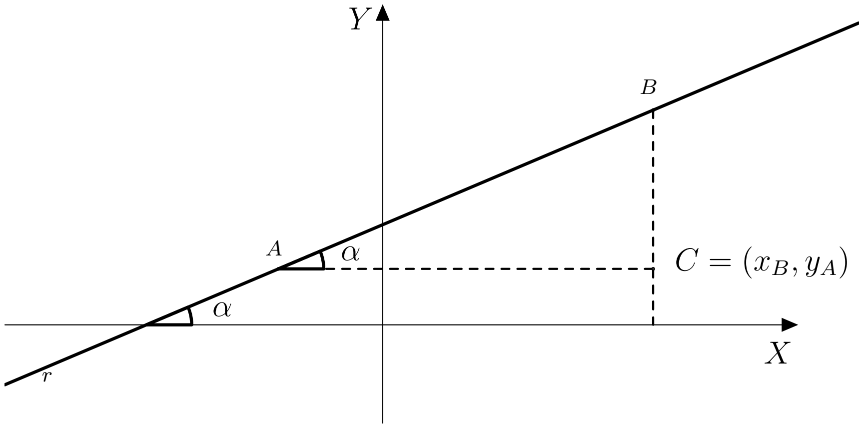
Definição 2. *Seja r uma reta não perpendicular ao eixo OX, e α a medida do ângulo formado entre r e o eixo OX, medido a partir do eixo OX no sentido anti-horário. Chama-se coeficiente angular da reta r o número real m tal que*

$$m = \tan \alpha.$$

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos da reta r e $C = (x_B, y_A)$. Notemos que ABC é retângulo em C. Vamos analisar dois casos:

$1^{\underline{o}}$ caso: r crescente (Figura 15). Neste caso, $\alpha = C\hat{A}B$. Logo,

Figura 15: Coeficiente angular - Reta crescente.

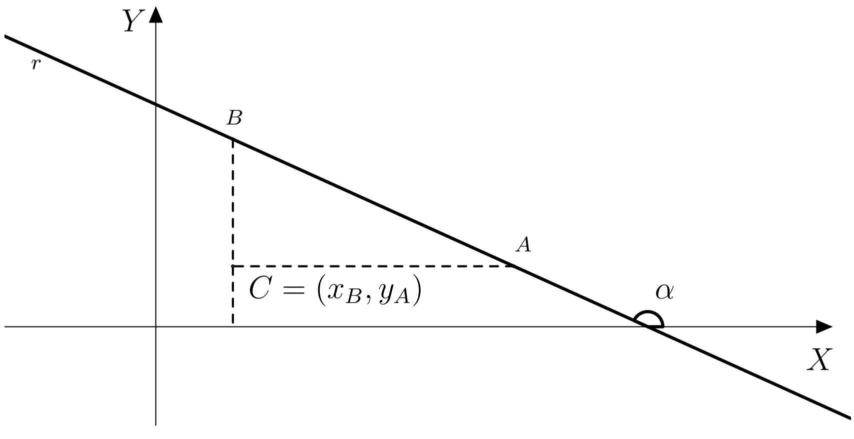


Fonte: a própria autora.

$$m = \tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$2^{\underline{o}}$ caso: r decrescente (Figura 16). Agora, $\alpha = \pi - C\hat{A}B$ radianos. Então,

Figura 16: Coeficiente angular - Reta decrescente.



Fonte: a própria autora.

$$m = \tan\alpha = \tan(\pi - C\hat{A}B) = -tan(C\hat{A}B) = -\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

Portanto,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Agora, no Teorema 2, vimos que a equação geral da reta é dada por

$$ax + by + c = 0,$$

em que $a = (y_A - y_B)$ e $b = (x_B - x_A)$. Logo,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = -\frac{a}{b}.$$

Conhecendo os coeficientes angulares de duas retas, é possível identificar se as retas são paralelas ou concorrentes. Caso sejam concorrentes, estaremos interessados em identificar se são perpendiculares.

Teorema 3. *Duas retas r e s não verticais são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.*

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Sejam r e s retas não verticais que formam ângulos $\alpha \in [0, \pi)$ e $\beta \in [0, \pi)$ com o eixo OX, respectivamente. Também, seja m o coeficiente angular da reta r, e m' o coeficiente angular da reta s.

Se r e s são paralelas, então $\alpha = \beta$ e, portanto, $m = m'$.

Se $m = m'$, então $\tan\alpha = \tan\beta$. Logo, $\alpha = \beta$ e, portanto, r e s são paralelas.

□

Teorema 4. *Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1.*

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

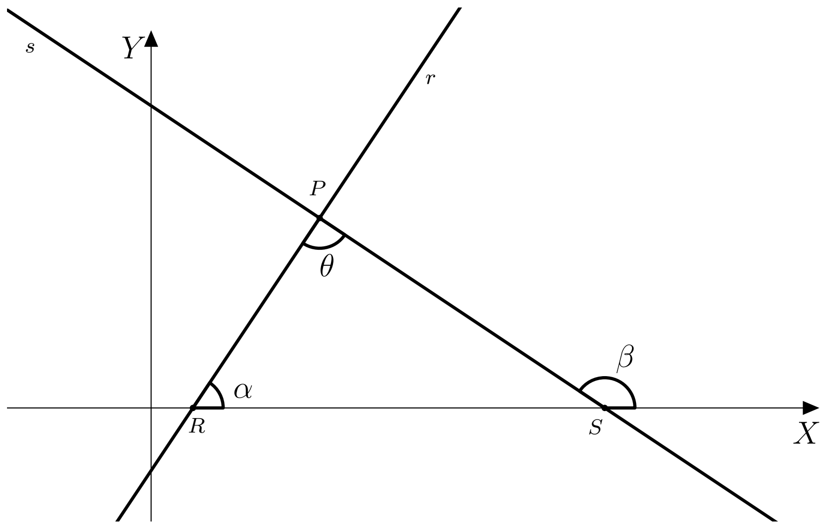
Sejam r e s retas não verticais, que formam ângulos α e β, respectivamente, com o eixo OX. Sejam $m_r = \tan\alpha$ e $m_s = \tan\beta$. Denotamos por $R = (x_r, 0)$ e $S = (x_s, 0)$ os pontos em que r e s intersectam o eixo OX, respectivamente. Sem perda de generalidade, suponhamos $x_r < x_s$. Seja P o ponto de interseção de r e s (Figura 17).

Suponhamos que r e s são perpendiculares. Então elas se intersectam em P formando um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Notemos que o triângulo RPS possui ângulos internos medindo $\alpha, \frac{\pi}{2}$ e $\pi - \beta$ radianos. Da geometria Euclidiana plana, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos. Então

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi - \beta = \pi$$
$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Figura 17: Representação de retas perpendiculares.



Fonte: a própria autora.

Agora, aplicando a tangente em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\tan\beta = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow^{8} \tan\beta = \cot(-\alpha) \Leftrightarrow \tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha} \Leftrightarrow \tan\beta \cdot \tan\alpha = -1$$

$$m_s \cdot m_r = -1.$$

Agora, suponhamos que $m_s \cdot m_r = -1$. Então

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

isto é, $m_s \neq m_r$. Logo, as retas são concorrentes em P e formam um ângulo θ entre si.

O triângulo RPS possui ângulos internos medindo α, θ e $\pi - \beta$ radianos. Então,

$$\alpha + \theta + \pi - \beta = \pi$$

$$\beta = \alpha + \theta \tag{2.9}$$

Agora,

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow \tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha} \Leftrightarrow \tan\beta = -\cot\alpha \Leftrightarrow \tan\beta = \tan(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{2.10}$$

[8] $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \cot(-\alpha)$

De 2.9 e de 2.10 temos que

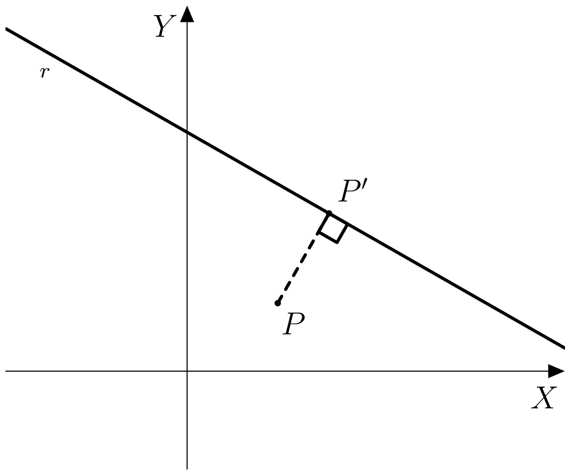
$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, r e s são perpendiculares. □

Definição 3. *A distância entre um ponto P e uma reta r, denotada por $d(P, r)$, é a distância de P ao ponto P', em que P' é o pé da perpendicular à reta r conduzida por P (Figura 18):*

$$d(P, r) = d(P, P').$$

Figura 18: Distância entre ponto e reta.



Fonte: a própria autora.

A partir dos resultados anteriores, deduziremos uma fórmula para calcular a distância entre ponto e reta.

Proposição 3. *A distância entre a origem O e a reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por*

$$d(O, r) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Seja r uma reta de equação geral

$$ax + by + c = 0 \tag{2.11}$$

Seja P o pé da perpendicular baixada de O sobre a reta r. Então, pelo Teorema 4, a equação geral da reta que passa por P e O é dada por

$$bx - ay = 0 \tag{2.12}$$

Queremos descobrir uma expressão para $d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De 2.11 e 2.12, obtemos

$$\begin{cases} (ax + by)^2 = (-c)^2 \\ (bx - ay)^2 = 0^2 \end{cases}$$

Somando as duas equações,

$$(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = c^2$$

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 = c^2$$

$$x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = c^2$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = c^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

$$(d(O,P))^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

$$d(O,P) = \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d(O,P) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Portanto,

$$d(O,r) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

Proposição 4. *A distância entre um ponto $P = (x_P, y_P)$ e a reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por*

$$d(O,r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Seja $ax + by + c = 0$ uma equação da reta r e $P = (x_P, y_P)$ um ponto fora da reta. Fazendo uma translação no sistema de coordenadas de modo que o ponto P seja a origem do novo sistema, a equação da reta r passa a ser

$$\begin{gathered} a(x + x_P) + b(y + y_P) + c = 0 \\ ax + ax_P + by + by_P + c = 0 \\ ax_P + by_P + (ax + by + c) = 0 \end{gathered}$$

Tomando $ax + by + c = c'$, pela Proposição 3, temos

$$d(P, r) = \frac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto,

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Exemplo 6. *Seja $P = (-1, 3)$ e $4x - 3y + 1 = 0$ uma equação da reta r. Então*

$$d(P, r) = \frac{|4(-1) + (-3)3 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

Logo, a distância entre P e r é $\dfrac{12}{5}$.

2.2.6 Área do triângulo

Proposição 5. *Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ os vértices de um triângulo. Então a área S do triângulo ABC é dada por*

$$S = \frac{D_{ABC}}{2},$$

em que $D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$

Demonstração. Baseada em Iezzi (2013):

Da geometria Euclidiana plana, a área S de um triângulo é

$$S = \frac{base \cdot altura}{2}$$

em que base é a medida de um dos lados do triângulo e altura é a medida da altura do triângulo relativa a esse lado.

Seja $H = (x_H, y_H)$ o pé da perpendicular baixada de A sobre a reta r que contém o lado BC. Então,

$$S = \frac{d(B,C) \cdot d(A,H)}{2}$$

Notemos que $d(A,H) = d(A,r)$. Agora,

$$d(B,C) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2},$$

e, para calcular $d(A,r)$, precisamos encontrar a equação da reta r, dada por

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y_B - y_C) + y(x_C - x_B) + (x_B y_C - y_B x_C) = 0.$$

Daí que, pela Proposição 4,

$$d(A,r) = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - y_B x_C|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} = \frac{\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}$$

$$d(A,r) = \frac{|D_{ABC}|}{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}} = d(A,H)$$

Portanto,

$$S = \frac{d(B,C)\cdot d(A,H)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}\frac{|D_{ABC}|}{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}$$

$$S = \frac{|D_{ABC}|}{2}.$$

$\square$

Capítulo 3

Metodologia

Esta proposta metodológica foi desenvolvida com estudantes da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Interativa da rede privada da cidade de Foz do Iguaçu. Foram trabalhados conteúdos de Geometria Analítica como Distância entre dois pontos; Equação da Circunferência; Colinearidade e Área de Triângulos, com o auxílio de planilhas eletrônicas.

A avaliação dos benefícios da inserção da tecnologia no desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica foi realizada por meio de comparativo entre avaliação diagnóstica e avaliação pós aplicação da metodologia proposta (Apêndice A e Apêndice B, respectivamente). Foi aplicado um questionário (Apêndice C) para analisar se, na visão dos alunos, a metodologia utilizada auxiliou no aprendizado.

Devido às restrições causadas pela covid19, a aplicação da atividade ocorreu por meio de aula remota e os participantes utilizaram seus computadores pessoais.

Essa proposta metodológica fez parte do Projeto de Pesquisa Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas, com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética – "CAAE" N° 45415321.6.0000.0107.

3.1 Proposta de atividades

As atividades propostas foram desenvolvidas no Excel 2016. A pasta de trabalho do Excel é formada por colunas, denotadas por letra(s) do alfabeto, e por linhas, identificadas por números. A interseção de uma coluna com uma linha é chamada de célula. Cada célula possui uma coordenada formada pela letra(s) da coluna e o número da linha em que ela está posicionada. Por exemplo, a célula A1 está na coluna A e linha 1.

As fórmulas e funções foram inseridas nas células iniciando com o sinal de igual (=), seguido dos comandos desejados. Em cada atividade, foi apresentada uma explicação de como desenvolver, no Excel 2016, o tema abordado. Para detalhes técnicos, como abrir uma nova pasta de trabalho, salvar uma planilha, formatar células e outras funções do Excel, sugere-se o trabalho de Jesus (2018), que contém um tutorial básico de introdução ao Excel 2016.

Atividade 01 – Operações básicas

O primeiro encontro[9] foi iniciado com a apresentação da planilha eletrônica para os alunos. Em seguida, foram exemplificados algoritmos que executam operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e valor absoluto.

O objetivo não foi apenas utilizar um conjunto de fórmulas prontas para serem aplicadas, mas sim transpor o conhecimento algébrico desenvolvido ao longo do Ensino Básico para uma linguagem computacional e apresentar novos recursos dessa linguagem.

A) Adição

Na Figura 19, apresentam-se quatro formas de executar a operação de adição. Na primeira, a adição é feita inserindo os valores em uma única célula, separando-os pelo sinal de mais (+) (célula D1, Figura 19). Na segunda, os valores estão em células distintas e é utilizado o sinal de mais para adicioná-los fazendo referência as suas células (célula E1, Figura 19). Na terceira, implementa-se a função SOMA em um intervalo de células seguidas - pode ser usada para sequência de células em linha ou em coluna - (célula F1, Figura 19). Na quarta, a função SOMA adiciona as células individualmente, sem que estas precisem estar em sequência (célula G1, Figura 19).

No exemplo a seguir (Figura 19), as células D1, E1, F1 e G1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de adição. Mas a implementação foi feita nas células D2, E2, F2 e G2, onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 19: Adição no Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1				=2+3,5+(-1)	= A2 + B2 + C2	=SOMA(A2:C2)	=SOMA(A2;B2;C2)
2	2	3,5	-1	4,5	4,5	4,5	4,5

Fonte: a própria autora.

B) Subtração

Na Figura 20, apresentam-se três formas de calcular a subtração de dois ou mais números. Uma opção é inserir os valores em uma única célula, separando-os pelo sinal

[9] Cada encontro teve uma hora e meia de duração.

de menos (-) (célula D1, Figura 20). A subtração não tem uma função própria, diferente da operação de adição que pode ser executada com a função SOMA. Uma alternativa é usar a função SOMA e inserir o sinal de menos antes da referência da célula que será subtraída (célula E1, Figura 20), ou antes da função SOMA (célula F1, Figura 20).

No exemplo a seguir (Figura 20), as células D1, E1 e F1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de subtração. Mas a implementação foi feita nas células D2, E2 e F2, onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 20: Subtração no Excel.

	A	B	C	D	E	F
1				= 2 - 3,5 - (-1)	=SOMA(A2;-B2;-C2)	= A2 - SOMA(B2:C2)
2	2	3,5	-1	-0,5	-0,5	-0,5

Fonte: a própria autora.

C) Multiplicação

Na Figura 21, apresentam-se quatro formas de executar a operação de multiplicação. Semelhante à operação de adição, a multiplicação pode ser executada escrevendo todos os valores em uma única célula, separando-os pelo símbolo asterisco (*) (célula D1, Figura 21); os valores podem ser escritos em diferentes células e a operação ser feita referenciando estas células (célula E1, Figura 21); pode-se utilizar a função MULT, fazendo referência as células individualmente (célula F1, Figura 21), ou pode-se fazer referência a um intervalo de células seguidas (célula G1, Figura 21).

No exemplo a seguir (Figura 21), as células D1, E1, F1 e G1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de multiplicação. Mas a implementação foi feita nas células D2, E2, F2 e G2, onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 21: Multiplicação no Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1				=2*3,5*(-1)	=A2*B2*C2	=MULT(A2;B2;C2)	=MULT(A2:C2)
2	2	3,5	-1	-7	-7	-7	-7

Fonte: a própria autora.

D) Divisão

Na Figura 22, apresentam-se três formas de fazer a divisão de dois números. Uma alternativa é escrever os valores em uma única célula, separando-os pelo símbolo "/" (célula C1, Figura 22). Outra opção é os valores serem escritos em células distintas e a operação ser feita fazendo-se referência a essas células (célula D1, Figura 22). Também existe a função QUOCIENTE, mas essa retorna apenas a parte inteira da divisão (célula E1, Figura 22).

No exemplo a seguir (Figura 22), as células C1, D1 e E1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de divisão. Mas a implementação foi feita nas células C2, D2 e E2, onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 22: Divisão no Excel.

	A	B	C	D	E
1			=19/-2	=A2/B2	=QUOCIENTE(A2;B2)
2	19	-2	-9,5	-9,5	-9

Fonte: a própria autora.

E) Potenciação

Na Figura 23, apresentam-se quatro formas de calcular uma potência. Nas duas primeiras, usa-se o símbolo "ˆ" para indicar que o primeiro número será elevado ao segundo (células C1 e D1, Figura 23). Na terceira e na quarta, utiliza-se a função POTÊNCIA, escrevendo os valores da base e do expoente, nessa ordem, manualmente (célula E1, Figura 23) ou referenciando-se as células que os contém (célula F1, Figura 23).

No exemplo a seguir (Figura 23), as células C1, D1, E1 e F1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de divisão. Mas a implementação foi feita nas células C2, D2, E2 e F2 onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 23: Divisão no Excel.

	A	B	C	D	E	F
1			=7^3	=A2^B2	=POTÊNCIA(7;3)	=POTÊNCIA(A2;B2)
2	7	3	343	343	343	343

Fonte: a própria autora.

F) Radiciação

Para calcular uma raiz enésima no Excel, utiliza-se o fato de que a raiz pode ser definida por uma potência de expoente racional. Seja p um número real positivo, m um número inteiro e n um número natural, então

$$\sqrt[n]{p^m} = p^{\frac{m}{n}}$$

Na Figura 24, apresentam-se três formas de calcular uma raiz no Excel. Nas duas primeiras, utiliza-se a potenciação (células B1 e C1, Figura 24), e podem ser utilizadas para raiz de qualquer índice. Na terceira, insere-se a função RAIZ, que calcula apenas a raiz quadrada de um número (célula D1, Figura 24).

No exemplo a seguir (Figura 24), as células B1, C1, e D1 foram usadas apenas para descrever os códigos da operação de radiciação. Mas a implementação foi feita nas células B2, C2, e D2 onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 24: Raiz enésima no Excel.

	A	B	C	D
1		=81^(1/2)	=A2^(1/2)	=RAIZ(A2)
2	81	9	9	9

Fonte: a própria autora.

G) Valor absoluto

Na Figura 25, apresentam-se duas formas de calcular o valor absoluto. Em ambas, é utilizada a função ABS. Na primeira, insere-se o número diretamente na função (célula B1, Figura 25) e na segunda faz-se referência a uma célula para o qual se deseja o valor absoluto (célula C1, Figura 25).

No exemplo a seguir (Figura 25), as células B1 e C1 foram usadas apenas para descrever os códigos usados para calcular o valor absoluto, sendo que a implementação foi feita nas células B2 e C2, onde aparecem os resultados para cada operação.

Figura 25: Valor absoluto no Excel.

	A	B	C
1		=ABS(-7)	=ABS(A2)
2	-7	7	7

Fonte: a própria autora.

Em seguida, foi apresentado o conceito e o cálculo da distância entre dois pontos na reta real.

Após essa contextualização, os alunos puderam implementar, na planilha eletrônica, um algoritmo para calcular tal distância.

A Figura 26 exibe o código utilizado para calcular a distância entre o ponto P(-2) e Q(8). Na célula C1, Figura 26, está o algoritmo utilizado, mas o mesmo foi implementado na célula C2, onde aparece o resultado obtido.

Figura 26: Distância entre pontos da reta real no Excel.

	A	B	C
1	P	Q	=ABS(A2-B2)
2	-2	8	10

Fonte: a própria autora.

Os alunos testaram cada algoritmo criado com exemplos criados pela professora e por eles mesmos.

Atividade 02 – Distância entre pontos no plano

No segundo encontro, os alunos foram instruídos a representar dois pontos na planilha. A Figura 27, por exemplo, apresenta as coordenadas dos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (5, -3)$.

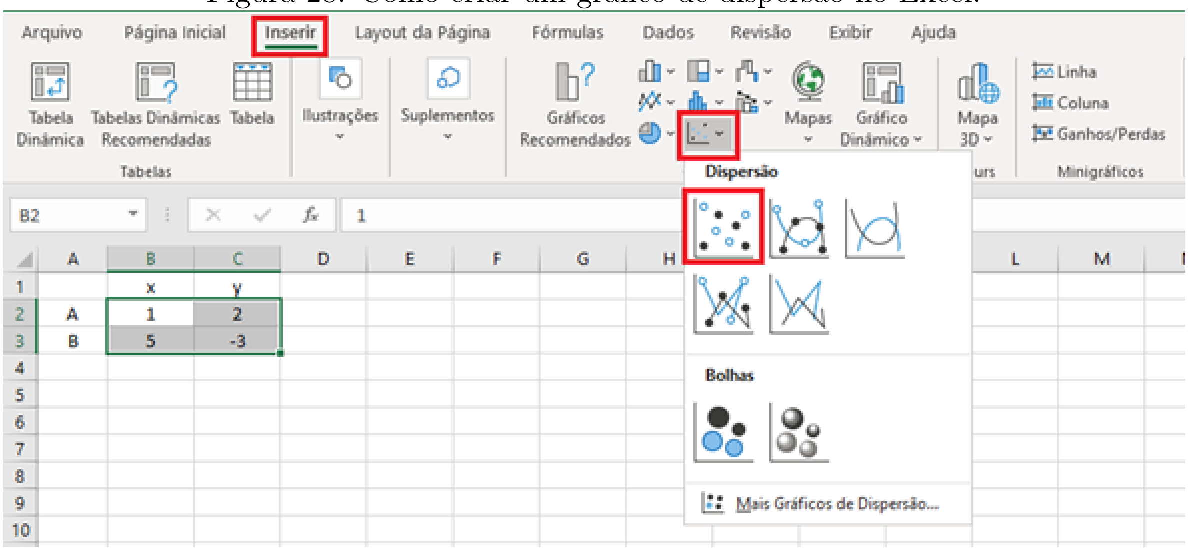
Figura 27: Exemplo para representação de coordenadas de pontos no Excel.

	A	B	C
1		x	y
2	A	1	2
3	B	5	-3

Fonte: a própria autora.

Em seguida, os estudantes foram orientados a criar um gráfico de dispersão para que tivessem a visão dos pontos no plano. Para criar o gráfico, deve-se selecionar as coordenadas dos pontos, clicar na guia "inserir" e, na parte de gráficos, clicar em "Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha" e em "Dispersão", conforme destaques em vermelho na Figura 28.

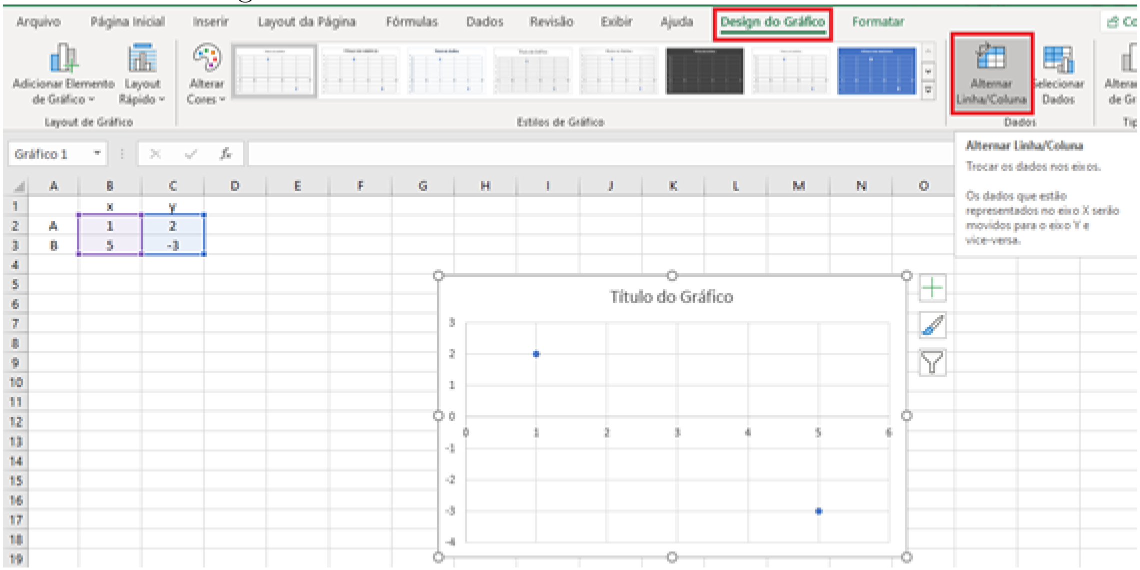
Figura 28: Como criar um gráfico de dispersão no Excel.



Fonte: a própria autora.

Caso o programa não identifique corretamente quais são os valores do eixo X e do eixo Y, deve-se selecionar o gráfico criado, clicar em "Design do gráfico" e, no campo de dados, clicar em "Alterar Linha/Coluna" até que os pontos fiquem posicionados corretamente, conforme Figura 29.

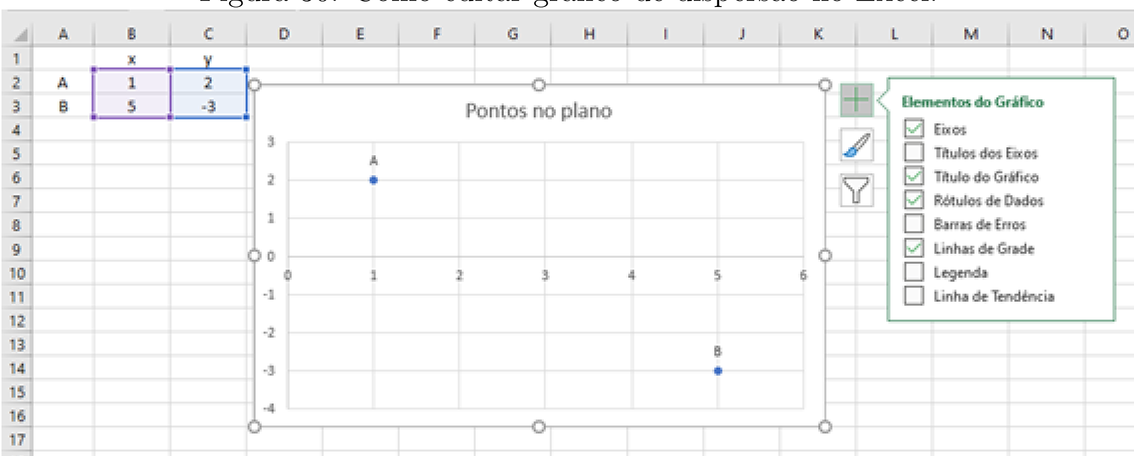
Figura 29: Como trocar os dados nos eixos no Excel.



Fonte: a própria autora.

Para facilitar a identificação dos pontos e melhorar a estética, pode-se escolher quais elementos farão parte do gráfico. Para isso, basta selecionar o gráfico, clicar no sinal de mais que aparece no lado direito do mesmo e selecionar os elementos desejados (Figura 30). Para modificar os textos do título, das legendas ou dos rótulos, basta clicar em cima da palavra desejada, apagá-la e escrever as informações desejadas.

Figura 30: Como editar gráfico de dispersão no Excel.



Fonte: a própria autora.

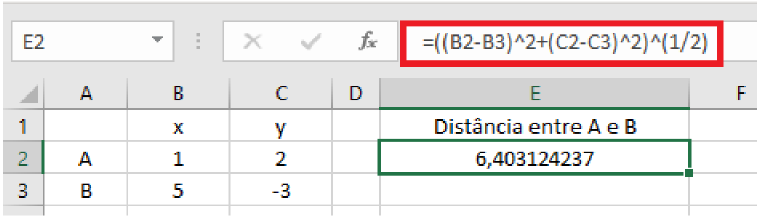
Logo após, foi revista a dedução, pelo teorema da Pitágoras, da fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos no plano (Proposição 2). Conhecendo a fórmula, os alunos implementaram um algoritmo para calcular tal distância. Por envolver mais de uma variável e operações matemáticas distintas, foi necessário que a professora auxiliasse os alunos na construção do algoritmo.

Por exemplo, sejam $A = (1, 2)$ e $B = (5, -3)$ pontos do plano. Então a distância entre A e B é

$$d_{(}A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{(16+25)} = \sqrt{41} \approx 6,403124237$$

A Figura 31 mostra o valor da distância entre os pontos A e B, calculado pelo Excel. Os comandos utilizados para calcular essa distância aparecem na "Barra de Fórmulas", que aparece em destaque, acima da coluna E, na Figura 31.

Figura 31: Cálculo da distância entre pontos do plano no Excel.


E2 | fx | =((B2-B3)^2+(C2-C3)^2)^(1/2)

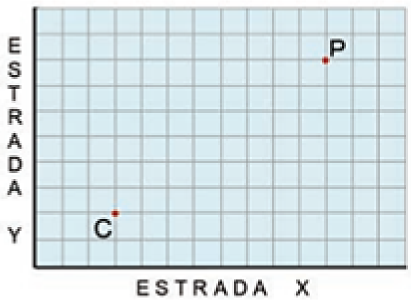
	A	B	C	D	E	F
1		x	y		Distância entre A e B	
2	A	1	2		6,403124237	
3	B	5	-3			

Fonte: a própria autora.

Depois, foi pedido para os alunos utilizarem o algoritmo criado para resolverem o Problema 1, encontrado em um livro escrito por Rubió e Gonçalves (2017) para o Ensino Médio.

Problema 1: A Figura 32 representa um mapa de localização, situado em uma região plana. O lado de cada quadradinho corresponde a uma distância de 30 metros. As estradas X e Y são retas e formam ângulo reto[10] . No ponto C está a casa de um joão-de-barro; no ponto P, há um pequeno poço de água. Qual é a distância mínima que o joão-de-barro deve voar para ir de sua casa até o poço?

Figura 32: Situação-problema - Problema 1.



Fonte: Rubió e Gonçalves (2017, p. 55).

O Problema 1 pode ser facilmente resolvido calculando a distância entre os pontos C e P, como mostrado a seguir. Para encontrar a resposta utilizando o algoritmo

[10] As retas são perpendiculares e representam as estradas X e Y.

implementado na planilha eletrônica, os estudantes deveriam posicionar os eixos coordenados na Figura 32 para poder identificar as coordenadas dos pontos citados. Foi sugerido que a origem dos eixos coordenados fosse posicionada em diferentes pontos da figura, para que verificassem que o resultado não se alterava.

Se o ponto C está sobre a origem, então $C = (0, 0)$ e $P = (240, 180)$. Logo

$$d_(C, P) = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2} = \sqrt{(0 - 240)^2 + (0 - 180)^2} = \sqrt{90000} = 300$$

Portanto, a distância mínima que o joão-de-barro deve voar para ir de sua casa até o poço é 300 metros. Observe que os cálculos poderiam ter sido feitos com $C = (0, 0)$ e $P = (8, 6)$, deixando para multiplicar por 30 (medida do lado de cada quadradinho) depois do cálculo da distância. Nesse caso, seria trabalhado o conceito de escala.

Atividade 03 – Circunferência

Em um terceiro encontro, foi deduzida a equação reduzida da circunferência a partir da fórmula da distância entre dois pontos e da definição de circunferência (Seção 2.2.2).

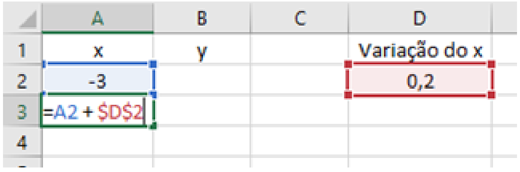
Escolhidos o centro e a medida do raio de uma circunferência, foi usada a equação reduzida para calcular, na planilha eletrônica, alguns pontos dessa circunferência e fazer seu esboço.

Supondo que a equação escolhida seja $x^2 + y^2 = 9$. Verifica-se que o centro é o ponto $C = (0, 0)$ e o raio mede 3. Logo, os valores de x podem variar de -3 a 3. Os valores de x foram escolhidos com mesmo espaçamento neste intervalo e, a partir dos valores de x, foram calculados os valores correspondentes de y.

No exemplo (Figura 33), o primeiro valor de x é o -3 (célula A2). Os valores seguintes foram calculados tomando o valor anterior acrescido de $0, 2$, até chegar em $x = 3$.

Note que na fórmula da célula A3, Figura 33, foi feita a adição do valor anterior, célula A2, com o valor de variação, célula D2. Agora, ao copiar a fórmula da célula A3 e colar na A4, por exemplo, a fórmula muda automaticamente, adicionando a célula anterior, agora a A3, com a variação expressa em D2. O símbolo $ garante que a coluna D e a linha 2 permaneçam fixas nesse processo.

Figura 33: Escolha dos valores de x.

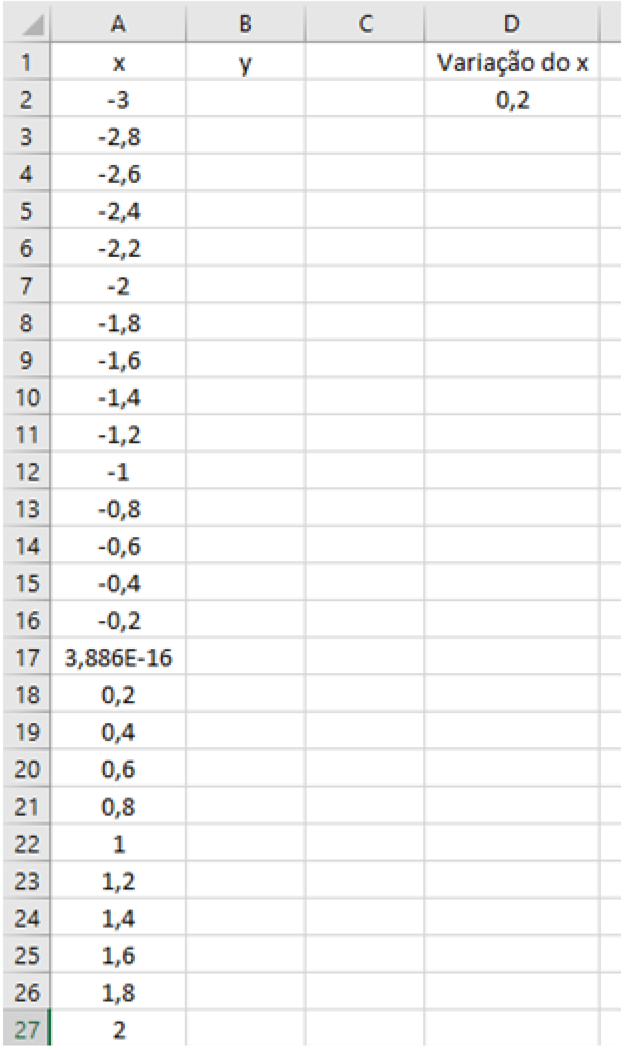


	A	B	C	D
1	x	y		Variação do x
2	-3			0,2
3	=A2 + D2			
4				

Fonte: a própria autora.

Os valores obtidos para x estão expostos na Figura 34.

Figura 34: Valores de x com variação de 0,2.



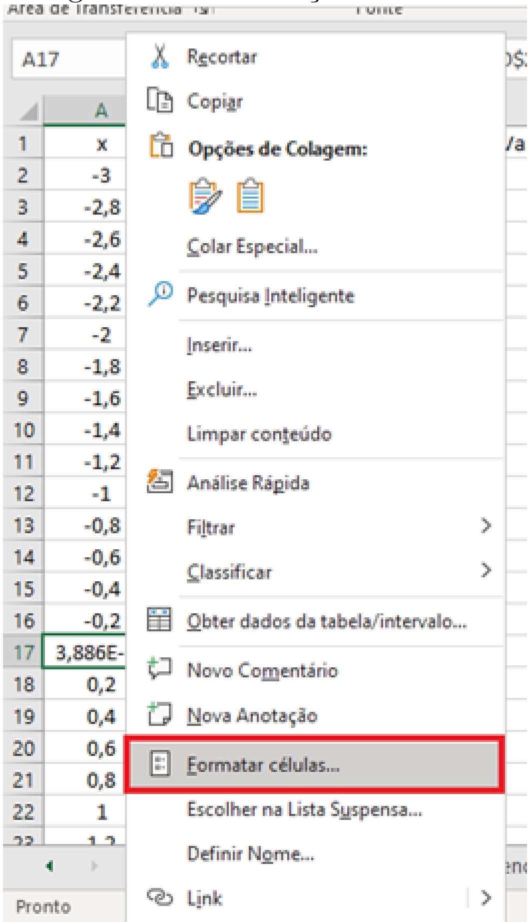
	A	B	C	D
1	x	y		Variação do x
2	-3			0,2
3	-2,8			
4	-2,6			
5	-2,4			
6	-2,2			
7	-2			
8	-1,8			
9	-1,6			
10	-1,4			
11	-1,2			
12	-1			
13	-0,8			
14	-0,6			
15	-0,4			
16	-0,2			
17	3,886E-16			
18	0,2			
19	0,4			
20	0,6			
21	0,8			
22	1			
23	1,2			
24	1,4			
25	1,6			
26	1,8			
27	2			

Fonte: a própria autora.

Observou-se que na célula A17 o valor calculado pelo programa é $3,886 \cdot 10^{-16}$, mas o resultado esperado era zero. Essa diferença pode ocorrer devido a quantidade de dígitos que o Excel armazena, ao erro computacional, ou mesmo erros de arredondamento.

Para solucionar esse problema, deve-se clicar em cima da célula com o botão direito do mouse e selecionar "Formatar células" (Figura 35).

Figura 35: Formatação de célula.



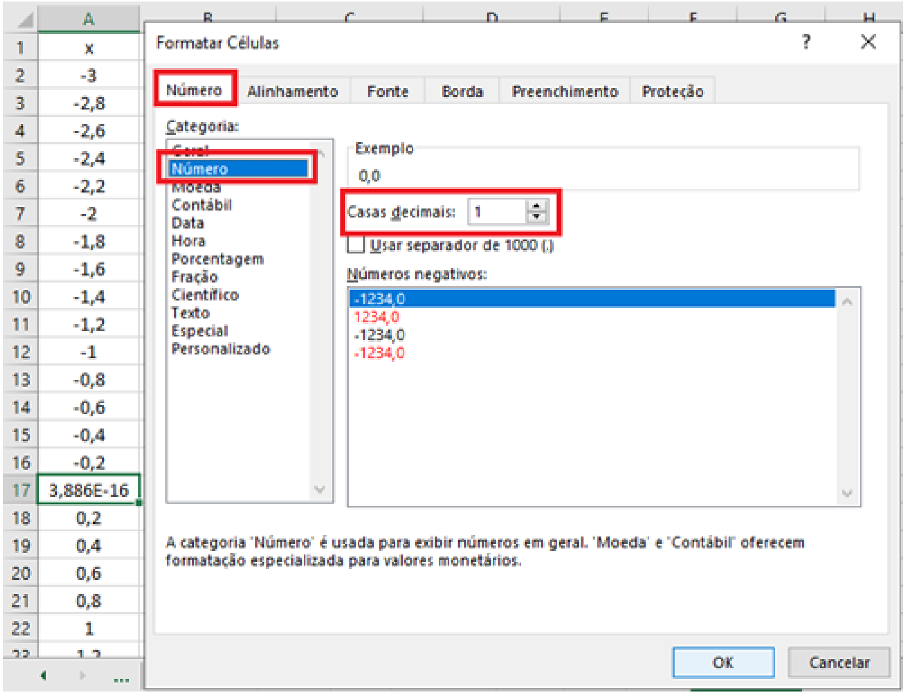
Fonte: a própria autora.

Na janela aberta, na guia Número, deve-se clicar na categoria “Número”, escolher a quantidade de casas decimais desejada e clicar no “ok” (Figura 36).

Para calcular os respectivos valores de y, foi utilizada a equação da circunferência. Note que para cada x escolhido, dois valores de y satisfazem a equação, por isso, foram aplicadas duas fórmulas para calcular os valores de y. Essas fórmulas estão indicadas nas células B1 e C1 da Figura 37. Na célula B2, da mesma figura, aparece o código utilizado para obter o valor positivo de y quando $x = -3$. Observe que o comando utilizado faz referência a célula que contém o valor de x, então basta copiar a célula B2 e colar nas células B3 até B32, pois o algoritmo referenciará automaticamente as células A3 até A32.

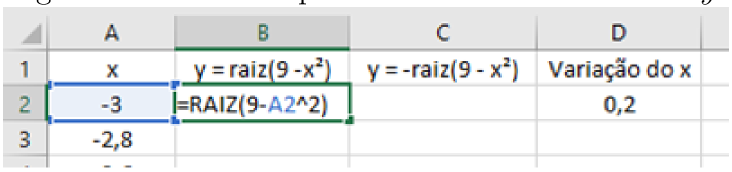
Para calcular o valor negativo de y na coluna C e linha n, usa-se o comando “=-RAIZ(9-An^2)” fazendo referência a coluna A e linha n, ou também “=-Bn” para referenciar a coluna B e linha n. Os pontos obtidos estão apresentados na Figura 38. As colunas A e B representam um conjunto de pontos da circunferência, bem como as colunas A e C. Por exemplo, A8 e B8 formam o ponto $(-1,8; 2,4)$ pertencente a circunferência.

Figura 36: Quantidade de casas decimais no Excel.



Fonte: a própria autora.

Figura 37: Fórmulas para o cálculo dos valores de y.



Fonte: a própria autora.

Devido aos mesmos problemas que ocorreram na célula A17, citados anteriormente, ocorreu um erro ao implementar as fórmulas "=RAIZ(9-A32ˆ2)" e "=-RAIZ(9-A32ˆ2)" nas células B32 e C32, pois o programa considerou uma aproximação negativa para o número zero (Figura 39). Para solucionar esse erro, foi recomendado acrescentar o comando de valor absoluto dentro da raiz, pois não existe, no conjunto dos números reais, raiz quadrada de número negativo.

Foi feito o esboço do gráfico utilizando o recurso gráfico de dispersão com linhas suaves. Para inserir o gráfico foi preciso clicar na guia "inserir", depois em "Inserir Gráfico de Dispersão (X, Y) ou de Bolha" e por fim em "Dispersão com Linhas Suaves e Marcadores". Esses itens estão em destaque na Figura 40.

Figura 38: Pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

	A	B	C	D
1	x	y = raiz(9 -x²)	y = -raiz(9 - x²)	Variação do x
2	-3	0	0	0,2
3	-2,8	1,077032961	-1,077032961	
4	-2,6	1,496662955	-1,496662955	
5	-2,4	1,8	-1,8	
6	-2,2	2,039607805	-2,039607805	
7	-2	2,236067977	-2,236067977	
8	-1,8	2,4	-2,4	
9	-1,6	2,537715508	-2,537715508	
10	-1,4	2,653299832	-2,653299832	
11	-1,2	2,749545417	-2,749545417	
12	-1	2,828427125	-2,828427125	
13	-0,8	2,891366459	-2,891366459	
14	-0,6	2,939387691	-2,939387691	
15	-0,4	2,973213749	-2,973213749	
16	-0,2	2,993325909	-2,993325909	
17	3,886E-16	3	-3	
18	0,2	2,993325909	-2,993325909	
19	0,4	2,973213749	-2,973213749	
20	0,6	2,939387691	-2,939387691	
21	0,8	2,891366459	-2,891366459	
22	1	2,828427125	-2,828427125	
23	1,2	2,749545417	-2,749545417	
24	1,4	2,653299832	-2,653299832	
25	1,6	2,537715508	-2,537715508	
26	1,8	2,4	-2,4	
27	2	2,236067977	-2,236067977	

Fonte: a própria autora.

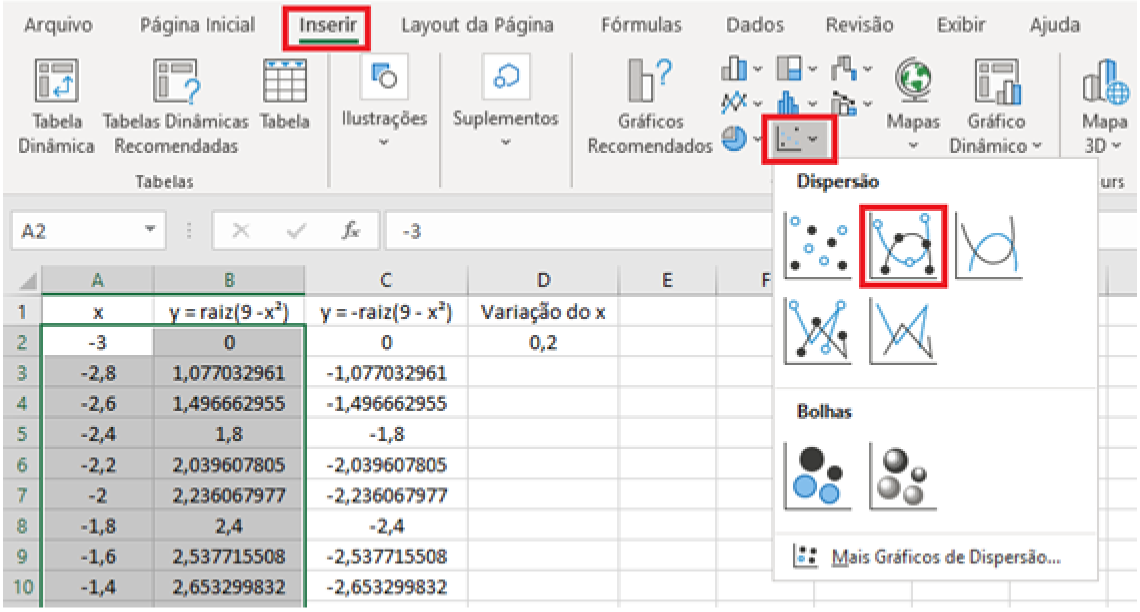
Figura 39: Erro de implementação de fórmula no Excel.

28	2,2	2,039607805	-2,039607805
29	2,4	1,8	-1,8
30	2,6	1,496662955	-1,496662955
31	2,8	1,077032961	-1,077032961
32	3	#NÚM!	#NÚM!

Fonte: a própria autora.

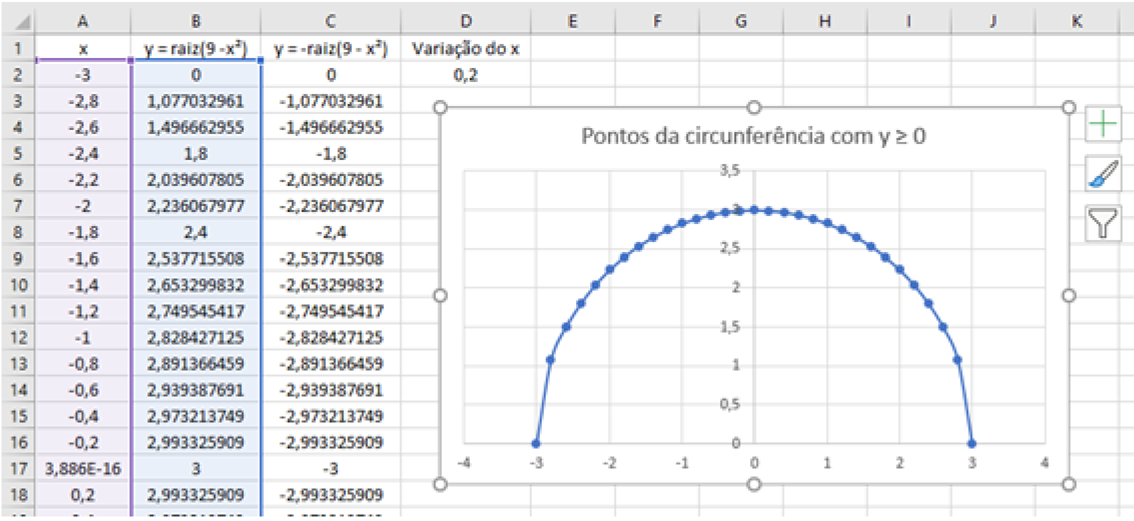
Esse processo foi repetido três vezes. Primeiro selecionando apenas os valores das colunas A e B (Figura 41). Depois, apenas as colunas A e C (Figura 42). Por último as três colunas (Figura 44). Assim, os alunos tiveram uma melhor compreensão da representação gráfica dos valores obtidos.

Figura 40: Como inserir gráfico de dispersão com linhas suaves no Excel.



Fonte: a própria autora.

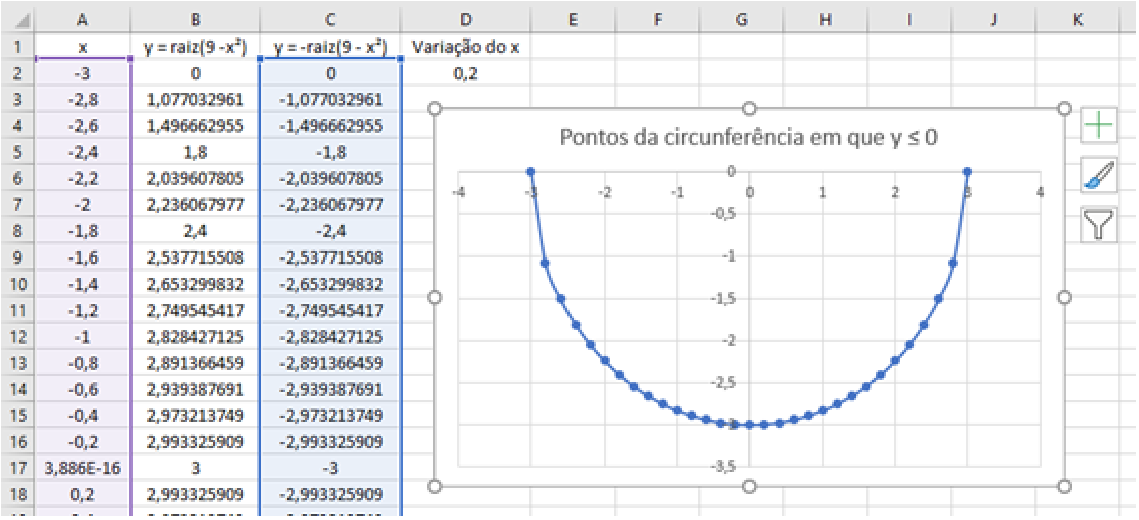
Figura 41: Como inserir gráfico de dispersão com linhas suaves no Excel.



Fonte: a própria autora.

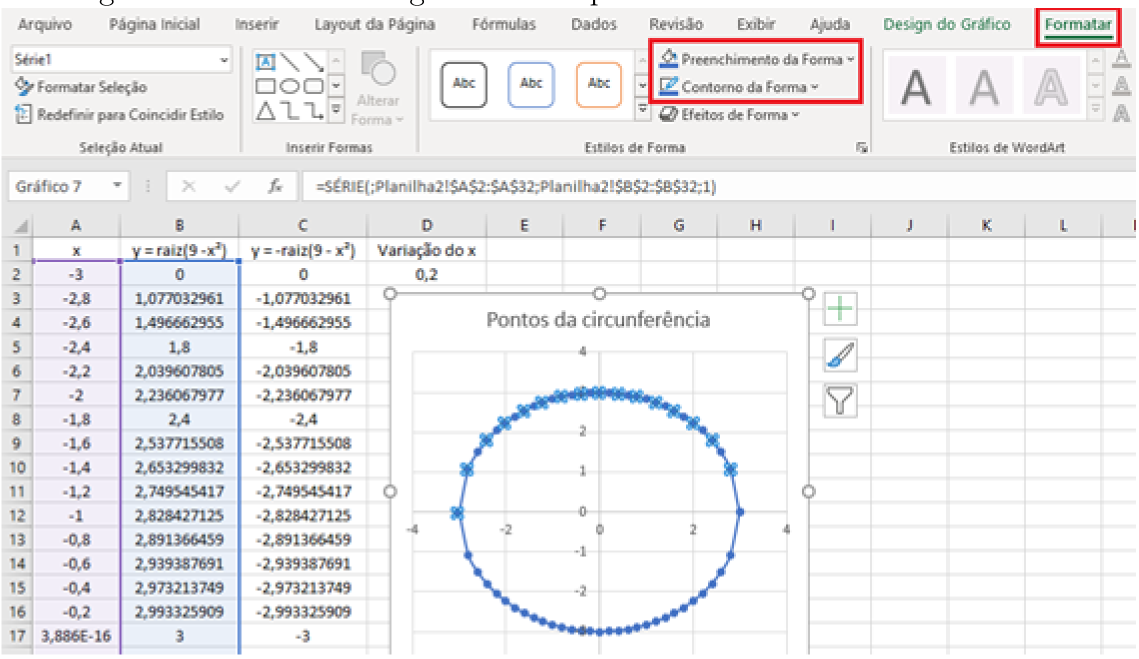
No último gráfico que foi criado, o programa trabalhou com duas sequências de pontos, por isso, a cor da parte superior pode ficar diferente da cor da parte inferior do gráfico. Para alterar as cores, basta clicar em um dos pontos de uma das sequências (os demais pontos dessa sequência serão selecionados automaticamente), clicar na guia “Formatar” e mudar as cores em “Preenchimento da Forma” e em “Contorno da Forma”, conforme destaques na Figura 43. Repetir o processo selecionando os pontos da outra sequência.

Figura 42: Como inserir gráfico de dispersão com linhas suaves no Excel.



Fonte: a própria autora.

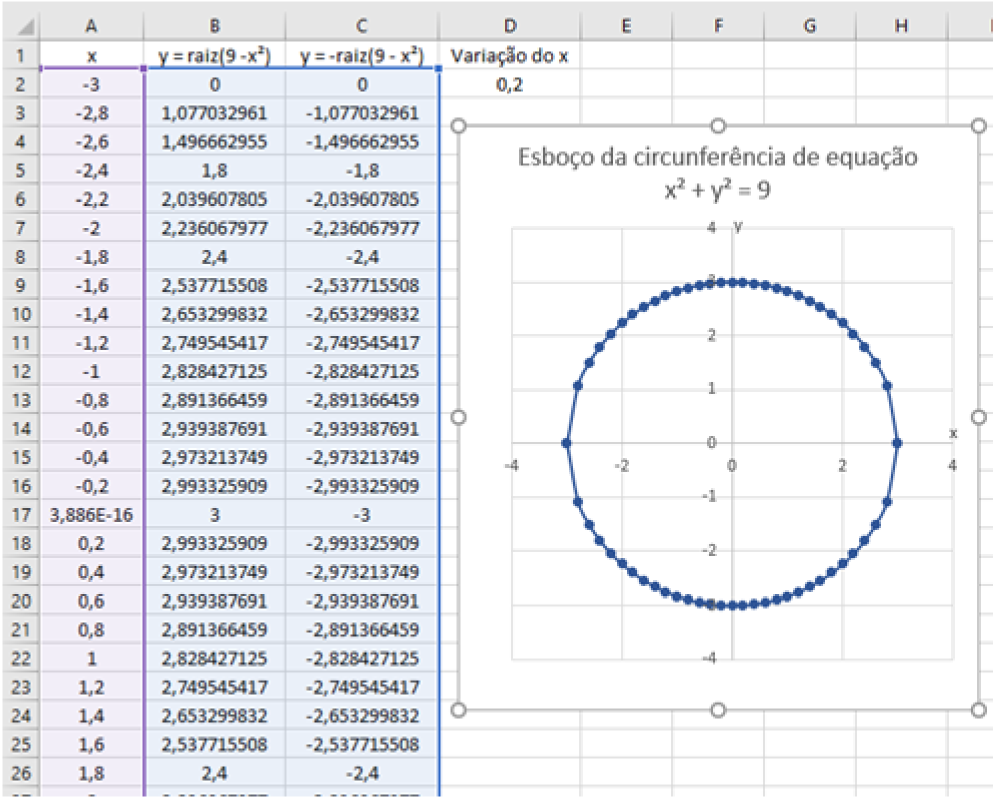
Figura 43: Como inserir gráfico de dispersão com linhas suaves no Excel.



Fonte: a própria autora.

A Figura 44 apresenta um esboço do gráfico após alguns ajustes nas dimensões e na formatação do título e das cores.

Figura 44: Como inserir gráfico de dispersão com linhas suaves no Excel.



	A	B	C	D
1	x	y = raiz(9 -x²)	y = -raiz(9 - x²)	Variação do x
2	-3	0	0	0,2
3	-2,8	1,077032961	-1,077032961	
4	-2,6	1,496662955	-1,496662955	
5	-2,4	1,8	-1,8	
6	-2,2	2,039607805	-2,039607805	
7	-2	2,236067977	-2,236067977	
8	-1,8	2,4	-2,4	
9	-1,6	2,537715508	-2,537715508	
10	-1,4	2,653299832	-2,653299832	
11	-1,2	2,749545417	-2,749545417	
12	-1	2,828427125	-2,828427125	
13	-0,8	2,891366459	-2,891366459	
14	-0,6	2,939387691	-2,939387691	
15	-0,4	2,973213749	-2,973213749	
16	-0,2	2,993325909	-2,993325909	
17	3,886E-16	3	-3	
18	0,2	2,993325909	-2,993325909	
19	0,4	2,973213749	-2,973213749	
20	0,6	2,939387691	-2,939387691	
21	0,8	2,891366459	-2,891366459	
22	1	2,828427125	-2,828427125	
23	1,2	2,749545417	-2,749545417	
24	1,4	2,653299832	-2,653299832	
25	1,6	2,537715508	-2,537715508	
26	1,8	2,4	-2,4	

Fonte: a própria autora.

Atividade 04 – posição entre ponto e circunferência

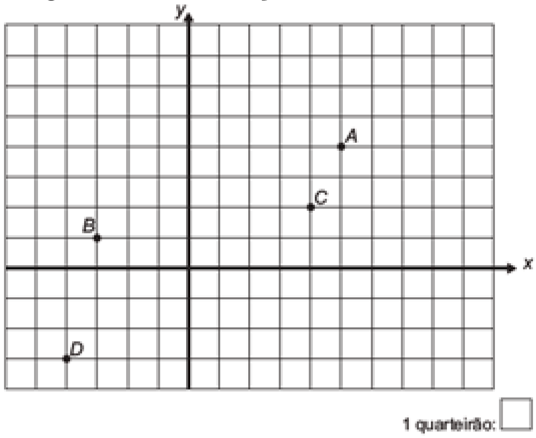
No quarto encontro, foi apresentada a dedução da equação geral da circunferência e, a partir dessa equação, foi mostrado como encontrar as coordenadas do centro e o valor do raio da circunferência. Foram também trabalhadas as possíveis posições de um ponto em relação a uma circunferência. Em seguida, aos alunos resolveram o Problema 2, utilizando os algoritmos e resultados estudados nas aulas anteriores.

Problema 2: (ENEM 2015) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir (Figura 45) há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.

Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2–2x–4y–31 \leq 0$.

Figura 45: Ilustração do Problema 2.



Fonte: INEP (2015, p. 25).

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

a) A e C.

b) B e C.

c) B e D.

d) A, B e C.

e) B, C e D.

Observou-se com os estudantes que $x^2 + y^2 – 2x – 4y – 31 = 0$ é a equação de uma circunferência e a inequação faz referência ao interior dessa circunferência. Apresentou-se como uma possível estratégia para resolução desse problema, a utilização do algoritmo que calcula a distância entre dois pontos para calcular a distância entre os pontos dados e o centro da circunferência. Se essa distância for menor que ou igual ao raio, o ponto está dentro da área de cobertura. A seguir, encontra-se essa resolução utilizando as fórmulas deduzidas no capítulo anterior (Seção 2.2.2).

O centro O da circunferência de equação $x^2 + y^2 – 2x – 4y – 31 = 0$ possui abcissa a e ordenada b, tais que

$$a = \frac{-(-2)}{2} = 1 \text{ e } b = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

Logo, $O = (1, 2)$. O raio r da circunferência é

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2 - (-31)} = 6$$

Sejam $A = (5,4), B = (-3,1), C = (4,2)$ e $D = (-4,-3)$ os pontos citados no enunciado. Então, as distâncias do centro até os pontos são

$$d_(O, A) = \sqrt{(1-5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} < 6$$

$$d_(O, B) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17} < 6$$

$$d_(O, C) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9} < 6$$

$$d_(O, D) = \sqrt{(1-(-4))^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{50} > 6$$

Portanto, como a distância entre o centro O e o ponto D é maior que o raio, o ponto D está no exterior da circunferência, ou seja, está fora da área de cobertura. O que não acontece com os demais pontos. Logo, a alternativa correta é d) A, B e C.

Outra forma de resolução apresentada foi substituir os pontos na equação da circunferência. Observou-se que

$$x^2 + y^2 – 2x – 4y – 31 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 - 36 = 0$$

Substituindo os pontos A, B, C e D, nessa ordem, na equação acima, têm-se

$(5-1)^2 + (4-2)^2 - 36 = 16 + 4 - 36 = -16 < 0$
$(-3-1)^2 + (1-2)^2 - 36 = 16 + 1 - 36 = -19 < 0$
$(4-1)^2 + (2-2)^2 - 36 = 9 - 36 = -27 < 0$
$(-4-1)^2 + (-3-2)^2 - 36 = 25 + 25 - 36 = 14 > 0$

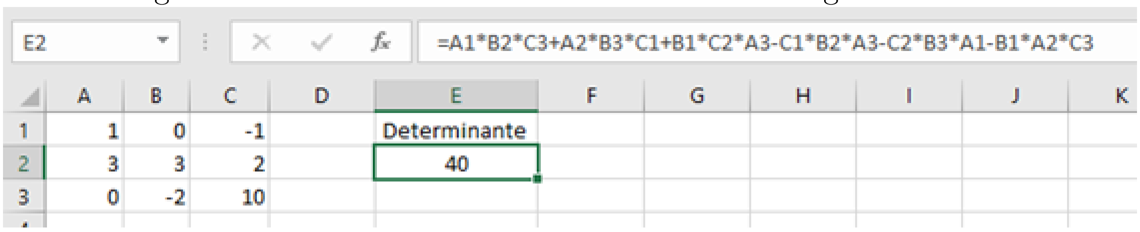
Portanto, como visto na Seção 2.2.3, A, B e C estão no interior da circunferência e D está no exterior.

Atividade 05 – área do triângulo

No quinto encontro foi apresentada a fórmula para calcular a área de um triângulo sendo conhecidas as coordenadas de seus vértices, por meio do cálculo de determinantes. Após essa introdução, os alunos criaram um algoritmo para calcular a área de um triângulo usando a planilha eletrônica.

Uma alternativa para calcular o determinante no Excel é posicionar cada elemento da matriz em uma célula diferente e criar um código para que o cálculo seja feito referenciando estas células. A Figura 46 apresenta o cálculo do determinante da matriz A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ pela regra de Sarrus. O código utilizado aparece na "Barra de Fórmulas".

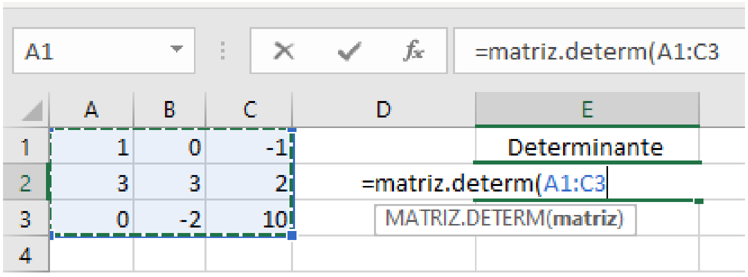
Figura 46: Determinante de ordem 3 no Excel - Regra de Sarrus.



Fonte: a própria autora.

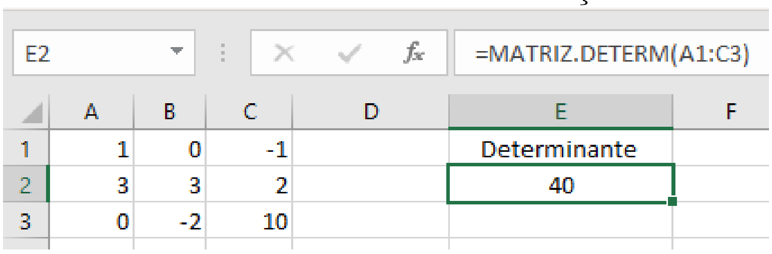
Outra forma de se calcular determinante de uma matriz quadrada no Excel 2016 é utilizar a função MATRIZ.DETERM. Para isso, conforme Figura 47, deve-se digitar "=MATRIZ.DETERM(", selecionar as células que contém os elementos da matriz e clicar "Enter". A Figura 48 apresenta o valor do determinante da matriz A calculado usando a função MATRIZ.DETERM.

Figura 47: Função para cálculo do determinante – MATRIZ.DETERM.



Fonte: a própria autora.

Figura 48: Determinante de ordem 3 no Excel – Função MATRIZ.DETERM.

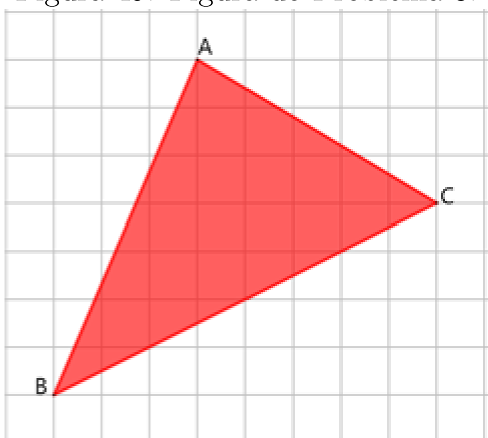


Fonte: a própria autora.

Para utilizar o algoritmo criado, os alunos resolveram os Problemas 3 e 4, ambos adaptados do livro de Rubió e Gonçalves (2017).

Problema 3: Na malha quadriculada da Figura 49, o lado de cada quadradinho mede uma unidade. Os vértices do triângulo ABC são interseções de linhas da malha.

Figura 49: Figura do Problema 3.



Fonte: Rubió e Gonçalves (2017, p. 63).

Qual a área do triângulo ABC?

Para resolver esse problema utilizando determinantes, os estudantes associaram um sistema de coordenadas cartesianas à figura, escolhendo a posição dos eixos. Como no Problema 1, foi recomendado que os alunos posicionassem os eixos em lugares distintos da malha.

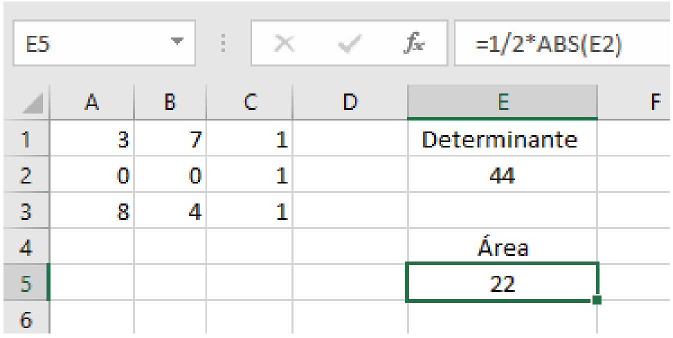
Supondo-se que a origem do sistema de coordenadas foi colocada sobre o ponto B e que os eixos sejam paralelos às linhas horizontais e verticais da malha, temos $A = (3, 7), B = (0, 0)$ e $C = (8, 4)$.

De acordo com a fórmula vista no capítulo anterior, a área S do triângulo, em unidades de área, é

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 44 = 22$$

No Excel, pode-se utilizar um dos algoritmos criados anteriormente para resolver o determinante, e criar um código para calcular a metade do valor absoluto do valor do determinante, como feito na célula E5 da Figura 50.

Figura 50: Como calcular área do triângulo no Excel.

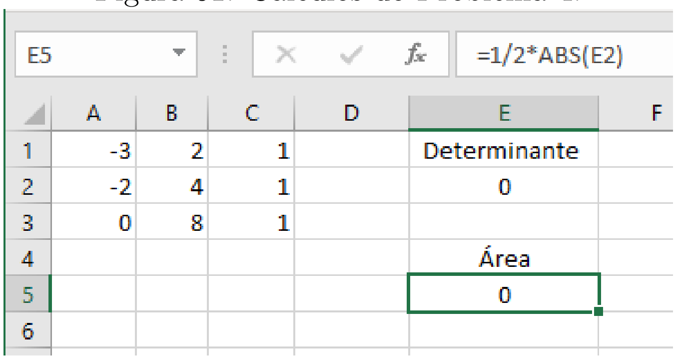


Fonte: a própria autora.

Problema 4: É possível formar um triângulo com os pontos $A = (-3, 2)$, $B = (-2, 4)$ e $C = (0, 8)$? Se sim, qual o valor de sua área? Se não, o que podemos concluir sobre esses pontos?

Supondo-se que A, B e C formam um triângulo, então esse triângulo possui uma área e a área desse triângulo foi calculada utilizando o algoritmo usado no problema anterior (Figura 51).

Figura 51: Cálculos do Problema 4.

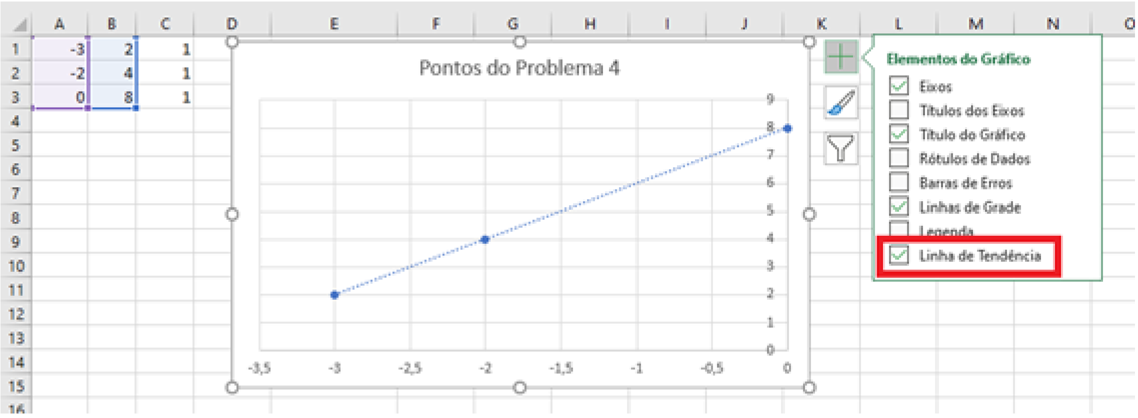


Fonte: a própria autora.

Observou-se então que a área deu zero, logo os pontos não formam um triângulo e, portanto, estão alinhados.

Esse resultado pode ser visualizado criando um gráfico de dispersão e, na parte de "Elementos do Gráfico", selecionando a opção "Linha de Tendência" (Figura 52).

Figura 52: Adicionar linha de tendência no Excel.



Fonte: a própria autora.

Vale ressaltar que, em cada encontro, foram relembrados os tópicos desenvolvidos na aula anterior antes de iniciar um novo tópico. Também, outros recursos das planilhas foram utilizados nas atividades, como formatações para melhorar a visualização, e atalhos para simplificar alguns comandos.

Capítulo 4

Resultados e Discussão

4.1 Relato de experiência

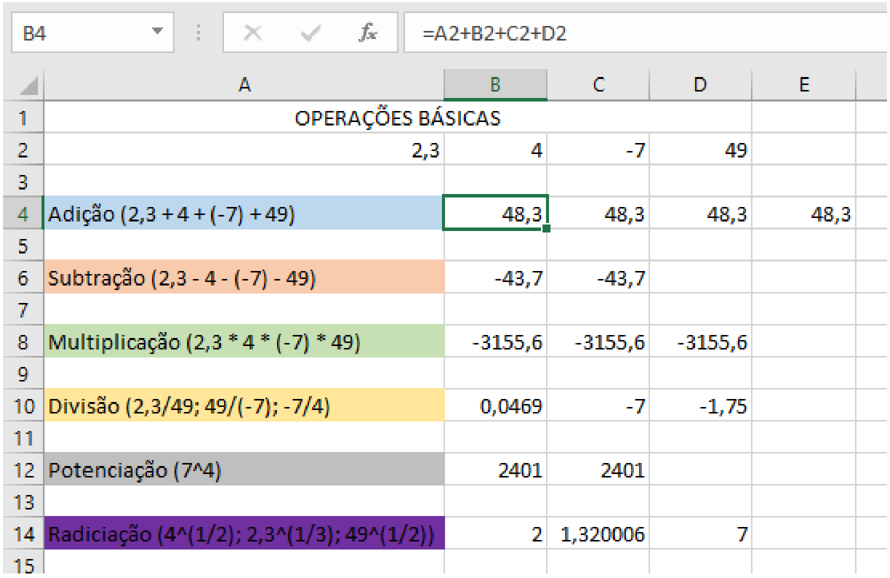
Uma semana antes do desenvolvimento da metodologia proposta, foi realizada uma avaliação diagnóstica, de forma remota, para identificar as possíveis dúvidas dos alunos em relação aos tópicos de Geometria Analítica que seriam trabalhados durante as aulas.

As atividades foram aplicadas em cinco encontros remotos de uma hora e meia cada, ocorridos nas segundas-feiras, no contraturno. No primeiro encontro havia 11 alunos, mas este número foi diminuindo até que no quinto e último encontro haviam apenas quatro. Porém, cinco alunos participaram da maioria das aulas e realizaram a avaliação e o questionário disponibilizados pós aplicação da metodologia.

No primeiro encontro foi feita uma breve apresentação do Excel e foram repassadas instruções de formas de programar algumas operações básicas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (Figura 53). Os participantes se mostraram entusiasmados e participativos, dando sugestões de exemplos e de formatação das células. Alguns estavam com a câmera ligada e usavam o microfone para se comunicar, o que tornou a aula mais dinâmica.

Nesse primeiro encontro não houve muitas dúvidas e os alunos afirmaram ter conseguido acompanhar os exemplos e reproduzi-los em seus computadores. Um fato curioso ocorrido durante a aula é que a versão utilizada por um dos estudantes reconhecia alguns comandos em português e outros apenas em inglês. Por exemplo, ao inserirmos a função POTÊNCIA, a versão utilizada por ele não reconhecia o comando e indicava que havia um erro. Foi sugerido que ele utilizasse a palavra POWER (que significa potência em inglês), e o comando foi reconhecido. As demais funções foram reconhecidas pelo programa mesmo estando escritas em português.

Figura 53: Operações básicas desenvolvidas na primeira aula.



B4 =A2+B2+C2+D2

	A	B	C	D	E
1	OPERAÇÕES BÁSICAS				
2	2,3	4	-7	49	
3					
4	Adição (2,3 + 4 + (-7) + 49)	48,3	48,3	48,3	48,3
5					
6	Subtração (2,3 - 4 - (-7) - 49)	-43,7	-43,7		
7					
8	Multiplicação (2,3 * 4 * (-7) * 49)	-3155,6	-3155,6	-3155,6	
9					
10	Divisão (2,3/49; 49/(-7); -7/4)	0,0469	-7	-1,75	
11					
12	Potenciação (7^4)	2401	2401		
13					
14	Radiciação (4^(1/2); 2,3^(1/3); 49^(1/2))	2	1,320006	7	
15					

Fonte: a própria autora.

No segundo encontro, foram trabalhados o comando de valor absoluto e a distância entre pontos na reta e no plano. O conceito de distância e as fórmulas que poderiam ser utilizadas foram apresentados aos estudantes com o auxílio do aplicativo de escrita Inkodo e de uma mesa digitalizadora. Nessa aula e nas aulas seguintes, os alunos não ligaram as câmeras e estavam menos participativos, usando o chat para responder as perguntas, o que tornou as aulas menos dinâmicas.

Um dos participantes estava utilizando a versão online do Excel e teve dificuldades em trabalhar com os gráficos criados, pois esta apresenta algumas limitações e não permite algumas formatações. Os demais afirmaram que conseguiram inserir e editar os gráficos conforme foram orientados.

No terceiro encontro, foi retomado o conteúdo trabalhado na aula anterior para depois ser apresentado o Problema 1. Os alunos tiveram um tempo para resolver o problema e revelar o resultado obtido. A maioria deles afirmou que a distância entre os pontos do problema era 10, ou seja, não consideraram a informação que cada quadradinho do desenho (quadrado que representava a unidade) correspondia a 30 metros de comprimento. Após serem instruídos a considerar a escala os estudantes conseguiram chegar ao resultado correto.

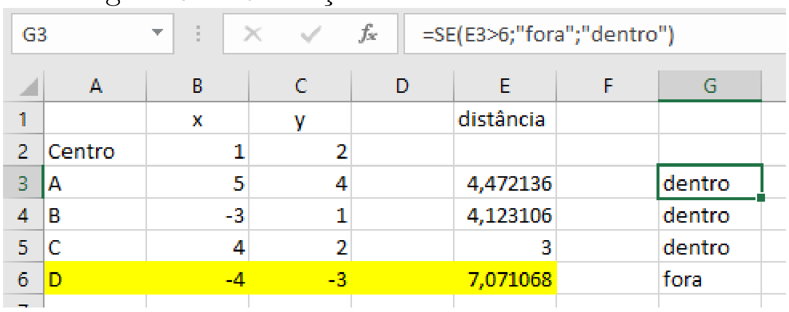
Os participantes foram questionados sobre quais coordenadas utilizaram para calcular a distância entre os pontos do Problema 1. Dois deles afirmaram que consideraram o encontro das ruas como sendo a origem do plano cartesiano, os demais não responderam. Eles foram então orientados a considerar um outro ponto como sendo a origem e refazer os cálculos para que pudessem comprovar que o resultado não se alterava.

Nessa aula também foi relembrada a definição de circunferência e a forma de sua equação reduzida. Em seguida foi implementada uma função no Excel para o cálculo de alguns pontos de uma circunferência dada sua equação. Um participante relatou não estar conseguindo obter os mesmos resultados e não conseguia encontrar o erro. Foi pedido para que ele projetasse sua tela para que a professora e demais participantes pudessem observar o que foi feito e encontrar o possível erro. O equívoco foi que o aluno escreveu os comandos exatamente como foi apresentado, sem se atentar que o exemplo dele estava digitado em células diferentes e por isso deveria adaptar as coordenadas das células para que o algoritmo funcionasse.

No quarto encontro foi construído o gráfico de uma circunferência e resolvido o Problema 2. Foi apresentado novamente o enunciado do problema e disponibilizado um tempo para que os alunos encontrassem a resposta pedida. Depois de muita insistência, alguns compartilharam, através do chat, a resposta obtida. Porém, mesmo sendo sugerido que, quem não conseguiu resolver, apenas "chutasse" uma das alternativas, alguns alunos não responderam.

Para corrigir o problema, foram relembradas as condições, envolvendo distância entre pontos, para se determinar se um ponto está no interior, no exterior ou se pertence à circunferência (Figura 54). Também foi citado que, ao substituir as coordenadas dos pontos na inequação dada, seria possível chegar à mesma conclusão. Por fim, foi sugerido que os estudantes fizessem, no Excel, o esboço da circunferência citada no problema e mostrassem o resultado na próxima aula.

Figura 54: Resolução do Problema 2 no Excel.



G3 =SE(E3>6;"fora";"dentro")

	A	B	C	D	E	F	G
1		x	y		distância		
2	Centro	1	2				
3	A	5	4		4,472136		dentro
4	B	-3	1		4,123106		dentro
5	C	4	2		3		dentro
6	D	-4	-3		7,071068		fora

Fonte: a própria autora.

No último encontro foi mostrado como calcular um determinante com o auxílio do Excel e foram resolvidos os Problemas 3 e 4. Após criar a função do determinante, os alunos puderam tentar resolver os problemas propostos, que foram corrigidos posteriormente. Alguns participantes compartilharam os resultados obtidos e a forma de resolução utilizada. Sem relatar problemas ou dúvidas, todos disseram que conseguiram encontrar a resposta correta.

Para finalizar a aula, os estudantes foram questionados sobre o exercício proposto na aula anterior, mas nenhum aluno havia feito. Um deles relatou que não fez porque esqueceu e os outros não deram qualquer explicação. Então, o esboço foi feito pela professora. Nesse momento um aluno relatou ser mais prático fazer o esboço a mão, pois o processo de calcular os pontos da circunferência e selecioná-los para criar o gráfico seria trabalhoso.

Todas as atividades propostas no capítulo anterior foram desenvolvidas durante os cinco encontros. Os alunos afirmaram que conseguiram acompanhar e aplicar as funções no Excel, porém o fato de ser remoto limitou o acesso da professora aos trabalhos desenvolvidos pelos educandos, isso gerou incertezas quanto ao real aproveitamento por parte deles.

Em alguns momentos, os estudantes eram questionados e não respondiam. Este fato não deixa claro se eles não entenderam a pergunta, se não conseguiram encontrar a resposta ou se não estavam prestando atenção. Caso as aulas tivessem sido presenciais, a professora teria um melhor domínio de turma para identificar onde estava a dificuldade.

O uso do Excel contribuiu para o desenvolvimento dos conceitos, por agilizar os cálculos e por exigir que os alunos estudassem as fórmulas para conseguir implementa-las. Um exemplo dessa contribuição foi obtido com a resolução do Problema 1, em que o encontro dos eixos coordenados foi posicionado em diferentes pontos. Seria inviável desenvolver todos os cálculos manualmente, pois o foco não eram as contas, mas sim o entendimento do conceito.

Após a conclusão da aplicação das atividades, os alunos fizeram uma segunda avaliação para que fosse avaliado se houve alguma evolução em relação aos conhecimentos de Geometria Analítica. Os resultados obtidos foram apresentados a seguir.

4.2 Avaliação diagnóstica

Nessa seção, a avaliação dos benefícios da inserção da tecnologia no desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica foi realizada por meio de comparativo entre avaliação diagnóstica antes e pós aplicação da metodologia proposta (Apêndice A e Apêndice B, respectivamente).

As avaliações foram aplicadas de forma remota, também no contraturno, utilizando uma plataforma disponibilizada pelo colégio para a realização de atividades online. Nessa plataforma os alunos visualizam o enunciado das questões e podem digitar as respostas ou inserir, como anexo, uma imagem, um PDF ou um documento com sua resolução.

4.2.1 Primeira avaliação

Na avaliação realizada antes da aplicação das atividades, 12 alunos responderam as questões sendo que nem todos participaram da aplicação das atividades e fizeram a segunda avaliação (após a aplicação das atividades). Assim, foram citados neste texto apenas aqueles que participaram de todas as etapas desenvolvidas.

Na primeira questão da avaliação diagnóstica, o Aluno 1 (A-1) identificou corretamente o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo; utilizou a fórmula correta para calcular a distância entre os pontos e assim obter o perímetro do paralelogramo, mas errou alguns cálculos no processo e, por isso, não obteve a resposta correta. O mesmo ainda calculou corretamente a área pedida e concluiu a colinearidade dos pontos com base na observação da figura (o que não é uma forma precisa de resolução). A-1 não conseguiu responder a questão 2.

Ao observar a resolução enviada pelo Aluno 2 (A-2), percebeu-se que os conceitos estudados não estavam claros, pois o mesmo utilizou fórmulas incorretas e não soube interpretar e criar um raciocínio adequado que o levasse a resolução correta das questões. Além disso, a falta de organização e a imagem desfocada impossibilitaram uma correção mais minuciosa.

A-2 fez o cálculo do coeficiente angular de algumas retas, bem como suas equações gerais, mas esses resultados não foram utilizados para responder nenhuma questão. O que indicou que o aluno não sabia o que ou como fazer as resoluções e por isso foi passando para o papel o conteúdo que lembrava no momento, mesmo sem ter relação com o pedido.

O mesmo também utilizou o teorema de Pitágoras para calcular a medida do terceiro lado do triângulo, considerando erroneamente que os pontos do paralelogramo formavam um triângulo retângulo. Essa medida foi considerada como sendo a resposta da questão que pedia a área do quadrilátero.

Na questão 2, A-2 fez alguns cálculos aleatórios utilizando a fórmula da distância entre dois pontos e a fórmula resolutiva de uma equação quadrática (conhecida como Fórmula de Bhaskara), mas não chegou a nenhuma conclusão. Um fato que chamou a atenção, é que, no item c, A-2 escreveu a equação de uma circunferência, o que pode indicar que ele conhecia o formato da mesma, mas não soube criá-la corretamente seguindo os dados do exercício.

Nas resoluções da questão 1 enviadas pelo Aluno 3 (A-3) para responder o item a, A-3 fez um desenho, provavelmente utilizando uma régua graduada, e marcou o ponto de encontro das diagonais, mas não especificou as coordenadas do mesmo. Percebeu-se que A-3 entendeu a pergunta e conseguiu criar uma estratégia de resolução, mas não a utilizou de forma eficiente para chegar a resposta correta.

O mesmo não pode ser observado na resolução do item b, pois o aluno somou a abscissa e a ordenada dos pontos dados e considerou essas somas como sendo as medidas dos lados do paralelogramo.

No item c, como sugerido, o A-3 dividiu a figura em dois triângulos. Para calcular suas áreas, utilizou a fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

em que b é a medida da base e h é a medida da altura relativa a essa base. Porém, considerou que as medidas da base e da altura eram as medidas obtidas no item anterior, o que não está correto pois os triângulos não são retângulos. A-3 não apresentou resolução do item d.

Com relação a segunda questão, A-3 interpretou corretamente o enunciado, conseguindo responder o item a, mas não soube responder os itens b e c.

O Aluno 4 (A-4) foi o único que respondeu todos os itens das duas questões propostas. Na questão 1, registrou o ponto (0,8; 0,5) como sendo o ponto de encontro das diagonais, mas não justificou esses valores, por isso não foi possível identificar o porquê de o valor da abscissa desse ponto estar incorreto. Calculou corretamente o perímetro e a área do paralelogramo, mas fez uma interpretação incorreta do ponto apresentado no item d.

Na segunda questão, o A-4 interpretou corretamente o enunciado, soube construir a equação da circunferência, mas não justificou as respostas apresentadas.

O Aluno 5 (A-5) não apresentou as resoluções, mas respondeu alguns itens corretamente. A-5 citou que utilizou o software GeoGebra como auxilio para realizar a avaliação.

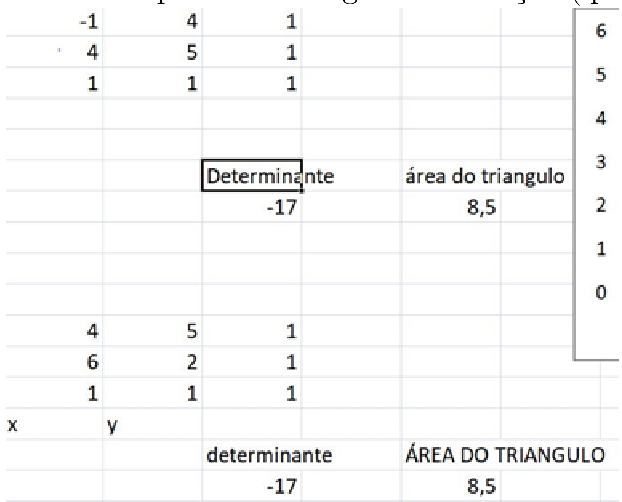
4.2.2 Segunda avaliação

Após a aplicação das atividades, foi aplicada uma segunda avaliação para que fosse analisada a evolução dos alunos.

Nessa avaliação, o A-1 respondeu corretamente todos os itens da primeira questão. Curiosamente, os itens a e b foram resolvidos manualmente e os itens c e d foram resolvidos com o auxílio de alguns dos algoritmos criados durante as aulas (Figura

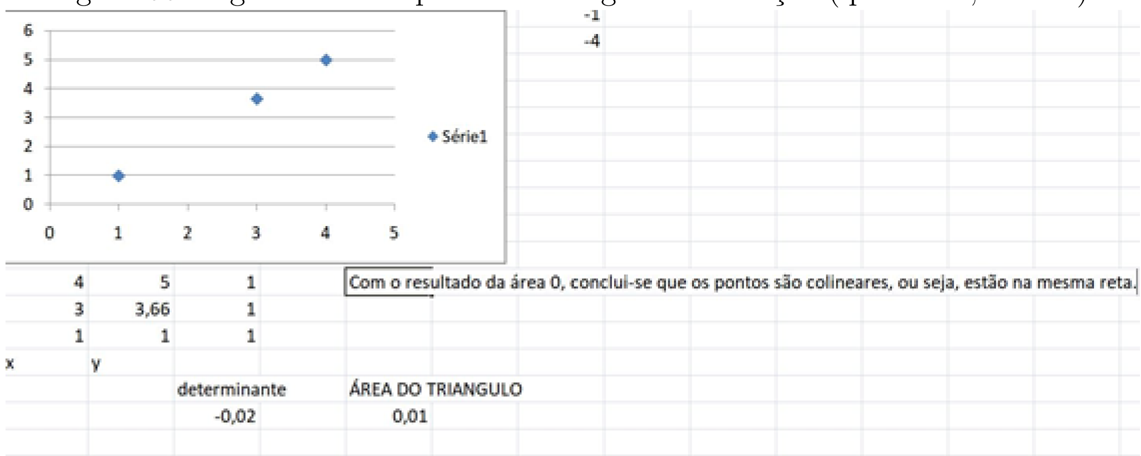
55 e Figura 56).

Figura 55: Figura enviada por A-1 na segunda avaliação (questão 1, item c).



Fonte: Imagem enviada pelo A-1.

Figura 56: Figura enviada por A-1 na segunda avaliação (questão 1, item d).



Fonte: Imagem enviada pelo A-1.

Com relação a segunda questão, foi percebido que o aluno A-1 lembrou da forma da equação da circunferência, mas não soube desenvolver um raciocínio que o levasse a resolução da questão.

O A-2 cometeu erros parecidos aos observados na primeira avaliação diagnóstica e não conseguiu responder os itens a, c e d da primeira questão. No item b, calculou corretamente a distância entre os pontos, mas, para obter o perímetro, somou os valores de forma incorreta.

O aluno 2 enviou alguns cálculos como resolução da questão 2, mas todos inconclusivos.

Na primeira questão da segunda avaliação, A-3 novamente apresentou um desenho manual com alguns dados do problema e indicou o ponto de encontro das diagonais, mas o desenho foi inconclusivo e ele acabou errando o item a. No item b, não foi possível identificar o raciocínio utilizado para obter alguns dos valores apresentados. No item c, o aluno utilizou uma fórmula da geometria euclidiana plana para calcular a área do paralelogramo, mas aplicou valores incorretos, não conseguindo encontrar a resposta correta do problema. O item d e a segunda questão não foram respondidos.

O A-4 respondeu corretamente todos os itens da segunda questão e três itens da primeira questão, mas não enviou nenhuma resolução, então não foi possível identificar qual foi o erro cometido.

O Aluno 5 visualizou as questões da segunda avaliação, mas não enviou nenhuma resposta.

4.2.3 Resultado das avaliações diagnósticas

Em um comparativo entre as duas avaliações, não observou-se relevante melhora no desempenho dos estudantes. Na segunda avaliação, A-1 resolveu de forma analítica todos os itens da primeira questão, diferente da primeira avaliação em que ele resolveu um dos itens com base na observação da figura. Outro avanço obtido por A-1, na segunda avaliação, foi observado na segunda questão, em que ele identificou a forma da equação da circunferência, enquanto, na primeira avaliação, não havia registrado resposta.

A-2 utilizou um raciocínio correto de resolução em um item da primeira questão na segunda avaliação, diferente da primeira avaliação, em que ele apresentou apenas cálculos desconexos e inconclusivos. Porém, em ambas as avaliações, ele não acertou nenhuma questão.

Assim como A-2, A-3 não apresentou nenhuma resposta correta. Um fato curioso é que ele interpretou corretamente a segunda questão da primeira avaliação, mas não apresentou resolução para essa mesma questão na segunda avaliação. Esse fato o levou a ter um desempenho melhor na avaliação que antecedeu a aplicação das atividades.

Ao contrário dos colegas, A-4 obteve um resultado satisfatório nas duas avaliações. Porém, na segunda, ele não justificou as respostas apresentadas, o que dificultou uma avaliação do seu desempenho.

Lamentavelmente, A-5 não apresentou soluções na segunda avaliação, então não foi possível avaliar se, no caso dele, houve algum avanço.

Apesar de os avanços não serem tão expressivos ao ser feito o comparativo entre as duas avaliações, no dia a dia, em sala de aula, foi possível perceber que a maioria dos alunos entenderam os conceitos trabalhados. Com exceção do aluno 3, os demais obtiveram notas acima da média na avaliação feita em sala de aula, de forma presencial, envolvendo tópicos de Geometria Analítica.

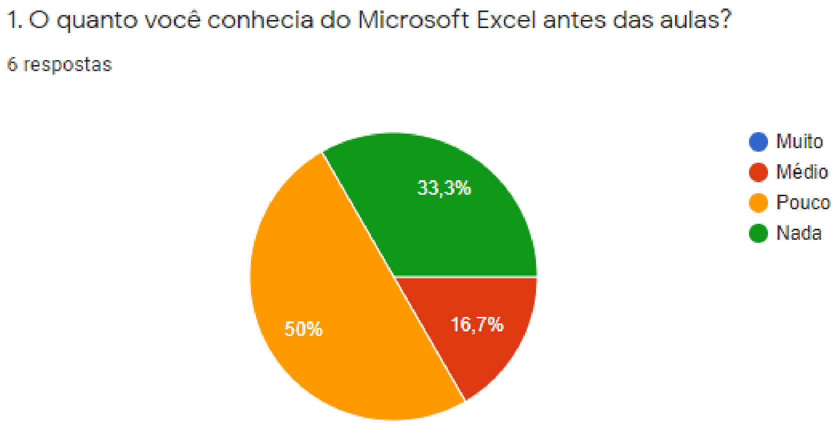
Por isso, o que pode-se questionar é se eles não deram a devida atenção ao responderem as avaliações diagnóstica ou se a construção do conhecimento ocorreu posteriormente, ao estudarem para a avaliação presencial. Isto se deve à uma certa imaturidade por parte de alguns alunos que os leva a se preocupar com a nota obtida e não necessariamente com o conhecimento adquirido.

4.3 Avaliação da proposta na visão dos alunos

Foi disponibilizado um questionário (Apêndice C) para os 10 alunos que participaram de duas ou mais aulas, mas apenas seis deles responderam. O questionário foi feito no Google Formulários e as respostas foram obtidas de forma anônima.

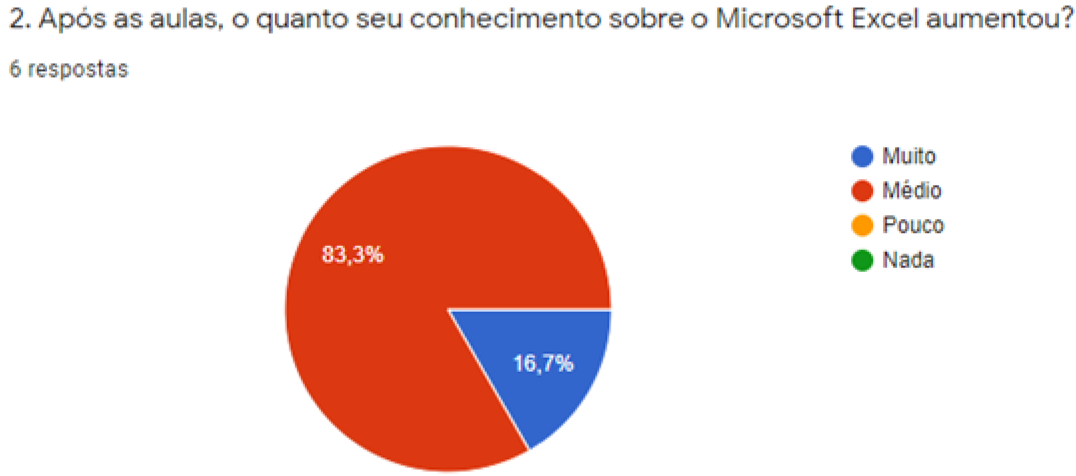
O gráfico da Figura 57 indica que os alunos (em maioria) conheciam pouco ou nada do Excel antes da aplicação da metodologia. Foi possível perceber, ao fazer um comparativo entre os gráficos da Figura 57 e da Figura 58, que a maioria deles relataram que seus conhecimentos aumentaram após as aulas.

Figura 57: Resultado da primeira pergunta do questionário.



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

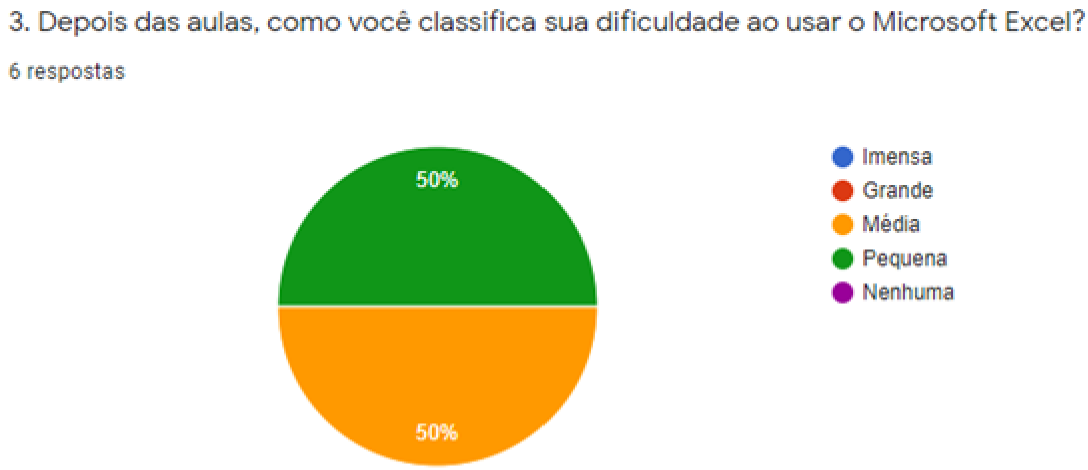
Figura 58: Resultado da segunda pergunta do questionário.



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

Os alunos puderam identificar que possuíam uma certa dificuldade ao trabalharem com o Excel, mas classificaram essa dificuldade como pequena ou média (Figura 59).

Figura 59: Resultado da terceira pergunta do questionário.



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

As questões quatro, cinco e seis abordavam especificamente a contribuição de estudar tópicos de Geometria Analítica com o auxílio do Excel. A maioria dos alunos afirmaram que o desempenho do Excel foi muito bom (Figura 60), ajudou muito na construção dos conceitos matemáticos (Figura 61) e, em nível médio, apresenta clareza e praticidade no estudo dos tópicos trabalhados (Figura 62).

Porém, essa construção de conhecimentos não foi observada nas avaliações diagnósticas. Assim, questionou-se se isso poderia indicar que a dificuldade na resolução de problemas está mais relacionada a interpretação e a "matemática básica", por exemplo.

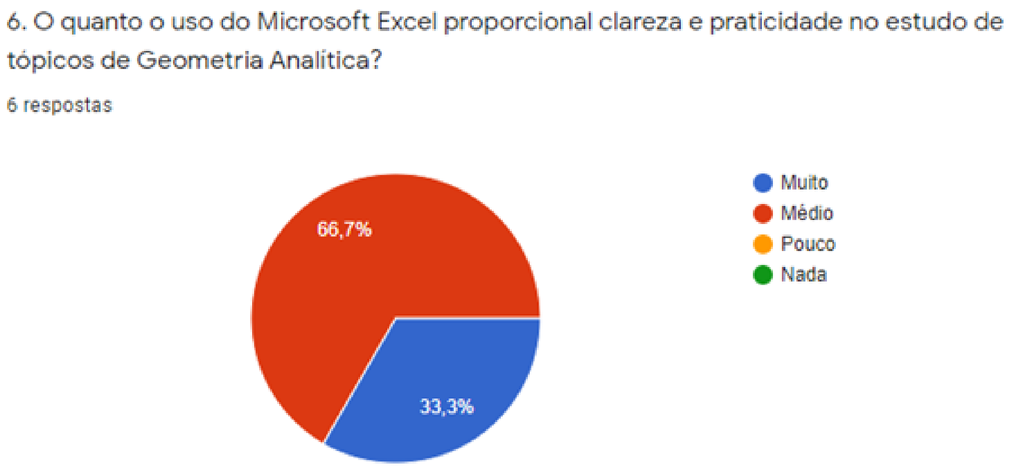
Figura 60: Resultado da quarta pergunta do questionário.

Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

Figura 61: Resultado da quinta pergunta do questionário.

Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

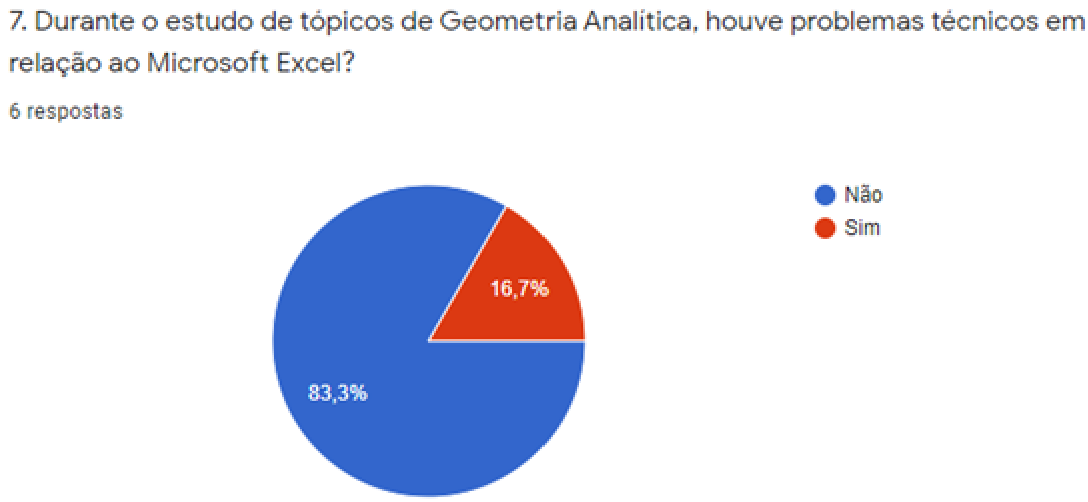
Figura 62: Resultado da sexta pergunta do questionário.



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

As respostas obtidas na sétima e oitava questões refletem o que foi exposto no relato de experiência (Seção 4.1). A maioria dos alunos não tiveram problemas ao desenvolver as atividades propostas (Figura 63). Um deles afirmou que teve dificuldade em implementar as fórmulas (Figura 64). Porém os problemas relatados durante as aulas foram resolvidos.

Figura 63: Resultado da sétima pergunta do questionário.



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

Figura 64: Resultado da oitava pergunta do questionário.

8. Se sua resposta na questão anterior foi sim, qual foi o problema enfrentado?

1 resposta

As fórmulas não davam certo e os resultados não batiam.

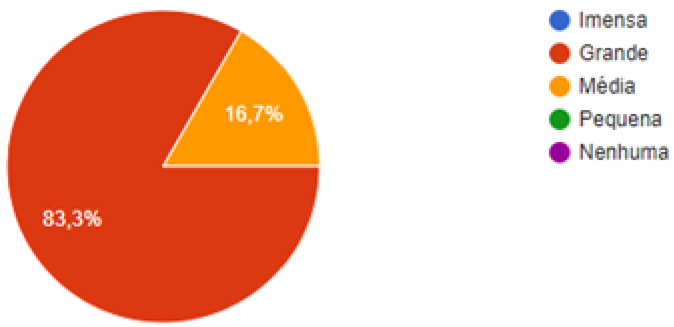
Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

A maioria dos alunos avaliaram como “grande” as instruções apresentadas sobre o Excel (Figura 65). Os elogios, reclamações e sugestões apresentados pelos mesmos podem ser observados na Figura 66.

Figura 65: Resultado da nona pergunta do questionário.

9. Como você avalia as instruções apresentadas sobre o Microsoft Excel no estudo de tópicos de Geometria Analítica?

6 respostas



Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

Figura 66: Resultado da décima pergunta do questionário.

10. Agradecemos imensamente sua participação neste projeto. Utilize este espaço para acrescentar informações que julgar necessárias (elogios, reclamações, sugestões, etc).

6 respostas

Parabenizar pelas aulas, pessoas que não tinham nenhum conhecimento agora conseguem dar conta do Excel.

.

Por meio do projeto, pude compreender melhor os conteúdos.

Ao meu ver, a turma obteve um bom entendimento sobre as funções básicas do Excel, as aulas obtiveram ótimo redimento pessoal e não há do que reclamar.

Achei muito interessante as aulas, pois não sabia de muito dos usos do Excel que foram apresentados.

Kelly vc é uma ótima prof! Sempre dedicada em suprir às necessidades dos alunos e melhorar o conhecimento dos mesmos... continue sempre assim 😋😋

Fonte: Imagem obtida através das respostas dos alunos.

Considerações finais

As tecnologias estão sendo inseridas nos mais diversos ramos da sociedade, e, por vivermos na era digital, o sistema de ensino é diretamente afetado. Um real desafio encontrado nessa era é incentivar e atrair a atenção dos alunos que estão acostumados a ter amplo e rápido acesso a informações através da internet e de ferramentas digitais, que muitas vezes são utilizadas de forma inconsciente ou inapropriada.

Imediatistas, impacientes e acríticos, os alunos da Geração Z encontram dificuldades em se adaptar aos moldes “tradicionais” de ensino, ou seja, aulas expositivas em que o protagonista é o professor e os alunos não participam do processo de construção do conhecimento. Por isso, as metodologias ativas, aquelas que estimulam a autonomia do estudante e fazem com que ele participe do processo de ensino-aprendizagem, são indispensáveis.

As TIC podem ser um instrumento eficaz para tornar as aulas mais significativas ao passo que atendem às exigências da BNCC de utilizar as tecnologias digitais para se comunicar e produzir conhecimento em ambiente escolar e em outras práticas sociais.

Almejando desenvolver as competências propostas pela BNCC e entendendo a importância de proporcionar uma educação digital para que os alunos (ao passo que adquiram conhecimentos científicos e se desenvolvam socialmente) foi desenvolvida uma sequência de atividades para trabalhar tópicos de Geometria Analítica com o auxílio do Excel. Tais atividades foram aplicadas a estudantes da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Interativa da rede privada de Foz do Iguaçu.

Por meio da proposta, os alunos puderam participar do processo de construção do conhecimento ao passo que desenvolviam novas habilidades. Uma das formas de avaliar o progresso dos alunos foi através de avaliações diagnósticas. Nessas, os alunos não obtiveram resultados satisfatórios, mas apresentaram pequenos avanços em relação aos tópicos estudados.

Também foi aplicado um questionário para avaliarmos se, na visão dos participantes, a metodologia utilizada auxiliou no aprendizado. Nesse, feito de forma anônima, os alunos afirmaram que aumentaram seus conhecimentos acerca do Excel e que entenderam os conceitos trabalhados, o que nos levou a questionar se o resultado obtido nas avaliações diagnóstica se deve ao fato de eles possuírem dificuldades em interpretar questões e em trabalhar com a matemática básica, por exemplo.

Infelizmente, sabe-se que não são todos os colégios que possuem uma infraestrutura adequada para que atividades, como as desenvolvidas nesse trabalho, sejam aplicadas. Além disso, a falta de formação dos professores inibi o uso das TIC e dificulta a criação de metodologias ativas. Por isso, há de se pensar em políticas públicas que forneçam o necessário para garantir, sob todas as suas formas, um ensino de qualidade.

Referências Bibliográficas

BORBA, M. D. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BRASIL. **Programa Nacional de informática educativa**. Brasília: PRONINFE, 1994. Disponível em: ⟨http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002415.pdf⟩. Acesso em: 05 set. 2020.

_____. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília, 2013. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192⟩. Acesso em: 05 set. 2020.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2017a. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 05 set. 2020.

_____. Decreto nÂ° 9204, de 23 de novembro de 2017. Institui o Programa de Inovação Educação Conectada e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, D. F, 2017b. Disponível em: ⟨http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9204.htm⟩. Acesso em: 04 jan. 2021.

_____. **Sobre o ProInfo**. Ministério da Educação, 2020. Disponível em: ⟨https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/proinfo/sobre-o-plano-ou-programa/sobre-o-proinfo⟩. Acesso em: 05 set. 2020.

DAMASCENA, J. E. S. **O uso das tecnologias da informação e comunicação no ensino da matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Piauí, Campus Ministro Reis Velloso, Paraíba, 2017. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150840971⟩. Acesso em: 25 jan. 2021.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9**: Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

EDUCAÇÃO. **Metodologias ativas de aprendizagem**: saiba o que são e como incluí-las em sua escola. [S.l.], 2020. Disponível em: ⟨https://revistaeducacao.com.br/2020/08/04/metodologias-ativas-sponte/⟩. Acesso em: 28 fev. 2021.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar,7**: Geometria Analítica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INDALÉCIO, A. B.; RIBEIRO, M. d. G. M. Gerações z e alfa: os novos desafios para a educação contemporânea. **Revista UNIFEV: Ciência & Tecnologia**, v. 2, p. 137–148, 2017. Disponível em: ⟨https://convencaonp.com.br/wp-content/uploads/2017/10/234-1101-3-PB-2.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2021.

INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Enem. Ministério da Educação, 2015. Disponível em: ⟨https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2015/PPL_ENEM_2011_13_CINZA.pdf⟩. Acesso em: 28 fev. 2021.

JESUS, O. F. d. **O uso de planilhas do Excel aplicadas a tópicos de geometria analítica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Goiás, 2018. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160290249⟩. Acesso em: 28 fev. 2021.

LEITE, N. M.; LIMA, E. G. O.; CARVALHO, A. B. G. Os professores e o uso de tecnologias digitais nas aulas remotas emergenciais, no contexto da pandemia da covid-19 em pernambuco. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 2, p. 01–15, 2020. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/248154⟩. Acesso em: 28 jan. 2020.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. Disponível em: ⟨http://150.164.25.15/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf⟩. Acesso em: 04 jan. 2021.

NIC.BR. **Educação e tecnologias no Brasil [livro eletrônico]**: um estudo de caso longitudinal sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação em 12 escolas públicas. 1. ed. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil. Núcleo de Informação e coordenação do Ponto BR, 2016. Disponível em: ⟨https://nic.br/media/docs/publicacoes/7/EstudoSetorialNICbrTICEducacao.pdf⟩. Acesso em: 04 jan. 2021.

OLIVEIRA, F. T. d. **A inviabilidade do uso das tecnologias da informação e comunicação no contexto escolar**: o que contam os professores de matemática? Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2014.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: SEED, 2008. Disponível em: ⟨http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf⟩. Acesso em: 11 jan. 2021.

PENHA, I. T. **Utilização de Tecnologias Digitais para o Ensino de Matemática no 1^o segmento do Ensino Fundamental**: um estudo de caso em uma escola pública da rede municipal de Nova Iguaçu - RJ. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170511248⟩. Acesso em: 25 jan. 2021.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. 2. ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010. Disponível em: ⟨http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf⟩. Acesso em: 27 fev. 2021.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

RUBIÓ, A. P.; GONÇALVES, L. M. C. **Matemática, Ensino Médio, módulo 9**: Matemática e suas tecnologias. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2017.

SANCHES, M. N. **Metodologias Ativas e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs)**: Uma proposta de intervenção na aprendizagem com o auxílio do programa socrative. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, BA, 2018. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170140096⟩. Acesso em: 25 jan. 2021.

VALENTE, J. A. **FORMAR**: A História do Projeto Formar. NIED/UNICAMP, 2006. Disponível em: ⟨https://www.nied.unicamp.br/projeto/formar/⟩. Acesso em: 05 set. 2020.

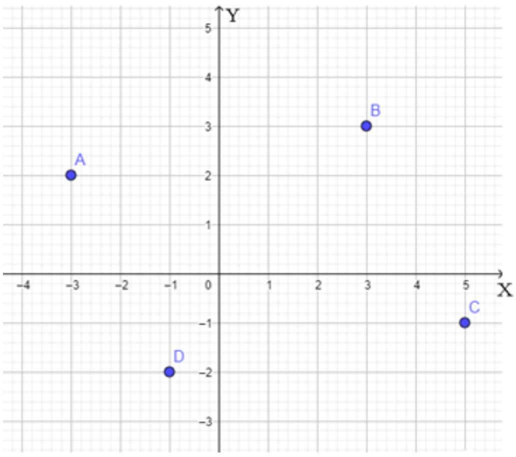
APÊNDICE A - Primeira avaliação

Atenção: A avaliação abaixo é parte da pesquisa "Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas". Convidamos você a participar desta pesquisa. Caso aceite e seja maior de 18 anos (inclusive), solicitamos o preenchimento do TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE (anexo a esta avaliação). Caso aceite mas seja menor de 18 anos, solicitamos o preenchimento do TERMO DE ASSENTIMENTO – TA bem como o preenchimento (por seu responsável) do TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE (anexos a esta avaliação). Eu, Kelly Kananda Teixeira Antunez, bem como minha orientadora, Rosangela Villwock, agradecemos sua participação.

Avaliação diagnóstica

1. Na figura a seguir, A, B C e D são os quatro vértices de um paralelogramo (quadrilátero com lados opostos paralelos). Determine o que se pede em cada item.

Figura 67: Imagem da primeira questão - Primeira avaliação.



Fonte: a própria autora.

a) Sabe-se que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. Determine o ponto M de interseção das diagonais, ou seja, o ponto em que as diagonais se encontram.

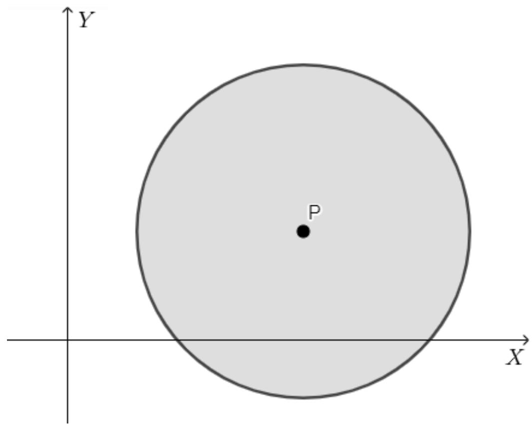
b) Qual o perímetro do paralelogramo ABCD?

c) Qual a área do paralelogramo ABCD? Dica: divida a figura em dois triângulos.

d) o ponto $E(0,6;0)$ pertence à diagonal BD? Justifique sua resposta.

2. Na figura, o ponto $P(12,6)$ é a representação, no plano cartesiano, da localização de uma antena de telefonia celular. A unidade de medida é o quilômetro. Os sinais dessa antena podem ser captados até uma distância máxima de 10 km. Assim sendo, a região que recebe seus sinais está sombreada na figura.

Figura 68: Imagem da segunda questão - Primeira avaliação.



Fonte: a própria autora.

a) Se o ponto $D(x,y)$ está sobre a circunferência que delimita a região que recebe os sinais dessa antena, qual a distância entre D e P?

b) Três residências estão localizadas, nesse plano, nos pontos $A(6,22)$, $B(3,10)$ e $C(5,22)$. Com base na relação obtida no item a, verifique se essas residências recebem os sinais da antena.

c) Escreva uma equação capaz de identificar se um ponto qualquer de coordenadas (x,y) pertence a circunferência que delimita a região que recebe os sinais dessa antena.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na

CONEP em 04/08/2000

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas

Certificado de Apresentação para Apreciação Ética – “CAAE” N°

Pesquisador para contato: Kelly Kananda Teixeira Antunez

Telefone: (45) 999354515

Endereço de contato (Institucional): UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, R. Universitária, 1619 – Universitário, Cascavel - PR – Brasil, CEP 85819-110, fone +55 (45) 3220-3000.

Convidamos você a participar de uma pesquisa “Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas”. Os objetivos são analisar os benefícios da inserção de tecnologias (planilha eletrônica) no desenvolvimento de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio, bem como incentivar a participação dos alunos no processo de construção do conhecimento e contribuir para o desenvolvimento social dos educandos, por proporcionar a familiarização de uma tecnologia utilizada no mercado de trabalho.

Para que isso ocorra, você terá que realizar, utilizando a planilha eletrônica, uma sequência de atividades sobre conteúdos de Geometria Analítica como Distância entre dois pontos; Equação da Circunferência; Colinearidade e Área de Triângulos. Será aplicado um questionário para analisar se, na sua visão, a metodologia utilizada auxiliou no aprendizado. A avaliação dos benefícios da inserção da tecnologia no desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica será realizada por meio de comparativo entre avaliação diagnóstica e avaliação pós aplicação da metodologia proposta. Devido às restrições causadas pela covid19, o desenvolvimento da atividade será por meio de aula remota, em horário contraturno e você terá que utilizar seus computadores pessoais.

Você poderá a qualquer momento desistir de participar da pesquisa sem qualquer prejuízo. Para que isso ocorra, basta informar, por qualquer modo que lhe seja possível, que deseja deixar de participar da pesquisa e qualquer informação que tenha prestado será retirada do conjunto dos dados que serão utilizados na avaliação dos resultados.

Você não receberá e não pagará nenhum valor para participar deste estudo**.**

Nós pesquisadores garantimos a privacidade e o sigilo da sua participação em todas as etapas da pesquisa e de futura publicação dos resultados. O seu nome, endereço, voz e imagem nunca serão associados aos resultados desta pesquisa**.**

As informações que você fornecer serão utilizadas exclusivamente nesta pesquisa. Caso as informações fornecidas e obtidas com este consentimento sejam consideradas úteis para outros estudos, você será procurado para autorizar novamente o uso.

Este documento que você vai assinar contém três páginas. Você deve vistar (rubricar) todas as páginas, exceto a última, onde você assinará com a mesma assinatura registrada no cartório (caso tenha). Este documento está sendo apresentado a você em duas vias, sendo que uma via é sua. Sugerimos que guarde a sua via de modo seguro.

Caso você precise informar algum fato ou decorrente da sua participação na pesquisa e se sentir desconfortável em procurar o pesquisador, você poderá procurar pessoalmente o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UNIOESTE (CEP), de segunda a sexta-feira, no horário de 08h00 as 15h30min, na Reitoria da UNIOESTE, sala do Comitê de Ética, PRPPG, situado na rua Universitária, 1619 – Bairro Universitário, Cascavel – PR. Caso prefira, você pode entrar em contato via Internet pelo e-mail: cep.prppg@unioeste.br ou pelo telefone do CEP que é (45) 3220-3092.

Declaro estar ciente e suficientemente esclarecido sobre os fatos informados neste documento.

Nome do sujeito de pesquisa:

Nome do responsável:

Assinatura do responsável:

Eu, Kelly Kananda Teixeira Antunez, declaro que forneci todas as informações sobre este projeto de pesquisa ao participante.

Assinatura do pesquisador: Kelly Kananda Teixeira Antunez

Cascavel, 01 de abril de 2021.

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas
Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: Rosangela Villwock (45999381342); Kelly Kananda Teixeira Antunez (45999354515)

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de analisar os benefícios da inserção de tecnologias (planilha eletrônica) no desenvolvimento de conteúdos de Geometria Analítica no Ensino Médio e contribuir para o desenvolvimento social dos educandos, por proporcionar a familiarização de uma tecnologia utilizada no mercado de trabalho.

Para isso você terá que desenvolver algumas atividades, sobre conteúdos de Geometria Analítica, com o auxílio de planilhas eletrônicas. Será aplicado um questionário para analisar se, na sua visão, a metodologia utilizada auxiliou no aprendizado. A avaliação dos benefícios da inserção da tecnologia no desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica será realizada por meio de comparativo entre avaliação diagnóstica e avaliação pós aplicação da metodologia proposta. Devido às restrições causadas pela covid19, a aplicação da atividade será por meio de aula remota e você terá que utilizar seu computador pessoal.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Classificamos como MÍNIMO o risco deste estudo, pois se trata de metodologia aplicada em sala de aula (mesmo que remota). Não será realizada nenhuma intervenção ou modificação intencional nas variáveis fisiológicas ou psicológicas e sociais dos indivíduos que participarão do estudo.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone.

Declaro estar ciente do exposto e **desejo participar do projeto Ensino de Tópicos de Geometria Analítica com auxílio de planilhas eletrônicas.**

Nome do participante:

Assinatura:

Eu, Kelly Kananda Teixeira Antunez, declaro que forneci todas as informações sobre este projeto de pesquisa ao participante.

Assinatura do pesquisador: Kelly Kananda Teixeira Antunez

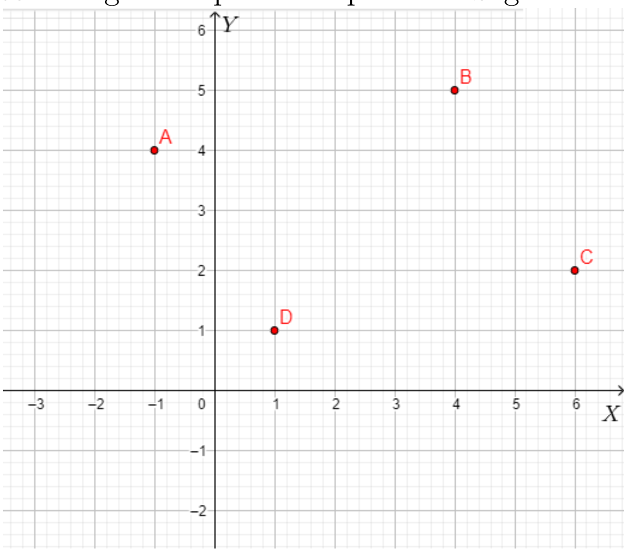
Cascavel, 01 de abril de 2021.

APÊNDICE B - Segunda avaliação

Avaliação pós aplicação da metodologia

1. Na figura a seguir, A, B C e D são os quatro vértices de um paralelogramo (quadrilátero com lados opostos paralelos). Determine o que se pede em cada item.

Figura 69: Imagem da primeira questão - Segunda avaliação.



Fonte: a própria autora.

a) Sabe-se que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. Determine o ponto M de interseção das diagonais, ou seja, o ponto em que as diagonais se encontram.

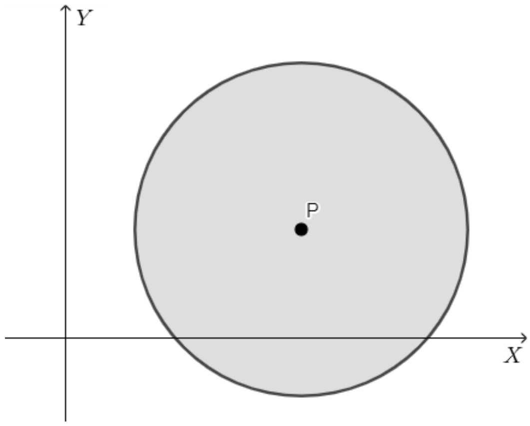
b) Qual o perímetro do paralelogramo ABCD?

c) Qual a área do paralelogramo ABCD? Dica: divida a figura em dois triângulos.

d) o ponto $E(3, \frac{33}{9})$ pertence à diagonal BD? Justifique sua resposta.

2. Na figura, o ponto $P(8, 4)$ é a representação, no plano cartesiano, da localização de uma antena de telefonia celular. A unidade de medida é o quilômetro. Os sinais dessa antena podem ser captados até uma distância máxima de 5 km. Assim sendo, a região que recebe seus sinais está sombreada na figura.

Figura 70: Imagem da segunda questão - Segunda avaliação.



Fonte: a própria autora.

a) Se o ponto $D(x, y)$ está sobre a circunferência que delimita a região que recebe os sinais dessa antena, qual a distância entre D e P?

b) Três residências estão localizadas, nesse plano, nos pontos $A(5, 1)$, $B(4, 7)$ e $C(12, 8)$. Com base na relação obtida no item a, verifique se essas residências recebem os sinais da antena.

c) Escreva uma equação capaz de identificar se um ponto qualquer de coordenadas (x, y) pertence a circunferência que delimita a região que recebe os sinais dessa antena.

APÊNDICE C - Questionário

Questionário sobre o estudo de tópicos de Geometria Analítica com o auxílio do Microsoft Excel

1. O quanto você conhecia do Microsoft Excel antes das aulas?

( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Nada

2. Após as aulas, o quanto seu conhecimento sobre o Microsoft Excel aumentou?

( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Nada

3. Depois das aulas, como você classifica sua dificuldade ao usar o Microsoft Excel?

( ) Imensa ( ) Grande ( ) Média ( ) Pequena ( ) Nenhuma

4. Em relação a resolução de problemas envolvendo tópicos de Geometria Analítica, como você avalia o desempenho do Microsoft Excel?

( ) Muito bom ( ) Bom ( ) Mediano ( ) Ruim

5. O quanto o uso do Microsoft Excel ajudou na construção de conceitos matemáticos sobre tópicos de Geometria Analítica?

( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Nada

6. O quanto o uso do Microsoft Excel proporciona clareza e praticidade no estudo de tópicos de Geometria Analítica?

( ) Muito ( ) Médio ( ) Pouco ( ) Nada

7. Durante o estudo de tópicos de Geometria Analítica, houve problemas técnicos em relação ao Microsoft Excel?

( )Não ( )Sim

8. Se sua resposta na questão anterior foi sim, qual foi o problema enfrentado?

9. Como você avalia as instruções apresentadas sobre o Microsoft Excel no estudo de tópicos de Geometria Analítica?

( ) Imensa ( ) Grande ( ) Média ( ) Pequena ( ) Nenhuma

10. Agradecemos imensamente sua participação neste projeto. Utilize este espaço para acrescentar informações que julgar necessárias (elogios, reclamações, sugestões, etc).