UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Dicionário Comentado de Funções

Junho de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dicionário Comentado de Funções

Marcos de Abreu dos Santos

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo (Orientador)
Prof. Dr. Rodrigo André Schulz
Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga

Cascavel, Junho de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

S237d Santos, Marcos de Abreu dos
Dicionário Comentado de Funções / Marcos de Abreu dos Santos; orientador Sandro Marcos Guzzo. -- Cascavel, 2021.
126 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2021.

1. Tipos de Funções. 2. Propriedades de Funções. I. Guzzo, Sandro Marcos, orient. II. Título.

Marcos de Abreu dos Santos

Dicionário Comentado de Funções

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino Básico de Matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientador - Sandro Marcos Guzzo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Rodrigo André Schulz

Rodrigo André Schulz
Universidade Federal do Paraná – UFPR - Campus Palotina

Clezio Aparecido Braga
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 10 de junho de 2021

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pela sua infinita misericórdia e sua proteção para comigo e minha família.

De forma muito especial à minha esposa Dani. Difícil mensurar tudo que você significa pra mim. Sempre muito dedicada, carinhosa com toda a família. Sei o quanto se esforça para equilibrar tudo em nosso lar. Você faz a minha vida possível e isso só faz crescer ainda mais meu amor por você. Tenho plena consciência de todo o suporte que você me deu para a conquista desse sonho...Te Amo!

Aos meus filhos Miguel (cinco anos) e Pedro (dois anos), amor infinito, meninos inteligentes que trazem pra minha vida uma infinidade de emoções e alegrias e um olhar de pai imensamente orgulhoso.

Ao meu orientador, Professor Doutor Sandro Marcos Guzzo, por seu profissionalismo, sua credibilidade e acima de tudo sua compreensão e sabedoria ao dirigir os trabalhos dessa pesquisa. Ao professor o meu imenso respeito.

Aos professores do Programa PROFMAT da UNIOESTE-Cascavel, profissionais brilhantes que muito me ensinaram.

Aos meus colegas de turma, Luana, Elisangela, Ricardo, José e Silvano e também aos meus colegas de viagem Francisco, novamente a Elisangela, Kelly e Léia pelas infinitas horas de estudos, desafios e conversas que vivenciamos juntos.

Aos meus sogros, Natal e Elvira e a minha cunhada Francieli (tia Fran) pela grande ajuda que sempre ofereceram, principalmente com meus pequenos que são intensos e exigem uma atenção de outro mundo.

Por fim, ao meu pai e em especial a minha mãe que no decorrer desse mestrado partiram deixando uma saudade sem fim. Certamente eles sabiam o quanto sou grato por seus ensinamentos e minha educação. Imagino que estão orgulhosos e felizes por essa conquista. Sentirei falta do melhor abraço do mundo, o abraço apertada e afetuoso da minha amada mãe com um fala suave em meu ouvido, “Amor da minha vida!”.

Resumo

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da matemática. Muitos livros apresentam de forma fragmentada tipos e propriedades de funções. Esse trabalho apresenta uma concentração significativa de *tipos de funções* e um número considerável de *propriedades de funções*. Basicamente estamos apresentando um modelo de *dicionário de funções*, onde o leitor de vários níveis de conhecimento possa encontrar a definição e uma abordagem comentada de cada termo usado para denominar uma função. A finalidade desde trabalho é servir de texto base para a definição e um tratamento primário dos tipos e propriedades de funções que temos de uma variável real e em alguns casos com mais de uma variável. O leitor também encontrará, por vezes, um paralelo com os livros didáticos.

Palavras-chave: Tipos de Funções; Propriedades de Funções.

Abstract

The concept of function is considered to be one of the most important in math. Many books present in a fragmented manner types and function properties. This work concentrates a significant number of *types of functions* and a considerable number of *function properties*. Basically, we are presenting a model of *function dictionary*, where the reader of several knowledge levels can find the definition and approach commented for each term used to name a function. The purpose of this work is to serve as a base text for the definition and a primary treatment of the types and properties of functions that we have of a real variable and in some cases with more than one variable. The reader will also sometimes find a parallel with didactic books.

Keywords: Types of Functions; Function Properties.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A finalidade desse trabalho é poder concentrar e fazer um espécie de dicionário de funções onde o leitor possa encontrar uma definição e uma relativa explanação.

Os leitores que tenho em mente são estudantes do ensino médio, estudantes universitários e professores. Digo isso pois, quem nunca se pegou perguntando o que é uma *função algébrica*, ou mesmo do que se trata as *funções transcendentes*. Esse material apresenta de forma simples e direta essas definições, sendo a porta de entrada para uma exploração mais detalhada e aprofundada de uma função ou uma propriedade específica.

A maioria dos livros que tratam de forma exclusiva de funções geralmente permeiam sempre em alguns poucos tipos e uma quantidade bem limitada de propriedades de funções, com um nível de aprofundamento relativamente considerado. Nesse trabalho fazemos diferente. Trazemos uma abordagem menos aprofundada, porém com um número significativo de definições que envolvem funções. Nesse trabalho o leitor irá perceber que o foco maior é sempre algébrico e não geométrico, por isso um número limitado e de pouco detalhes de gráficos e figuras.

Não há discordância na literatura matemática da importância do conceito de funções para o aluno.

> "O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática"(BRASIL, 2006, p.121).

Este trabalho está dividido em três grandes partes: a primeira constrói o conceito de função, a segunda caracteriza as funções quanto ao seu tipo e a terceira apresenta um rol de propriedades que as funções podem atender.

No capítulo 1, trazemos os conceitos e resultados preliminares como um pouco da teoria de conjuntos e as relações. Trazemos também uma contextualização histórica do conceito de função, além de relatar um pouco o que os livros didáticos trazem em sua abordagem de funções.

No capítulo 2, tratamos dos tipos de funções, e fazemos quando possível um paralelo com as definições dos livros didáticos. Nesse capítulo apresentamos não só a definição mas também uma discussão inicial sobre cada uma delas.

No capítulo 3, tratamos das propriedades das funções e diferenciamos para o leitor o que entendemos como um tipo de função e uma propriedade de função.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, trataremos do principal objeto para se estabelacer uma relação e mais especificamente uma função: os conjuntos. Para tanto, os principais referenciais teóricos para todos os resultados e definições são Domingues e Iezzi (2003), Lima (2007a) e Pinedo (2002).

1.1 Conjuntos

Iniciaremos nossso estudo com as noções básicas da teoria de conjuntos.

De forma intuitiva, podemos pensar em conjuntos como uma coleção ou reunião de elementos bem definidos. Geralmente os conjuntos são denotados por letras maiúsculas como A, B, C, D.

De forma análoga, o pensamento de elemento corresponde a um componente, um membro de um conjunto. Sua represenção é dada por letras minúsculas como a, b, c, d.

Se dois elementos x e y representam o mesmo objeto, dizemos que x é igual a y e denotamos por $x = y$, caso contrário, se x é diferente de y escrevemos $x \neq y$.

Dado um conjunto A qualquer e um elemento x temos duas, e somente duas, situações possíveis: x é um elemento de A, isto é, x pertence a A e escrevemos $x \in A$ ou x não pertence ao conjunto A e denotamos $x \notin A$.

Dependendo da quantidade de elementos de um conjunto ele pode ser classificado como:

Conjunto Finito: Um conjunto é dito finito quando possui uma quantidade n de elementos, sendo n um número natural.

Conjunto Infinito: Um conjunto é dito infinito quando possui uma quantidade não finita de elementos.

Conjunto Vazio: Um conjunto é dito vazio quando não possui elementos. Denotaremos um *conjunto vazio* por $\{\}$ ou $\emptyset$.

Conjunto Unitário: Um conjunto é dito unitário quando possui um, e apenas um elemento.

Note que essas classificações não são exclusivas, pois temos por exemplo, que todo conjunto unitário ou mesmo vazio, também são conjuntos finitos.

1.1.1 Subconjuntos

Definição 1.1. Sejam A e B conjuntos. Diremos que A está contido em B ou A é subconjunto de B, se todo elemento de A for também elemento de B. Nesse caso, denotamos $A \subset B$. Caso contrário, se existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B dizemos que A não é subconjunto de B e denotamos $A \not\subset B$. Em uma linguagem matemática temos

$$A \subset B \Longleftrightarrow \{\forall x \in A \Longrightarrow x \in B\}.$$

Disso podemos deduzir duas inclusões óbvias: qualquer que seja o conjunto A, temos $A \subset A$ e $\emptyset \subset A$. De fato, $A \subset A$ é fácil ver, pois para todo $x \in A \Longrightarrow x \in A$. Esse resultado permite escrevermos $A \subseteq B$, para denotar o conjunto A que está contido em B ou é igual a B. Suponha por contradição que vazio não é subconjunto de A. Então existe x em vazio tal que x não está em A. Pela definição de vazio, não existe x em vazio. Contradição. Portanto $\emptyset \subset A$.

Definição 1.2. (Igualdade) Dois conjuntos A e B são ditos iguais se, e somente se, todo elemento de A pertence a B, e todo elemento de B pertence a A. Se A e B são iguais denotamos $A = B$, caso contrário escrevemos $A \neq B$.

Definição 1.3. Dados os conjuntos A e B, escrevemos $A \subsetneq B$ para denotar que o conjunto A está contido em B, porém é diferente B. Isto é,

$$A \subsetneq B \Longleftrightarrow \{A \subset B \text{ e } A \neq B\}.$$

Cabe aqui a observação que a definição de inclusão tem um papel fundamental nos raciocínios matemáticos. Mostrar que dois conjuntos são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, uma vez que a relação de *inclusão* tem implicitamante a condição de igualdade. Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

Definição 1.4. (Conjutos Disjuntos) Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se, e somente se, não possuem elementos em comum, isto é, não existe elemento x de A tal que x é elemento de B.

Observação 1.1. Note que dizer que dois conjuntos são diferentes, não implica necessariamente que são disjuntos. De fato, os conjutos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{x, y, t\}$ são diferentes, porém não são disjuntos, pois existe elemento de A que também é elemento de B. Agora, a recíproca é verdadeira, se dois conjuntos A e B são disjuntos então eles são diferentes.

1.1.2 Operações com conjuntos

Vamos definir quatro operações básicas que podemos realizar com conjuntos: união, intersecção, diferença e o produto cartesiano.

Definição 1.5. (União) Dados dois conjuntos A e B, o conjunto união de A com B, denotado por $A \cup B$ é o conjunto formado por todos elementos x tal que $x \in A$ ou $x \in B$. Logo, escrevemos

$$A \cup B = \{x | x \in A \ ou \ x \in B\}.$$

Definição 1.6. (Intersecção) Dados dois conjuntos A e B, o conjunto intersecção de A com B, denotado por $A \cap B$ é o conjunto formado por todos elementos x tal que $x \in A$ e $x \in B$. Portanto, podemos escrever

$$A \cap B = \{x | x \in A \ e \ x \in B\}.$$

Uma observação significativa a se fazer, é que após a definição de intersecção podemos redefinir o que são conjuntos disjuntos e, consequentemente estabelecer uma álgebra para verificação.

Definição 1.7. Dois conjuntos A e B são disjuntos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.8. (Diferença de Conjuntos) Dados dois conjuntos A e B, o conjunto diferença $A - B$ (nessa ordem) é o conjunto formado por todos elementos $x \in A$ tal que $x \notin B$. Disso, podemos escrever

$$A - B = \{x | x \in A \ e \ x \notin B\}.$$

Uma observação simples, porém extremamente importante é notar que geralmente $A - B \neq B - A$.

Definição 1.9. (Produto Cartesiano) Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano $A \times B$ (nessa ordem) é o conjunto formado por todos pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Portanto

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ e \ y \in B\}.$$

Dados os pares ordenados (a, b) e (c, d) do produto cartesiano $A \times B$, dizemos que $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Em geral, dados os conjuntos A e B, os conjutos $A \times B$ e $B \times A$ são distintos. Em particular, quando $A = B$ denotamos o produto cartesiano $A \times A$ por A^2. Para o caso de $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ tem se $A \times B = \emptyset$.

1.1.3 Conjuntos numéricos

Dentre uma infinidade de tipos de conjuntos, certos conjuntos, pela relevância e pelas inúmeras vezes que aparecem na escrita matemática, são denotados de maneira especial.

I. Conjunto dos Números Naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Iremos denotar $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

II. Conjunto dos Números Inteiros

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

III. Conjunto dos Números Racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{a}{b},\ com\ a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}.$$

IV. Conjunto dos Números Irracionais

$$\mathbb{I} = \left\{x | x \neq \frac{a}{b},\ com\ a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}.$$

V. Conjunto dos Números Reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

VI. Conjunto dos Números Complexos

Um número complexo z, é um número da forma $x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Podemos fazer corresponder um-a-um, a cada ponto $P(x, y)$ do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ao número complexo $z = x + yi$, escrevendo $(x, y) = x + yi$. Dessa forma, os números do eixo x são da forma $(x, 0) = x + 0i = x$. Analogamente, os números do eixo y são da forma $(0, y) = 0 + yi = yi$. Obviamente que levando isso em conta, podemos admitir $(0, 0) = 0 + 0i = 0$. Assim, podemos escrever

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | (x, y) = x + yi,\ com\ i^2 = -1\}.$$

Denotaremos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Definição 1.10. Definiremos o *conjugado complexo*, ou simplesmente *conjugado*, de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ e denotaremos por $\overline{z}$, o número

$$\overline{z} = (x, -y) = x - yi.$$

Note que se $z = (x, 0) = x + 0i = x$, então $z = \overline{z}$. Isto é, se o número complexo for um número real, então seu conjugado é o próprio número.

1.2 Relações

Considere para as definições e resultados a seguir os conjuntos A e B, tais que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.

Definição 1.11. (**Relação**) Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação de A em B, a qualquer subconjunto R do conjunto $A \times B$. Em outras palavras, R é uma relação de A em B se, e somente se, $\mathrm{R} \subseteq A \times B$.

Dados os conjuntos A e B, e uma relação R, decorre que o par ordenado $(x, y) \in \mathrm{R}$, com $x \in A$ e $y \in B$ se tivermos a propriedade descrita pela relação verdadeira. Quando isso ocorrer, denotamos por $x\mathrm{R}y$ e lemos "x se relaciona com y". Caso contrário, escrevemos $x \not\mathrm{R} y$ e lemos "x não se relaciona com y". Dessa forma, podemos escrever R como

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x\mathrm{R}y\}.$$

A princípio, poderíamos olhar uma relação meramente como um conjunto de pares ordenados, porém pense na definição de uma relação de forma mais ampla e não desconsidere o conceito primitivo de correspondência, de associação ou mesmo de transformação de um elemento de um conjunto para outro. Basicamente esse é conceito primário para praticamente todos os matemáticos.

Exemplo 1.1. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Uma relação R de A em B pode ser o conjunto

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x - y = 0\}.$$

Nesse caso, temos que $-1\mathrm{R}-1$, $0\mathrm{R}0$, $1\mathrm{R}1$ e $2\mathrm{R}2$. Por outro lado, temos por exemplo que, $-2 \not\mathrm{R} 1$ e $0 \not\mathrm{R} 2$.

Exemplo 1.2. Sejam os conjuntos $C = \{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{10}, \sqrt{13}\}$ e $D = \{1, 3, \frac{10}{3}\}$ e a relação R de C em D definida por

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in C \times D \mid x < y\}.$$

É facil ver que, por exemplo, $\sqrt{2}\mathrm{R}3$, $\pi\mathrm{R}\frac{10}{3}$ e $\sqrt{10}\mathrm{R}\frac{10}{3}$, porém $\pi \not\mathrm{R} 3$, $\sqrt{10} \not\mathrm{R} 3$ e $\sqrt{13} \not\mathrm{R} \frac{10}{3}$.

1.2.1 Domínio e imagem de uma relação

Para as duas definições a seguir suponhamos uma relação R de A em B.

Definição 1.12. Chama-se domínio da relação R o subconjunto de A constituído de todos elementos $x \in A$ para os quais existe um elemento $y \in B$ tal que $x\mathrm{R}y$. Denotaremos por $D(\mathrm{R})$ o conjunto domínio de R e escrevemos

$$D(\mathrm{R}) = \{x \in A \mid \exists y \in B : x\mathrm{R}y\}.$$

Definição 1.13. Chama-se imagem da relação R o subconjunto de B constituído de todos elementos $y \in B$ para os quais existe um elemento $x \in A$ tal que $x\mathrm{R}y$. Denotaremos por $Im(\mathrm{R})$ o conjunto imagem de R e escrevemos

$$Im(\mathrm{R}) = \{y \in B \mid \exists x \in A : x\mathrm{R}y\}.$$

Podemos verificar que no exemplo 3.16, o domínio é o conjunto $D(\mathrm{R}) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e a imagem $Im(\mathrm{R}) = \{-1, 0, 1, 2\}$. Também é simples perceber que no exemplo 3.10, $D(\mathrm{R}) = \{\sqrt{2}, \pi, \sqrt{10}\}$ e $Im(\mathrm{R}) = \{3, \frac{10}{3}\}$.

O conjunto B, é chamado de *contradomínio* da relação R e denotado por $CD(\mathrm{R})$. Note que não necessariamente temos o *contradomínio* igual a *imagem*, isto é, nem sempre $CD(\mathrm{R}) = Im(\mathrm{R})$.

Definição 1.14. Denomina-se gráfico de uma relação R, o conjunto G_{R} formado por todos dos pontos P do produto cartesiano de pares ordenados (x, y), tais que $(x, y) \in \mathrm{R}$. Disso, escrevemos

$$G_{\mathrm{R}} = \{P(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in \mathrm{R}\}.$$

Um caso particular de relação entre dois conjuntos é quando o conjunto A que contém o domínio, é igual ao conjunto B que contém a imagem, isto é $A = B$.

Definição 1.15. Quando $A = B$ e R é uma relação de A em B, dizemos que R é uma *relação sobre* A, ou simplesmente que R é uma *relação* em A.

1.2.2 Intervalos

Definimos a relação x é *menor ou igual* a y e escrevemos $x \leq y$ se, e somente se, $x - y \in [0, +\infty[$. De posse dessa relação conhecida matematicamente de ordem usual e a definição dos conjuntos numéricos, podemos criar subconjuntos especiais que se tornará útil no decorrer desse trabalho.

Se $\mathbb{A}$ representa indistintamente o conjunto $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, então:

1. $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} - \{0\}$.

2. $\mathbb{A}_+ = \{x \in \mathbb{A} | x \geq 0\}$.

3. $\mathbb{A}_- = \{x \in \mathbb{A} | x \leq 0\}$.

4. $\mathbb{A}_+^* = \{x \in \mathbb{A} | x > 0\}$.

5. $\mathbb{A}_-^* = \{x \in \mathbb{A} | x < 0\}$.

Ao se focar exclusivamente no conjunto dos números reais é possível obter subconjuntos da reta real denominados intervalos. Para isso fazemos uma correspondência biunívoca dos pontos de uma reta com os números reais usando a relação de ordem usual. Assim dados a e b dois números reais (pontos da reta), com $a < b$, definimos:

a. *Intervalo aberto* de extremos a e b como

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

b. *Intervalo fechado* de extremos a e b como

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

c. *Intervalo fechado à esquerda* de extremos a e b como

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

d. *Intervalo fechado à direita* de extremos a e b como

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

e. *Intervalo ilimitado fechado à esquerda* de extremo a como

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}.$$

f. *Intervalo ilimitado aberto à esquerda* de extremo a como

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}.$$

g. *Intervalo ilimitado fechado à direita* de extremo a como

$$] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}.$$

h. *Intervalo ilimitado aberto à direita* de extremo a como

$$] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$$

1.3 Supremo e Ínfimo

Definição 1.16. Um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* se existir um número $M \in \mathbb{R}$, tal que $A \subset]-\infty, M]$. Nesse caso, dizemos que M é uma *cota superior* para A. Analogamente, $A \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* se existir um número $m \in \mathbb{R}$, tal que $A \subset [m, +\infty[$ e, sendo esse o caso, dizemos que m é uma *cota inferior* para A. Por fim, se $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$ e é limitado superiormente e inferiormente, dizemos que A é *limitado.*

Um dos principais resultados acerca do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é que, todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente possui uma cota superior mínima. De maneira análoga, todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente possui uma cota inferior máxima. Esse resultado é enunciado por um axioma chamado de ***axioma da completude*** de $\mathbb{R}$.

Definição 1.17. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Se M é a menor das cotas superiores de A, diremos que M é o ***supremo*** de A e denotaremos por

$$M = \sup\{A\}.$$

Definição 1.18. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Se m é a maior das cotas inferiores de A, diremos que m é o ***ínfimo*** de A e denotaremos por

$$m = \inf\{A\}.$$

1.4 Aplicações - Funções

Estudaremos agora um caso particular de relação. A definição básica e informal dessa relação que chamaremos de aplicação pode ser compreendido pelo seguinte conceito:

Toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma aplicação.

1.4.1 Aplicação

Sejam os conjuntos A e B, tais que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ para as definições a seguir.

Definição 1.19. Uma relação f de A em B denotado por $f : A \longrightarrow B$, é uma aplicação se, e somente se, todo elemento $x \in A$ corresponde a um único elemento $y \in B$.

1.4.2 Função

Segundo Domingues e Iezzi (2003), uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ onde o contradomínio B é um conjunto numérico, é habitualmente chamada de *função*. Apesar do autor dizer também que "às vezes, contudo, usa-se a palavra função para designar uma aplicação qualquer", usaremos a palavra função para as aplicações que atenderem esse critério, caso contrário denominaremos por aplicação, salvo exceções já consolidas na linguagem matemática. Isso significa que a partir de agora, o uso da palavra *função* ficará muito mais frequente para quase todas as aplicações que iremos definir.

Faremos a seguir, uma definição mais formal de uma função.

Definição 1.20. Uma relação f definida em A com valores em B, é uma função se, e somente se:

I. $\forall\ x \in A$, $\exists\ y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

II. $\forall\ x \in A$, se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$, então $y = z$.

A primeira condição garante a existência de pelo menos um elemento y que se relaciona com x. A segunda condição, garante que esse elemento y é único.

Vamos analisar um pouco essa definição 1.20. Dependendo da relação R, podemos ter $(x, y) \in \mathrm{R}$ e $(x, z) \in \mathrm{R}$. Ora, um exemplo é a relação de *menor ou igual*, onde $(2, 3) \in \mathrm{R}$ e $(2, 4) \in \mathrm{R}$, pois $2 \leq 3$ e $2 \leq 4$. Dessa forma, é impossível denotar a imagem de x por R escrevendo simplesmente $\mathrm{R}(x)$, uma vez que temos mais de um valor possível para a imagem. Agora, no caso de uma função f, se $(x, y) \in f$, a segunda condição da definição garante que a imagem de x por f é unica, logo é possível denotar $y = f(x)$. Portanto, se f é uma aplicação de A em B, escrevemos $y = f(x)$ e lemos *"y é imagem de x por f"*, para dizer que $(x, y) \in f$. Às vezes usaremos a notação

$$x \mapsto f(x)$$

para idicar a aplicação f em que $f(x)$ é imagem de um elemento genérico x. Temos que $A = D(f)$ e B o contradomínio de f que denotaremos por $CD(f)$.

Decorre diretamente da definição de relação que se tivermos $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ com $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, então $f = g$.

Por conveniência na notação, uma função f, que até então definiamos como um conjunto, será representado simplesmente por sua *regra* ou *lei* de relação entre o elemento $x \in A$ e o elemento $y \in B$. Essa lei ou regra é o que faz corresponder um elemento do domínio a um elemento imagem.

Exemplo 1.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 - y = 2\}$.

Dessa forma, é possível escrevemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $y = -x^2 + 2$ ou $f(x) = -x^2 + 2$, para representar a função f.

Exemplo 1.4. A função $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f = \{(x, y) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R} | y - \sqrt{x-1} = 0\}$, pode ser escrita $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $y = \sqrt{x-1}$ ou $f(x) = \sqrt{x-1}$, para representar a função f.

Obviamente que essa notação simplificada só faz sentido quando está bem claro e bem definido o domínio da função f. Uma maneira de fazer isso é usar a notação

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Ao pensarmos em grandezas e consequentemente em uma relação entre duas grandezas, dizemos que uma está em função da outra. A escrita anterior deixa essa ideia bem explícita e é imediato notar que podemos dizer e escrever que a grandeza y está em função da grandeza x. Isso dá ao conceito de função um dinamismo muito importante para o entendimento intuitivo da relação entre as *variáveis*. Isso mesmo, podemos também chamar as grandezas de uma função de variáveis, pelo simples motivo de a função poder sofrer variações de valores na imagem quando variamos os valores do domínio.

1.4.3 História do Conceito de Funções

Agora que o leitor está familiarizado com o conceito formal de *aplicações* e, em particular, com o que denominamos *funções*, faremos um resumo histórico do conceito de função, apesar de termos poucas referências dedicadas a esse tema. Não é foco desse trabalho aprofundarmos na história da evolução do conceito de função e, por isso, usaremos para esse relato uma sequência de informações reunidas por Gonçalves (2015) em seu trabalho de dissertação de mestrado. No capítulo 5 de sua pesquisa, a autora *Alexsandra Cândida Gonçalves* usou como principal referência Azcárate e Deulofeu (1996) e Eves (2011), trabalhos que também consultamos e, portanto, também iremos referenciar para resumir e "organizar"a história do conceito de funções.

Na história da matemática, o conceito de funções modificou-se por inúmeras vezes, até, de fato ser aceito pela comunidade acadêmica e se tornar hoje um conceito sólido e extremamente importante para a matemática em geral. Contudo, essas evoluções, etapas, modificações não são claras na história da matemática, nem mesmo como elas se deram. Acredita-se que tais modificações aconteceram de forma natural, gradativa e sem muito registro, principalmente no que se refere a definição formal, as notações utilizadas e as expressões usadas para se caracterizar uma função, como por exemplo variável, termo dependente/independente, correspondência, domínio e imgem. Para Eves (2011),

> “O conceito de função, como as noções de espaço e geometria, passou por evoluções acentuadas. O estudante de matemática perceberá bem esse fato ao atentar para os vários refinamentos desse processo evolutivo que acompanham seus progressos escolares, desde os cursos mais elementares da escola secundária até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação.” (EVES, 2011, p.660).

Para Azcárate e Deulofeu (1996), é quase que impossível determinar uma época ou um momento da história que o conceito de função surgiu. Pode-se dizer que o conceito em si tem origem funcional em operações matemáticas da Antiguidade de estudos de astronomia dos babilônios, de Ptolomeu ou dos árabes. Porém pode-se dizer também que seu nascimento se deu na geometria analítica de René Descartes, ou mesmo que de forma categórica isso só tenha acontecido no século XIX com as definições clássicas de função de Dirichlet e Lobatchevsky. Porém, há uma certa convergência de ideias entre os historiadores no tocante a afirmação de que, se tiverem que fixar uma época para o surgimento do conceito de funções, certamente seria em meados do século XVII, período de René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, momento que ocorreu uma série de fatores e descobertas matemáticas que permitiu conceituar com generalidade suficiente para ser possível escrever as primeiras definições do conceito. O termo *função* do modo como o conhecemos hoje aparece em registros matemáticos pela primeira vez no surgimento da análise matemática e na abordagem do desenvolvimento de diferencial e integral, base fundamental do cálculo infinitesimal. Domingues e Iezzi (2003) diz que,

> “Na segunda metade do século XVII, o matemático alemão G.W. Leibniz (1646-1716) usaria pela primeira vez a palavra “função”. Também se deve a Leibniz a introdução das palavras “variável”, “constante”e “parâmetro”, hoje corriqueiras na linguagem matemática. Mas a notação $f(x)$ para indicar uma função só seria introduzida em 1734 pelo matemático suíço L. Euler (1707-1783).” (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.93).

Para Azcárate e Deulofeu (1996) nesse período,

> “a ideia de função no século XVII ainda era muito restrita, pois se reduzia a funções analíticas, primeiro as que podiam ser expressas por uma equação algébrica e depois as desenvolvidas em séries de potência, e só no século seguinte Euler deu a primeira definição da função. A partir do momento que Euler deu a primeira definição de função as generalizações se sucederam, como resultado da tentativa de incluir funções cada vez mais complexas que apareciam, até as últimas definições que imcorporam a linguagem de conjuntos.” (AZCÁRATE; DEULOFEU, 1996, p.37).

Para um melhor entendimento da história do conceito de funções, Gonçalves (2015) baseando-se Azcárate e Deulofeu (1996), divide e destaca três períodos principais: Antiguidade, Idade Média e a Idade Moderna.

Para o período considerado antiguidade, Azcárate e Deulofeu (1996) consideram os estudos realizados pelos babilônios, egípcios e os gregos, onde estavam presente casos particulares de dependência entre duas quantidades, porém sem avanços gerais de variáveis e funções. Os registros que se tinha de caráter empírico, tábuas de cálculo e uma variedade de problemas resolvidos sem um método claro, quase não alcançava a aritmética básica e a geometria elementar. Não podemos diminuir a importância dos estudos de astronomia, muito estudado na época para o surgimento do conceito, contudo essas ações de observações e anotações de resultados empíricos, mesmo com a busca de regularidades em determinados fenômenos naturais ou de problemas de cálculos matemáticos da época, não avançaram na formulação de um conceito geral de funções, pois para eles não se tinha clareza da noção de variação.

Na grécia, os estudos se concentravam na ideia de proporção, o problema da incomensurabilidade e a distinção de número e grandeza. Vale lembrar que esses estudos eram dificultados uma vez que não se tinha conhecimento do conceito amplo de números e, por exemplo, para muitas proporções não se havia compreensão. O conceito de função e o desconhecimento da existência de números racionais foi um dos sérios obstáculos para um avanço na generalização e compreensão do conceito de função, uma vez que as proporções escondiam para o conhecimento da época a dependência de grandezas distintas. Era dificultoso entender relações entre comprimento e área por exemplo, dessa forma, os gregos buscavam sempre estabeler proporções de forma homogênea, comparando comprimentos com comprimentos e áreas com áreas segundo Azcárate e Deulofeu (1996).

Em resumo, Gonçalves (2015) escreveu que na antiguidade os babilônios trabalhavam com relações funcionais de modo empírico, usando principalmente registro em tabelas e tinham como obstáculos para a compreensão do conceito de funções o desconhecimento de variação pois seu foco era quase sempre de caráter aritmético. Os gregos por sua vez concentravam os estudos no uso de proporções com grandezas de mesma natureza, uma vez que em proporções de grandezas distintas não compreendiam a dependência que ficava oculta entre elas, criando assim barreiras significativas para uma compreensão geral do conceito de função. Isso mostra que a noção de variação era muito primário na época, não sendo possível formular conceitos avançados de função.

Para Azcárate e Deulofeu (1996), a idade média, final do império romano até o século XV, os estudos estavam voltados a entender o movimento em geral, em particular de objetos, massas e planetas. Das várias contribuições dos matemáticos no período para o avanço e estudos do movimento, destacamos o de Nicole Oresme (1323?-1382), que contribuiu para um olhar mais profundo de proporcionalidade. Oresme avançou aos estudos de fenômenos de variação e iniciou uma abordagem geométrica para representar valores cinemáticos-aritméticos. Para os autores Azcárate e Deulofeu (1996), não podemos considerar as investidas geométricas de Oresme como uma representação de dependência entre duas variáveis em um gráfico no sentido atual, mas podemos dizer que Oresme preparou o estrada para Galileu Galilei, René Descartes, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Contudo, o avanço do conceito de função aconteceu, pois a principal barreira até então foi a disparidade entre o nível de abstração das teorias estudadas e o limitado aparato matemático de simbologias, escritas, representações e linguagens adequadas.

Por fim, na idade moderna, com uma grande contribuição de algebristas, a falta de simbologia matemática foi sendo superada, em particular com uma enorme contribuição do matemático François Viète (1540-1603) com o cálculo literal (álgebra simbólica). Galileu também trouxe contribuições significativas, estabelecendo leis entre grandezas com registros detalhados de experimentos, agregando assim valor a ciência moderna. Descartes (1596-1650) pai da geometria analítica, permitiu relacionar geometria e álgebra, impactando diretamente no conceito de funções, pois iniciava-se os registros de equações relacionando dependência entre grandezas variávais segundo Azcárate e Deulofeu (1996).

Como dissemos, com enorme contribuição de Pierre de Fermat, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Jean Bernoulli, Jacques Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange e outros, foi possível abordar a ideia do conceito de função com generalidade sufuciente para introduzir as primeiras definições e o uso do termo função com o significado matemático de variação e dependência que compreendemos atualmente conclui Gonçalves (2015). Para Azcárate e Deulofeu (1996), no século XVII, o conceito de função ainda muito restrito, se limitava a funções analíticas. Contudo, depois que Euler (1707-1783) deu a primeira definição de função com um certo grau de generalização, a evolução do conceito e as formas de generalizações foram se sucedendo até a definição e conceito que temos hoje.

Logo, notemos que o conhecimento formal e sistematizado sobre funções, não ocorreu de forma direta, rápida e linear, pelo contrário, foi construído de forma indireta e lenta, acompanhando a evolução matemática e a necessidade de avanços na linguagem e escrita matemática para registro de níveis avançados de abstração.

1.5 O que os Livros Didáticos Trazem

Neste seção, trataremos especificamente de que forma alguns livros didáticos abordam o conceito e o conteúdo de funções. Nosso objetivo não é avaliar forma qualitativa ou quantitativa desses materiais, nem mesmo comparar escritas para se definir uma "ideal". A ideia é trazer meramente à luz do leitor desse trabalho as diferentes abordagens de forma direta e comentada. Não iremos agora transcrever o que há nesses livros e sim relatar o que está escrito. No decorrer do capítulo seguinte onde trataremos dos tipos de funções faremos, quando for pertinente, a transcrição de algumas definições dos livros aqui citados. Selecionamos seis livros didáticos já consolidados ao longo dos anos como referências para o ensino médio. Geralmente há uma divisão de conteúdos destinados ao primeiro, segundo e terceiro ano do ensino médio e por isso essas versões (cinco entre os seis que iremos citar) trazem quase sempre três volumes. Geralmente cabe ao volume um a missão de introduzir e aplicar os conteúdos de conjuntos e funções. Nos demais volumes, de forma menos enfática, são trabalhadas algumas funções específicas por conveniência ou por adequação do autor. Contudo, o foco principal do assunto que estamos tratando é sempre dado no primeiro volume e por isso nosso foco será o mesmo.

1.5.1 Coleção Novo Olhar - Matemática - Joamir Souza

Inicialmente, vamos abordar o livro didático para o ensino médio de 2010 em sua primeira edição que foi publicado pela editora FTD e é composto por três volumes. Iremos comentar somente sobre o volume 1 do autor Joamir Roberto de Souza que trata sobre o tema que estamos trabalhando.

O livro é composto de nove capítulos onde o autor destina um capítulo para falar especificamante de conjuntos, seis capítulos para falar de funções e dois para tratar de outros conteúdos.

Nesse livro há uma abordagem específica de conjuntos e de conjuntos numéricos com um explanação também de intervalos. Ele traz uma definição e uma explanação de relações que serve como introdução para a definição de funções. Este livro aborda especificamente algumas propriedades de funções como crescente, decrescente, constante, injetora, sobrejetora e bijetora. Trata também de apenas alguns tipos de funções como função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica e função modular. Em outros volumes o autor volta a trabalhar com outros tipos de funções de forma isolada.

O autor tenta sempre apresentar a informalidade dos exemplos e contextualizações com a formalidade da escrita matemática. A preocupação de apresentar as definições de maneira formal e destacada também é um diferencial no livro.

1.5.2 Matemática ensino médio - Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Livro da editora Saraiva de 2010 em sua sexta edição tem duas autoras, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Esse trabalho tem três volumes e apresenta em seu volume um a abordagem do tema aqui estudado. Em seus dez capítulos as autoras não trabalham com conjutos em geral e sim escolhem tratar com uma maior quantidade de detalhes quase que esclusivamante de conjuntos numéricos e intervalos com uma breve citação de operações entre conjuntos. Dos nove capítulos restantes, seis deles tratam de funções sem a introdução ou definição prévia do conteúdo de relações. A pouca abordagem de relações é feita diretamente na definição informal de funções. Esse livro também traz o dinamismo dos exemplos com um pouco de formalidade na escrita.

O livro aborda as funções afim, quadráticas, exponenciais e logarítmicas com uma pequena explanação de funções compostas, funções inversas, funções definidas por partes e funções modulares. Com pouca ênfase, o livro comenta sobre funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

1.5.3 Conexões com a matemática - Obra coletiva

Este livro, desenvolvido e produzido pela editora Moderna, é uma obra coletiva de 2013 com responsabilidade de edição do Fábio Martins de Leonardo. Esta obra, também produzida em três volumes, apresenta no seu seu primeiro volume onze capítulos, sendo um para tratar de conjuntos, seis para abordar funções e quatro sobre outros assuntos.

Os tipos de funções trabalhadas são as funções afim, funções quadráticas, funções modulares, funções exponenciais e funções logarítmicas. Também há um paralelo com funções definidas por partes e funções polinomiais. Dentre as propriedades de funções a única mencionada é de funções inversas, com uma pequena abordagem de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. O livro mescla o texto corrido da informalidade com a escrita formal e notações matemáticas de algumas definições e conceitos.

1.5.4 Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos e Funções - Gelson Iezzi e Carlos Murakami

Esta coleção se apresenta em onze volumes e é uma das mais completas em termos de quantidade de conteúdo para o ensino médio. Assim como as demais ela trata de forma oportuna de várias funções nos demais volumes, porém destina o primeiro volume para priorizar o estudo de conjunto e funções. Com uma liguagem mais formal, porém não menos acessível esse volume detalha, conceitua e define bem os conteúdos aqui abordados.

O livro se inicia com um capítulo dedicado às noções lógicas da matemática, uma espécie de capítulo preliminar para o estudo posterior. O livro de dez capítulos destina um para cada conteúdo que antecede o conceito de funções sendo eles conjuntos, conjuntos numéricos e relações.

Há um capítulo específico de introdução à função, onde os autores conceituam, definen e mostram as notações. Nos demais capítulos há uma abordagem ampla sobre função constante e função afim, função quadrática, função modular e algumas funções que eles denominam de funções elementares.

No que diz respeito às propriedades, o livro trabalha de maneira relativamente aprofundada as funções compostas, injetoras, sobrejetoras, bijetoras e as funções inversas.

É o único livro de todos aqui citados que aborda de forma bem ampla, propriedades, definições e demonstrações.

1.5.5 Matemática - Contexto e Aplicações - Luiz Roberto Dante

Livro da editora Ática de 2014 em sua segunda edição tem como autor Luiz Roberto Dante. Como é usual, essa obra tem três volumes e apresenta principalmente o conteúdo de funções no seu volume um. Composto por oito capítulos, sendo o primeiro para tratar de conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos, cinco para abordar funções e dois de outros temas. O livro discorre pouco sobre relações e já inicia com a definição de função de um conjunto a outro. Trata de algumas propriedades como função crescente, decrescente, função injetora, sobrejetora e bijetora. Os tipos de funções abordadas são funções afim, funções modulares, funções quadráticas com um adendo a funções polinomiais, funções exponenciais e funções logarítmicas.

Nota-se um foco na contextualização e exemplificação dos conceitos. Contudo a escrita se alterna entre um pouco de formalismo e uma linguagem mais geral.

1.5.6 Matemática Paiva - Matemática - Manoel Paiva

Este livro da editora Moderna em sua terceira edição de 2015, escrito por Manoel Paiva também se apresenta em três volumes. É um livro composto por dez capítulos sendo um para conjuntos, seis para funções e três para outros assuntos. Este livro traz pouca formalidade nas definições e nas apresentações dos conteúdos. Quase sempre são munidos de exemplos e contextualizações que levam o leitor ao conceito do que está sendo estudado. Nesta obra não se trata do conceito de relação e não se tem uma definição formal para função. As funções são introduzidas de forma conceitual e exemplificada com algumas referências à linguagem e notação que usualmente vemos na escrita matemática.

As funções trabalhadas são função afim, função quadrática, função modular, função exponencial e função logarítmica. A única propriedade citada é a de função inversa em dois momentos, na parte introdutória com exemplos variados e no capítulo de funções logarítmicas após abordar funções exponenciais para explanar que uma é a inversa da outra. Contudo, essa abordagem de função inversa é feita sem o tratamento de funções bijetoras. O que há, é uma citação por diagramas que a função precisa ser biunívoca, com um comentário explicativo em nota de rodapé, sem uma definição no texto para esse conceito.

Capítulo 2

Tipos de Funções

Por experiência, vemos que alguns textos destinados para o ensino médio definem uma função $f : A \longrightarrow B$ como um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Essa definição não está errada, tanto que conduzimos nossa definição por essa linha. Contudo, essa maneira de definir funções pode levar o aluno a pensar de forma estática, e não desenvolver paralelamente a ideia de função como uma correspondência entre elementos, um dinamismo de dependência ou mesmo o resultado de um ação. A maioria dos matemáticos não olham a função como um conjunto de pares ordenados e sim uma correspondência entre elementos oriundos de um movimento. Pensamos em rotação, translação, áreas, etc... e essas ações são difíceis de relacionar num primeiro momento como um conjunto de pares ordenados segundo Lima (2013).

Neste capítulo, iremos escrever sobre os tipos de funções reais, isto é, funções com domínio o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou um subconjunto do mesmo. Nosso objetvo não é explorar com profundidade as funções e sim, trazer uma significativa variedade de tipos de funções, para que o leitor encontre de forma concentrada suas definições e por vezes, uma imersão nos seus conceitos, fazendo quando pertinente um paralelo com as definições dos livros didáticos citados anteriormente. Como referencial para este capítulo usaremos os livros Lima (2013), Lima (2007a), Stewart (2006a), Neto (2015) e Guzzo (2021).

2.1 Função Constante e Nula

Definição 2.1. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função constante se, e somente se, f é da forma,

$$f(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{R}.$$

Graficamente, uma função constante é uma reta paralela ao eixo horizontal, onde para qualquer que seja o valor de x, obtemos sempre o mesmo valor k como imagem desse x. Nesse caso, a imagem de f é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.

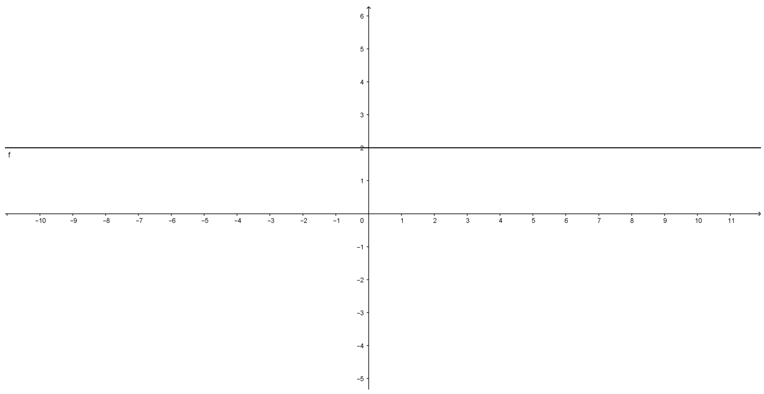


Figura 2.1: Gráfico da função constante $f(x) = 2$.

Um exemplo clássico da função constante é, a ***função nula*** ou ***identicamente nula***, que ocorre quando $k = 0$, fazendo $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. É fácil ver que, o gráfico dessa função especial é o eixo real x.

2.2 Função Identidade

Definição 2.2. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função identidade se, e somente se, é dada por

$$f(x) = x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Nota-se, que para cada valor de x a função identidade associa a imagem no próprio x, gerando assim uma simetria gráfica no plano cartesiano. O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

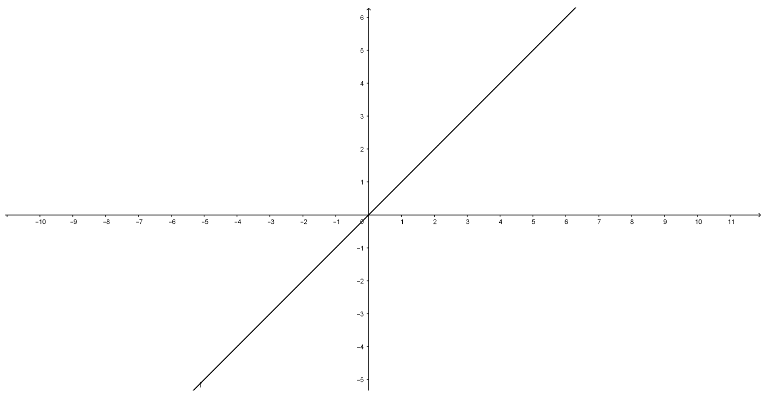


Figura 2.2: Gráfico da função identidade.

2.3 Função Inclusão

Definição 2.3. Sejam os conjuntos A e B não vazios. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita função inclusão quando A é subconjunto de B e a função f é dada por $f(x) = x$ para todo $x \in A$.

Observação 2.1. Note que só podemos dizer que a função f é a identidade se $A = B$. No caso da função inclusão, mesmo que a regra seja $f(x) = x$ o que temos é a identidade entre A e $f(A) \subseteq B$.

Exemplo 2.1. A função $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x$ é uma função inclusão, pois $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2.4 Função Projeção

Definição 2.4. Sejam os conjuntos A e B não vazios. A função $f : A \times B \longrightarrow A$, definida por $f(a, b) = a$ com $a \in A$ e $b \in B$, é chamada função projeção na primeira componente.

Note que, a função $f : A \times B \longrightarrow B$, definida por $f(a, b) = b$ com $a \in A$ e $b \in B$, também é dita função projeção, porém agora na segunda componente. Em geral, é possível estender o conceito da definição de função projeção para quaisquer produtos cartesianos de n componentes, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, fazendo a projeção em qualquer um dos componentes. Em outras palavras, se $1 \leq i \leq n$ e $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i$ definida por $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_i$, é também uma função projeção na componente i. Poderíamos estender ainda mais o conceito de função projeção e fazer a projeção não só em uma das componentes e sim, em duas ou mais para uma função de n variáveis, com $n \geq 2$. É muito comum função projeção na geometria analítica ou mesmo no cálculo vetorial em funções de várias variáveis, por exemplo, a projeção dos pontos do $\mathbb{R}^3$ no plano $\mathbb{R}^2$.

Um observação importante a fazer é notar que a função inclusão pode ser vista invertendo o domínio e a imagem da função projeção. Sejam os conjuntos A e B não vazios e com a garantia que $0 \in B$. A função $f : A \longrightarrow A \times B$ definida por $f(a) = (a, 0)$ é uma função inclusão, pois nesse caso, temos a função identidade na primeira componente e a segunda componente fixa com entrada zero. Note que nesse contexto, não está errado escrever $A \subset A \times B$. Um exemplo clássico desse entendimento é a forma que fazemos para ver o conjunto dos números reais como subconjunto do conjunto dos números complexos. De fato, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, pois pela definição de um número complexo podemos escrever $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x, 0)$, onde a identificação $x = (x, 0)$ é um número real e $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$.

2.5 Função Linear

Definição 2.5. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função linear se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = ax, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

É comum os livros didáticos definirem a função linear para valores de $a \neq 0$. Essa definição não está errada, contudo incompleta uma vez que para $a = 0$ a função nula é um caso particular da função linear.

> "Toda função do tipo $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{R}^*$, é chamada de **função linear**." (PAIVA, 2015, p.161).

Na matemática, funções lineares estão ligadas diretamente com proporcionalidade. Vamos tratar por um momento de proporcionalidade, assunto imensamente difundido na história da humanidade.

Antônio Trajano que escreveu o texto de primeira edição 1883, entitulado *Aritmética Progressiva*, dá a seguinte definição:

> "Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e , no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais" (LIMA, 2013, p.84).

Podemos escrever essa definição de outra maneira, utilizando-se do conceito de função, isto é, uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma proporcionalidade se, e somente se, para quaisquer $k, x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(k \cdot x) = k \cdot p(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(k \cdot x) = \frac{f(x)}{k}$, se $k \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta e de imediato notemos que, como $k, x \in \mathbb{R}$, então podemos escrever $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ ou $f(k \cdot x) = x \cdot f(k)$.

Ora, para a proporcionalidade direta, se $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, para todo $k, x \in \mathbb{R}$ e tomarmos $a = f(1)$, então $f(k) = f(k \cdot 1) = k \cdot f(1) = k \cdot a = a \cdot k, \ \forall \ k \in \mathbb{R}$. Em uma notação mais adequada, podemos escrever $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a função f é linear e representa proporcionalidade direta. Por exemplo, se um produto custa a reais, então x unidades desse produto custam ax reais. A constante a é chamanda de *constante de proporcionalidade*.

Uma observação importante para se fazer das funções lineares é que, com exceção do eixo das ordenadas, há uma correspondência um-a-um entre funções lineares e as retas que passam pela origem do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

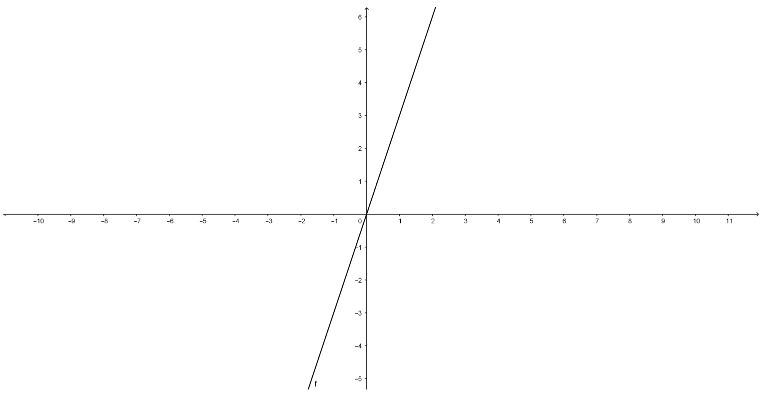


Figura 2.3: Gráfico da função linear $f(x) = 3x$.

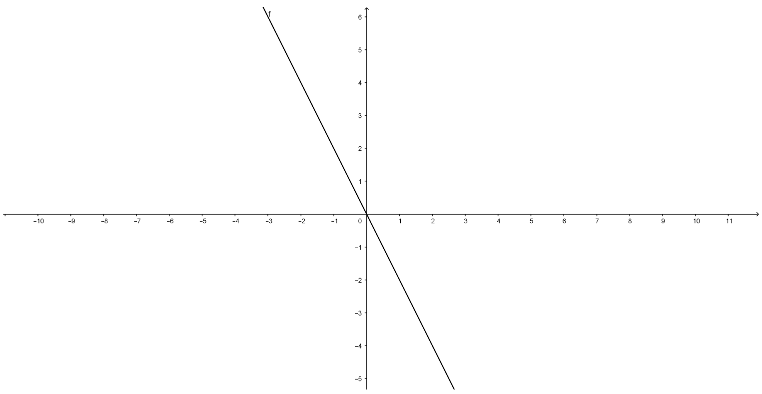


Figura 2.4: Gráfico da função linear $f(x) = -2x$.

2.6 Função Afim

Definição 2.6. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.2. Os exemplos mais conhecidos de funções afins, e que já, na sua maioria definimos acima são: a ***função idendidade***, as ***funções lineares***, que remetem ao proplema de proporcionalidade, as ***funções constantes***, entre elas a ***função nula*** e as ***translações*** da função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Trivialmente o domínio e a imagem de uma função afim é o conjunto dos números reais e não necessariamente devemos ter os coeficientes a e b fornecidos diretamente. Com relação ao coeficiente a podemos encontrá-lo a partir do conhecimento prévio dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ com x_1 e x_2 arbitrários e distintos. De fato, dados $f(x_1) = ax_1+b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, então

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \ &\Leftrightarrow \ f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \\ &\Leftrightarrow \ a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, dados x e $x + h$ com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é chamado de *taxa de variação* da função f no intervalo $[x, x + h]$.

Já a respeito do coeficiente b, é possível encontrá-lo à partir do conhecimento prévio de qualquer valor $f(x)$ e conhecido o coeficiente a. Contudo, podemos obtê-lo sem conhecer o coeficiente a. Para tanto, basta verificar que em toda função afim $f(x) = ax+b$, o valor de b pode ser encontrado fazendo $x = 0$, isto é, $f(0) = b$.

Um outro resultado importante que está implícito refere-se a unicidade dos coeficientes a e b. Dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ com $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, os valores encontrados dos coeficientes a e b são únicos tais que, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$ e portanto define uma única função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo x.

Teorema 2.1. *Toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.*

Demonstração. Suponha que r é uma reta não vertical e sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos de r. Como r não é vertical, então $x_1 \neq x_2$. De acordo com a geometria analítica, temos que todos os pontos (X, Y) de r são descritos por

$$(X, Y) = \alpha\vec{u} + P,$$

sendo que $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta, P é um ponto da reta e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tomando o vetor diretor da reta como sendo o vetor $\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e tomando o ponto P como sendo o ponto A, temos que

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \alpha(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_1, y_1) \\ &= (\alpha(x_2 - x_1) + x_1, \alpha(y_2 - y_1) + y_1). \end{aligned}$$

Chamando $x = \alpha(x_2 - x_1) + x_1$ temos que como $\alpha \in \mathbb{R}$ também $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\alpha = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ e assim

$$\begin{aligned} \alpha(y_2 - y_1) + y_1 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) + y_1 \\ &= \frac{x}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) - \frac{x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) + y_1 \\ &= x\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} + \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Como $\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$ e $\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}$ são dois números reais fixos, podemos chamá-los de forma mais econômica de a e b respectivamente. Segue então que todos os pontos (X, Y) da reta são determinados por

$$(X, Y) = (x, ax + b),$$

e isto significa que se os pontos (X, Y) da reta forem pontos (x, y) do gráfico de uma função $y = f(x)$ é obrigatório que se tenha $y = ax + b$ com $x \in \mathbb{R}$, ou seja, todos os pontos da reta são pontos do gráfico de uma função afim. $\square$

O recíproco é também verdadeiro e mais fácil de ser provado.

Teorema 2.2. *O gráfico de uma função afim é uma reta não vertical.*

Demonstração. Suponha $f(x) = ax + b$ uma função afim com $a, b \in \mathbb{R}$. Então os pontos do gráfico de f são pontos da forma

$$(x, y) = (x, ax + b) = x(1, a) + (0, b),$$

que são também os pontos de uma reta com vetor diretor $\vec{u} = (1, a)$ e passa pelo ponto $(0, b)$. Fazendo x variar em $\mathbb{R}$ obtemos todos os pontos da reta.

Naturalmente esta reta não é vertical pois a primeira coordenada do vetor diretor $(1, a)$ é não nula. $\square$

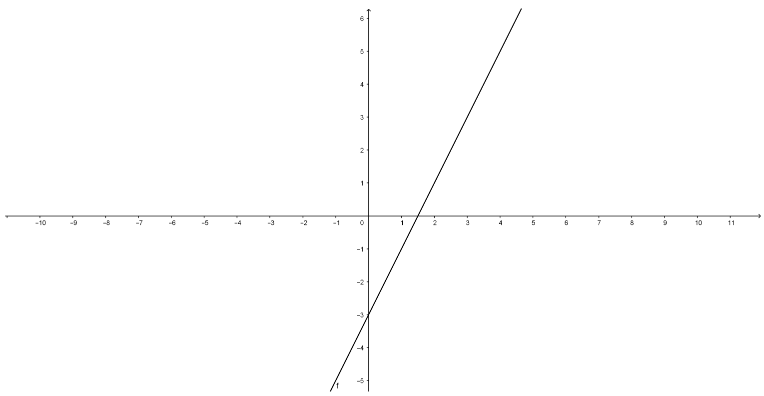


Figura 2.5: Gráfico da função linear $f(x) = 2x - 3$.

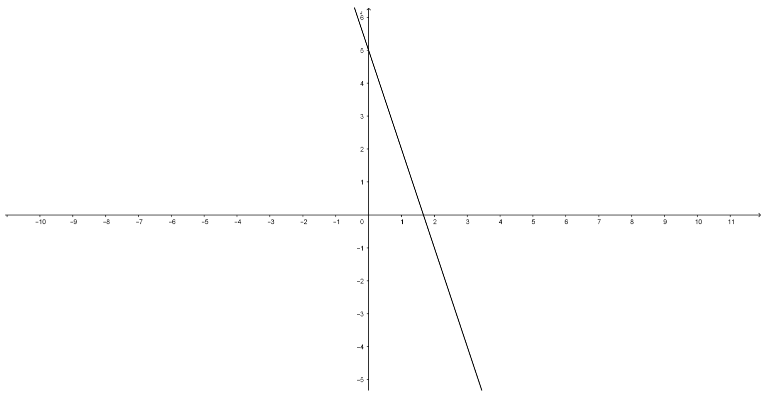


Figura 2.6: Gráfico da função linear $f(x) = -3x + 5$.

Vejamos agora na íntegra como um dos livros citados anteriormente definine a função afim.

> "Toda função do tipo $f(x) = ax + b$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**." (PAIVA, 2015, p.158).

Uma constatação importante a se fazer é que dentre as seis referências que estamos trabalhando, duas fazem menção a função afim como função polinomial do 1º grau em suas definições, com a exigência do coeficiente $a \neq 0$. As outras quatro definem a função afim como nós fizemos na definição 2.1, atribuindo assim a situação de que quando $a \neq 0$ na expressão $f(x) = ax + b$, termos simplesmente um caso particular dentre todas as funções afins.

Observação 2.2. Segundo Lima (2013), há um erro ao chamar a função afim como *função polinomial do primeiro grau*. Grau está relacionado a polinômio e é certo que quando $a \neq 0$ temos a função afim coincidindo com a definição da função polinomial do primeiro grau, porém apesar de muito frequente não deixa de ser um caso particular. O que devemos entender é que a função polinomial do primeiro grau e a função afim são funções diferentes apesar de extremamente semelhantes. Resumindo, toda função polinomial do primeiro grau é uma função afim, porém nem toda função afim é uma função polinomial do primeiro grau. Por exemplo, a função constante $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma função afim, contudo não é uma função polinomial de primeiro grau uma vez que seu grau é zero.

Observação 2.3. Uma outra observação que Lima (2013) faz, é o fato de não ser adequado chamar o escalar a de *coeficiente angular* da função afim. Em muitos contextos não há ângulo no problema trabalhado, o ângulo só vem ao caso quando olhamos para o gráfico da função e mesmo assim dependem das grandezas x e $f(x)$.

2.7 Função Quadrática

Definição 2.7. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função quadrática quando existem constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notemos inicialmente que os coeficientes a, b e c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Ora, isso quer dizer que, dados $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ com $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. De fato, sejam $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, tome $x = 0$, logo temos $c = c'$. Simplificando c e c' temos $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$. Suponhamos agora que $x \neq 0$, assim a igualdade $x(ax + b) = x(ax + b')$ implica em $ax + b = a'x + b'$ dividindo ambos os lados por x. Por fim, fazendo $x = 1$ e depois $x = -1$ temos

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ -a + b = -a' + b' \end{cases}$$

de onde conluímos que $a = a'$ e $b = b'$.

Não é necessário exigir que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, para que o resultado $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$ seja verdadeiro. Isso já pode ser demonstrado desde que valha para três valores distintos de x. Na discussão anterior chegamos nas igualdades dos coeficientes, meramente sabendo que são verdadeiras as igualdades: $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ e $f(-1) = g(-1)$. Ora, poderíamos ter escolhidos outros três valores distintos de x que chegaríamos nos resultados em questão, logo se $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são tais que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, com x_1, x_2 e x_3 distintos, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$ e consequentemente $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Antes de continuarmos nossa atenção na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, olhemos para o trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Disso temos,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Chamamos essa maneira de escrever de *forma canônica* do trinômio do segundo grau. Com mais alguns passos chegamos facilmente nas raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. De fato, como $a \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac-b^2}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Note que, por termos $\sqrt{b^2-4ac}$ seu valor só estará definido no conjunto dos números reais, se $b^2-4ac \geq 0$. Nesse caso, a equação $ax^2+bx+c=0$ adimite pelo menos uma solução real. Por outro lado, se $b^2-4ac<0$ significa que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2+bx+c=0$. Matematicamente escrevemos o *discriminante* $\Delta = b^2-4ac$.

Considere $a>0$ e a forma canônica de $f(x)$,

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Podemos encontrar a partir de seus coeficientes o valor no domínio da função tal que ela resulte no valor mínimo da imagem, isto é, encontrar $x_v \in \mathbb{R}$ tal que, $f(x_v) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para tanto, basta notar que a expressão

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

assume valor mínimo quando $(x+\frac{b}{2a})^2=0$, pois $a>0$ e nas duas parcelas que temos da forma canônica, uma é constante, e portanto tem valor fixo, e a outra que depende de x é sempre maior ou igual a zero. Disso, temos

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.
\end{aligned}$$

Portanto, quando $a>0$, o menor valor da função $f(x)=ax^2+bx+c$ é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$
\begin{aligned}
&= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{4ac - b^2}{4a} \\
&= -\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}
$$

Analogamente, para $a < 0$ temos que x_v fornece o valor máximo de $f(x)$, isto é, $f(x_v) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Disso, podemos concluir que a imagem da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, fica determinda da seguinte forma:
1) Se $a > 0$, então $Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.
2) Se $a < 0$, então $Im(f) = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

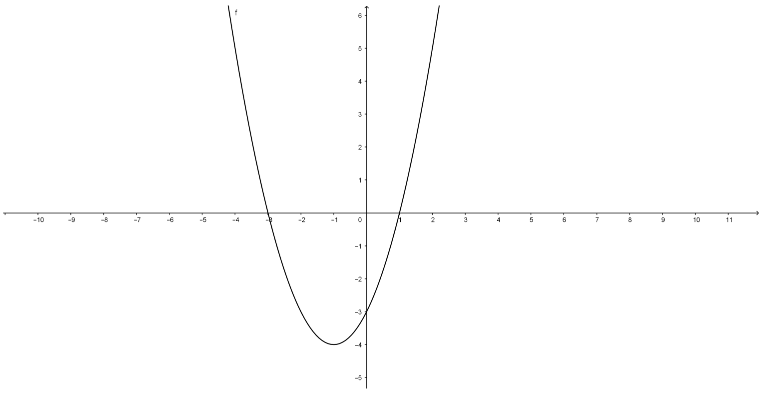


Figura 2.7: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

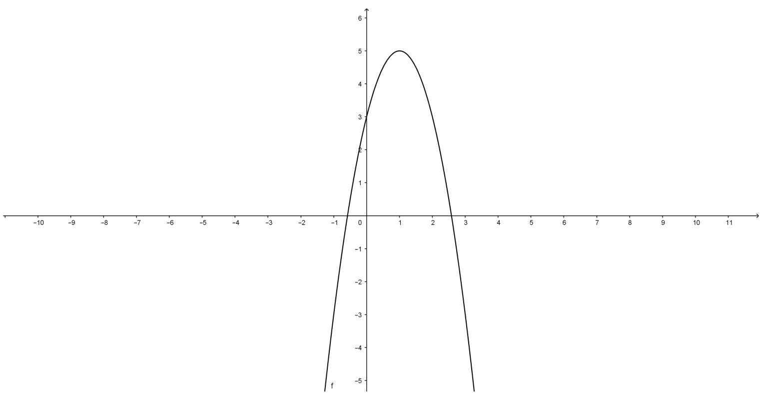


Figura 2.8: Gráfico da função quadrática $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.

Vamos trazer aqui uma definição de um dos livros didáticos abordados anteriormente.

> "Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais, a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2+bx+c$, para todo $x \in \mathbb{R}$." (MODERNA, 2013, p.117).

Observação 2.4. Aqui cabe dizer que toda função quadrática é também uma função polinomial de grau dois, pois como veremos a seguir a definição de função polinomial quando $n = 2$ irá conincidir com a definição que fizemos para função quadrática. Cabe ao leitor ficar atento a essas nomeações, para de forma correta interpretar as definições e assim usar as termologias adequadas.

2.8 Função Potência

Definição 2.8. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função potência, se é da forma $f(x) = x^k$, onde k é uma constante real.

Note inicialmente que na definição acima, estamos usando um subconjunto A dos reais, pois incidirão restrições para o domínio conforme a forma da potência.

Devemos analisar com cautela esse expoente k. Precisamos tomar o cuidado de observar que, dependendo do valor de k, temos situações específicas para a função potência, e são esses casos que iremos tratar agora. É bom registrar que, não é foco desse trabalho detalhar a construção da definição do valor a^b, com $a, b \in \mathbb{R}$ (com restrições para a) e sim, usar dessa definição para abordar os casos da função potência separadamente. Para tanto, nos apossaremos, quando pertinente, de uma das três definições a seguir.

Definição 2.9. Dados $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, o número real a^n, chamado de n-ésima potência de a é dado recursivamente por

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a, & \text{se } n > 0 \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Para $a = 0$, o número a^n só tem sentido se $n \in \mathbb{N}^*$, e nesse caso $0^n = 0$.

Definição 2.10. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 2$. Definimos a potência $a^{\frac{m}{n}}$ como sendo o número real

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Definição 2.11. Sejam a e x números reais com $a > 0$, $a \neq 1$ e os conjuntos

$$\mathcal{A} = \left\{ a^{\frac{m}{n}} \mid \quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \ \text{ e } \ \frac{m}{n} < x \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ a^{\frac{p}{q}} \mid \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \text{ e } \ \frac{p}{q} > x \right\}.$$

Definimos a potência a^x, como sendo

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{se } x \in \mathbb{Q},$$

$$a^x = \inf\{\mathcal{A}\} = \sup\{\mathcal{B}\}, \quad \text{se } x \in \mathbb{I} \ \text{ e } \ 0 < a < 1$$

e como sendo

$$a^x = \sup\{\mathcal{A}\} = \inf\{\mathcal{B}\}, \quad \text{se } x \in \mathbb{I} \ \text{ e } \ a > 1.$$

Existem outras técnicas de se definir o valor de a^x com a um número real positivo diferente de um e x um número real. Em Lima (2013) o leitor encontrará com detalhes a construção do valor de a^x para x natural, inteiro, racional e irracional, este último definido a partir de limites de sequências de números racionais.

Iremos agora analisar a função $f(x) = x^k$, dependendo do subconjunto dos reais que a constante k pertence.

2.8.1 k é um número natural

Seja $k = n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Nesse caso trivial, a função potência f é dada por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^n$, onde $f(x)$ é calculado fazendo $x^{n-1} \cdot x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $n = 0$, então a função potência resulta na função constante $f(x) = x^n = x^0 = 1$, sempre que $x \neq 0$.

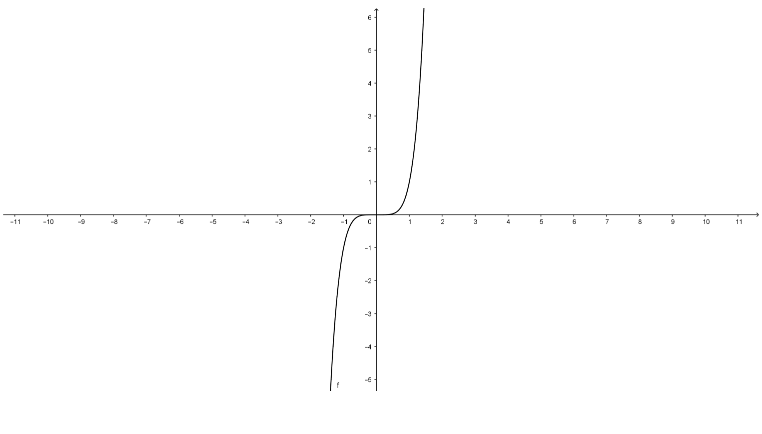


Figura 2.9: Gráfico da função potência $f(x) = x^5$.

2.8.2 k é um número inteiro negativo e diferente de zero

Seja $k \in \mathbb{Z}_-^*$. Então, existe um número natural n, tal que $k = -n$. Assim, a função potência $f(x) = x^k$, pode ser escrita como $f(x) = x^{-n}$ e, portanto

$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad \text{onde} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que f só está definida para $x \in \mathbb{R}^*$. Logo, $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

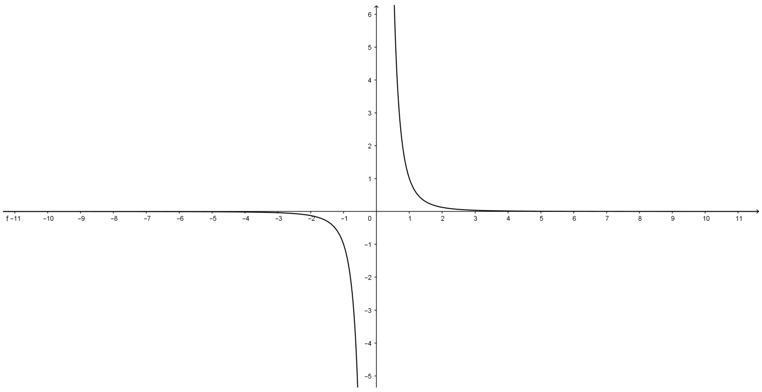


Figura 2.10: Gráfico da função potência $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

2.8.3 k é um número racional

Seja $k \in \mathbb{Q}$. Então, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, tal que $k = \frac{m}{n}$ e $\frac{m}{n}$ irredutível. Assim, a função potência $f(x) = x^k = x^{\frac{m}{n}}$, deve ser analisada para quatro casos: $\frac{m}{n} > 0$ e $\frac{m}{n} < 0$ para n par e n ímpar.

Se n é impar e $\frac{m}{n} > 0$, então $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ estará definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e, portanto $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

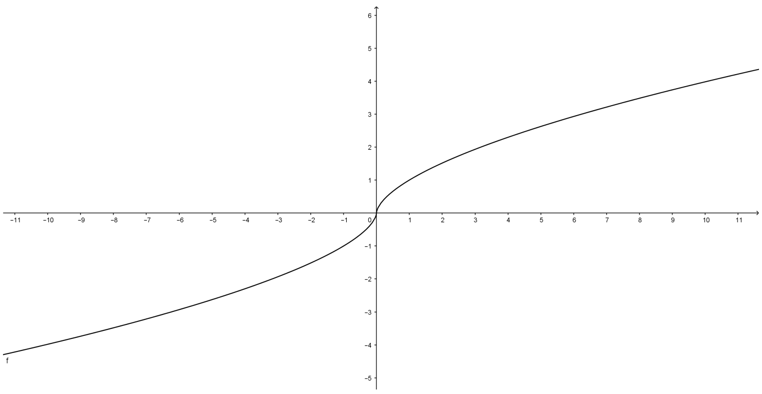


Figura 2.11: Gráfico da função potência $f(x) = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$.

Se n é impar e $\frac{m}{n} < 0$, então $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ estará definida para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e, portanto $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

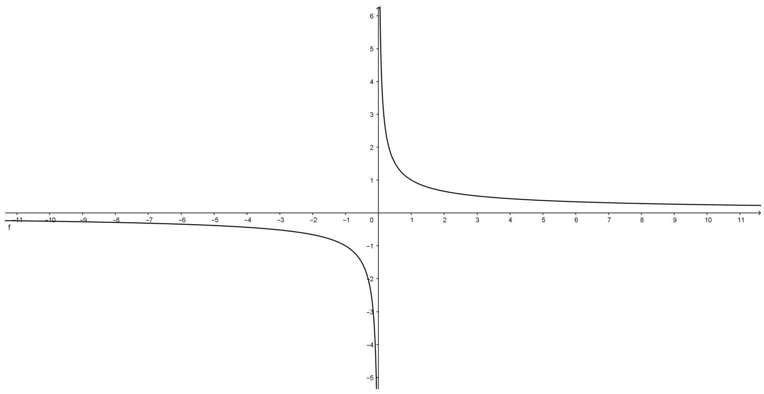


Figura 2.12: Gráfico da função potência $f(x) = x^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

Por outro lado, se n é par e $\frac{m}{n} > 0$, $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ estará definida para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e, daí $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

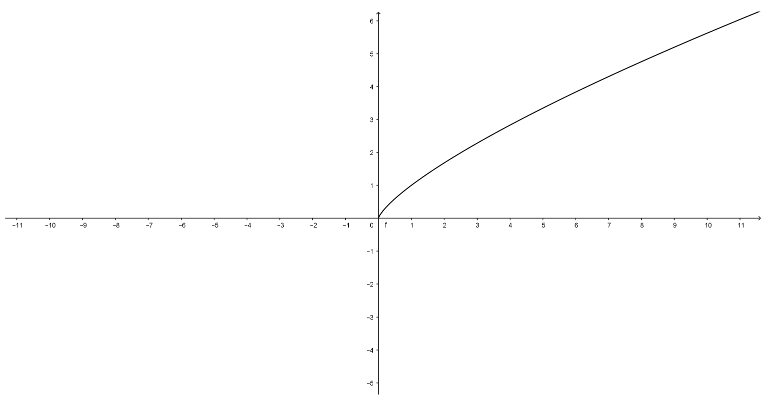


Figura 2.13: Gráfico da função potência $f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$.

Se n é par e $\frac{m}{n} < 0$, $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ estará definida para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ e, daí $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

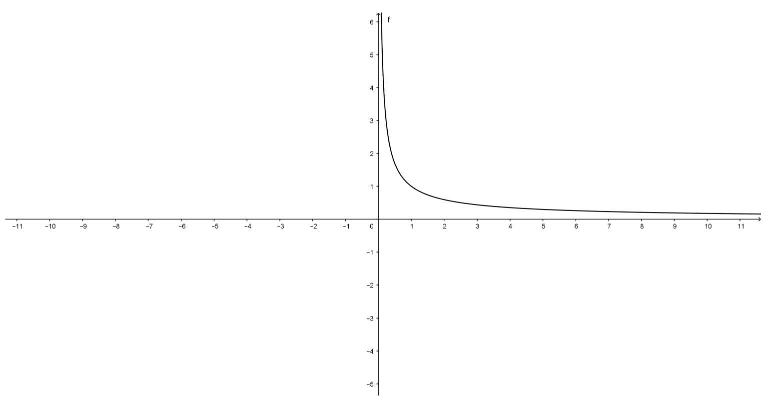


Figura 2.14: Gráfico da função potência $f(x) = x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

A seguir, definiremos um caso particular de função potência que possui o nome especial de ***função raiz***.

Definição 2.12. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, é dita função raiz se, $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Isto é,

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Note que o domínio dessa função dependerá do número n e nesse caso específico x pode ser igual a zero. Logo, como dissera, se n for ímpar, $A = \mathbb{R}$, contudo se n for par, então $A = \mathbb{R}_+$.

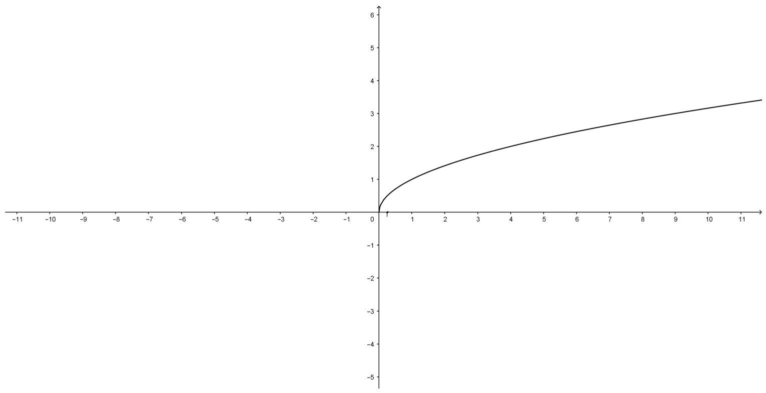


Figura 2.15: Gráfico da função potência $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

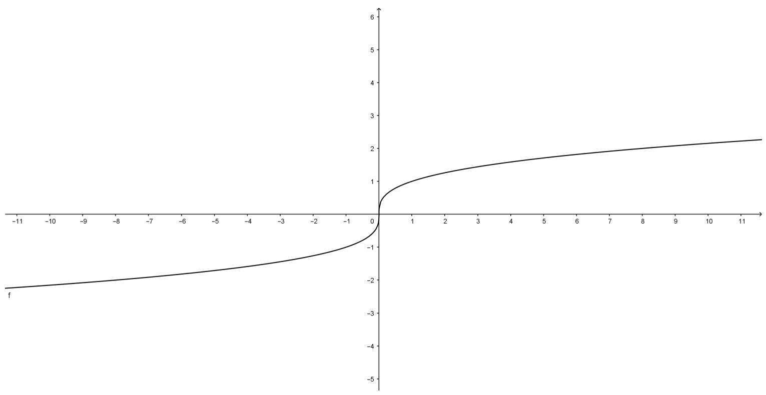


Figura 2.16: Gráfico da função potência $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

2.8.4 k é um número Irracional

Seja $k \in \mathbb{I}$. Nessa situação devemos separar em dois casos: $k > 0$ e $k < 0$.

Se $k > 0$, a função potência $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^k$ estará definida para todo $x \in \mathbb{R}_+$, onde para $x = 0$, $f(0) = 0^k = 0$. Por outro lado, se $k < 0$ a função potência $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^k$ só estará definida para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$. Em ambos os casos iremos calcular para cada valor $x = a$ e $x \neq 0$, a imagem

$$f(a) = a^k = \inf\{\mathcal{A}\} = \sup\{\mathcal{B}\}, \quad \text{se} \;\; 0 < a < 1$$

e

$$f(a) = a^k = \sup\{\mathcal{A}\} = \inf\{\mathcal{B}\}, \quad \text{se} \;\; a > 1$$

onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é como na definição 2.11.

Note que para o domínio, concluímos $A = \mathbb{R}_+$ se $k > 0$ e $A = \mathbb{R}_+^*$ se $k < 0$, agora se $x \in \mathbb{R}_-^*$ a função não estará definida.

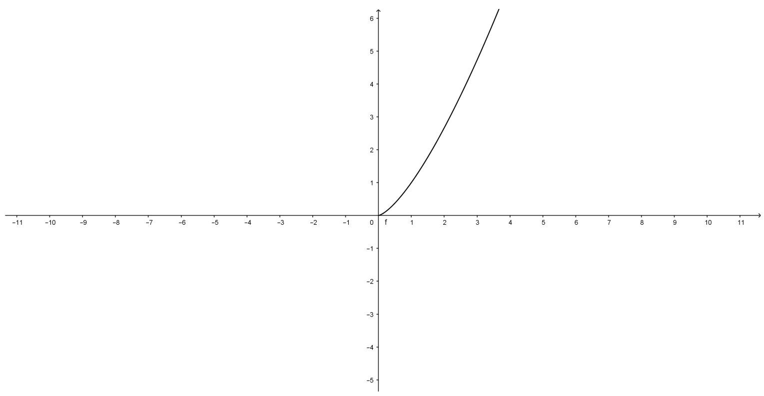


Figura 2.17: Gráfico da função potência $f(x) = x^{\sqrt{2}}$.

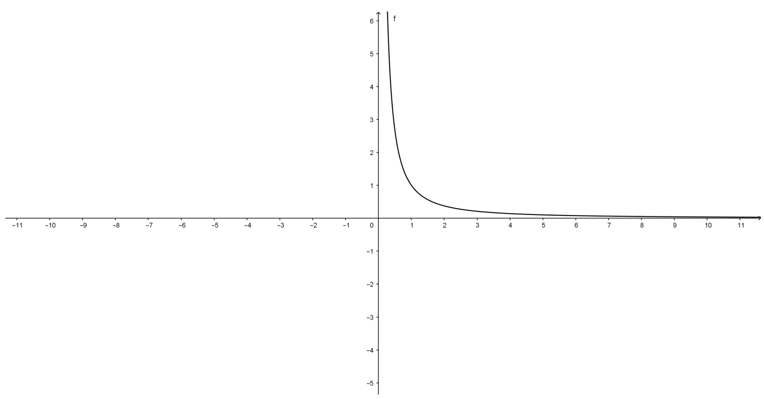


Figura 2.18: Gráfico da função potência $f(x) = x^{-\sqrt{2}}$.

2.9 Função Polinomial

Definição 2.13. Uma função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função polinomial quando são dados números reais $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem -se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Dizemos que a função p tem grau n, se n é o maior expoente e $a_n \neq 0$.

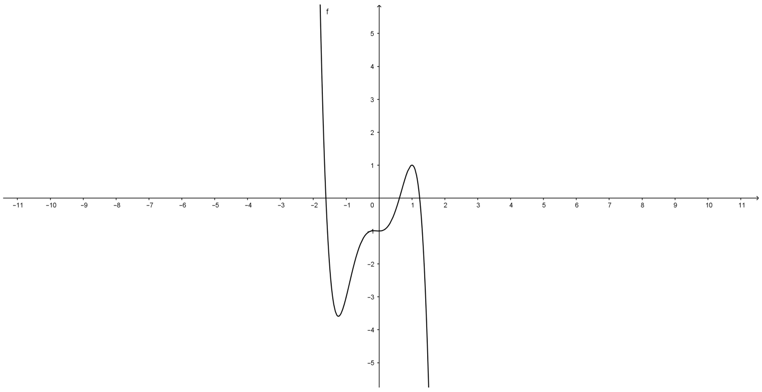


Figura 2.19: Gráfico da função polinomial $p(x) = -2x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 - 1$.

Uma outra definição que temos para um caso especial de função polinomial é da função p chamada *identicamente nula*, que ocorre quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Olhando para a definição de função polinomial, vemos que a função identicamente nula não tem grau. Já a função $p(x) = a_0$, onde a_0 é um número real fixo diferente de zero, é uma função polinomial de grau zero. Disso, note que as funções polinomiais do tipo $p(x) = b_1x + b_0$, com $b_1 \neq 0$ e $q(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$ tem, respectivamente, grau um e zero, porém ambas são funções afins. Por isso, a insistência em enfatizar que não podemos nomear funções afins como funções polinomiais do primeiro grau.

Uma função polinomial p, identicamente nula, pode ser escrita da seguinte maneira

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$$

ou simplesmente,

$$p(x) = 0.$$

Definição 2.14. Duas funções polinomiais $p(x)$ e $q(x)$ são iguais se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes.

Observação 2.5. Existe uma dirença sutil entre o conceito de função polinomial, o conceito de polinômio e o conceito de equação polinomial. É verdade que esses conceitos são entes muito próximos, e por isso muitas definições e resultados são aproveitados de um para o outro. Entretando, devemos perceber por exemplo que não faz sentido dizer que um polinômio é injetor (conceito que trataremos no capítulo 3), termo técnico atríbuido somente para funções. Já no caso de equações polinomiais, essa se refere-se unicamente em resolver ou simplesmente escrever uma expressão algébrica de igualdade.

Definição 2.15. Dizemos que um número real k é raiz da função polinomial $p(x)$ se, e somente se, $p(k) = 0$.

Não mostraremos nesse trabalho, contudo pode-se provar que soma e o produto de funções polinomiais são funções polinomiais. O leitor pode encontrar esse e outros resultados sobre polinômios em Neto (2016). Precisaremos desse resultado para a abordagem a seguir.

Definição 2.16. Dizemos que uma função polinomial $p(x)$ é *divisível* por uma função polinomial $q(x)$ se, e somente se, existir uma função polinomial $s(x)$ tal que $p(x) = q(x) \cdot s(x)$. Nesse caso, podemos dizer também que $p(x)$ é *divisível* por $s(x)$.

Um caso especial de produto é

$$(x-r)(x^{n-1} + rx^{n-2} + ... + r^{n-2}x + r^{n-1}) = x^n - r^n,$$

o que mostra que $x^n - r^n$ é divisível por $x - r$.

Seja $p(x)$ como na definição 2.13, ou seja, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $r \in \mathbb{R}$, então $p(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0$. Assim para todo $x \in \mathbb{R}$ temos

$$p(x) - p(r) = a_n(x^n - r^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - r^{n-1}) + ... + a_1(x - r).$$

Do fato de cada parcela da soma acima ser divisível por $x - r$, temos que existe um polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$, uma vez que p tem grau n, tal que

$$p(x) - p(r) = (x - r)q(x).$$

Note em particular que, se $p(r) = 0$, então $p(x) = (x - r)q(x)$. Obviamente que se $p(x) = (x - r)q(x)$ então, $p(r) = 0$.

Ora, essa igualdade diz que, r é raiz de p, isto é, $p(r) = 0$ se, e somente se, $p(x)$ é *divisível* por $x - r$. Podemos generalizar esse resultado dizendo que $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$ são raízes de p se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ tivermos

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_r)q(x),$$

onde q terá grau $n - k$ uma vez que p tem grau n.

Não temos em nenhum dos seis livros aqui citados a abordagem de funções polinomiais. O que existe, é a abordagem em outros volumes da coleção destinada para o ensino médio, (como já dissemos, esse livros são compostos de outros volumes que compõe a coleção, porém sem mais o foco em discutir funções) o conteúdo de *Polinômios*, e há a referência em atribuir em alguns casos e contextos o conceito de *função polinomial*.

2.10 Função Definida por Partes

Definição 2.17. Uma função $f : A \longrightarrow B$, é uma função definida por partes, se essa função é formada utilizando-se de n sentenças $f_1, f_2, \ldots, f_n$, com $n \geq 2$, onde cada sentença f_n estará definida para valores de x de um subconjunto A_n, tal que $A_n \subsetneq A$. Além disso, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$ e $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$. Denotaremos f da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{se } x \in A_2 \\ \vdots & \\ f_n(x), & \text{se } x \in A_n. \end{cases}$$

Podemos notar que, a sentença muda dependendo do valor x, isto é, para cada $x \in A$ devemos procurar o subconjunto A_k com $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in A_k$. Dessa forma, teremos uma função específica que definirá a imagem do elemento x. Em outras palavras, se $x \in A$ implicar que $x \in A_k$, então $f(x) = f_k(x)$.

Exemplo 2.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^3, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Nesse exemplo temos três sentenças definidas em intervalos de $\mathbb{R}$. A união desses intervalos resulta no conjunto dos números reais e a intersecção o conjunto vazio. Além disso, para cada valor $x \in \mathbb{R}$ temos uma, e somente uma, sentença que define a imagem $f(x)$. À luz do entendimento podemos fazer uma analogia com a definição e verificar que, nesse caso, $n = 3$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f_3(x) = x^3$, $A_1 =]-\infty, -1]$, $A_2 =]-1, 1[$ e $A_3 = [1, +\infty[$.

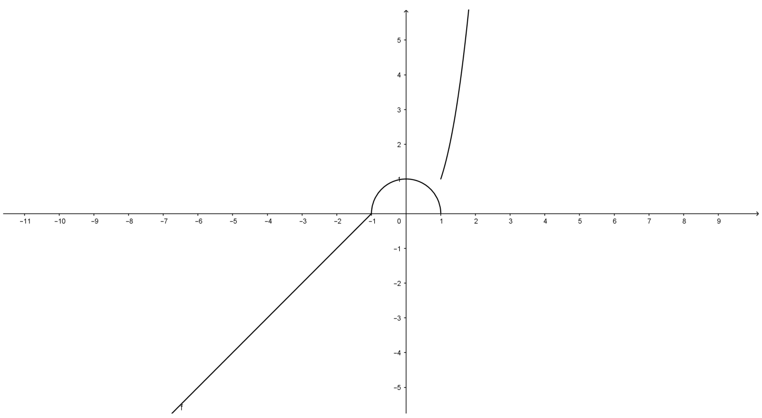


Figura 2.20: Gráfico da função definida por partes do exemplo 2.3.

Nos livros didáticos que estamos mencionando não há uma definição específica de funções definidas por partes. O que encontramos é uma menção a função definida por partes tomando como base exemplos contextualizados ou quando existe a explanação de função modular e a tomam como exemplo de função definida por partes.

2.11 Função Modular

Antes de fazermos a definição da função modular, faremos a definição do *valor absoluto* ou *módulo* de um número real a.

Definição 2.18. O *valor absoluto* ou *módulo* de um número real a, que denotaremos por $|a|$, é o número real não negativo dado por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Sabemos que o resultado de uma raiz quadrada gera sempre um valor maior ou igual a zero. Sabemos também que $m^2 = (-m)^2$, para todo $m \in \mathbb{R}$, e que se $r \geq 0$ e $\sqrt{r} = s$, então $s^2 = r$. Seja então $m \in \mathbb{R}$. Logo, se $m \geq 0$, então $\sqrt{m^2} = m$. Por outro lado se $m < 0$, então $-m > 0$, e portanto $\sqrt{m^2} = -m$. Disso e com a definição de módulo, temos que

$$\sqrt{m^2} = |m|, \ \forall \ m \in \mathbb{R}.$$

Um outro resultado bastante conhecido na matemática é a **desigualdade triangular**, que possui várias formulações com esse mesmo nome. Mostraremos uma dessas formulações da desigualdade triangular no teorema a seguir.

Teorema 2.3. *Se a e b forem números reais quaisquer, então*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demonstração. Note que dado $a, b \in \mathbb{R}$, então $ab \leq |ab|$. Disso temos,

$$\begin{aligned} ab \leq |ab| \quad &\Leftrightarrow \quad 2ab \leq 2|ab| \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |a + b| \leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

□

Definição 2.19. A função modular é a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note de imediato que o contradomínio da função modular é o conjunto $\mathbb{R}$, porém pela definição de módulo temos que a imagem é o subconjunto $\mathbb{R}_+$ dos reais. Note também que, a função modular é um exemplo clássico de uma função definida por partes.

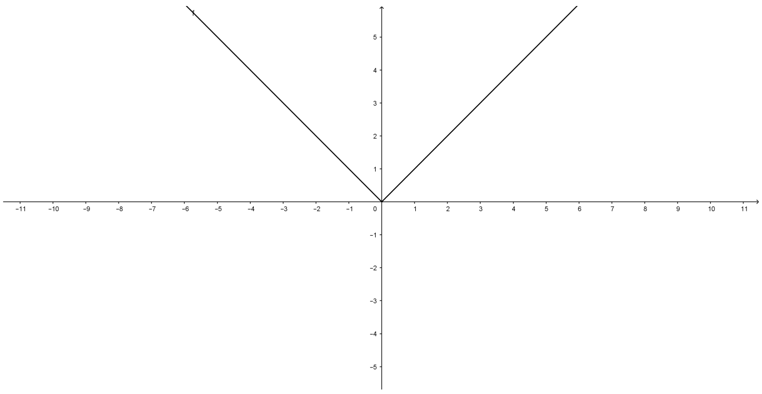


Figura 2.21: Gráfico da função modular.

Uma observação que podemos fazer é que, usando a desigualdade triangular, podemos afirmar que se $f(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2), \ \forall \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

É muito comum constar nos livros didáticos a função modular. Ela surge quase que como uma consequência imediata ao se tratar de *valor absoluto*, e tem, a definição muito semelhante a que fizemos acima. Contudo, em um dos livros mencionados, temos uma definição direnciada e não muito comum. Ele trata a função módulo como um exemplo de funções que ele define como *funções poligonais ou afins por partes.* Essa definição abrange a ideia de um conjunto de duas ou mais, semirretas e segmentos de retas, formando o gráfico dessa função. Veja a seguir como é feita essa definição.

> "Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal." (DANTE, 2014, p.95).

É verdade que, para se obter uma função como nessa definição é necessário um conjunto de funções afins, e que a função modular é um exemplo disso. Porém, observe que, esta definição aborda de uma única vez dois conceitos que tratamos aqui: a função definida por partes que o autor se restringe ao caso de função afim por partes (e o autor deixa evidente que é um caso particular) e a função modular. É bom enfatizar que as funções afins por partes são um subconjunto do conjunto das funções definidas por partes. Em sua definição de funções afins por partes, o autor considera as senteças $f_1, f_2, ..., f_n$ da definição 2.9 somente funções afins. Disso, destacamos aqui, que a forma como esse livro didático inicia o tratamento de função modular é bem singular.

2.12 Função Algébrica

Definição 2.20. Seja $p : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial não nula. Chamaremos a operação algébrica $[p(x)]^k$, com $k \in \mathbb{Q}$ de potência racional de uma função polinomial.

Como k é racional, temos que existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tal que $k = \frac{a}{b}$ com $\frac{a}{b}$ irredutível. Logo, temos dois casos a considerar para a expressão $[p(x)]^k$ ser uma função $q(x) = [p(x)]^k$. Se b é ímpar, então $q(x)$ está definida para todos os reais, portanto $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Agora, se b é par, então $q(x)$ só estará definida para valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que $[p(x)]^a \geq 0$. Então, se tomarmos o conjunto A, formado por todos elementos $x \in \mathbb{R}$, onde $[p(x)]^a \geq 0$, então q será uma função $A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.21. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita função algébrica se, e somente se, é construída a partir de finitas operações algébricas de somas, produtos e potências racionais de funções polinomiais.

Note inicialmente que, quando a definição trata de somas, implicitamente está contemplando as operações de diferenças entre funções polinomiais, pois se p e q são funções polinomiais, então $p - q = p + (-q)$. Analogamente, ao referir-se ao produto, temos a abrangência da operação quociente entre funções polinomiais, pois se p e $q \neq 0$ são funções polinomiais, temos $\frac{p}{q} = \frac{1}{q} \cdot p = (q)^{-1} \cdot p$, e $(q)^{-1}$ está comtemplado na operação de potência racional.

Obviamente que, as funções polinomiais são funções algébricas. A seguir estão mais alguns exemplos de funções algébricas.

Exemplo 2.4. Seja $f : \mathbb{R} - \{\sqrt[3]{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2}$$

é uma função algébrica.

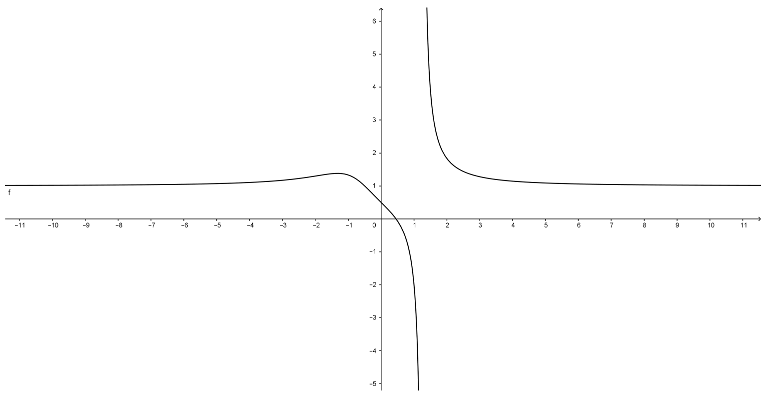


Figura 2.22: Gráfico da função algébrica do exemplo 2.4.

Exemplo 2.5. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 2},$$

também é uma função algébrica.

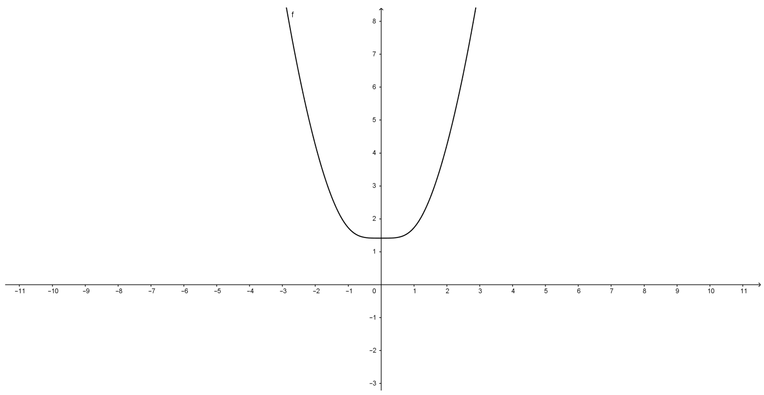


Figura 2.23: Gráfico da função algébrica do exemplo 2.5.

Exemplo 2.6. Na Teoria da Relatividade, a massa m de uma partícula em velocidade v é dada por

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}},$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Essa função $m = f(v)$ é uma função algébrica, uma vez que m_0 e c são constantes.

2.13 Função Racional

Definição 2.22. Uma função $f : A \longrightarrow B$ é dita função racional se, e somente se, é dada por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q são funções polinomiais e $q(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos observar que toda função polinomial é também uma função racional, para tanto, basta tomar $q(x) = 1$. Dizemos que a função racional é *própria* se o grau do função polinomial p é menor que o grau de q, e *imprópria* caso contrário.

Exemplo 2.7. Seja $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

é uma função racional.

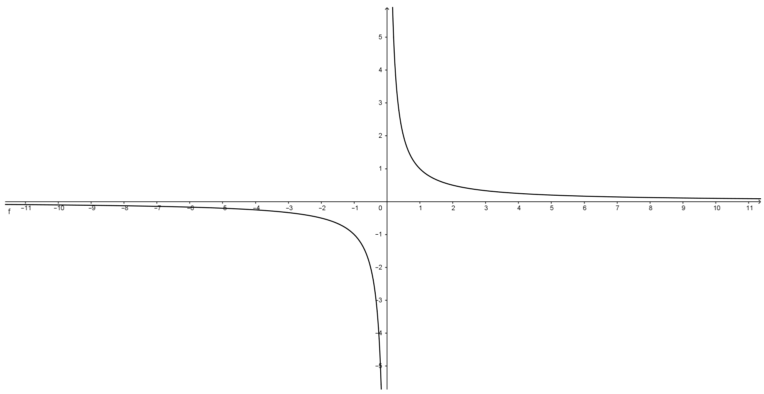


Figura 2.24: Gráfico da função racional do exemplo 2.7.

Exemplo 2.8. A função $f : \mathbb{R} - \{\sqrt[3]{4}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^3 - 4},$$

também é uma função racional.

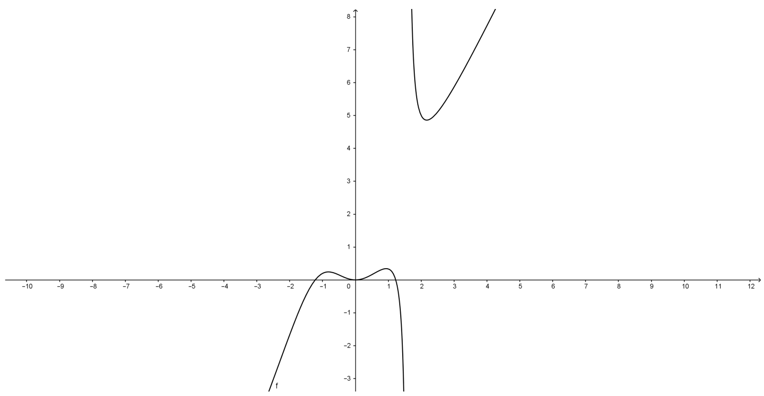


Figura 2.25: Gráfico da função racional do exemplo 2.8.

É fácil ver que, toda função racional é uma função algébrica, porém o contrário nem sempre é verdadeiro. Com efeito, dadas duas funções racionais, então a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão são funções racionais. Contudo, se extraímos a raiz n-ésima de uma função polinomial, podemos não obter uma função racional.

2.14 Função Exponencial

Antes de definirmos a função exponencial, recordamos ao leitor que na secção de função potência, trouxemos definições sobre números reais elevados a um expoente real. Nessa seção, estaremos embasados dessas definições para tratar de função exponencial.

Definição 2.23. Dado $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$ é dita função exponencial se, e somente se, é dada por

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inicialmente observe que a restrição de a ser direfente de 1, não significa que teríamos alguma impossibilidade matemática. A constante $a = 1$, implica que $f(x) = 1^x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, em vez de função exponencial, estaríamos diante de uma função constante.

Note também que, uma função exponencial $f(x) = a^x$ não é uma função potência. Aqui, a base a é fixa e o expoente x é nossa variável, contrário à função potência $f(x) = x^k$ onde a base x é a variável e o expoente k é fixo.

Podemos enunciar a função exponencial de outra forma e fazer algumas observações importantes sobre subconjuntos do domínio para facilitar a compreensão.

Definição 2.24. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$;
3) $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Dizer que f tem a propriedade 1, siginifica dizer que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ e, portanto f não assume valor zero, a menos que f seja a função nula. Como por definição $f \neq 0$, concluímos que não existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$. De fato, suponha $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo f será a função nula. Por outro lado, se f não é a função nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois temos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Olhando ainda para as propriedades da definição 2.24, vemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n$. De fato, tomando n como uma soma finita de parcelas iguais a um, temos

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n.$$

Note ainda que se $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, então multiplicando ambos os membros da desigualdade $a > 1$ por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Além disso, se $0 < a < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, e realizando o mesmo procedimento de multiplicação por a^n, temos $0 < a^{n+1} < a^n$.

Cabe aqui enfatizar que apesar de termos observado as propriedades por vezes restrita ao conjunto dos números naturais, elas são válidas para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

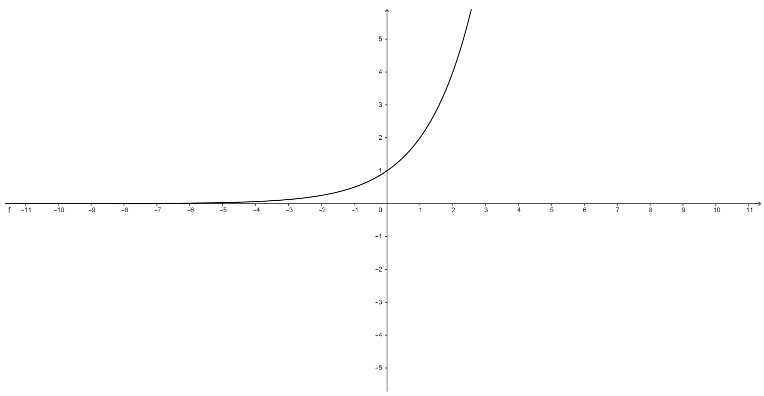


Figura 2.26: Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.

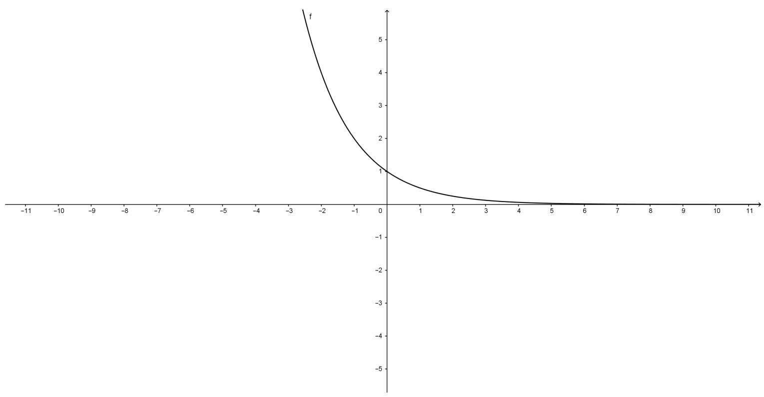


Figura 2.27: Gráfico da função exponencial $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Em todos os livros didáticos que tratamos, a função exponencial é definida como fizemos, com obviamente, restrições na construção do número real a^x com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Não é simples fazer uma transposição de conceitos e resultados de níveis mais avançados da matemática para o ensino médio. Contudo, na maioria da vezes os livros estão atendendo os conceitos gerais nas suas definições. A seguir, faremos o registro da definição de função exponencial de um desses livros que contém um erro em sua definição.

> "Considerando um número a real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$, representada por $f(x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam x, y reais:
> 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
> 2) $f(1) = a^1 = a$
> 3) $x < y \Rightarrow a^x < y$ quando $a > 1$
> 4) $x < y \Rightarrow a^x > y$ quando $0 < a < 1$."
> (DANTE, 2014, p.159).

Observação 2.6. Note que a terceira e quarta propriedade estão erradas. O leitor pode comparar com a definição que apresentamos outrora e constatar essa afirmação. Esse erro pode ter ocorrido por n motivos, e o mais provável seja um erro técnico de digitação, edição ou impressão. Porém, esse erro está no livro e para um professor desatento, essa correção pode não acontecer em sala de aula e isso gera um aprendizado distorcido da definição correta. É provável que essa correção fora feita pela grande maioria dos professores de matemática ao adotar esse material didático, pois não é dificil verificar com contra-exemplos que as propriedades como estão são falsas. De fato, no caso da propriedade 3, basta tomar $f(x) = 2^x$ e atribuir $x = 2$ e $y = 3$. Já para a propriedade 4, considere $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e atribua os mesmos valores $x = 2$ e $y = 3$.

Observação 2.7. Uma constatação que faço como docente com experiência no ensino fundamental e médio da rede básica de educação, é que as funções exponenciais, junto com as funções afins e quadráticas representam a grande maioria dos modelos matemáticos para resolução de problemas passíveis de modelação. Abordar um problema de nível factível à série em questão e chegar em um modelo exponencial traz aos alunos uma sensação de um feito extraordinário, e foi um feito desses que vivenciei como aluno que me levou a confirmar minha escolha em ser *Professor de Matemática*.

2.15 Função Logarítmica

Antes de definirmos a função logarítmica, vamos definir o logaritmo de um número real positivo x na base a.

Definição 2.25. Dados $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, o logaritmo de x na base a é o número real que a deve ser elevado para resultar em x, denotaremos esse número por $\log_a x$. Isto é,

$$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x.$$

Note inicialmente que por definição a forma de calcular o logaritmo de um número real positivo é usando potências, e isso só tem sentido para $a^y = x$ se $a > 0$ e $a \neq 1$. Matematicamante, na expressão $\log_a x = y$, a é chamado de base, x é chamado de logaritmando, e y de logaritmo de x na base a.

Definição 2.26. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita função logarítmica se, e somente se, é da forma

$$f(x) = \log_a x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

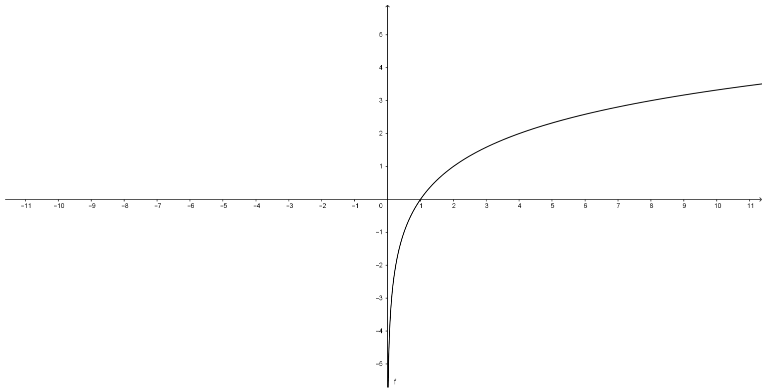


Figura 2.28: Gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

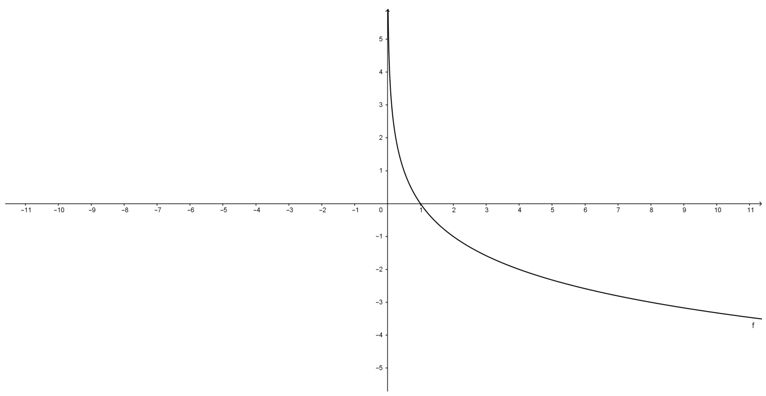


Figura 2.29: Gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Se $f(x) = \log_a x$, então é fácil ver que $f(1) = 0$ e $f(a) = 1$, pois $a^0 = 1$ e $a^1 = a$. Temos também que $f(a^z) = z$. De fato, $\log_a a^z$ ocorre se, e somente se, existe um $y \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a^z = a^y$, o que implica dizer que $y = z$.

A função logarítmica f tem várias propriedades específicas, entre elas, a que dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, então $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Com efeito, sejam $f(x) = k$ e $f(y) = t$, isto é, $\log_a x = k$ e $\log_a y = t$. Assim,

$$f(x \cdot y) = f(a^k \cdot a^t) = f(a^{k+t}) = k + t = f(x) + f(y).$$

Por simplificação de notação, omitimos a base da função logarítmica quando ela for 10, isto é, escrevemos $f(x) = \log x$ para representar $f(x) = \log_{10} x$.

Em estudos específicos e aprofundados, temos aplicações e propriedades importantes na matemática e em outras ciências para a função exponencial e logarítmica com uma base especial positiva denotada por e. As funções $f(x) = e^x$ com $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \log_e x$ com $x \in \mathbb{R}_+^*$ são chamadas, respectivamente de *função exponencial natural* e *função logaritmo natural*. Temos ainda que, a função logarítimica $f(x) = \log_e x$ recebe a notação especial $f(x) = \ln x$. A constante e é um número irracional e tem valor aproximado de

$$e \approx 2,718281828459.$$

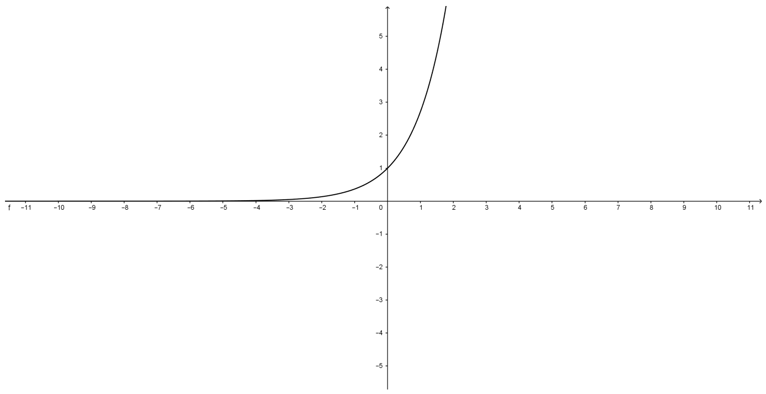


Figura 2.30: Gráfico da função exponencial natural $f(x) = e^x$.

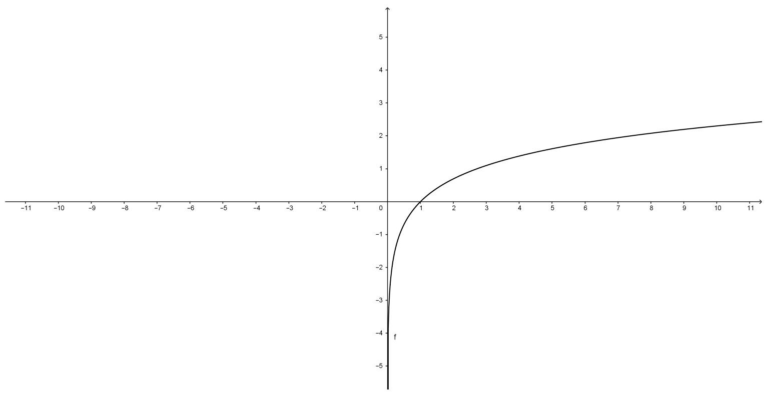


Figura 2.31: Gráfico da função logaritmo natural $f(x) = \ln x$.

É quase unânime termos a abordagem da função logarítmica nos livros didáticos. Ela é tratada logo depois de se discorrer sobre funções exponenciais pela semelhança e necessidade do conteúdo de potências. Como é possível notar na definição, calcular o logaritmo de um número real positivo é resolver uma equação potência. Vamos registrar a definição da função logarítmica de um dos livros didáticos analisados.

> “A função f, de $]0,+\infty[$ em $\mathbb{R}$, que a todo número $x > 0$ associa o logaritmo de x, em uma base $a (a > 0$ e $a \neq 1)$, é denominada **função logarítmica** de base a.
>
> $$\begin{aligned} f :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1\text{”}. \end{aligned}$$
>
> (SMOLE; DINIZ, 2010, p.200).

Observação 2.8. É notório que a definição de função logarítmica se remete a definição de logaritmo de uma número real positivo x, que por sua vez é definida usando uma igualdade de potência. A definição acima está muito semelhante a que fizemos anteriormente, salvo a diferença na escrita ambas definem da mesma forma. É comum, e aqui abro um parênteses, para citar um assunto que ainda não discutimos, porém acreditamos ser pertinente ao comentário feito agora, de que a função logarítmica é amplamente conhecida e assim é inserida nos livros em geral, como a função inversa da função exponencial. É fácil ao estudante observar que na definição de logaritmo estamos procurando para $\log_a x$ o número y tal que $a^y = x$. Ora, isso é exatamente o inverso do que fazemos no cálculo de potência a^x, pois aqui estamos procurando o valor y tal que $a^x = y$. De fato que a definição da função logarítmica fica mais tangível à compreensão se abordada por essa linha de raciocínio.

2.16 Funções Trigonométricas Circulares

Inicialmente vamos lembrar que os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos(número real), e que 1 rad representa a medida do ângulo de um arco de medida 1 em uma circunferência de raio 1. Então, podemos escrever $360^{\circ} = 2\pi$ rad, ou ainda, $180^{\circ} = \pi$ rad.

Disso podemos associar qualquer ângulo positivo de medida α a um número real positivo t rad. Obviamente $\alpha = 0^{\circ} = 0$ rad. Para os números reais negativos ficará claro ao leitor a associação que faremos no decorrer da seção.

Da trigonometria básica nos triângulos, temos que, se α representa a medida de um ângulo interno a um triângulo retângulo e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, então podemos definir as razões

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H}, \quad \cos\alpha = \frac{CA}{H} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA},$$

para qualquer triângulo retângulo que possui um de seus ângulos internos igual a α, onde CO é a medida do cateto oposto ao ângulo α, CA é a medida do cateto adjacente ao ângulo α e H é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo. Essas razões são chamadas, respectivamente, de ***seno***, ***cosseno*** e ***tangente*** de α.

De duas figuras planas amplamente conhecidas, o quadrado de lado a e o triângulo equilátero de lado l é possível mostrar que

	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para tanto, basta usar os triângulos retângulos resultantes ao se traçar a diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero.

Um resultado importante é que, a razão tangente de α pode ser obtida a partir das razões seno e cosseno do ângulo α. De fato, como em qualquer triângulo retângulo o $cos\ \alpha \neq 0$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{CO}{H}}{\frac{CA}{H}} = \frac{CO}{CA} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Considere agora um triângulo retângulo qualquer, onde um de seus ângulos mede $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ rad e possui cateto oposto em relação à α medindo b, cateto adjacente em relação à α medindo c e hipotenusa medindo a. É direto que por Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Por outro lado, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\ \alpha = \frac{c}{a}$, logo

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

e portanto,

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

A relação acima é chamada de *relação fundamental da trigonometria.*

Observação 2.9. É comum e tradicional na matemática escrevermos $\operatorname{sen}^2\alpha$ em vez de $(\operatorname{sen}\alpha)^2$. O mesmo vale para as demais relações trigonométricas.

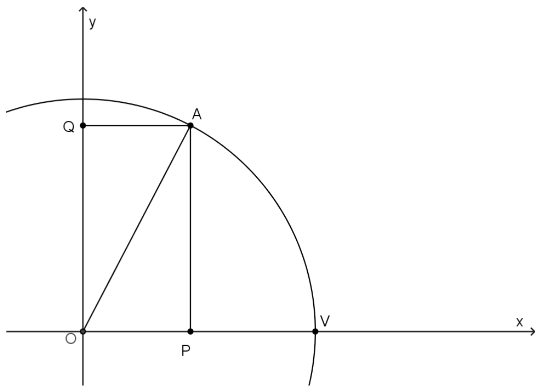
Ora, as coordenadas (x, y) da equação de uma circunferência C de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$ são dadas por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\},$$

onde, para todo $(x, y) \in C$ tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Olhando para relação fundamental e as coordenadas da circunferência C temos que, para todo ângulo α, os números $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ são coordenadas dessa circunferência.

Disso e considerando o ilustrado na figura 2.1, podemos associar a cada número real t (medida do arco $\widehat{\text{VA}}$) a um ângulo $\alpha = A\widehat{O}V$ da seguinte forma:
1) $V = (1, 0)$.
2) Para $t > 0$, percorremos no sentido anti-horário da circunferência C a partir do ponto $(1, 0)$. O ponto onde pararmos na circunferência será chamado de A.
3) Para $t < 0$, percorremos no sentido horário da circunferência C a partir do ponto $(1, 0)$.



Fonte:(GUZZO, 2021, p.28)

Figura 2.32: Circunferência C - Coordenadas do Ponto A.

Note que o triângulo retângulo AOP de hipotenusa $OA = 1$, implica em atribuir ao cosseno e ao seno desse ângulo α (t rad), as coordenadas do ponto A de forma que, $A = (P, Q) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Em outras palavras, podemos fazer corresponder a cada número real t um ponto $A = (P, Q)$ da circunferência de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^2$ onde,

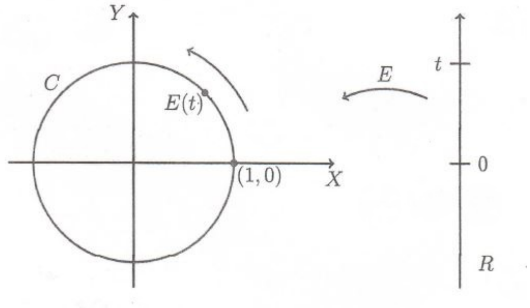
$$\operatorname{sen} t = OQ \quad \text{e} \quad \cos t = OP.$$

Podemos pensar no ponto A como uma função $E(t)$. Isto é, após percorrer t unidades de medida de arco sobre a circunferência C de raio 1, sempre iremos encontrar um ponto A, onde suas coordenadas representaram os valores do cosseno(abscissa) e seno(ordenada) desse número t. Em outras palavras, $E(t) = A = (P, Q)$.

Definição 2.27. As funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas por *função seno* e *função cosseno* respectivamente, são definidas atribuíndo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$E(t) = (x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

onde $E(t) = A = (P, Q)$ da construção acima.



Fonte:(LIMA, 2013, p.190)

Figura 2.33: Função $E(t)$.

Temos da definição que

$$\begin{aligned} E(0) = (1,0) &\Rightarrow \cos 0 = 1 \text{ e } \operatorname{sen} 0 = 0,\\ E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) &\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \text{ e } \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1,\\ E(\pi) = (-1,0) &\Rightarrow \cos\pi = -1 \text{ e } \operatorname{sen}\pi = 0,\\ E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1) &\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \text{ e } \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1,\end{aligned}$$

e

$$E(2\pi) = (1,0) \Rightarrow \cos 2\pi = 1 \text{ e } \operatorname{sen} 2\pi = 0.$$

Note também que por definição, $E(t) = E(t')$ se, e somente se, $t = t' + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. As funções paramétricas *sen t* e *cos t* são cíclicas e após uma volta completa na circunferência começa ter seus valores repetidos. Isso significa dizer que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2k\pi)$ e $\cos t = \cos(t + 2k\pi)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

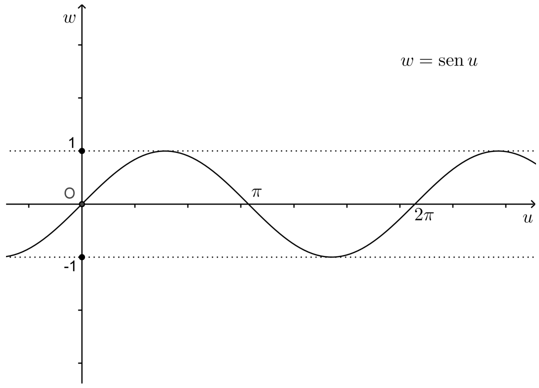
A seguir, faremos a definição das funções trigonométricas como ela é feita habitualmente, contudo o leitor irá notar que as variáveis usadas nas definições não coincidem com as representadas nos gráficos. Entretando, essa discrepância não trará prejuízo ao entendimento uma vez que se identifica $x = u$ e $w = f(x)$.

2.16.1 Função seno

Definição 2.28. Considere $x \in \mathbb{R}$. Seja $x \geq 0$ representando a medida do arco na circunferência unitária, centrada em $\mathbb{R}^2$, com origem no ponto $(1, 0)$ no sentido anti-horário. Agora, se $x < 0$, $|x|$ representa a medida do arco no sentido horário. Definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ e chamamos de *função seno*, como sendo a ordenada do ponto de parada do arco sobre a circunferência. Denotamos esse número(valor da ordenada) por $\operatorname{sen} x$ e, escrevemos

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

$$x \longmapsto f(x) = \operatorname{sen} x.$$



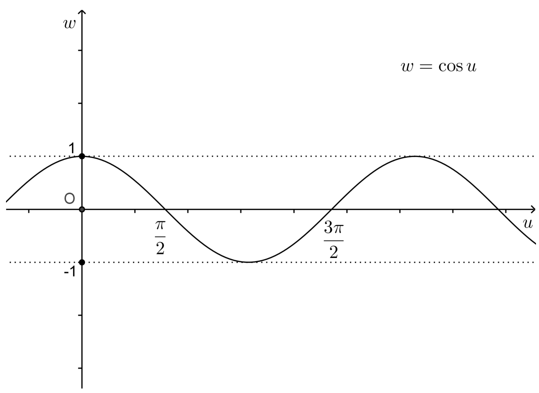
Fonte:(GUZZO, 2021, p.38)

Figura 2.34: Gráfico da função seno circular.

2.16.2 Função cosseno

Definição 2.29. Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $x \geq 0$, x representa a medida do arco na circunferência unitária, centrada em $\mathbb{R}^2$, com origem no ponto $(1, 0)$ no sentido anti-horário. Agora, se $x < 0$, $|x|$ representa a medida do arco no sentido horário. Definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ e chamamos de *função cosseno*, como sendo a abscissa do ponto de parada do arco sobre a circunferência. Denotamos esse número(valor da abscissa) por $\cos x$ e, escrevemos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \cos x. \end{aligned}$$



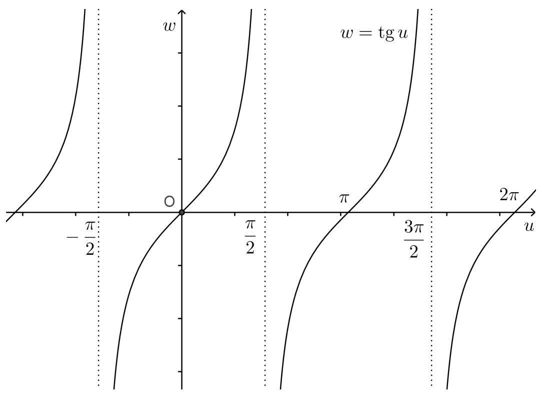
Fonte:(GUZZO, 2021, p.39)

Figura 2.35: Gráfico da função cosseno circular.

2.16.3 Função tangente

Definição 2.30. Definimos a *função tangente* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{tg} x$, como sendo $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\cos x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}. \end{aligned}$$



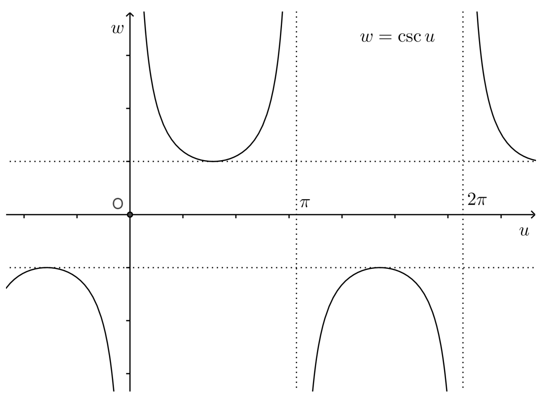
Fonte:(GUZZO, 2021, p.40)

Figura 2.36: Gráfico da função tangente circular.

2.16.4 Função cossecante

Definição 2.31. Definimos a *função cossecante* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{cossec} x$, como sendo $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$



Fonte:(GUZZO, 2021, p.45)

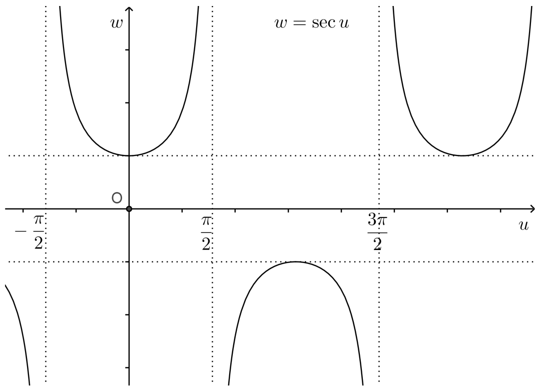
Figura 2.37: Gráfico da função cossecante circular.

Observação 2.10. Note que ambas as escritas *cossec* ou *csc* nomeiam a *função cossecante.*

2.16.5 Função secante

Definição 2.32. Definimos a *função secante* f, e escrevemos $f(x) = \sec x$, como sendo $\frac{1}{\cos x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\cos x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} &\longrightarrow\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$



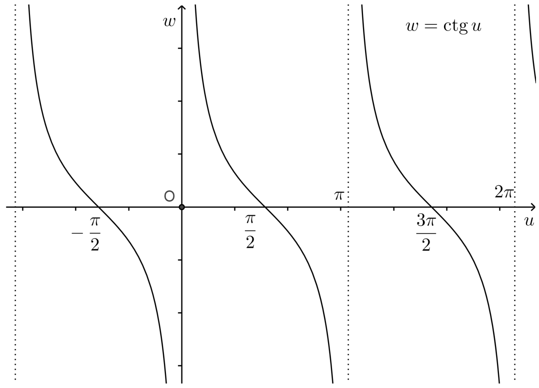
Fonte:(GUZZO, 2021, p.44)

Figura 2.38: Gráfico da função secante circular.

2.16.6 Função cotangente

Definição 2.33. Definimos a *função cotangente* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{cotg} x$, como sendo $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$



Fonte:(GUZZO, 2021, p.42)

Figura 2.39: Gráfico da função cotangente circular.

Observação 2.11. Novamente temos que ambas as escritas *cotg* ou *ctg* nomeiam a *função cotangente.*

Note que a função cotangente pode ser escrita também como $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. De fato, considerando $\operatorname{tg} x \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = 1 \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x.$$

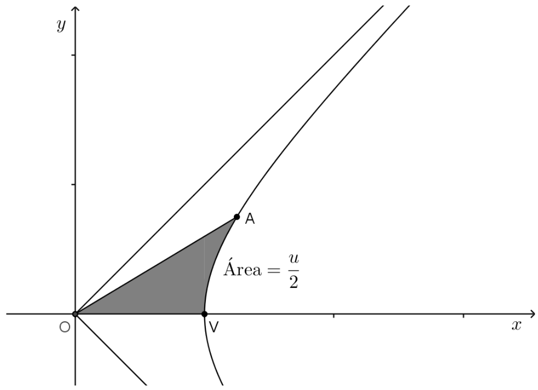
Observação 2.12. Iniciamos nossa observação constatando que os livros didáticos que estamos tratando não abordam funções trigonométricas. Os autores fazem esse tratamento em outros volumes. Contudo, vamos fazer alguns apontamentos. Primeiro, que a grande maioria dos livros em geral, (não só os didáticos) não trata com a mesma ênfase as funções secante, cossecante, cotangente ou mesmo a tangente como trata as funções seno e cosseno. Talvez uma explicação para isso, como o leitor pode verificar nas definições acima, que todas as quatro funções citadas são definidas a partir das funções seno e cosseno, o que torna elas de importância “secundária”. Outra constatação, é o fato de que muitos livros não aprofundam o tratamento de funções, ficando quase que em toda abordagem de escrita na trigonometria do triângulo retângulo, considerando basicamente, seno e cosseno como razões entre medidas de lados.

2.17 Funções Trigonométricas Hiperbólicas

Nesta seção vamos trazer as definições das funções trigonométricas hiperbólicas. Primeiro vamos esclarecer que não iremos fazer uma abordagem da trigonometria hiperbólica, que é construída sobre a hipérbole trigonométrica de equação $x^2 - y^2 = 1$. Vamos apenas considerar essa equação para fazer as definições.

Uma propriedade que envolve a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, refere-se à medida do arco contido na hipérbole e a área que esse mesmo arco forma. Considere um arco de medida t com início no ponto $(1,0)$ e final num ponto A qualquer contido na hipérbole. A área da região formada pelo arco, o exio x e o segmento de reta que liga o ponto A a origem de $\mathbb{R}^2$ tem valor igual a $\frac{t}{2}$. Isso significa dizer que, para qualquer medida de arco, ele sempre será o dobro dessa área. Por essa propriedade independer da medida do arco, fazemos as seguintes definições.

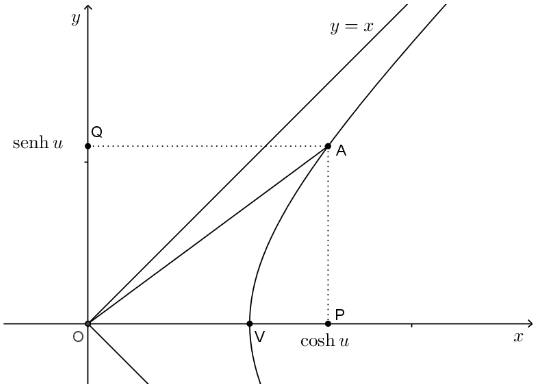
Seja o ramo direito da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$ situada no primeiro e quarto quadrante do $\mathbb{R}^2$. Dado um número real $u \geq 0$, chamaremos de ângulo hiperbólico u, ou ângulo hiperbólico VOA, o arco VA da hipérbole no primeiro quadrante onde a área da região OVA é igual a $\frac{u}{2}$. Se $u < 0$ o ângulo hiperbólico u é o arco VA da hiperbóle no quarto quadrante, onde sua área será $-\frac{u}{2}$.



Fonte:(GUZZO, 2021, p.83)

Figura 2.40: Ângulo hiperbólico de medida positiva.

Analogamente como fizemos para as funções trigonométricas definidas na circunferência (funções trigométricas circulares), vamos definir o cosseno e seno hiperbólico de um ângulo hiperbólico, como sendo as coordenadas do ponto A. Isto é, $A = (\cosh u, \operatorname{senh} u)$. Note que, por essa definição o cosseno hiperbólico de u será sempre um valor maior ou igual a 1. Por outro lado, o seno hiperbólico será positivo somente quando u for positivo, caso contrário será negativo. Em resumo, se t for qualquer número real, então o ponto $A = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está sobre o ramo direito da hipérbole e, dessa vez, t não representa a medida de um ângulo como conhecemos e sim, t representa o dobro da área sombreada do setor hiperbólico formado pelo eixo x, a hipérbole e o segmento que une esse ponto A e a origem.



Fonte:(GUZZO, 2021, p.84)

Figura 2.41: Seno e cosseno hiperbólicos.

Portanto, podemos escrever

$$\operatorname{senh} u = OQ = PA \text{ e } \cosh u = OP = QA.$$

É muito comum, principalmente nos livros de cálculo diferencial e integral que as funções seno e cosseno hiperbólicos sejam definidas como se segue:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Essa definição não está errada, porém não deixa explícito ao estudante a construção da trigonometria na hipérbole e, evidentemente por isso o nome seno e cosseno hiperbólico. Contudo, essa definição pode ser útil ao simplificar a demostração de que, as coordenadas dos pontos da hipérbole, são de fato o cosseno e o seno hiperbólico. Para isso, assim como na trigonometria circular, onde mostramos que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, pois $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, podemos mostrar que $(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$, fazendo assim, uma constatação explicita que o cosseno e o seno hiperbólicos representam os pontos do ramo direito da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. De fato,

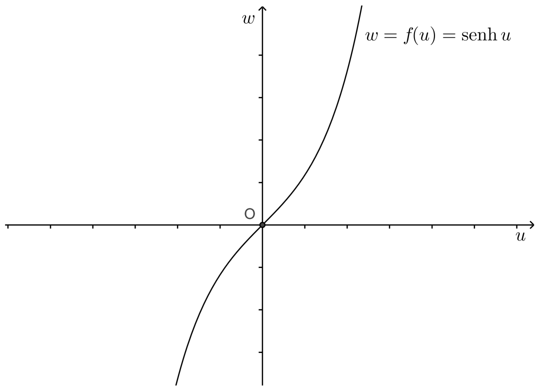
$$\begin{aligned}
(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Faremos a seguir uma definição formal a partir do que foi construído e exposto anteriormente.

2.17.1 Função seno hiperbólico

Definição 2.34. Seja $x \in \mathbb{R}$ um ângulo hiperbólico determinado pelo arco da hipérbole VA. Definimos a *função seno hiperbólico* f, com $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como sendo o valor da ordenada desse ponto A na hipérbole. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{senh} x. \end{aligned}$$



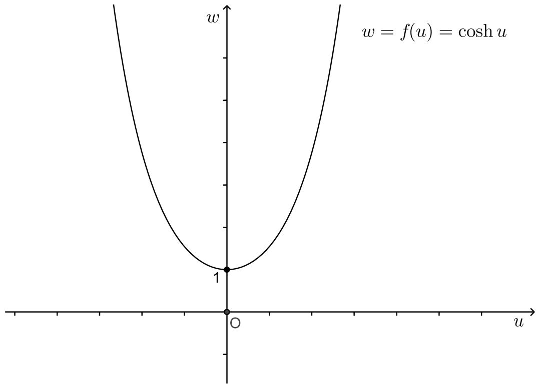
Fonte:(GUZZO, 2021, p.95)

Figura 2.42: Gráfico da função seno hiperbólico.

2.17.2 Função cosseno hiperbólico

Definição 2.35. Seja $x \in \mathbb{R}$ um ângulo hiperbólico determinado pelo arco da hipérbole VA. Definimos a *função cosseno hiperbólico* f, com $f : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$, como sendo o valor da abscissa desse ponto A na hipérbole.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [1, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = \cosh x. \end{aligned}$$



Fonte:(GUZZO, 2021, p.96)

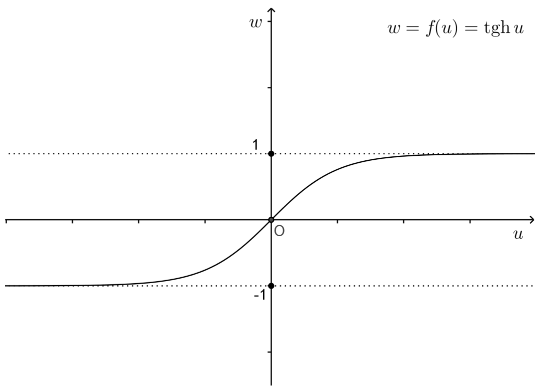
Figura 2.43: Gráfico da função cosseno hiperbólico.

Definimos as demais funções trigonométricas hiperbólicas assim como são feitas nas funções trigonométricas circulares.

2.17.3 Função tangente hiperbólica

Definição 2.36. Definimos a *função tangente hiperbólica* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{tgh} x$, como sendo $\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}. \end{aligned}$$



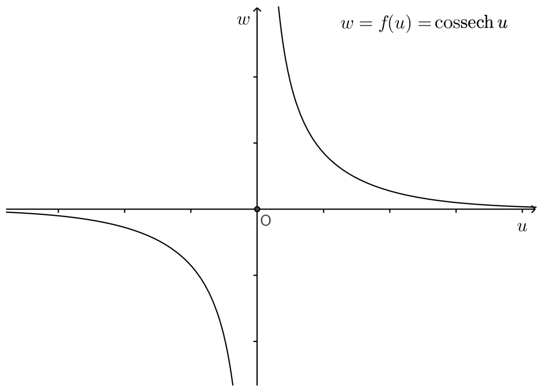
Fonte:(GUZZO, 2021, p.97)

Figura 2.44: Gráfico da função tangente hiperbólica.

2.17.4 Função cossecante hiperbólica

Definição 2.37. Definimos a *função cossecante hiperbólica* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{cossech} x$, como sendo $\frac{1}{\operatorname{senh} x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\operatorname{senh} x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}. \end{aligned}$$



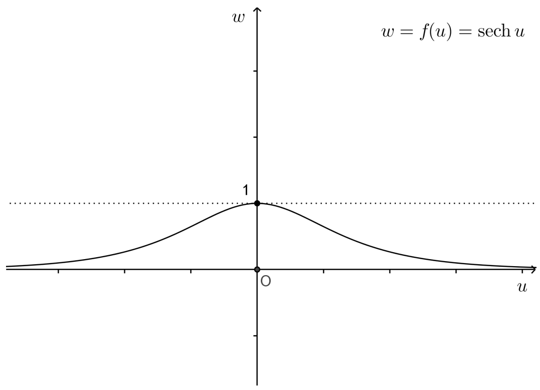
Fonte:(GUZZO, 2021, p.100)

Figura 2.45: Gráfico da função cossecante hiperbólica.

2.17.5 Função secante hiperbólica

Definição 2.38. Definimos a *função secante hiperbólica* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{sech} x$, como sendo $\frac{1}{\cosh x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}. \end{aligned}$$



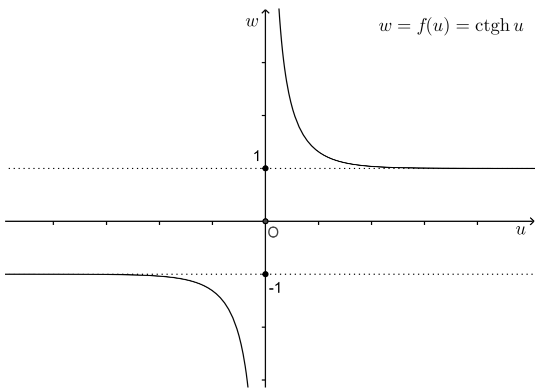
Fonte:(GUZZO, 2021, p.99)

Figura 2.46: Gráfico da função secante hiperbólica.

2.17.6 Função cotangente hiperbólica

Definição 2.39. Definimos a *função cotangente hiperbólica* f, e escrevemos $f(x) = \operatorname{cotgh} x$, como sendo $\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ desde que $\operatorname{senh} x \neq 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}. \end{aligned}$$



Fonte:(GUZZO, 2021, p.98)

Figura 2.47: Gráfico da função cotangente hiperbólica.

Fazemos aqui a mesma observação que fizemos acima, de que função cotangente hiperbólica pode ser escrita também como $\frac{1}{\operatorname{tgh} x}$. Com efeito, considerando $\operatorname{tgh} x \neq 0$ e $\operatorname{senh} x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}} = 1 \cdot \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \operatorname{cotgh} x.$$

2.18 Função Transcendente

Definição 2.40. Uma função $f : A \longrightarrow B$, é dita função transcendente se, e somente se, não pode ser construída por uma quantidade finita de operações algébricas de somas, produtos e potências racionais de funções polinomiais. Isto é, uma função é transcendente se, e somente se, ela não é uma função algébrica.

Exemplo 2.9. No vasto conjunto das funções transcendentes inclui as ***funções trigonométricas***, as ***funções trigonométricas hiperbólicas***, as ***funções exponenciais*** e as ***funções logarítmicas***.

Exemplo 2.10. A função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, é uma função transcendente.

2.19 Função Vetorial

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As grandezas escalares ficam completamente definidas ou caracterizadas apenas por um número real acompanhado de uma unidade de medida. Comprimento, área, volume, temperatura, são exemplos de grandezas escalares. Por outro lado, as grandezas vetoriais necessitam mais que o número e sua unidade de medida correspondente para ficarem bem definidas. Para uma caracterização completa, precisamos do seu *módulo* (comprimento, intensidade, medida), sua *direção* e seu *sentido*. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de gradezas vetoriais. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e V um conjunto de vetores. Denotamos um elemento de V, isto é, um vetor v por $\overrightarrow{v}$. Geometricamente um vetor é representado por uma seta ou um segmento de reta orientado, onde o comprimento desse segmento representa o módulo, e a seta caracterizam a direção e o sentido.

Apesar de ficar claro ao leitor que o conjunto imagem da aplicação a seguir não ser um conjunto numérico, é muito natural e comum chamar, mesmo que isso contraria nossa convenção anterior a "aplicação vetorial" de função vetorial. Abrimos uma exceção para esse caso, pois diferente de todas as outras aplicações, causa uma certa estranheza não denotá-la de *função vetorial*, mesmo que isso não condiz com a referência que adotamos.

Definição 2.41. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $V \neq \emptyset$ um conjunto de vetores. Uma função r é dita função vetorial se seu domínio é um conjunto de números reais e sua imagem é um conjunto de vetores. Em outras palavras,

$$\begin{array}{rcl} r : A & \longrightarrow & V \\ t & \mapsto & r(t) = \overrightarrow{v}. \end{array}$$

Analiticamante, um vetor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ é escrito $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ ou $\overrightarrow{v} = \langle x, y, z \rangle$, onde x, y e z são chamadas de componentes de $\overrightarrow{v}$. Se $V = \mathbb{R}^3$ e a função r é tal que $r : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, isso significa que para todo $t \in A$ existe um único vetor de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$r(t) = (f(t), g(t), h(t)),$$

onde $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são os componentes do vetor $r(t)$ e as funções f, g e h são funções de valor real chamadas de funções componentes da função r.

Exemplo 2.11. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e a função vetorial $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$r(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, \sqrt[3]{t}).$$

Então as funções componentes são

$$f(t) = t^2, \quad g(t) = \operatorname{sen} t \ \text{ e } \ h(t) = \sqrt[3]{t}.$$

2.20 Função Composta

Ficará claro ao leitor que essa e a próxima seção darão ferramentas diretas para aumentar significativamente o conjunto das funções de uma variável real que definimos até agora. Falo aqui da variedade de funções que por força das definições dadas anteriormente não se enquadram em um tipo específico, porém são *composições* e/ou *combinações* das funções definidas nas seções anteriores. É sobre essas composições e combinações que falaremos agora.

Para a definição a seguir, vamos considerar A, B e C subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 2.42. Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ duas funções. Chama-se função composta de f com g a função de A em C denotada por $g \circ f$ definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in A.$$

Note que a notação $g \circ f$ implica dizer que para se obter a imagem de um valor genérico $x \in A$, isto é, $(g \circ f)(x)$, primeiro encontramos a imagem $f(x)$ e depois o valor $g(f(x))$, que será a imagem de x pela função $g \circ f$. Isso significa que para a função composta $g \circ f$ estar bem definida é necessário que o contradomínio da função f seja igual ao domínio da função g. Logo, a função composta $g \circ f$ tem o mesmo domínio da função f e o mesmo contradomínio da função g.

Na definição 2.42, se tivermos $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$, isto é, $A = C$, podemos definir também a função composta $f \circ g$ de B em B que é fácil ver que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. A composição de funções é ilimitada, desde que, os domínios e os contradomínios atendem a definição de função composta. Dessa forma, é possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função $f \circ g \circ h$ é definida da seguinte maneira

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

Exemplo 2.12. Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = |x|$ e $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = \sqrt{x}$. Usando a definição, temos que $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{|x|}.$$

Exemplo 2.13. Sejam $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 3^x$ e $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Usando a definição, temos que $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{3^x}.$$

Na grande maioria dos livros didáticos o conceito e a definição de função composta não é abordado. Contudo, escreveremos a seguir a definição como aparece em um dos livros aqui citados.

"Sejam as funções f, de A em B, e g, de B em C, a **função composta** de g e f (notação: $g \circ f$) é a função de A em C definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \ \textit{para todo } x \in A."$$

(SMOLE; DINIZ, 2010, p.215).

2.21 Combinações de Funções

Podemos combinar duas ou mais funções, a fim de formar uma nova função, realizando finitas operações básicas de soma, diferença, produto e quociente entre elas. Vamos defini-las, atribuindo nomes específicos usualmente conhecidos.

2.21.1 Função Soma

Definição 2.43. Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a função $f + g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$, pela equação

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall \ x \in A \cap B.$$

2.21.2 Função Diferença

Definição 2.44. Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a função $f - g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$, pela equação

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \ \forall \ x \in A \cap B.$$

2.21.3 Função Produto

Definição 2.45. Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a função $f \cdot g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$, pela equação

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \ \forall \ x \in A \cap B.$$

2.21.4 Função Quociente

Definição 2.46. Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a função $f / g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$, pela equação

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall \ x \in A \cap B \text{ e } g(x) \neq 0.$$

Exemplo 2.14. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$. Podemos combinar essas funções a fim de construir as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e f/g (note que a função $g \neq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$). De fato, usando as definições acima temos,

$$(f + g)(x) = \text{sen}(x) + x^2 + 1,$$

$$(f - g)(x) = \text{sen}(x) - x^2 - 1,$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1) \cdot \text{sen}(x)$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + 1}.$$

Note que todas as função são de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Propriedades de Funções

Neste capítulo iremos tratar das propriedades que as funções podem apresentar. Antes de iniciarmos nossa lista, entendemos que, uma caracterização que se pode fazer para se diferenciar um *tipo de função* de uma *propriedade de função*, é a **verificação**. Vamos explicar, toda função tem um tipo ou forma que a caracteriza e a define. À partir dessa forma, podemos dizer segundo sua definição se a função é do tipo a, b ou c. Já uma propriedade, é uma verificação que podemos fazer para todos os tipos de funções e dizer se ela é válida ou não. Por exemplo, a propriedade *função injetora* é algo aplicável a todos os tipos de função, podendo cada tipo ser uma função injetora ou não. Podemos ainda, para algumas funções, ter uma propriedade não válida, porém fazendo restrições aos seus domínios, essa propriedade passar valer. Disso, e depois de tratarmos dos tipos de funções no capítulo 2, abordaremos algumas propriedades de funções. Para este capítulo continuaremos com os referenciais teóricos Lima (2013), Lima (2007a), Stewart(2006a) e Neto (2015), além de Lima (2004), Domingues e Iezzi (2003), Soares (2007), Churchill (1975), Callioli, Domingues e Costa (1978), Lima (2006a), Lima (2006b), Lima (2007b), Stewart(2006b) e Coelho e Lourenço (2007).

3.1 Função Injetora

Definição 3.1. Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se *injetiva* (ou *injetora*) quando, elementos distintos em A tem imagens distintas em B, para quaisquer que sejam os elementos de A. Isto é, a função f é injetiva quando

$$\forall\ x_1, x_2 \in A,\ \text{com } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Essa condição também pode ser escrita usando a contrapositiva,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad \forall\ x_1, x_2 \in A.$$

Exemplo 3.1. A função linear definida por $f(x) = ax$, com $a \neq 0$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é injetiva. De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow ax_1 = ax_2 \\ &\Rightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \\ &\Rightarrow a(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo a função $f(x)$ é injetiva.

Exemplo 3.2. A função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + b$ com $a \neq 0$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não é injetiva. De fato, note que $f(-1) = a + b$ e $f(1) = a + b$. Logo, temos $f(-1) = f(1)$ com $-1 \neq 1$. Portanto, a função $f(x)$ não é injetiva.

Note que a função quadrática $f(x) = ax^2 + b$ com $a \neq 0$, se torna injetiva se restringirmos seu domínio para $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}$.

3.2 Função Sobrejetora

Definição 3.2. Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) quando, para qualquer elemento $y \in B$, existe pelo menos um elemento $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Ou seja,

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A, \text{ tal que } f(x) = y.$$

Exemplo 3.3. A função exponencial definida por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, é sobrejetiva. De fato, dado $y \in \mathbb{R}_+^*$, pela definição de logaritmo, podemos construir o número real $\log_a y$. Ora, seja $x = \log_a y$, então $a^x = y$. Portanto, a função $f(x)$ é sobrejetiva.

Exemplo 3.4. A função polinomial definida por $f(x) = x^4$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não é sobrejetiva. De fato, seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$. Como, dado $a \in \mathbb{R}$ temos $a^2 \geq 0$, e $f(x) = x^4 = (x^2)^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então é impossível termos $f(x) = y$, com $y < 0$. Portanto, a função f não é sobrejetiva.

3.3 Função Bijetora

Definição 3.3. Uma função $f : A \longrightarrow B$ chama-se *bijetiva* (ou *bijetora*) quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Isto é, a função f é bijetiva se, e somente se,

1) $\forall\ x_1, x_2 \in A,$ com $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e
2) $\forall\ y \in B,\ \exists x \in A,$ tal que$f(x) = y$.

Exemplo 3.5. Seja $A \subset \mathbb{R}$ com $A \neq \emptyset$. A função $f : A \longrightarrow A$ definida por $f(f(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é bijetiva. De fato, mostremos inicialmente que a função f é injetiva. Sejam x_1 e x_2 elementos de A, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Ora, $f(x_1) = f(x_2)$ implica por definição da função f que $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ e, daí, que $x_1 = x_2$, logo a função f é injetiva. Mostrar que a função f é sobrejetiva é imediato, pois fixando $y \in A$ e tomando $x = f(y) \in A$, temos $f(x) = f(f(y)) = y$, com $y \in Im(f)$. Logo a função f é sobrejetiva e, portanto bijetiva.

Exemplo 3.6. A função linear definida por $f(x) = ax$, com $a \neq 0$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é bijetiva. De fato, já mostramos anteriormente que a função f é injetiva, logo basta mostrar que a função f é sobrejetiva. Para tanto, seja $y \in \mathbb{R}$ e tome $x = \frac{y}{a}$, o que é possível pois $a \neq 0$. Daí, $f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{y}{a}\right) = y$. Logo, a função f é sobrejetiva, e portanto, bijetiva.

3.4 Função Inversa

Uma constatação importante da função bijetora $f : A \longrightarrow B$, é que ela faz correspondência biunívoca entre os elementos de A e B, isto é, para cada elemento $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$ tal que, $f(x) = y$. Por outro lado, para cada elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$ tal que, $y = f(x)$. Logo, se isso ocorre, podemos obter uma função $g : B \longrightarrow A$, fazendo $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Definição 3.4. Seja a função $f : A \longrightarrow B$ uma bijeção. A *função inversa* da função f é a função $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, temos

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Exemplo 3.7. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é bijetora. Ora, note que

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y - b}{a}.$$

Disso, concluímos que a função f é bijetiva, pois para cada $y \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$, para tanto basta tomar $x = \frac{y-b}{a}$. Por outro lado, note que x é único e portanto injetiva. Portanto, podemos escrever a função inversa f^{-1} da função f de maneira que

$$f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}.$$

Uma pergunta que o leitor pode fazer é, se existe alguma função f, de forma que ela seja igual a sua inversa. A reposta é sim, e um exemplo clássico é a função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. Obviamente temos que a função f é bijetiva e sua inversa $f^{-1}(y) = y$, isto é, $f = f^{-1}$. No entanto, a inversa de uma função pode ser ela mesma, sem que ela seja a função identidade. Seja a função racional $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Como a função f é bijetiva, pois

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},$$

e $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, temos consequentemente $f = f^{-1}$.

No comentário 2.8, falamos que a função exponencial é a inversa da função logarítmica. Agora com a definição formal de função inversa fica claro ao leitor essa constatação. É possível mostrar que dado $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & f(x) = a^x, \end{array}$$

é uma função bijetora. Como todo função bijetora, essa função admite uma função inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

que a cada $y \in \mathbb{R}_+^*$ associa o número real x tal que $a^x = y$. Ora, essa é exatamente a definição de função logarítmica, isto é

$$x = \log_a y.$$

Temos também funções inversas que possuem nomes especiais. Por exemplo, as funções trigonométrica inversas circulares são habitualmente chamadas de *Função Arco Seno*, *Função Arco Cosseno*, *Função Arco Tangente*, *Função Arco Cossecante*, *Função Arco Secante* e *Função Arco Cotangente*. Listamos abaixo, respectivamente, pela ordem que nomeamos, claro que impondo, quando necessário, condições de restrições de domínio ou de imagem para tornar as funções bijetoras.

$$\begin{array}{rcl} f : [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos^{-1} x, \end{array}$$

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{tg}^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[&\longrightarrow [-\frac{\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{cossec}^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[&\longrightarrow [0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi] \\ x &\longmapsto f(x)=\sec^{-1}x, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow]0,\pi[\\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{cotg}^{-1}x. \end{aligned}$$

No que se refere as nomeações das funções trigonométricas hiperbólicas inversas, não tão comum como as nomeações das funções trigonométricas inversas circulares, nomeia-se também *Função Arco Seno Hiperbólico*, *Função Arco Cosseno Hiperbólico*, *Função Arco Tangente Hiperbólica*, *Função Arco Cossecante Hiperbólica*, *Função Arco Secante Hiperbólica* e *Função Arco Cotangente Hiperbólica*. Analogamante, restringindo o domínio ou a imagem quando necessário, a fim de torná-las bijetoras, listamos na ordem que nomeamos as funções trigonométricas hiperbólicas inversas:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{senh}^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:[1,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ x &\longmapsto f(x)=\cosh^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{tgh}^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto f(x)=\operatorname{cossech}^{-1}x, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} f:]0,1] & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} f:]-\infty,-1[\, \cup\,]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & f(x) = \operatorname{cotgh}^{-1} x. \end{array}$$

Uma vez ser possível definir as funções trigonométricas hiperbólicas em termos de funções exponenciais, não é supreendente pensar que as funções trigonométricas hiperbólicas inversas podem ser expressas em termos de funções logarítmicas.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{com } x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{com } x \in [1,+\infty[,$$

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{com } x \in\,]-1,1[,$$

$$\operatorname{cossech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^*,$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad \text{com } x \in\,]0,1],$$

e

$$\operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{com } x \in \mathbb{R} - [-1,1].$$

Como exemplo e motivação para as demais verificações ao leitor, vamos mostrar que $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, seja $y = \operatorname{senh}^{-1} x$. Então

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

logo

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

ou, multiplicando por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Note que temos uma equação quadrática de variável e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Como devemos ter $e^y > 0$ e $x < \sqrt{x^2+1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ e não convém. Daí,

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

e, aplicando logaritmo na base e em ambos os membros,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em muitos livros didáticos e também em alguns livros da literatura matemática, é comum escrever, principalmente para a funções trigonométricas circulares, uma notação específica para as funções inversas que expomos acima. Dessa forma, por semelhança e conveniência na escrita, não está errado escrevermos também, de forma análoga, a mesma denotação para a funções trigonométricas hiperbólicas inversas. Na tabela a seguir apresentamos essa notação:

$\operatorname{sen}^{-1} x$	$\operatorname{arcsen} x$
$\cos^{-1} x$	$\arccos x$
$\operatorname{tg}^{-1} x$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{cossec}^{-1} x$	$\operatorname{arccossec} x$
$\sec^{-1} x$	$\operatorname{arcsec} x$
$\operatorname{cotg}^{-1} x$	$\operatorname{arccotg} x$
$\operatorname{senh}^{-1} x$	$\operatorname{arcsenh} x$
$\cosh^{-1} x$	$\operatorname{arccosh} x$
$\operatorname{tgh}^{-1} x$	$\operatorname{arctgh} x$
$\operatorname{cossech}^{-1} x$	$\operatorname{arccossech} x$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\operatorname{arcsech} x$
$\operatorname{cotgh}^{-1} x$	$\operatorname{arccotgh} x$

Observação 3.1. Vale lembrar que as calculadoras geralmente trazem a notação $(\cdot)^{-1}$ para as funções trigonométricas inversas.

3.5 Função Monótona

Para definirmos as funções monótonas, precisaremos definir as funções crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes.

3.5.1 Função crescente

Definição 3.5. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio de f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *crescente* em X se, para todos $x, y \in X$, com $x < y$, tivermos $f(x) < f(y)$. Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é crescente para todo o domínio A.

Exemplo 3.8. A função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, é verdade que $f(x) = x < y = f(y)$.

3.5.2 Função decrescente

Definição 3.6. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio de f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *decrescente* em X se, para todos $x, y \in X$, com $x < y$, tivermos $f(x) > f(y)$. Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é decrescente para todo o domínio A.

Exemplo 3.9. A função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$, pois dados $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ com $x < y$, é verdade que $f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{y} = f(y)$.

3.5.3 Função não-decrescente

Definição 3.7. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio de f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *não-decrescente* em X se, para todos $x, y \in X$, com $x < y$, tivermos $f(x) \leq f(y)$. Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é não-decrescente para todo o domínio A.

Exemplo 3.10. A **função maior inteiro** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq x\}$, isto é, o valor da *função maior inteiro* para um valor $x \in \mathbb{R}$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Se $x \in \mathbb{Z}$, então $\lfloor x \rfloor = x$, agora se x não é inteiro, o valor da função $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que x, por exemplo,

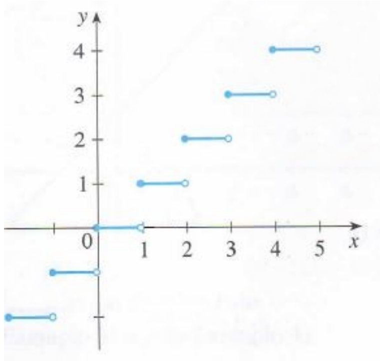
$$\left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor = \max\left\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq -\frac{1}{3}\right\} = \max\{..., -3, -2, -1\} = -1,$$

$$\lfloor 1,5 \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq 1,5\} = \max\{..., -1, 0, 1\} = 1,$$

$$\lfloor \pi \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq \pi\} = \max\{..., 1, 2, 3\} = 3,$$

e

$$\lfloor \sqrt{5} \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq \sqrt{5}\} = \max\{..., 0, 1, 2\} = 2.$$



Fonte:(STEWART, 2006a, p.110)

Figura 3.1: Gráfico da função maior inteiro.

Note que a função não é crescente entre dois inteiros consecutivos, mais precisamente ela se torna constante. De fato, Seja $a \in \mathbb{Z}$, então $\lfloor a \rfloor = a$, e considere $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > a$. Se $b - a < 1$, então $\lfloor b \rfloor = a$, agora se $b - a \geq 1$, então $\lfloor b \rfloor > a$. Portanto, a função f é não-decrescente em $\mathbb{R}$.

Observação 3.2. Em várias literaturas matemáticas é possível encontrar a **função maior inteiro** sendo chamada de **função piso**. Existe também a função **função menor inteiro** que é chamada de **função teto**. A referência ao *piso* e ao *teto* está relacionado a definição da função. Na função piso olhamos a imagem de um número x como o maior inteiro "abaixo"(piso) de x. Por outro lado, na função teto olhamos a imagem de um número x como o menor inteiro "acima"(teto) de x. É claro ao leitor que a palavra abaixo significa menor ou igual e que a palavra acima tem significado de maior ou igual.

3.5.4 Função não-crescente

Definição 3.8. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio de f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *não-crescente* em X se, para todos $x, y \in X$, com $x < y$, tivermos $f(x) \geq f(y)$. Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é não-crescente para todo o domínio A.

Exemplo 3.11. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{se } x < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ -x+2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

é não-crescente, pois temos que a função é constante no intervalo $[1, 2]$ e decrescente nos demais valores do domínio.

Definição 3.9. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio de f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é ***monótona*** em X se, e somente se, a função for crescente, decrescente, não-decrescente ou não-crescente em X. Caso $X = A$ dizemos que a função f é monótona para todo o domínio A. Se a função for crescente ou decrescente em X, dizemos que ela é ***estritamente monótona*** em X.

3.6 Função Par e Ímpar

Definição 3.10. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *par* quando se tem $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.

Definição 3.11. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *ímpar* quando se tem $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Exemplo 3.12. Claramente temos as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = ax^2 + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = |x|$ pares. De fato, na função $f(x) = ax^2 + b$, temos que $f(x) = ax^2 + b = a(-x)^2 + b = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Já para a função $g(x) = |x|$, temos que $g(x) = |x| = |-x| = g(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.13. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ é uma função ímpar. De fato, na função $f(x) = x^3$, temos que $-f(x) = -(x^3) = -(x \cdot x \cdot x) = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^3 = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3. Note que a grande maioria das funções não satisfaz a propriedade de ser par ou ímpar. Essa propriedade atende apenas uma parte do conjunto das funções reais de uma variável. Deve estar claro ao leitor que, não cabe aqui o fato de dada uma função f classificá-la como par ou ímpar.

Exemplo 3.14. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, não é par nem ímpar. De fato.

$$f(-x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6 = x^2 + 5x + 6$$

e

$$-f(x) = -(x^2 - 5x + 6) = -x^2 + 5x - 6.$$

Logo a função f não é par, pois $f(-x) \neq f(x)$ e nem ímpar uma vez que, $-f(x) \neq f(-x)$.

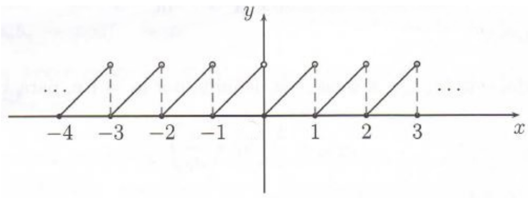
3.7 Função Periódica

Definição 3.12. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *periódica* quando existe um número $p \neq 0$ tal que $f(x) = f(x + p)$, para todo $x \in A$. Ademais, se $f(x) = f(x + p)$, então

$f(x) = f(x+kp)$ para todo $x \in A$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número p com essa propriedade chama-se *período* da função f.

Exemplo 3.15. As funções seno e cosseno de $\mathbb{R}$ em $[-1, 1]$ são periódicas de período 2π, pois $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$ e $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.16. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1[$, definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$ e $f(x + k) = k$ quando $0 \leq k < 1$ e $x \in \mathbb{Z}$. A função f é periódica de período 1. Essa função é chamada de *dente-de-serra* por seu formato gráfico.



Fonte:(NETO, 2015 , p.92)

Figura 3.2: Gráfico da função dente-de-serra.

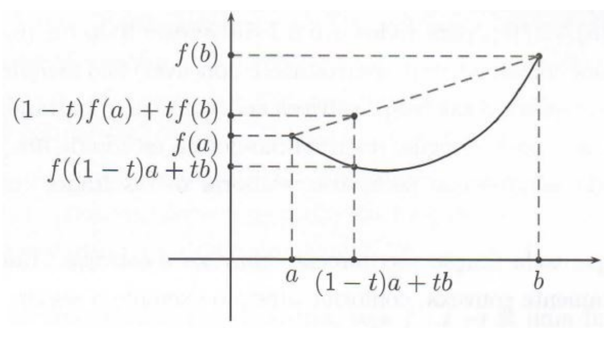
3.8 Função Convexa e Côncava

Para as definições que seguem, $X \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo de $\mathbb{R}$.

Definição 3.13. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio da função f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* em X se, e somente se, para todos $a, b \in X$ e $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é convexa em todo o domínio A.



Fonte:(NETO, 2015 , p.179)

Figura 3.3: Gráfico de uma função convexa.

Definição 3.14. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio da função f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *estritamente convexa* em X se, e somente se, para todos $a, b \in X$ e $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Se $X = A$ dizemos que a função f é estritamente convexa em todo o domínio A.

Definição 3.15. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio da função f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *côncava* em X se, e somente se, para todos $a, b \in X$ e $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Ademais, se $X = A$ dizemos que a função f é côncava em todo o domínio A.

Definição 3.16. Seja f uma função e X um subconjunto do domínio da função f. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *estritamente côncava* em X se, e somente se, para todos $a, b \in X$ e $t \in [0, 1]$, tivermos

$$f((1-t)a + tb) > (1-t)f(a) + tf(b).$$

Se $X = A$ dizemos que a função f é estritamente côncava em todo o domínio A.

Com base nas definições acima, temos que toda função estritamente convexa é convexa. Analogamente toda função estritamente côncava é côncava. Ademais, uma função é convexa e côncava simultaneamente se, e somente se,

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Exemplo 3.17. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = px + q$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned}
(1-t)f(a) + tf(b) &= (1-t)(pa + q) + t(pb + q) \\
&= pa + q - tpa - tq + tpb + tq \\
&= pa - tpa + tpb + q \\
&= p(a - ta + tb) + q \\
&= p((1-t)a + tb) + q \\
&= f((1-t)a + tb).
\end{aligned}$$

Portanto a função afim $f(x) = px + q$ é simultaneamente convexa e côncava em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.18. A função modular $f(x) = |x|$ é convexa. De fato, Dado $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$f((1-t)a + tb) = |(1-t)a + tb|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |(1-t)a| + |tb| \\
&= (1-t)|a| + t|b| \\
&= (1-t)f(a) + tf(b).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que a função modular $f(x) = |x|$ é convexa.

Uma observação importante decorre do fato que podemos ter uma função f que não seja convexa nem côncava. Ou mesmo, convexa em um subconjunto do domínio de f e côncava no outro.

Exemplo 3.19. Seja $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Temos que a função f no intervalo $[-1, 1]$ não é convexa nem côncava. De fato, tome inicialmente $t = 0,1$, $a = -0,1$ e $b = 0,1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
f((1-t)a + tb) &= f(0,9 \cdot (-0,1) + 0,1 \cdot 0,1) \\
&= f(-0,08) \\
&= 0,079488 \\
&> 0,0792 \\
&= 0,9 \cdot f(-0,1) + 0,1 \cdot f(0,1) \\
&= (1-t)f(a) + tf(b).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se tomarmos $t = 0,1$, $a = 0,1$ e $b = -0,1$.

$$
\begin{aligned}
f((1-t)a + tb) &= f(0,9 \cdot (0,1) + 0,1 \cdot (-0,1)) \\
&= f(0,08) \\
&= -0,079488 \\
&< -0,0792 \\
&= 0,9 \cdot f(0,1) + 0,1 \cdot f(-0,1) \\
&= (1-t)f(a) + tf(b).
\end{aligned}
$$

Observação 3.4. Deixaremos a cargo do leitor provar que a função $f = x^3 - x$ é côncava no intervalo $[-1, 0]$ e convexa no intervalo $[0, 1]$.

3.9 Função Contínua

Para o que segue, considere $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Definição 3.17. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *contínua em um ponto* $x_0 \in A$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in A,\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Dizemos que a função f é *contínua* se for contínua em todo ponto $x_0 \in A$.

Exemplo 3.20. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, dado $\epsilon > 0$ e fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, com $|x - x_0| < \delta$. Temos

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a||x - x_0| < |a|\delta.$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ temos

$$|f(x) - f(x_0)| < |a|\delta = |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Portanto, $f(x) = ax + b$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a = 0$, a função $f(x) = ax + b$ se torna a função constante $f(x) = b$. Mostrar que a função constante é contínua para para todo $x \in \mathbb{R}$ é trivial, uma vez que $|f(x) - f(x_0)| = |b - b| = 0$. Logo a desigualdade $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ é sempre válida, qualquer que seja $\epsilon > 0$, independentemente do valor de $\delta > 0$. Portanto, $f(x) = b$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.21. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, dado $\epsilon > 0$ e fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, com $|x - x_0| < \delta$. Temos

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta.$$

Assim, basta tomar $\delta = \epsilon$ que teremos

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, $f(x) = |x|$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Existe uma outra maneira de mostrar que uma função é contínua em um ponto de seu domínio. Em cálculo diferencial e integral notamos que o limite de uma função quando x tende a x_0 pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando-se o valor da função em x_0. As funções com essa propriedade são chamadas *contínuas em* x_0.

Definição 3.18. Sejam $x_0 \in A$, com A um intervalo e $f : A - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que o *limite* de f é L quando x tende a x_0, e denotamos por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação 3.5. Note que na definição acima, o ponto x_0 não precisa necessariamente pertencer ao domínio da função f para que o limite L exista, pois estamos analisando o que ocorre com a função f tomando x suficientemente próximo de x_0. Contudo, não há nenhuma restrição no cálculo do limite da função f, se x_0 pertencer ao domínio de f.

Definimos o limite de uma função f quando x tende a um valor x_0, para definir de outra forma a continuidade de uma função em um ponto. Essa definição é mais difundida na literatura matemática e tem a vantagem de, por vezes, ser mais simples sua aplicação.

Definição 3.19. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *contínua em um ponto* $x_0 \in A$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dizemos que a função f é *contínua* se for contínua em todo ponto $x_0 \in A$.

Nessa definição temos implicitamente três situações ocorrendo para que a continuidade da função f ocorra no ponto x_0. A primeira é que x_0 tem que pertencer ao domínio da função f, isto é, $f(x_0)$ deve estar definido. A segunda é que o limite da função f quando x tende a x_0 tem que existir. A terceira e última, é o fato que o resultado desse limite tem que coincidir com $f(x_0)$.

Definição 3.20. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *descontínua em um ponto* $x_0 \in A$, se a função f não é contínua no ponto $x_0 \in A$.

Exemplo 3.22. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 2, & \text{se } x = 2, \end{cases}$$

é descontínua no ponto $x = 2$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} x + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \neq 2 = f(2)$, temos que a função $f(x)$ é descontínua em $x = 2$.

3.9.1 Função Uniformemente Contínua

Definição 3.21. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua* se para todo $\epsilon > 0$, exite $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x, y \in A,\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exemplo 3.23. O que diferencia a definição de uma função contínua da definição de uma função uniformemente contínua, é que na primeira definição o valor $\delta > 0$ depende do valor de $\epsilon > 0$ e por vezes do ponto x_0 que estamos verificando a continuidade. Já na definição de continuidade uniforme, o valor $\delta > 0$ depende somente do valor $\epsilon > 0$ escolhido. Note que nos exemplos que fizemos anteriormente das funções $f(x) = ax + b$ e $f(x) = |x|$ que mostram que são contínuas, os valores x e x_0 são quaisquer. Portanto, $f(x) = ax + b$ e $f(x) = |x|$ são exemplos de funções uniformemente contínua.

3.9.2 Função Lipschitziana

Definição 3.22. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *lipschitziana* se existir uma constante $k > 0$ chamada de *constante de lipschitz* da função f, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,\ \forall\ x, y \in A.$$

Agora, é claro que uma função Lipschitziana é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ e sendo k a constante de Lipschitz da função f, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{k}$.

Para apresentarmos um exemplo de função lipschitziana vamos precisar de dois resultados. O primeiro segue da trigonometria circular e ficará como exercício ao leitor sua demosntração.

$$\cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)\right] \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\right].$$

O segundo, será dado pelo teorema a seguir e faremos sua prova.

Teorema 3.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$.*

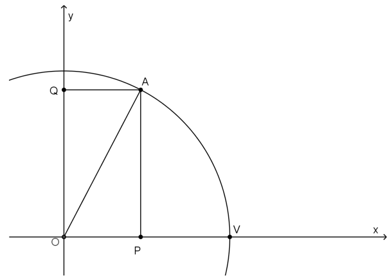
Demonstração. Se $x = 0$ temos $\operatorname{sen} 0 = 0$. Seja $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Marque, no primeiro quadrante o ponto A, tal que a medida do arco $\widehat{\mathrm{VA}}$ (que denotaremos por $m(\widehat{\mathrm{VA}})$) seja igual a x. Ora, disso temos que

$$\operatorname{sen} x = AP < m(\widehat{\mathrm{VA}}) = x.$$

Como, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, então $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Por fim, para $|x| > \frac{\pi}{2}$, basta observar que

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|.$$

Portanto $|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



Fonte:(GUZZO, 2021, p.28)

Figura 3.4: Arco VA.

□

Exemplo 3.24. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ a função $f(x) = \cos x$. Afirmamos que a função $f(x)$ é lipschitziana. De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\cos(x) - \cos(y)| \\
&= 2 \cdot \left| \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) \right] \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq 2 \cdot \left| \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq 2 \cdot \left| \left(\frac{x-y}{2} \right) \right| \\
&= |x - y|.
\end{aligned}$$

Portanto a função $f(x) = cos\ x$ é lipschitziana de constante de Lipschitz igual a 1.

3.9.3 Função Hölder Contínua

Definição 3.23. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *Hölder contínua de expoente* γ, se existirem constantes $k, \gamma > 0$, tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^{\gamma}, \ \forall \ x, y \in A,$$

essa desigualdade é chamada de condição de Hölder.

É fácil ver que as funções lipschitzianas são casos particulares das funções Hölder contínuas, para tanto basta tomar $\gamma = 1$.

3.9.4 Função Semicontínua

Dentro do conjunto das funções reais $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em um espaço topológico X, existe uma noção menor de continuidade chamada de semicontinuidade. Essa propriedade que iremos definir a seguir pode ser entendida inferiormente e superiormente.

3.9.5 Função Semicontínua Inferiormente

Uma sequência $\{a_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde o valor que a função a assume no número natural k é denotado a_k e chama-se k-ésimo termo da sequência. Podemos escrever,

$$\{a_k\} = \{a_0, a_1, ..., a_k, ...\}.$$

Definição 3.24. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *semicontínua inferiormente* no ponto $x \in X$ se, para qualquer sequência $\{a_k\} \subset X$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = x \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \lim_{k \to +\infty} \inf f(a_k).$$

Exemplo 3.25. A função *dente-de-serra* definida no exemplo 3.16 é um exemplo de função semicontínua inferiormente. De fato, tomando uma sequência $\{a_k\}$ que converge em particular para o ponto $x = 1$, entre muitas possibilidades, podemos considerar o caso da sequência $\{a_k\}$ convergindo para 1 pela esquerda. Nesse caso o $\lim_{k \to +\infty} \inf f(a_k) = 0$ e é maior do que $f(1) = 0$. Para valores de x que não são inteiros temos a igualdade entre o $\lim_{k \to +\infty} \inf f(a_k)$ e $f(x)$. O leitor pode fazer essa anlálise visualizando o gráfico 3.2 da função.

3.9.6 Função Semicontínua Superiormente

Definição 3.25. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *semicontínua superiormente* no ponto $x \in X$ se, para qualquer sequência $\{a_k\} \subset X$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} \sup f(a_k) \leq f(x).$$

Exemplo 3.26. A função *maior inteiro* definida no exemplo 3.10 é um exemplo de função semicontínua superiormente. Analogamente da constatação feita no exemplo anterior, podemos tomar uma sequência $\{a_k\}$ que converge em particular para o ponto $x = 1$, novamente entre muitas possibilidades, podemos considerar o caso da sequência $\{a_k\}$ convergindo para 1 pela esquerda. Nesse caso o $\lim_{k \to +\infty} \sup f(a_k) = 0$ e é menor do que $f(1) = 1$. Nesse caso, também temos para valores de x que não são inteiros a igualdade entre $\lim_{k \to +\infty} \sup f(a_k)$ e $f(x)$. Observe visualizando o gráfico 3.1 da função.

3.10 Função Limitada

Definição 3.26. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *limitada* se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in A$. Em outras palavras, a função f é dita *limitada* se sua imagem está contida num intervalo fechado do conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, $Im(f) \subset [a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Ademais, um valor de M possível é $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Exemplo 3.27. Claramente temos as funções seno e cosseno limitadas, pois suas imagens pertencem ao intervalo $[-1, 1]$. Disso, basta tomar $M = 1$.

Definição 3.27. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, $M \geq f(x)$, para todo $x \in A$.

Definição 3.28. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *limitada inferiormente* se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que, $f(x) \geq m$, para todo $x \in A$.

Exemplo 3.28. A função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é limitada inferiormente. Note que se $m = 0$, então $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.29. Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a < 0$. Logo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. A função f é limitada superiormente. Para tanto, basta tomar $M = -\frac{\Delta}{4a}$, daí que $M \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Deve estar claro ao leitor que uma função limitada superiormente e inferiormente é uma função limitada.

3.11 Função Derivável

Para definirmos o que é uma função derivável, temos que definir o conceito de derivada de uma função f em um ponto de seu domínio. Cabe ressaltar que não faremos um tratamento de interpretação da derivada em um ponto do domínio, tampouco faremos a discussão do significado de uma função ser derivável. Nosso foco é trazer à luz do leitor uma propriedade de função muito difundida na literatura matemática. Para tanto, retomamos, com a definição a seguir o conceito de limite e iremos considerar $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Definição 3.29. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado $x_0 \in A$, diremos que a função f é *derivável* no ponto x_0 se o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existir. Nesse caso, denominamos o limite acima como a *derivada* da função f no ponto x_0 e denotaremos por

$$f'(x_0).$$

Muitos livros de cálculo diferencial e integral trazem uma maneira equivalente de enunciar essa definição, que por vezes simplifica o cálculo do limite. Escrevendo $x = x_0 + h$, temos $h = x - x_0$, daí que quando $x \to x_0$ implica que $h \to 0$. Portanto, podemos definir a derivada de uma função f em um ponto x_0 do seu domínio como se segue.

Definição 3.30. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado $x_0 \in A$, diremos que a função f é *derivável* no ponto x_0 se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir.

Em resumo, se f é derivável no ponto x_0, então

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Podemos agora fazer a definição para uma função f ser dita derivável.

Definição 3.31. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se a função f é derivável em todo $x_0 \in A$, diremos que a função f é *derivável* em A.

Note que, como a definição de derivada no ponto sugere, dizer que uma função f é derivável, implica em dizer que existe uma função construída a partir da função f, denotada por f', que associa a cada $x \in A$ a derivada $f'(x)$. Essa função f' é chamada de *função derivada* de f. Disso podemos escrever,

$$\begin{array}{rcl} f' : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Exemplo 3.30. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Vamos mostrar que a função f é derivável para todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e, portanto derivável em $\mathbb{R}$. Definiremos também a função f'. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto fixo, porém qualquer. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} x + x_0 \\ &= 2x_0. \end{aligned}$$

Portanto f é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e sua função derivada é $f'(x) = 2x$.

Apesar da definição de derivada usar limite para se calcular a derivada de uma função, este não é o procedimento habitualmente usado. No desenvolvimento desse conteúdo em qualquer livro que o trata, é possível desenvolver regras para encontrar as derivadas sem ter que usar diretamente a definição. Essa regras são conhecidas como *regras de diferenciação* e quando as usamos dizemos que estamos *derivando* uma função f.

3.11.1 Funções Continuamente Derivável

Novamente vamos considerar o conjunto A um intervalo de $\mathbb{R}$. Vimos que quando a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas em todos os pontos do intervalo A, considera-se a função derivada $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$, que faz corresponder a cada $x \in A$ a derivada $f'(x)$.

Definição 3.32. Sejam A um intervalo da reta e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em todo intervalo A. Dizemos que a função f é *continuamente derivável*, ou uma função de *classe* $\mathbf{C}^1$ se, e somente se, f' é contínua.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $f^{(n)}(a)$ a *n-ésima derivada*, ou derivada de ordem n no ponto a. Em particular, podemos escrever $f^{(0)}(a) = f(a)$. Note que $f^{(n)}(a)$ só tem sentido quando $f^{(n-1)}(x)$ está definido para todo $x \in A$, tal que $a \in A$.

Para a definição a seguir, devemos entender que, ao dizer que uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo A, significa dizer que existe uma função $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in A$.

Definição 3.33. Sejam A um intervalo da reta e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em A. Dizemos que a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathbf{C}^n$, e escrevemos $f \in \mathbf{C}^n$, para dizer que f é n vezes derivável em A se, e somente se, a função $f^{(n)}$ é uma função contínua em A.

Uma consequência imediata da definição é escrever $f \in \mathbf{C}^0$ para dizer que a função f é contínua em A.

Em geral, diremos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é de *classe* $\mathbf{C}^\infty$ em A, se e somente se, a função $f \in \mathbf{C}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.31. Temos diversos exemplos para uma função de classe $\mathbf{C}^\infty$, as funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais são exemplos clássicos dessa família de funções.

3.11.2 Funções Uniformemente Derivável

Um resultado que segue da aplicação do Teorema do Valor Médio, que o leitor pode encontrar em (LIMA, 2004), é a caracterização das funções uniformemente deriváveis.

Definição 3.34. Sejam A um intervalo da reta e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *uniformemente derivável* em A se, e somente se, a função f é derivável em A e se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |h| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon, \text{ se } x \in A \text{ e } x + h \in A.$$

Note que a condição da definição acima poderia ser escrita da seguinte forma:

$$0 < |h| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| < \epsilon \cdot |h|, \text{ se } x \in A \text{ e } x + h \in A.$$

No livro (LIMA, 2004) o leitor pode encontrar a demonstração de que dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, com A um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, a função f é *uniformemente derivável* se, e somente se, é de *classe* $\mathbf{C}^1$.

3.12 Função Integrável

Apesar de não ser o foco desse trabalho, deixamos ao leitor a ideia básica de que as derivadas e as integrais constituem o par de conceitos mais importante do Cálculo Diferencial e Integral. Sem muito aprofundar, nos limitaremos em dizer que a derivada corresponde à noção geométrica de inclinações, reta tangente, à ideia física de velocidade e as mais diversas taxas de variações, enquanto a integral está associada à noção geométrica de área e a ideia de trabalho na física. Para que possamos definir o que é uma função integrável precisaremos dos resultados e definições a seguir.

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos tal que

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Usaremos as notações

$$m = \inf\{f(x)|\ x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \sup\{f(x)|\ x \in [a, b]\}.$$

Note que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Ora, se P é uma partição do intervalo $[a,b]$, então

$$m_i = \inf\{f(x) |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

e

$$M_i = \sup\{f(x) |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

indicarão o ínfimo e o supremo de $f(x)$ no i-ésimo intervalo da partição P.

Denotaremos por $s(f;P)$ para indicar a soma inferior de f relativamente à partição P e $S(f;P)$ a soma superior de f relativamente à partição P. Quando $f(x) \geq 0$, esses números $s(f;P)$ e $S(f;P)$ representam somas finitas de áreas de retângulos abaixo do gráfico da função f por *falta* quando se usa o ínfimo e por *sobra* quando se usa o supremo, respectivamente. Isto é,

$$s(f;P) = m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e

$$S(f;P) = M_1(x_1 - x_0) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Para entendimento, pense por um instante em $f(x) \geq 0$. Logo existe uma área mensurável $\mathcal{A}$ abaixo da curva de $f(x)$ com o eixo da abscissa no intervalo $[a,b]$. Com um pouco de esforço é possível notar que estamos somando um quantidade finita de áreas de retângulos de base $(x_n - x_{n-1})$ e altura m_i ou M_i. Quando usamos a altura m_i a soma $s(f;P)$ sempre será menor ou igual que a área $\mathcal{A}$. Por outro lado, quando usamos a altura M_i temos a soma $S(f;P)$ maior ou igual que a área $\mathcal{A}$. Disso,

$$s(f;P) \leq \mathcal{A} \leq S(f;P).$$

Definição 3.35. Sejam P e Q partições do intervalo $[a,b]$. Dizemos que Q *refina* P se $P \subset Q$.

Uma forma simples de fazer esse refinamento é acrescentar um ponto. Por exemplo, se

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

podemos construir a partição Q que refina P ($P \subset Q$) acrescentando um ponto, isto é,

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_k < x_{i+1} < \cdots < x_n = b\}.$$

Reorganizando os índices, podemos escrever,

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b\}.$$

É natural pensar que um refinamento Q na partição P gera uma soma $s(f;Q)$ e $S(f;Q)$, tais que

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq \mathcal{A}$$

e

$$\mathcal{A} \leq S(f;Q) \leq S(f;P).$$

De fato pode-se mostrar que, dadas as partições P e Q do intervalo $[a,b]$, tais que $P \subset Q$, então

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P).$$

Note pelo resultado acima que, o número real $S(f;Q)$ é uma cota superior para o conjunto

$$\{s(f;P)|\ P \text{ é uma partição de } [a,b]\},$$

e que o número real $s(f;Q)$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\{S(f;P)|\ P \text{ é uma partição de } [a,b]\}.$$

Portanto, temos que os conjuntos possuem supremo e ínfimo, respectivamente. Denotaremos o supremo por

$$\sup_P s(f;P)$$

e o ínfimo por

$$\inf_P S(f;P)$$

Finalmente podemos apresentar a definição de uma função integrável.

Definição 3.36. Uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é *integrável* se

$$\sup_P s(f;P) = \inf_P S(f;P).$$

Em outras palavras, dizemos que f é *integrável* quando a soma superior e a soma inferior são iguais. Esse valor chama-se *integral de Riemann* de f e é denotado por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Outra maneira de encontrar esse número seria fazendo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Note que a integral como foi construída é um número real. Dizemos *integral definida* para representar esse número $\int_a^b f(x)dx$. Contudo, assim como a derivada de uma função f em um ponto fixo resulta em um número real, vimos ser possível encontrar a função f' de f. Logo, é novamente natural pensar que podemos definir a função *integral indefinida* e usar dessa definição para criar técnicas que facilitam o cálculo de integrais.

Definição 3.37. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo $[a, b] \subset A$. Fixando um número $x_0 \in A$, a *integral indefinida* $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Por fim, temos o principal resultado do **Cálculo Diferencial e Integral** que resulta nas chamadas *técnicas de integração* e estabelece uma conexão entre derivadas e integrais.

3.12.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 3.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo A. A função $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma integral indefinida da função f, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, para todo $x \in A$ se, e somente se, a função F é dada por $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in A$.*

Podemos escrever esse teorema em duas partes: uma pensando na integral definida e a outra na integral indefinida. Para a integral definida temos

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.

Já para a integral indefinida podemos dizer

$$\int f(x)dx = F(x),$$

onde $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 3.32. Vimos no exemplo 3.30 que, dada a função $f(x) = x^2$ sua função derivada é dada por $f'(x) = 2x$. Ora, pelo teorema fundamental do cálculo isso significa dizer que,

$$\int f'(x)\ dx = \int 2x\ dx = x^2 + c.$$

Note que a constante $c \in \mathbb{R}$ é permitida, pois se $F(x) = x^2 + c$, então $F'(x) = f'(x) = 2x$ e isso torna $F(x)$ a mais geral possível.

Observação 3.6. O leitor deve estar percebendo que as propriedades das funções, na medida que avançamos, necessita cada vez mais de uma introdução e por vezes uma imersão em conceitos e notações específicas para que se tenha o entendimento da definição.

Avaliamos que até o momento, esse tratamento prévio cabe para as propriedades que já listamos, por serem mais difundidas na literatura matemática. Porém, desse ponto em diante, por simplificação e por distanciar-se do foco desse trabalho, registraremos somente a definição mantendo a ideia de concentrar uma lista de propriedades e trazermos ao conhecimento o seu significado. Uma outra justificativa para essa linha de registro deve-se a complexidade de muitos conceitos e na maioria dos casos, a particularidade de cada propriedade em se apresentar. Daremos ao leitor a definição e caberá ao mesmo buscar aprofundamento em literatura específica quando conveniente.

3.13 Transformação Linear

Para definirmos uma aplicação que denomina-se *transformação linear* é necessário falarmos do principal objeto de estudo da álgebra linear, os *espaços vetoriais*.

Definição 3.38. Dizemos que um conjunto V não vazio, é um *espaço vetorial* sobre um corpo $\mathbb{K}$ quando existe uma operação de adição de $V \times V \longrightarrow V$, dada por $(u, v) \longmapsto u+v$ e uma operação de multiplicação de $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, onde $(a, u) \longmapsto au$, que satisfazem as seguintes propriedades:
1) $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$;
2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in V$;
3) $\exists\ 0 \in V \mid u + 0 = u, \quad \forall u \in V$;
4) $\forall u \in V,\ \exists(-u) \in V \mid u + (-u) = 0$;
5) $a(bu) = (ab)u, \quad \forall u \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$;
6) $(a + b)u = au + bu, \quad \forall u \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$;
7) $a(u + v) = au + av, \quad \forall u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$;
8) $\exists\ 1 \in \mathbb{K} \mid 1u = u, \quad \forall u \in V$.

Para um melhor entendimento dos espaços vetoriais, sugerimos a leitura de qualquer livro de *Álgebra Linear* disponível na literatura matemática, como por exemplo, Lima (2006a) ou Coelho e Lourenço (2007). Nessas referências o leitor irá verificar que o corpo $\mathbb{K}$, na maioria das vezes, é o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$.

Definição 3.39. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $F : U \longrightarrow V$ é dita *transformação linear* de U em V se,
1) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$;
2) $F(au) = aF(u)$,
quaisquer que sejam os vetores $u_1, u_2 \in U$ e escalares $a \in \mathbb{K}$. Em particular, quando $U = V$, a transformação linear é chamada *operador linear*.

Exemplo 3.33. Sejam $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. A aplicação $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x, 2x - z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear. De fato, Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ elementos de $\mathbb{R}^3$. Logo

$$\begin{aligned}
F(u_1 + u_2) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)) \\
&= (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2) \\
&= F(u_1) + F(u_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, dados $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
F(au) &= F(ax, ay, az) \\
&= (ax, 2ax - az) \\
&= (ax, a(2x - z)) \\
&= a(x, 2x - z) \\
&= aF(u).
\end{aligned}$$

3.14 Função Forma Multilinear

Para as definições a seguir sobre funções formas lineares, bilineares, trilineares e multilineares, considere o corpo $\mathbb{K}$ como sendo o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos.

Definição 3.40. Sejam U um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma *forma linear* se,

$$f(au + v) = af(u) + f(v),$$

quaisquer que sejam os vetores $u, v \in U$ e escalares $a \in \mathbb{K}$.

Em Álgebra Linear, uma *função forma linear*, ou simplesmente *forma linear* ou *funcional linear* é um caso particular de *transformações lineares*. Vamos explicar: vimos que uma transformação linear entre dois espaços vetoriais U e V sobre um corpo $\mathbb{K}$, é uma aplicação $F : U \longrightarrow V$ que satisfaz as propriedades $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$ e $F(au) = aF(u)$, para todos os vetores $u_1, u_2 \in U$ e para todos os escalares $a \in \mathbb{K}$. Nesse contexto, se U e V são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, é possivel formar um conjunto de transformações lineares de U em V, que em álgebra linear é habitualmente indicado por $L(U, V)$, ou simplesmente $L(U)$ quando o conjunto é formado apenas por operadores linerares de U. Na referência Lima (2006a) o leitor pode encontrar a demonstração de que conjunto $L(U, V)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Seja U um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Temos que o próprio corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre ele mesmo. Logo faz sentido escrever $L(U, K)$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Este espaço vetorial, é também conhecido como *espaço vetorial dual de* U. Assim, fica claro ao leitor que cada elemento de $L(U, K)$ é uma transformação linear, porém também é uma *forma linear* sobre U, e portanto, um caso particular das transformações lineares da álgebra linear.

Outra indagação que o leitor pode estar fazendo é se existe alguma relação entre *forma linear* e *função linear*. A função linear é um caso particular das formas lineares, porém cabe ao leitor o cuidado de separar os contextos. Quando falamos de uma função linear como exemplo de uma forma linear, restringimos o espaço vetorial ao conjunto dos números reais que faz simultaneamente o papel de espaço vetorial e corpo, isto é, estamos olhando simplesmente para uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que cumpre uma propriedade sem o contexto algébrico de espaço vetorial. Já em formas lineares precisamos do espaço vetorial e este por vezes, pode não ser o conjunto $\mathbb{R}$, e daí, temos um novo contexto linear a considerar. No entando, a função linear como na definição 2.5, é uma forma linear. De fato, seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$. Temos que, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com x e y tomados como elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ como escalar do corpo $\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} F(kx + y) &= a(kx + y) \\ &= akx + ay \\ &= kax + ay \\ &= kF(x) + F(y). \end{aligned}$$

Definição 3.41. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma *forma bilinear* se,
1) $f(au_1 + u_2, v) = af(u_1, v) + f(u_2, v)$;
2) $f(u, av_1 + v_2) = af(u, v_1) + f(u, v_2)$,
quaisquer que sejam os vetores $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e escalares $a \in \mathbb{K}$.

Muitos autores preferem escrever separadamente as propriedades dessa definição. Faremos isso na definição 3.42 a seguir. Em alguns casos torna-se mais simples a verificação se uma função de duas variáveis é uma forma bilinear. Em um dos exemplos nos utilizaremos desse recurso mais simplificado.

Definição 3.42. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma *forma bilinear* se,
1) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$;
3) $f(au, v) = af(u, v)$;
2) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$;

4) $f(u, av) = af(u, v)$,
quaisquer que sejam os vetores $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e escalares $a \in \mathbb{K}$.

Note que uma função $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma *forma bilinear* se for linear em cada uma das variáveis quando deixamos a outra fixa.

Para os exemplos a seguir considere a definição abaixo.

Definição 3.43. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e um $\mathbb{K}^n$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, definimos

$$\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Essa definição refere-se ao *produto interno canônico* em $\mathbb{K}^n$. Caso o leitor não conheça as propriedades de produto interno, sugerimos pesquisar em Lima (2006a) ou em Coelho e Lourenço (2007) para facilitar seu entendimento.

Para os dois próximos exemplos, considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nesse caso podemos escrever a função $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, com os escalares $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.34. Sejam $U = V = \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u, v) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2,$$

onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. A função f (produto interno canônico em $\mathbb{R}^2$) é uma forma bilinear. De fato, sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, tais que $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$. Então,

$$\begin{aligned} f(au + v, w) &= (ax_1 + y_1)z_1 + (ax_2 + y_2)z_2 \\ &= ax_1z_1 + y_1z_1 + ax_2z_2 + y_2z_2 \\ &= a(x_1z_1 + x_2z_2) + y_1z_1 + +y_2z_2 \\ &= af(u, w) + f(v, w). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} f(u, av + w) &= x_1(ay_1 + z_1) + x_2(ay_2 + z_2) \\ &= ax_1y_1 + x_1z_1 + ax_2y_2 + x_2z_2 \\ &= a(x_1y_1 + x_2y_2) + x_1z_1 + x_2z_2 \\ &= af(u, v) + f(u, w). \end{aligned}$$

Exemplo 3.35. Em geral, se $U = V = \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(u, v) = f((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$, então a função f é uma forma bilinear.

Exemplo 3.36. Sejam $U = V = \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(u, v) = u \cdot \overline{v}$$

onde $u, v \in \mathbb{C}$. A função f (produto interno canônico em $\mathbb{C}$) não é um forma bilinear. Nesse caso, a função não é linear na segunda variável quando fixamos a primeira. De fato, sejam $u = a + bi$, $v = c + di$ e $w = e + fi$ elementos de $\mathbb{C}$ e considere $k \in \mathbb{C}$ um escalar, onde $k = x + yi$. Daí,

$$\begin{aligned}
f(u+v, w) &= (u+v) \cdot \overline{w} \\
&= [(a+bi)(c+di)](e-fi) \\
&= [(a+c)(b+d)i](e-fi) \\
&= (a+c)e - (a+c)fi + (b+d)ei - (b+d)fi^2 \\
&= ae + ce - afi - cfi + bei + dei - bfi^2 - dfi^2 \\
&= (ae - afi + bei - bfi^2) + (ce - cfi + dei - dfi^2) \\
&= (a+bi)(e-fi) + (c+di)(e-fi) \\
&= u \cdot \overline{w} + v \cdot \overline{w} \\
&= f(u, w) + f(v, w).
\end{aligned}$$

Isso mostra que a primeira propriedade da definição 3.42 é válida. Vamos mostrar que a segunda também é satisfeita.

$$\begin{aligned}
f(ku, v) &= (ku) \cdot \overline{v} \\
&= [(x+yi)(a+bi)](c-di) \\
&= (xa + xbi + yai + ybi^2)(c-di) \\
&= xac - xadi + xbci - xbdi^2 + yaci - yadi^2 + ybci^2 - ybdi^3 \\
&= (x+yi)(ac - adi + bci - bdi^2) \\
&= (x+yi)[(a+bi)(c-di)] \\
&= k \cdot (u \cdot \overline{v}) \\
&= k \cdot f(u, v).
\end{aligned}$$

Até agora conseguimos provar que a primeira variável é linear fixando a segunda. Contudo para a função ser uma forma bilinear não é sufuciente. Temos que analisar agora a linearidade da segunda variável quando deixamos a primeira fixa.

$$\begin{aligned}
f(u, v+w) &= u \cdot \overline{(v+w)} \\
&= (a+bi)[\overline{(c+di)+(e+fi)}] \\
&= (a+bi)[\overline{(c+e)+(d+f)i}] \\
&= (a+bi)[(c+e)-(d+f)i]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(c+e) - a(d+f)i + b(c+e)i - b(d+f)i^2 \\
&= ac + ae - adi - afi + bci + bei - bdi^2 - bfi^2 \\
&= (ac - adi + bci - bdi^2)(ae - afi + bei - bfi^2) \\
&= (a+bi)(c-di) + (a+bi)(e-fi)(\\
&= u \cdot \overline{v} + u \cdot \overline{w} \\
&= f(u,v) + f(u,w).
\end{aligned}
$$

Vimos que até o momento a função $f(u,v) = u \cdot \overline{v}$, atende as três primeiras propriedades. Entretando, ao verificarmos a última, notemos que

$$
\begin{aligned}
f(u,kv) &= u \cdot \overline{kv} \\
&= (a+bi)[\overline{(x+yi)(c+di)}] \\
&= (a+bi)[\overline{xc + xdi + yci + ydi^2}] \\
&= (a+bi)[(xc - yd) - (xd + yc)i] \\
&= a(cx - yd) - a(xd + yc)i + b(xc - yd)i - b(xd + yc)i^2 \\
&= axc - ayd - axdi - ayci + bxci - bydi - bxdi^2 - byci^2 \\
&= (axc - ayd + bxd + byc) + (bxc - axd - ayc - byd)i \\
&\neq (axc + ayd + bxd - byc) + (bxc - axd + ayc - byd)i \\
&= xac - xadi + xbci - xbdi^2 + yaci - yadi^2 + ybci^2 - ybdi^3 \\
&= (x+yi)(ac - adi + bci - bdi^2) \\
&= (x+yi)[(a+bi)(c-di)] \\
&= k \cdot (u \cdot \overline{v}) \\
&= k \cdot f(u,v).
\end{aligned}
$$

Portanto a função $f(u,v) = u \cdot \overline{v}$ não é uma forma bilinear, pois $f(u,kv) \neq k \cdot f(u,v)$, confirmando que a função não é linear na segunda variável quando fixamos a primeira.

Observação 3.7. Uma maneira simples de mostrar que uma propriedade não vale é com um contraexemplo. Deixaremos a cargo do leitor percorrer esse caminho. Um dica de escolha seria atribuir $u = 1$, $v = i$ e $k = i$ e mostrar que $f(u,kv) = -1$ enquanto $k \cdot f(u,v) = 1$.

Qualquer produto interno definido em um espaço vetorial V sobre o corpo dos reais é uma forma bilinear. Entretanto, observe que o mesmo não é verdade sobre os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Após discorrer sobre as funções que são formas lineares e bilineares, podemos expandir essa definição, por exemplo, para as funções que são formas trilineares e consequentemente para funções de n variáveis, com $(n \geq 2)$ que são lineares para cada um de suas variáveis, sendo denotada assim por *formas multilineares.*

Definição 3.44. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e n um número inteiro positivo. Uma função $f : V^n \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma *n-forma multilinear*, ou simplesmente uma *forma multilinear* se, e somente se, seja linear em cada um dos seus argumentos, ou seja, para todo $a \in \mathbb{K}$, todo $u_1, \cdots, u_n \in V$, todo $v_1, \cdots, v_n \in V$ e todo $i = 1, \cdots, n$ vale

$$\begin{aligned} f(u_1, \cdots, u_{i-1}, au_i + v_i, u_{i+1}, \cdots, u_n) &= af(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_n) + \\ &+ f(u_1, \cdots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \cdots, u_n). \end{aligned}$$

3.15 Função Coerciva

Considere $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in X$.

Definição 3.45. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *coerciva* quando

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Definição 3.46. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *supercoerciva* quando

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty.$$

Exemplo 3.37. A função módulo $|\cdot|$, dada por $f(x) = |x|$ é coerciva, porém não é supercoerciva. De fato,

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} |x| = +\infty.$$

Por outro lado,

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{|x|}{|x|} = \lim_{|x| \to +\infty} 1 = 1.$$

Exemplo 3.38. A função $f(x) = |x|^2$ é supercoerciva. De fato,

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{|x|^2}{|x|} = \lim_{|x| \to +\infty} |x| = +\infty.$$

Observação 3.8. Note que toda função supercoerciva é coerciva, entretanto o exemplo 3.37 mostra que a recíprova não é verdadeira.

Em um contexto mais amplo e complexo, podemos definir uma função coerciva de forma diferente. Recomendamos ao leitor, para um melhor entendimento da definição que iremos apresentar um estudo preliminar de Análise Funcional, área da matemática que faz a fusão entre Análise Clássica, Álgebra Linear e Topologia. Essa área trabalha com os espaços vetoriais normados, especialmente os espaços de Banach e dos operadores lineares contínuos entre si. O matemático David Hilbert (1862 - 1943) trouxe grandes contribuições para essa área, além da criação dos espaços que leva seu nome, os *espaços de Hilbert*.

Definição 3.47. Seja H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que B é *coerciva* se existe uma constante $\alpha > 0$, tal que

$$B(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \text{ para todo } u \in B.$$

3.16 Função Analítica

Em geral o denominação *funções analíticas* é atribuída, de forma mais enfátic, as funções de uma variável complexa. Contudo veremos que também podemos classificar algumas funções de variável real como funções analíticas.

Definição 3.48. Uma função f de variável complexa z se diz *analítica* num ponto z_0, se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo ponto z de uma vizinhança de z_0. Se a função f está definida para todo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e é analítica em todo ponto $z \in \mathbb{C}$ dizemos que a função f é *inteira*.

Exemplo 3.39. Toda função polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ é uma função inteira.

Definição 3.49. Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, com $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, uma função complexa. Dizemos que a função f é *holomorfa* em A se $f'(z)$ existe para todo ponto $z \in A$. Temos ainda que, se a função f está definida para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ e é holomorfa em todo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, a função é dita *inteira*.

O leitor deve estar se perguntando o porque duas definições equivalentes tem denominações diferentes. O termo "função analítica"é frequentemente usado no lugar de "função holomorfa", entretanto o termo "analítico"possui vários outros significados. A definição 3.48 é dada por Churchill (1975) e para ele os termos *regular* e *holomorfa* são, às vezes, introduzidos para indicar analiticidade em domínios de certas classes. Já a definição 3.49 é feita por Soares (2007) e tem equivalência com outra definição que ele traz para funções analíticas. Isto é, para Soares (2007) a definição de função holomorfa e a definição de função analítica, no caso complexo, são distintas, porém equivalentes.

> "O fato espantoso é que a Teoria de Cauchy, a ser desenvolvida no próximo capítulo, nos diz que no caso complexo função analítica é sinônimo de função holomorfa!." (SOARES, 2007, p.85).

A definição de função analítica para Soares (2007) que apresentaremos em seguida, é o que pode ser interpretado como sendo a definição comum para as funções de variável complexa e as funções de variável real.

Definição 3.50. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função infinitamente diferenciável. A função f é dita *analítica* em A se, para todo ponto $z_0 \in A$, a função f se expressa como uma série de potência de centro z_0 com raio de convergência $R_{z_0} > 0$. Isto é, f é analítica em A se, dado $z_0 \in A$ tivermos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

e essa série converge absolutamente num disco $D(z_0, R_{z_0}) \subset A$, $R_{z_0} > 0$.

Definição 3.51. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um domínio e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável (classe $\mathbf{C}^\infty$). A função f é dita *analítica* em A se, e somente se, para todo ponto $x_0 \in A$, existir uma vizinhança $V_{x_0} \subset A$ tal que a função f pode ser expressa como uma série de potência. Isto é, f é analítica em A se, dado $x_0 \in A$ tivermos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

.

Exemplo 3.40. A função $f(x) = e^x$ é analítica em $\mathbb{R}$. Fixando $x = 0$, temos que

$$f(x) = e^x, \quad f^{(1)}(x) = e^x, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \cdots,$$

temos ainda

$$f(0) = 1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \cdots,$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ &= f(0) + f((0)x + \frac{f^{(1)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Cabe aqui alertar o leitor que para o caso de funções de uma variável real, a definição de função analítica fica estritamente associado ao fato da função poder ser expressa como uma série de potência. Não se pode dizer para as funções de uma variável real, como fazemos nas funções de uma variável complexa, que uma função f é analítica em um domínio A, se $f'(x)$ existe para todo ponto $x \in A$. Consequentemente, o termo *função inteira* só tem sentido para as funções de uma variável complexa.

3.17 Morfismos

Nessa seção falaremos das aplicações que são denominadas *morfismos*, contudo o leitor irá perceber que cada morfismo tanto no contexto da Análise como no contexto da Álgebra recebem nomes especiais. Dessa forma, nos limitaremos a definir morfismo da seguinte maneira:

Definição 3.52. Um morfismo é uma aplicação entre dois conjuntos não vazios, E e F, que preserva alguma estrutura destes conjuntos.

Na análise temos dois morfismos frequentemente citados na literatura matemática. São eles: o *homeomorfismo* e o *difeomorfismo*.

Definição 3.53. Sejam os conjuntos E e F não vazios, tais que $E, F \subset \mathbb{R}$. Uma bijeção contínua $f : E \longrightarrow F$, cuja inversa $f^{-1} : F \longrightarrow E$ também é contínua, chama-se um *homeomorfismo*.

Note que nesse caso a estrutura preservada é a continuidade da função f. Essa definição é exclusiva para uma função de uma variável, porém podemos estrapolar e definir homeomorfismo para funções de n variáveis.

Definição 3.54. Sejam os conjuntos E e F não vazios, tais que $E \subset \mathbb{R}^m$ e $F \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção contínua $f : E \longrightarrow F$, cuja inversa $f^{-1} : F \longrightarrow E$ também é contínua, chama-se um *homeomorfismo*.

De forma análoga, podemos definir *difeomorfismo* para funções de uma variável real e estrapolar para funções de n variáveis.

Definição 3.55. Sejam os conjuntos E e F não vazios e abertos, tais que $E \subset \mathbb{R}$ e $F \subset \mathbb{R}$. Uma bijeção diferenciável $f : E \longrightarrow F$, cuja a inversa $f^{-1} : F \longrightarrow E$ também é diferenciável, chama-se um *difeomorfismo*.

Definição 3.56. Sejam os conjuntos E e F não vazios e abertos, tais que $E \subset \mathbb{R}^m$ e $F \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção diferenciável $f : E \longrightarrow F$, cuja a inversa $f^{-1} : F \longrightarrow E$ também é diferenciável, chama-se um *difeomorfismo*.

No contexto da álgebra, os morfismos dependem da estrutura e contexto que estão inseridos. Por exemplo, podemos definir um tipo especial de morfismo, que denominamos por *homomorfismo* para a teoria de *grupos*, como também para a teoria de *anéis*. O mesmo ocorre com outro tipo de morfismo chamado de *isomorfismo*. Para detalhar essas definições e ficar claro ao leitor esses morfismos em cada contexto, iremos definir o conceito de grupo e de anel.

Definição 3.57. Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e uma operação $(x, y) \longmapsto x + y$ sobre G é chamado de *grupo* e denotaremos por $(G, +)$ se:
1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \ \forall\ a, b, c \in G;$
2) $\exists\ e \in G \mid a + e = e + a = a, \ \ \forall\ a \in G;$
3) $\forall\ a \in G, \ \exists\ a' \in G \mid a + a' = a' + a = e.$
Se além dessas propriedades, tivermos $a+b = b+a$, quaisquer que sejam $a, b \in G$ dizemos que o grupo é *comutativo* ou *abeliano*.

Uma observação a se fazer é a respeito da operação "soma"dada na definição. Deve ficar claro ao leitor que essa operação pode ser a operação *soma* habitualmente conhecida desde as séries iniciais, porém pode ser qualquer outra operação definida dentro desse conjunto, isto é, a operação $+$ expresssa na definição pode ser uma operação $\oplus$ qualquer.

Definição 3.58. Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \longmapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \longmapsto x \cdot y$, é chamado de *anel associativo* e denotaremos por $(A, +, \cdot)$ se:
1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \ \forall\ a, b, c \in A;$
2) $\exists\ e \in A \mid a + e = e + a = a, \ \ \forall\ a \in A;$
3) $\forall\ a \in A, \ \exists\ a' \in A \mid a + a' = a' + a = e;$
4) $a + b = b + a, \ \ \forall\ a, b \in A;$
5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \ \forall\ a, b, c \in A;$
6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall\ a, b, c \in A;$

Definição 3.59. Seja A um anel. Dezemos que A é um *anel comutativo com unidade* se, para a operação de multiplicação em A tivermos: 1) $\exists\ 1 \in A \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \ \ \forall\ a \in A;$ 2) $a \cdot b = b \cdot a, \ \ \forall\ a, b \in A.$

Com mais clareza, podemos definir os morfismos algébricos que preservam a operação definida em cada conjunto.

Definição 3.60. Chama-se de *homomorfismo* de um grupo $(A, \oplus)$ num grupo $(B, *)$ a toda aplicação $f : A \longrightarrow B$ tal que, para todos $x, y \in A$ tem-se

$$f(x \oplus y) = f(x) * f(y).$$

Nesse contexto, podemos nos referir a aplicação $f : A \longrightarrow B$ simplesmente por um homomorfismo de grupos. Se $A = B$ dizemos que a aplicação f é homomorfismo de A e denominamos por um *endomorfismo*.

Exemplo 3.41. Sejam os conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e dos números reais $\mathbb{R}$. Deixaremos a cargo do leitor verificar que os conjuntos $\mathbb{Z}$ com a operação de soma usual e $\mathbb{R}$ com a operação de multiplicação usual são grupos. A aplicação $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = x^n$ é um homomorfismo de grupos para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^*$. De fato, sejam $n, m \in \mathbb{Z}$, logo

$$f(n+m) = x^{n+m} = x^n \cdot x^m = f(n) \cdot f(m).$$

Se um homomorfismo é uma aplicação injetora, chamamos de *homomorfismo injetor* ou simplesmente por *monomorfismo*. Por outro lado, Se um homomorfismo é uma aplicação sobrejetora, chamamos de *homomorfismo sobrejetor* ou simplesmente por *epimorfismo*. Se o homomorfismo é bijetor isso irá corresponder ao conceito de *isomorfismo* que trataremos agora.

Definição 3.61. . Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de grupos. Dizemos f é um *isomorfismo* do grupo A no grupo B se, e somente se, a aplicação f é bijetora. Se $A = B$ e a operação for a mesma, denominaremos o *isomorfismo* de A por *automorfismo*.

Exemplo 3.42. Sejam $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função logarítmica $f : (\mathbb{R}^*_+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ dada por

$$f(x) = \log_a x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*_+,$$

é um isomorfismo. Inicialmente note que a função log preserva as operações de multiplicação de $\mathbb{R}^*_+$ e de adição de $\mathbb{R}$. Ademais, dados $x, y \in \mathbb{R}^*_+$, temos

$$f(xy) = \log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

e deve ser do conhecimento do leitor que a função f é uma bijeção. Portanto a função logarítmica é um isomorfismo de grupos.

Mudando agora o contexto, vamos definir homomorfismo e isomorfismo para anéis. O leitor irá perceber que o conceito de homomorfismo e isomorfismo não se altera, contudo temos duas operações à considerar.

Definição 3.62. Chama-se de *homomorfismo* de um anel $(A, +, \cdot)$ num anel $(B, \oplus, \otimes)$ a toda aplicação $f : A \longrightarrow B$ tal que, para todos $x, y \in A$ tem-se

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$$

e

$$f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y).$$

Analogamente, se um homomorfismo é uma aplicação injetora, denominamos de *homomorfismo injetor* ou por *monomorfismo*. Por outro lado, se um homomorfismo é uma aplicação sobrejetora, chamaremos de *homomorfismo sobrejetor* ou por *epimorfismo*. Ademais, se o $A = B$ o homomorfismo é denominado de *endomorfismo*.

Exemplo 3.43. Sejam os anéis $\mathbb{Z}$ com as operações de adição e multiplicação usuais e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a operação de adição usual e a multiplicação direta (termo a termo). A aplicação $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = (n, 0)$ é um homomorfismo. De fato, dados $n, m \in \mathbb{Z}$, temos

$$f(n + m) = (n + m, 0) = (n, 0) + (m, 0) = f(n) + f(m)$$

e

$$f(n \cdot m) = (n \cdot m, 0) = (n, 0) \cdot (m, 0) = f(n) \cdot f(m).$$

Definição 3.63. Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Dizemos que a aplicação f é um *isomorfismo* do anel A no anel B se, a aplicação f é bijetora. Neste caso, dizemos simplesmente que a aplicação f é um isomorfismo de anéis. Ademais, se $A = B$ denominaremos o *isomorfismo* de A por *automorfismo*.

Exemplo 3.44. A função identidade $f(x) = x$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é um isomorfismo quando consideradas as operações usuais. Neste caso, dizemos que a função f é um automorfismo. É facil ver que,

$$f(x + y) = x + y = f(x) + f(y)$$

e

$$f(x \cdot y) = x \cdot y = f(x) \cdot f(y).$$

Homomorfismos e isomorfismos não são restritos à álgebra. Esses tipos especiais de morfismos podem aparecer na análise e num contexto mais específico da álgebra linear. Na análise, podemos fazer essa ponte definindo um conjunto que se denomina *corpo*.

Definição 3.64. Seja $\mathbb{K}$ um anel comutativo com unidade. Seja $U(\mathbb{K})$ o conjunto dos elementos de $\mathbb{K}$ que possui inverso multiplicativo, isto é, se $x \in \mathbb{K}$ e x^{-1} é o inverso multiplicativo de x, então $x^{-1} \in U(\mathbb{K})$ e $x \cdot x^{-1} = 1$, onde 1 é o elemento neutro da operação multiplicação. Diremos que $\mathbb{K}$ é um *corpo* se, e somente se, $U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$.

Exemplo 3.45. Os anéis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos.

Ora, essa definição resume bem que podemos definir dentro da análise real com as operações usuais, homomorfismos e isomorfismos. De fato:

Definição 3.65. Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ corpos. Uma função $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ chama-se *homomorfismo* quando se tem para todos $x, y \in \mathbb{K}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Ademais, se f for uma bijeção, dizemos que f é um *isomorfismo*.

Analogamente valem todas as denominações que já definimos de epimorfismos, monomorfismos, endomorfismos e automorfismos.

Na teoria específica da álgebra linear, homomorfismos e isomorfismos ficam definidos no contexto das transformações lineares entre espaços vetoriais. Deve estar claro para o leitor que nesse caso temos somente uma operação definida dentro dos dois conjuntos, ou mais precisamente dentro dos espaço vetoriais. Assim, dados os espaços vetoriais e a operação de adição, parte da condição para uma aplicação F ser uma transformação linear coincide com a definição de homomorfismo. Portanto toda transformação linear é um homomorfismo. Logo nos resta somente adaptar a definição de isomorfismo para esse mesmo contexto.

Definição 3.66. Um *isomorfismo* do espaço vetorial U no espaço vetorial V é uma transformação linear $F : U \longrightarrow V$ que seja bijetora. Se $U = V$ dizemos que $F : U \longrightarrow V$ é um *automorfismo* de U.

Considerações Finais

Este trabalho reuniu uma grande lista de tipos e propriedades de aplicações que dependendo do contexto e de sua natureza são designados por funções, transformações, formas ou morfismos. No caso das funções, ao leitor podemos dizer que existe um lista maior ainda de denominações para as funções que englobam tipos e propriedades que não foram contempladas nesse material, e que por vezes, exigem um conhecimento mais aprofundado e complexo. Fizemos um trabalho de pesquisa para concentrar e trazer um bom número de terminações que estão diretamente associadas às funções.

Varremos exaustivamente o que encontramos nos livros que tratam de função de uma variável real. Muitos termos e propriedades foram omitidos por não ser possível fazer uma transposição ou fundamentação aceitável para o entendimento no nível do ensino médio. Mesmo assim, extrapolando um pouco esse limite, fizemos algumas abordagem que irão exigir do leitor iniciante na matemática um esforço maior.

As funções são comumente estudadas no ensino básico, com inicio já no ensino fundamental, porém com mais ênfase no ensino médio. Atrevemos em dizer que todas as funções e propriedades estudadas e abordadas no ensino básico foram contempladas nesse material. Para essas funções e propriedades fizemos a apresentação formal, definindo-as, caracterizando-as, dando exemplos e mostrando algumas de suas propriedades. Além de varrer todo o campo do nível médio, expandimos o tratamento de funções e/ou aplicações para níveis mais avançados de conhecimento e trouxemos um leque de definições para tipos ou propriedades de funções e/ou aplicações que pode ser visto como um *dicionário de funções.*

Dessa forma concluímos que este tipo de trabalho, um dicionário, é por definição quase que interminável, pois mesmo que a lista seja finita a complexidade de reunir e variação de contextos e áreas da matemática o torna não exequível.

Sentimos que o objetivo desse trabalho foi alcançado e que a construção desse material mostrou que às vezes podemos nos deparar com objetos matemáticos básicos como as funções que podem ser tratadas em diferentes néveis mas que são muitas vezes ignoradas. Dessa forma, notamos a importância do professor estar preparado para lidar com situações no ensino de matemática e mais especificamente o ensino de funções que necessitam de uma formação sólida.

Referências Bibliográficas

[1] AZCÁRATE, G., DEULOFEU, J. *Funciones e Graficas.* 1ª reimp. Madrid: Editorial Sínteses, S.A. Colección: Matematicas:cultura y aprendizaje. 1996.

[2] BRASIL, Secretaria da educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

[3] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações.* 2. ed. Atual. São Paulo, 1978.

[4] CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas aplicações.* Trad. Tadao Yoshioka. Revisão Técnica. Alfredo A. de Farias. McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo: São Paulo, 1975.

[5] COELHO, F. U., LOURENÇO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear.* 2.ed. rev. e ampl. Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

[6] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações.* 2ª Edição. Volume 1. Ática. São Paulo, 2013.

[7] DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. *Álgebra Moderna.* 4ª Edição reform. Atual. São Paulo, 2003.

[8] EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[9] GONÇALVES, A. C. *Aspectos da história do conceito de função e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos.* Dissertação de Mestrado do PROFMAT da Universidade de São Paulo, 2015.

[10] GUZZO, S. M. *As funções trigonométricas circulares e hiperbólicas.* Editora Moan. Cascavel, 2021.

[11] LIMA, E. L. *Número e Funções Reais.* 1ª Edição 3ª reimpressão (2017). SBM. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, 2013.

[12] LIMA, E. L. *Álgebra Linear.* 7ª Edição. IMPA. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2006a.

[13] LIMA, E. L. *Análise Real.* Vol. 1. Funções de Uma Variável. 9ª Edição. IMPA. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2007a.

[14] LIMA, E. L. *Análise Real.* Vol. 2. Funções de n Variáveis. IMPA. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2006b.

[15] LIMA, E. L. *Análise Real.* Vol. 3. Análise Vetorial. IMPA. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2007b.

[16] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* Vol. 1. 11ª Edição. IMPA. Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 2004.

[17] MODERNA, Obra Coletiva. *Conexões com a Matemática.* 2ª Edição. Volume 1. Moderna. São Paulo, 2013.

[18] NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.* SBM. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, 2015.

[19] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios.* SBM. Coleçãa Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2016.

[20] PAIVA, M. *Matemática.* 3ª Edição. Volume 1. Moderna. São Paulo, 2015.

[21] PINEDO, C. J. Q. . *Fundamentos da Matemática II.* Pato Branco: CEFET-PR Pato Branco COMAT, 2002 (Material de Consulta).

[22] SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. *Matemática: ensino médio.* 6ª Edição. Volume 1. Saraiva. São Paulo, 2010.

[23] SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa.* 4.ed. IMPA. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2007.

[24] SOUZA, J. R. *Novo Olhar Matemática.* 1ª Edição. Volume 1. Coleção Novo Olhar. FTD. São Paulo, 2010.

[25] STEWART, J. *Cálculo.* Volume 1. 5ª Edição. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006a.

[26] STEWART, J. *Cálculo.* Volume 2. 5ª Edição. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006b.

Índice Remissivo