UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Resolução de equações por radicais: Um apanhado histórico e alguns métodos complementares

Março de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Resolução de equações por radicais: Um apanhado histórico e alguns métodos complementares

Elisangela Danielli de Lima

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
Sandro Marcos Guzzo (Orientador)
Rodrigo Schulz
Fabiana Magda Garcia Papani

Cascavel, Março de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Lima, Elisangela Danielli
Resolução de equações por radicais: Um apanhado histórico e alguns métodos complementares / Elisangela Danielli Lima; orientador(a), Sandro Marcos Guzzo, 2021.
75 f.

Dissertação (mestrado profissional), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Modalidade Profissional, 2021.

1. Resolução de equações. 2. Radicais. 3. Fórmula de Tartaglia. 4. Método de Ferrari. I. Guzzo, Sandro Marcos. II. Título.

ELISANGELA DANIELLI DE LIMA

Resolução de equações por radicais: Um apanhado histórico e alguns métodos complementares

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADA pela seguinte banca examinadora:

Orientador(a) - Sandro Marcos Guzzo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Rodrigo André Schulz

Rodrigo André Schulz
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Fabiana Magda Garcia Papani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 2 de março de 2021

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido força, coragem e vontade de aprender mais.

Agradeço a meu esposo Eliezer e à toda minha família por ter me dado o suporte necessário para buscar esse sonho.

Aos meus filhos Ana Marcela e Otto, pois cada vez que desanimo me lembro que todo meu esforço é por eles.

Agradeço a minha amiga Cristiane que me incentivou à me inscrever no processo seletivo e compartilhou comigo seus livros e conhecimentos. Não sei se estaria aqui se não fosse a sua sugestão.

Aos colegas de turma: Luana, Marcos, Ricardo, José e Silvano pela companhia, pela ajuda nos estudos, pelos cafés reforçados e pelas risadas compartilhadas. Vocês certamente tornaram essa caminhada mais leve.

Agradeço também aos colegas que por seus motivos pessoais deixaram o programa antecipadamente, apesar do pouco tempo de convívio sempre me lembrarei de vocês.

Aos colegas de carro, viajando semanalmente de Foz a Cascavel, Marcos, Francisco, Kelly e Léia entre histórias, piadas e testemunhos, tenho certeza que cada um de nós ajudou o outro a aliviar o peso do trajeto.

Por fim, agradeço a todos os professores que passaram por mim nesse curso. Todos me ensinaram muito, de uma forma ou de outra. Mas tenho um agradecimento especial ao meu orientador, professor Sandro, por ter sido paciente e generoso e me auxiliado muito, apesar da distância e à professora Rosângela por ter sido tão humana e sempre ter a disposição para nos ouvir e compreender.

A cada um de vocês, obrigada.

Resumo

Este trabalho apresenta as fórmulas resolutivas para equações polinomiais desenvolvidas até o grau 4, mostra também um apanhado histórico sobre a busca e obtenção de tais fórmulas. Retratamos a história da demonstração da impossibilidade de resolver equações de grau maior ou igual a 5. O trabalho conta também com um referencial teórico de polinômios, equações e números complexos que é necessário para compreender as fórmulas resolutivas. Mostramos algumas resoluções para equações polinomiais de graus maiores ou iguais a 5 em formatos específicos. Por fim exibimos uma análise de como se apresenta o tema das resoluções de equações polinomiais em alguns livros didáticos de ensino médio.

Abstract

This work intents to present the resolutive formulas for polinomial equations until the 4^{th} degree, and also shows some historical notes about the search and achievement of such formulas. We recall the historical impossibility of a solution formula for the equations of 5^{th} degree or greater. This work also has some teorical references on polinomials, equations and complex numbers wich are needed to better understand some of the resolutive formulas. We show some resolutive methods for specific equations of degree greater than 5. To the very end, we exibit an analysis concerning how the high school books treat this subject.

Sumário

Introdução **15**

1 Teoria geral **17**

1.1 Polinômios e equações polinomiais 17

1.2 Operações com polinômios 19

1.3 O Teorema Fundamental da Álgebra e suas implicações 24

1.4 Raízes complexas 26

2 Fórmulas fechadas **29**

2.1 Equações do primeiro grau 29

2.2 Equações do segundo grau 30

2.3 Equações do terceiro grau 34

2.4 Equações do quarto grau 40

2.5 Equações de grau $n \geq 5$ 46

3 Casos especiais **49**

3.1 Apontamentos sobre a substituição $x = y + t$ 49

3.2 Coeficientes "espelhados" 53

3.2.1 Equações de 6º grau 54

3.2.2 Equações de 8º grau 56

3.2.3 Alternativa para equações de 4º Grau 58

3.2.4 Generalização do método anterior 60

3.3 Combinação de casos utilizando o Teorema das Raízes Racionais 63

3.4 Resolvendo uma equação especial de grau 5 66

4 O que trazem os livros didáticos de ensino médio 68

5 Considerações finais 72

Referências 74

Introdução

Na busca por resolver problemas de ordem prática ocorreram os primeiros avanços da matemática. Desde muito cedo os problemas exigiam habilidades de se encontrar valores desconhecidos, daí a necessidade de se resolver equações. De acordo com Garbi "Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações."(Garbi, 2009, p.1).

Obviamente que no início as equações não eram escritas da maneira simples e prática de hoje. Para chegarmos ao formato atual houve muita evolução ao longo dos anos, como pode ser visto em Baumgart (1992), que explica como ocorreu a evolução da escrita matemática. A busca pela resolução de equações promoveu avanços na escrita matemática e na própria elaboração de conceitos, pois houve tempos em que os maiores matemáticos estavam em busca de soluções para equacões polinomiais.

Na realização desse trabalho estudamos as fórmulas resolutivas por radicais existentes para equações polinomiais até o grau 4, além de mostrar algumas práticas resolutivas para equações de grau maior ou igual a 5 em formatos específicos.

Observe que uma equação polinomial é solúvel por radicais quando sua solução pode ser escrita como uma expressão que inclui apenas somas, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes envolvendo seus coeficientes numéricos. Assim, nosso trabalho não está interessado em resoluções aproximadas por métodos computacionais.

No primeiro capítulo intitulado "Teoria Geral" encontramos todo o referencial teórico de polinômios, equações polinomiais e números complexos que será necessário ao longo do trabalho.

No segundo capítulo intitulado "Fórmulas Fechadas" mostramos as fórmulas resolutivas para equações polinomiais de graus 1, 2, 3 e 4 juntamente com um apanhado histórico de como foram obtidas essas fórmulas. O capítulo conta ainda com vários exemplos de aplicação das fórmulas e com o referencial histórico a respeito da prova da impossibilidade de resolver, por radicais, uma equação de grau maior ou igual a 5.

O terceiro capítulo intitulado "Casos Especiais" mostra algumas resoluções obtidas para equações específicas, inclusive em graus maiores que 5, como por exemplo equações com coeficientes espelhados e uma combinação de técnicas utilizando o teorema das raízes racionais juntamente com exemplos para elucidar as fórmulas aplicadas. Neste capítulo também fazemos apontamentos sobre a substituição $x = y + t$ que é utilizada para resolver equações de terceiro e quarto grau.

O último capítulo intitulado "O que trazem os livros didáticos de ensino médio" apresenta um compilado de informações sobre como o tema resolução de equações polinomiais se apresenta em quatro livros didáticos de ensino médio que foram analisados, a fim de mostrar o que é feito atualmente em sala de aula.

Capítulo 1

Teoria geral

Neste primeiro capítulo faremos uma introdução à teoria de polinômios e equações polinomiais a fim de reunir informações que serão necessárias na continuidade do trabalho, várias etapas desse material foram baseadas em Trotta (1988), Cortes (2020) e Ribeiro (2016).

1.1 Polinômios e equações polinomiais

Antes de iniciarmos nosso estudo, precisamos deixar claro as diferenças entre três objetos matemáticos que são comumente confundidos. A expressão

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pode estar associada aos conceitos de polinômio, funções polinomiais e equações polinomiais. Estes três objetos matemáticos são distintos um do outro, embora possam compartilhar certas definições e propriedades. Em um polinômio, segundo a definição advinda da álgebra, x representa um objeto fixo. Em uma função polinomial, x tem um papel variável, pois seu valor varia em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Em uma equação polinomial, x é uma incógnita, pois representa um valor desconhecido para o qual a equação torna-se verdadeira. Mesmo com esta diferença, estes objetos possuem em comum conceitos como raiz, grau, divisibilidade, entre outros.

Definição 1. Denomina-se polinômio na variável x a toda função no corpo dos números complexos que pode ser escrita na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

onde a_0, a_1, ..., a_n são coeficientes constantes reais (ou complexos), com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos: São polinômios na variável x:

- $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$;
- $q(x) = 5x^7 - 3x + 1$;
- $r(x) = 4x - 5$.

Não são polinômios na variável x:

- $s(x) = \frac{1}{x}$;
- $t(x) = \sqrt{x} + 1$;
- $u(x) = \frac{x^2+2x+1}{3x+1}$.

Definição 2. Dado um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0, \tag{1.2}$$

o grau do polinômio é o maior expoente da variável x entre os termos de coeficiente diferente de zero. Usamos a simbologia $g(p)$ para expressar o grau do polinômio.

Exemplos:

- Se $p(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ então $g(p) = 4$.
- Se $q(x) = 0x^2 + 0x + 5$ entao $g(q) = 0$.

Definição 3. Dado um número real (ou complexo) qualquer α, chamamos de $p(\alpha)$ o valor do polinômio ao se substituir a variável x por α, ou seja

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + ... + a_1 \alpha + a_0. \tag{1.3}$$

Definição 4. Um polinômio $p(x)$ é chamado de polinômio nulo, e denotado por $p(x) \equiv 0$ quando os seus coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são todos iguais a zero. Ou seja,

$$p(x) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0. \tag{1.4}$$

Note que, quando o polinômio é nulo, $p(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Ainda, o grau de um polinômio nule é zero; $g(p) = 0$.

Definição 5. Dados os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ dizemos que $p(x)$ e $q(x)$ são iguais, e utilizamos a notação $p(x) \equiv q(x)$, quando todos os seus coeficientes correspondentes são iguais, ou seja,

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0. \tag{1.5}$$

Definição 6. Denomina-se equação polinomial na incógnita x a toda equação na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \tag{1.6}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são coeficientes constantes reais (ou complexos), com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

- $5x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau na incógnita x.
- $2x + 1 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau na incógnita x.
- $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x = 1$ é uma equação polinomial do 4º grau na incógnita x.

O leitor pode notar que fizemos uma substituição, chamando x agora de incógnita, em lugar de variável. Mas qual seria a diferença entre incógnita e variável?

Repare que no polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, x pode assumir qualquer valor real ou complexo. Trata-se nesse caso de uma variável.

Ao se escrever uma equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, x possui um valor fixo que queremos determinar resolvendo a equação. Trata-se aqui de uma incógnita.

Definição 7. Um número α é chamado de raiz de uma equação se ao substituir a variável por α, a igualdade permanecer verdadeira, ou seja,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

1.2 Operações com polinômios

Considere os polinômios $p_1(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ e $p_2(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$.

Definição 8. A soma dos polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ é dada por

$$(p_1 + p_2)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Os termos a_ix^i ou b_ix^i que não existirem são representados por $0x^i$.

Exemplo: Sejam $p_1(x) = 4x^3 - 3x + 2$ e $p_2(x) = -3x^4 + 2x^3 - 4x^2$. A soma de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ é dada por

$$(p_1 + p_2)(x) = (0 - 3)x^4 + (4 + 2)x^3 + (0 - 4)x^2 + (-3 + 0)x + (2 + 0)$$
$$(p_1 + p_2)(x) = -3x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 3x + 2.$$

Definição 9. O polinômio oposto de $p(x)$, denotado por $-p(x)$ é o polinômio formado alterando-se todos os sinais dos coeficientes de $p(x)$. Ou seja, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ então $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$.

Definição 10. A subtração $p_1(x) - p_2(x)$ é definida como: $p_1(x) + (-p_2(x))$, ou seja,

$$(p_1 - p_2)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Exemplo: Sejam $p_1(x) = 5x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 3x$ e $p_2(x) = 3x^2 - 4x + 8$. A diferença $p_1(x) - p_2(x)$ é

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2)(x) &= (5-0)x^4 + (-8-0)x^3 + (4-3)x^2 + ((-3)-(-4))x + (0-8)\\ &= 5x^4 - 8x^3 + x^2 + x - 8.\end{aligned}$$

A próxima definição trata do produto entre dois polinômios. Este produto é realizado multiplicando-se cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo, depois das multiplicações é feita a redução dos termos semelhantes, somando todos os coeficientes de x que possuem o mesmo expoente.

Definição 11. Dados os polinômios $p_1(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $p_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ o produto entre eses polinômios é dado por

$$(p_1 p_2)(x) = (a_m b_n)x^{m+n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_0).$$

Observe no exemplo a seguir como é realizada,na prática, a multiplicação entre dois polinômios.

Exemplo: Seja $p_1(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ e $p_2(x) = x^2 + 3x - 5$, então

$$\begin{aligned}(p_1 p_2)(x) &= (1\cdot 1)x^{3+2} + (1\cdot 3)x^{3+1} + (1\cdot(-5))x^3 + (3\cdot 1)x^{2+2}\\ &\quad + (3\cdot 3)x^{2+1} + (3\cdot(-5))x^2 + ((-4)\cdot 1)x^{1+2} + ((-4)\cdot 3)x^{1+1}\\ &\quad + ((-4)\cdot(-5))x + (2\cdot 1)x^2 + (2\cdot 3)x + (2\cdot(-5))\\ &= x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 3x^4 + 9x^3 - 15x^2 - 4x^3 - 12x^2 + 20x + 2x^2 + 6x - 10\\ &= x^5 + 6x^4 - 25x^2 + 26x - 10.\end{aligned}$$

Teorema 1. *(Grau da soma e do produto) Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são dois polinômios, com $p_1 \neq 0$ e $p_2 \neq 0$, então temos que*

i) $g(p_1 + p_2) \leq max\{g(p_1), g(p_2)\}$*, se* $p_1 + p_2 \neq 0$*;*

ii) $p_1 p_2 \neq 0$ *e* $g(p_1 p_2) = g(p_1) + g(p_2)$.

Demonstração. Considere $p_1 = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $p_2 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ tais que $g(p_1) = m$ e $g(p_2) = n$.

Para provar (i), considere inicialmente que $m \neq n$. Neste caso podemos supor, sem perda de generalidade que $m > n$. Então

$$(p_1 + p_2)(x) = a_m x^m + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

note que neste caso $g(p_1 + p_2) = m = max\{m, n\} = max\{g(p_1), g(p_2)\}$.

Se $m = n$ e $p_1 + p_2 \neq 0$ então o valor de $a_m + b_m$ pode ser igual a zero ou diferente de zero.

Se $a_m + b_m = 0$, então $g(p_1 + p_2) < m = max\{g(p_1), g(p_2)\}$.

Se $a_m + b_m \neq 0$, então $g(p_1 + p_2) = m = max\{g(p_1), g(p_2)\}$.

Portanto, $g(p_1 + p_2) \leq max\{g(p_1), g(p_2)\}$.

Para provar (ii), note que o termo dominante do polinômio $p_1 p_2$ é $a_m b_n x^{m+n}$, pois $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$ e sabemos que um produto só é nulo quando um dos termos é nulo. Portanto, $g(p_1 p_2) = m + n = g(p_1) + g(p_2)$. □

Definição 12. Dados os polinômios $p(x)$ e $d(x)$ com $d(x) \neq 0$, se existir $h(x)$ tal que $p(x) = d(x) \cdot h(x)$, dizemos que $p(x)$ é um múltiplo de $d(x)$, ou ainda que $p(x)$ é divisível por $d(x)$, e o polinômio $d(x)$ é chamado de um divisor de $p(x)$.

Proposição 1. *Se $d(x)$ é um divisor de $p(x)$ então $g(d) \leq g(p)$.*

Demonstração. Como $d(x)$ é divisor de $p(x)$ sabemos que existe $h(x)$ tal que $p(x) = d(x) \cdot h(x)$. Assim temos que

$$g(p) = g(d \cdot h) = g(d) + g(h) \geq g(d).$$

□

Proposição 2. *(Divisão Euclidiana de Polinômios): Sejam $p(x)$ e $d(x)$ dois polinômios com $d(x) \neq 0$. Então existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ unicamente determinados tais que*

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{1.7}$$

onde $r(x) = 0$ ou $g(r) < g(d)$.

Demonstração. (Existência) Se $p(x) = 0$, então basta escolher $q(x) = r(x) = 0$.

Supondo $p(x) \neq 0$ com grau n e $d(x)$ com grau m. Se $n < m$, então toma-se $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$.

Se $n \geq m$ faremos a demonstração por indução sobre n.

Se $n = 0$ então $m = 0$ portanto $p(x) = a_0 \neq 0$ e $d(x) = b_0 \neq 0$. Assim $p(x) = a_0 \cdot b_0^{-1} \cdot d(x)$ e podemos considerar $q(x) = a_0 \cdot b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$.

Agora supondo a proposição válida para todo polinômio com grau menor que n vamos provar a validade para o grau n.

Seja $p_1(x) = p(x) - a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} \cdot d(x)$. O polinômio $a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} \cdot d(x)$ tem grau n e coeficiente líder a_n. Logo, $g(p_1) < g(p)$ e pela hipótese de indução existem q_1 e r_1 tais que $p_1(x) = q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x)$. Então

$$\begin{aligned}
p(x) &= p_1(x) + a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{m-n} \cdot d(x) \\
&= q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x) + a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{m-n} \cdot d(x) \\
&= (q_1 + a_0 \cdot b_0^{-1} \cdot x^{m-n}) \cdot d(x) + r_1(x) \\
&= q(x) \cdot d(x) + r_1(x).
\end{aligned}$$

(Unicidade) Sejam $q_1(x)$,$r_1(x)$, $q_2(x)$ e $r_2(x)$ tais que

$$\begin{aligned}
p(x) &= q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x) \\
p(x) &= q_2(x) \cdot d(x) + r_2(x),
\end{aligned}$$

com $g(r_1) < g(d)$ e $g(r_2) < g(d)$. Igualando as equações temos que

$$\begin{aligned}
q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x) &= q_2(x) \cdot d(x) + r_2(x) \\
[q_1(x) - q_2(x)] \cdot d(x) &= r_2(x) - r_1(x).
\end{aligned}$$

Se $q_1(x) \neq q_2(x)$ temos $q_1 - q_2 \neq 0$ e $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$. Assim podemos dizer que $d(x)$ é um divisor de $r_2(x) - r_1(x)$. Então, pela proposição anterior

$$g(d) \leq g(r_2 - r_1) < g(d).$$

Porém, $g(d) < g(d)$ é uma contradição, portanto $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$. □

Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ a que se refere este último Teorema são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$.

Teorema 2. *Teorema de D'Alembert: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $b(x) = x - \alpha$ é $r(x) = p(\alpha)$.*

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão temos que

$$p(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$$

com $g(r) < g(x-\alpha) = 1$. Assim, $g(r) = 0$ e dessa forma

$$r(x) = r_0. \tag{1.8}$$

Como $b(x) = x - \alpha$ temos

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot q(x) + r_0.$$

Fazendo $x = \alpha$ temos

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot q(x) + r_0 = r_0, \tag{1.9}$$

e assim, pelas igualdades obtidas em (1.8) e (1.9) temos que

$$r(x) = p(\alpha).$$

$\square$

Corolário 1. *O número α é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $b(x) = x-\alpha$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pelo teorema anterior vimos que

$$p(x) = b(x) \cdot q(x) + p(\alpha).$$

Assim, se $p(\alpha) = 0$ temos que

$$p(x) = b(x) \cdot q(x),$$

ou seja, $p(x)$ é divisível por $b(x) = x - \alpha$.

($\Leftarrow$) Se $p(x)$ é divísivel por $b(x) = x - \alpha$ podemos escrever, pela divisão euclidiana que

$$p(x) = b(x) \cdot q(x) + 0.$$

Porém sabemos do teorema anterior que

$$p(x) = b(x) \cdot q(x) + p(\alpha).$$

Portanto podemos afirmar que $p(\alpha) = 0$, ou seja, α é raiz do polinômio $p(x)$.

$\square$

1.3 O Teorema Fundamental da Álgebra e suas implicações

O Teorema Fundamental da Álgebra é um importante resultado para fazer a fatoração de polinômios baseado em suas raízes, neste trabalho não faremos a demonstração deste teorema pois esta é bastante complexa e foge ao objetivo do trabalho. O teorema foi provado pela primeira vez por Carl Friederich Gauss em 1799 e algumas versões dessa demonstração podem ser encontrado em Garbi (2009), Nascimento (2015) e Carneiro (2017).

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.*

Este teorema garante que qualquer equação na forma $p(x) = 0$, com grau n possui pelo menos uma raiz complexa, que podemos chamar de α_1. Utilizando o Teorema de D'Alembert podemos escrever

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot q_1(x), \tag{1.10}$$

com $g(q_1) = n - 1$. Como $q_1(x) = 0$ é uma equação polinomial de grau $n - 1$ temos que esta possui pelo menos uma raiz complexa, que podemos chamar de α_2 e podemos reescrever o polinômio $q_1(x)$ como

$$q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot q_2(x), \tag{1.11}$$

com $g(q_2) = n - 2$.

Após n aplicações combinadas do Teorema Fundamental da Álgebra e do Teorema de D'Alembert, podemos concluir que um polinômio de grau n pode ser escrito como

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_n), \tag{1.12}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as raízes da equação polinomial $p(x) = 0$. Portanto podemos concluir que uma equação polinomial de grau n possui n raízes complexas.

Baseado no resultado anterior podemos escrever o seguinte corolário.

Corolário 2. *Uma equação polinomial de grau n possui no máximo n raízes reais distintas.*

Definição 13 (Multiplicidade de uma raiz)**.** Dizemos que α é uma raiz de multiplicidade m, com $m \in \mathbb{N}$, de uma equação polinomial $p(x) = 0$ se $p(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$.

Ou seja, de acordo com essa definição o polinômio $p(x)$ tem exatamente m raízes iguais a α, ou ainda, a decomposição de $p(x)$ apresentará exatamente m fatores iguais a $(x-\alpha)$.

Teorema 4 (Teorema das raízes racionais)**.** *Considere a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Seja $\alpha = \frac{p}{q}$ uma raiz racional dessa equação, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ tais que $mdc(p,q) = 1$, ou seja p e q são primos entre si, então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n.*

Não iremos fazer a demonstração deste teorema pois foge um pouco do nosso objetivo, mas essa pode ser encontrada pelo leitor em Trotta (1988), Carvalho (2015) e Cortes (2020).

Esse teorema indica que se um polinômio possui uma raiz racional essa raiz será no formato irredutível $\frac{p}{q}$ onde p e q pertencem, respectivamente, aos conjuntos de divisores dos números a_0 e a_n.

Exemplo: Seja $p(x) = 4x^3 - 18x^2 + 20x - 6$. Neste caso, $a_n = 4$ e $a_0 = -6$. O conjunto dos divisores de a_n é $\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ e de a_0 é $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. Assim para formar o número $\frac{p}{q}$ teremos que escolher p entre os divisores de a_0 e q entre os divisores de a_n. Tomando todas as possíveis combinações temos que $\frac{p}{q}$ só pode ser raiz racional de $p(x)$ se $\frac{p}{q} \in D = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\}$.

Agora podemos testar as possibilidades de raiz racional do polinômio calculando o valor do polinômio p para cada um dos números em D. Ao testar $x = 1$ já encontramos uma raíz, de fato $p(1) = 4 - 18 + 20 - 6 = 0$, agora iremos determinar as outras raízes através de outro método.

Obtendo uma das raízes do polinômio fazemos a divisão de polinômios para baixar o grau e utilizar a fórmula de Bhaskara. Após a divisão do polinômio $p(x)$ por $(x-1)$ podemos escrever

$$4x^3 - 18x^2 + 20x - 6 = (x-1)(4x^2 - 14x + 6),$$

e agora utilizando a fórmula de Bhaskara obteremos que as raízes de $4x^2 - 14x + 6$ são

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{14 \pm \sqrt{100}}{8} = \frac{14 \pm 10}{8},$$

e portanto

$$x_1 = \frac{24}{8} = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Note que as raízes encontradas com a fórmula de Bhaskara também são racionais e também estão presentes no conjunto D.

Esse teorema nos permite encontrar com certa facilidade raízes racionais de uma equação, porém é importante frisar que quando falamos em encontrar uma regra geral que nos permita resolver uma equação queremos uma fórmula que nos traga qualquer tipo de solução, e não apenas as soluções racionais.

1.4 Raízes complexas

Conforme o Teorema Fundamental da Álgebra a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_i \in \mathbb{R}$ pode apresentar raízes complexas. Em decorrência desta afirmação utilizaremos algumas propriedades dos números complexos para demonstrar como funcionam essas raízes na equação polinomial. É importante ressaltar que utilizaremos e demonstraremos apenas algumas propriedades estritamente necessárias para a continuidade do trabalho, tendo em vista que nosso foco não é a algebra do conjunto $\mathbb{C}$.

Definição 14. Chamamos de unidade imaginária o número i tal que $i^2 = -1$.

É também comum representar a unidade imaginária por $i = \sqrt{-1}$.

Definição 15. Um número complexo, indicado por z, pode ser escrito na forma

$$z = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Esta expressão é conhecida como forma algébrica do número complexo z. O número real a é chamado de parte real de z, e é denotado por $Re(z) = a$. O número real b denomina-se parte imaginária de z, e é denotado por $Im(z) = b$.

Definição 16. Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, dizemos que eles são iguais quando $Re(z) = Re(w)$ e $Im(z) = Im(w)$, ou seja,

$$z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c \quad \text{e} \quad b = d. \tag{1.13}$$

Definição 17. Dado o número complexo $z = a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, chamamos de conjugado de z ao complexo $\overline{z} = a - bi$.

Proposição 3. *Propriedades dos complexos conjugados: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos arbitrários. Então*

i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

iii) $\overline{z^n} = \overline{z}^n, n \in \mathbb{N}$;

iv) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

v) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$;

vi) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$.

Demonstração. i) $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, assim $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = a + c - bi - di = (a - bi) + (c - di)h = \overline{z} + \overline{w}$.

ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{ac + adi + bci + bdi^2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$.

Por outro lado temos $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a-bi) \cdot (c-di) = ac-adi-bci+bdi^2 = (ac-bd)-(ad+bc)i$.

Pela igualdade das duas expressões acima conclui-se a prova.

iii) Essa demonstração será feita por indução sobre n. Se $n = 1$ temos

$$\overline{z^1} = \overline{(a + bi)^1} = \overline{a + bi} = a - bi = \overline{z} = \overline{z}^1.$$

Considerando a igualdade válida para n vamos provar para $n + 1$. Note que

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \cdot \overline{z} = \overline{z}^n \cdot \overline{z} = \overline{z}^{n+1}.$$

iv) $(\Rightarrow)$ Se $z = \overline{z}$ temos que $a + bi = a - bi$, ou seja, $b = -b$ o que só acontece quando $b = 0$ e portanto $z \in \mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ Se $z \in \mathbb{R}$ temos $z = a + 0i = a - 0i = \overline{z}$.

v) $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = a + a + (b - b)i = 2a + 0i = 2a \in \mathbb{R}$.

vi) $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

□

Utilizando essas propriedades já temos as ferramentas necessárias para demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 5. *Se α é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então $\overline{\alpha}$ também é raiz dessa equação.*

Demonstração. Considere a equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

em que $a_n \neq 0$ e $a_n, a_{n-1} ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Se α é raiz dessa equação temos

$$a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + a_{n-2}(\alpha)^{n-2} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Tomando o conjugado em ambos os lados da igualdade podemos escrever

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0} = \overline{0}.$$

E agora utilizamos as propriedades do conjugado para reorganizar a igualdade, assim

$$\begin{aligned}
\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \overline{a_{n-2}\alpha^{n-2}} + ... + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} &= 0 \\
\overline{a_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + \overline{a_{n-2}} \cdot \overline{\alpha^{n-2}} + ... + \overline{a_1} \cdot \overline{\alpha} + \overline{a_0} &= 0 \\
a_n \cdot \overline{\alpha^n} + a_{n-1} \cdot \overline{\alpha^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \overline{\alpha^{n-2}} + ... + a_1 \cdot \overline{\alpha} + a_0 &= 0 \\
a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + a_{n-2}\overline{\alpha}^{n-2} + ... + a_1\overline{\alpha} + a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

O que prova que $\overline{\alpha}$ é raiz da equação polinomial dada. □

Este teorema nos traz algumas importantes consequências para o estudo de raízes de equação polinomial.

- Se α é uma raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial com coeficientes reais então $\bar{\alpha}$ também tem multiplicidade m.
- Numa equação polinomial com coeficientes reais, o número de raízes complexas é sempre par. O que é fácil de se observar visto que as raízes complexas ocorrem sempre aos pares: α e $\bar{\alpha}$.
- Uma equação polinomial com coeficientes reais e grau ímpar admite um número ímpar de raízes reais. Assim podemos afirmar que uma equação de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

Capítulo 2

Fórmulas fechadas

Neste capítulo vamos discorrer sobre as resoluções existentes para equações de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus, acompanhadas do contexto histórico onde foram obtidas, além de uma apresentação da impossibilidade de resolução das equações de grau maior ou igual a 5 demonstrada por Abel e Galois.

Para o referencias histórico estudamos alguns materiais como Baumgart (1992), Costa (2020), Garbi (2009) e Schuuvab (2013).

2.1 Equações do primeiro grau

Definição 18. Uma equação polinomial é dita do primeiro grau quando tem a forma

$$ax + b = 0, \tag{2.1}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

A resolução de equações de primeiro grau é feita de forma bastante simples, não sendo necessário o uso de fómulas. Ela ocorre de maneira praticamente intuitiva, isolando-se a incógnita x através de operações inversas.

Assim elas estão presentes nesse estudo num sentido de completar a teoria, mas não por apresentar algo novo.

Dada a facilidade de se obter uma solução de uma equação polinomial de grau 1 não se sabe precisar como e onde ela foi resolvida pela primeira vez.

Segundo Garbi (2009) um dos métodos utilizados pelos egipcíos era o chamado "Método da Falsa Posição" onde para resolver uma equação era realizada uma tentativa com um número qualquer a fim de verificar o que aconteceria na equação.

> Por exemplo: qual o número que somado à sua terceira parte dá 8? Pela regra da falsa posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Suponhamos, em nosso caso que tal chute fosse 3. Ora, 3 somado com sua terça parte dá 3+1=4, exatamente a metade dos 8 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 3, ou seja 6. (Garbi, 2009).

Exemplo: A solução da equação $3x - 4 = 0$ é:

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 0 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

2.2 Equações do segundo grau

Definição 19. Uma equação polinomial do segundo grau é uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.2}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

De acordo com Garbi (2009) por volta do ano de 1700 a.C. os babilônios já resolviam equações do 2º grau utilizando métodos de completamento de quadrados. As soluções encontradas mostram uma sequência de passos corretos, mas não apresentam justificativa para a técnica utilizada.

Posterioremente, os gregos utilizando o grande domínio de geometria que possuiam conseguiram resolver algumas equações do 2º grau com régua e compasso.

Ainda segundo Garbi (2009), a fórmula amplamente conhecida para resolver uma equação de 2º grau, a Fórmula de Bhaskara, homenageia o matemático hindu Bhaskara (1114-1185) porém não foi descoberta por ele, mas sim por outro matemático hindu chamado Shidara (991-?) um século antes.

A Fórmula de Bhaskara trouxe aos matemáticos da época duas considerações importantes: que equações acima do primeiro grau poderiam ter mais de uma solução; e que em alguns casos a fórmulava chegava a raiz quadrada de um número negativo, que na época era um resultado que não sabiam interpretar. Assim a conclusão obtida foi de que nem sempre a equação de segundo grau apresentava solução.

Outro importante matemático árabe foi Al-Kharizmi (780-850). Segundo Costa, este escreveu dois livros, um de aritmética e um de álgebra. No livro de aritmética fez uma exposição completa dos numerais hindus, hoje em dia chamados de indo-arábicos.

No outro livro, mais conhecido como Al-Jabr ele resolve equações com técnicas de cancelamento de termos semelhantes e completamento de quadradros. Ainda de acordo com o autor, "O título do livro deu origem ao nome álgebra, por isso (Al-Kharizmi) é conhecido por muitos como o pai da álgebra". (Costa, 2020).

Conforme visto no Corolário (2) do capítulo anterior a equação possui duas raízes que são obtidas através da fórmula resolutiva conhecida como *Fórmula de Bháskara*. Esta por sua vez pode ser obtida completando-se os quadrados da equação geral (2.2). De fato

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{4ac - b^2}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que as raízes de uma equação de segundo grau são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.3}$$

e

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.4}$$

É comum utilizar a simbologia $\Delta = b^2 - 4ac$. Podemos observar que o valor de Δ nos indica como serão as raízes da equação. Nestes termos:

- Se $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes reais distintas;

- Se $\Delta = 0$ a equação possui apenas uma raiz real (é comum se dizer nesses casos que a equação possui duas raízes reais iguais);

- Se $\Delta < 0$ a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

Assim, obtemos uma fórmula fechada para a resolução de uma equação de segundo grau. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 1: $x^2 - x - 2 = 0$. Neste caso temos $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$.

Utilizando a fórmula obtida anteriormente temos,

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
x &= \frac{1 \pm 3}{2}.
\end{aligned}
$$

Assim encontramos

$$r_1 = \frac{4}{2} = 2$$

e

$$r_2 = \frac{-2}{2} = -1.$$

Note que $\Delta > 0$ e encontramos duas raízes reais e distintas.

Exemplo 2: $x^2 - 2x + 1 = 0$. Neste exemplo $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$.

Calculando as raízes

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2.1} \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \\
x &= \frac{2 \pm 0}{2},
\end{aligned}
$$

resultando portanto,

$$r_1 = r_2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Neste caso encontramos $\Delta = 0$ e obtivemos duas raízes iguais, ou seja uma raiz real com mutiplicidade 2.

Exemplo 3: $x^2 + 2x + 2 = 0$, em que $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$

Utilizando a fórmula encontramos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.2}}{2.2} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ x &= \frac{-2 \pm 2i}{2}. \end{aligned}$$

Assim, as raízes são

$$r_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

e

$$r_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i.$$

Observe que $\Delta < 0$, portanto encontramos duas raízes complexas e conjugadas.

Uma importante relação envolvendo as raízes de uma equação do segundo grau é dada a partir das consequências do Teorema Fundamental da Álgebra, considere o polinômio

$$ax^2 + bx + x, \tag{2.5}$$

pelo teorema já citado sabemos que

$$ax^2 + bx + x = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Multiplicando o segundo termo dessa igualdade teremos

$$a(x^2 - x\alpha_1 - x\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2),$$

ou ainda,

$$ax^2 - ax(\alpha_1 + \alpha_2) + a(\alpha_1\alpha_2), \tag{2.6}$$

Comparando (2.5) e (2.6) temos

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a}, \tag{2.7}$$

e

$$\alpha_1.\alpha_2 = \frac{c}{a}. \tag{2.8}$$

As relações obtidas em (2.7) e (2.8) são conhecidas como Relações de Girard para a equação de segundo grau, e iremos ver algumas aplicações no decorrer do trabalho.

2.3 Equações do terceiro grau

Definição 20. Uma equação do terceiro grau é uma equação na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2.9}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Desde a descoberta de uma fórmula que resolvesse a equação do 2ºgrau, os matemáticos começaram a pensar em formas de resolver as equações de grau 3. De acordo com Garbi (2009), Omar Khayyam (1044-1123), conhecido por ser um famoso poeta, também era um matemático que trabalhou para tentar resolver equações do 3º grau. Ele até conseguiu resolver algumas equações, encontrando formas geométricas para solucioná-las mas não encontrou nenhuma fórmula algébrica. Já na Europa Ocidental, onde o sistema de numeração romano complicava o trabalho com a álgebra, dois nomes se encarregaram de tentar mostrar a utilização e prática do sistema indo-arábico. Na Itália o matemático Gerbert d'Aurillac, que foi Papa da Igreja Católica com o nome de Silvestre II, tentou ensinar o sistema indo-arábico mas os cardeais rotulavam como feitiçaria satânica tudo que viesse do mundo islâmico. Na Inglaterra, Adelard de Bath mostrou, através da tradução em latim dos Elementos de Euclides e das tabelas astronômicas de Al-Khwarizmi, a matemática grega e o sistema de numeração árabe.

A terceira tentiva de introduzir o novo sistema foi realizada pelo matemático italiano Leonardo Pisa (1175-1250), também conhecido como Leonardo Fibonacci, que passou parte da sua juventude nos países árabes onde aprendeu o sistema indo-arábico.

> De volta à Itália, publicou em 1202 sua primeira obra o *Lider Abaci*, onde descreveu o sistema numérico dos árabes, deu profundo tratamento às questões aritméticas e onde pela primeira vez um cristão discorreu sobre Álgebra. (Garbi, 2009).

Essa tentativa foi bem sucedida, sendo que a sua obra teve bastante aceitação na Itália. Já em 1225, Leonardo Pisa provou por meio de um desafio proposto pelo imperador Frederico II que era impossível resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ por régua e compasso, mas apresentou uma solução numérica com nove casas decimais de aproximação: $x = 1,3688081075$.

Outro grande matemático italiano foi Lucca Pacioli (1445-1515) que escreveu um livro onde abordou problemas de geometria, contabilidade, cálculo aritmético e radicais. De acordo com Costa, nesta obra Pacioli resolveu apenas equações de primeiro e segundo grau, afirmando ainda que não seria possível encontrar raízes para uma equação cúbica, "Ele termina seu livro dizendo que a solução de uma equação cúbica $x^3+px+q = 0$ (notação moderna) era tão impossível quanto a quadratura do círculo."(Costa, 2020).

No ínicio do século XVI, dois matemáticos conseguiram enfim encontrar a fórmula para a resolução das equações do terceiro grau. São eles Tartaglia e Cardano que de acordo com Garbi (2009) e Costa (2020) tinham em comum apenas o fato de serem matemáticos.

Girolamo Cardano (1501-1576) era um respeitado professor de Bolonha e Milão. Além de matemático era médico, astrônomo, astrólogo e filósofo. Tinha grande vontade de aprender sobre os mais diversos assuntos, o que resultou na publicação de diversos livros. Cardano frequentava a alta sociedade. Já Tartaglia, cujo nome oficial é Nicolò Fontana (1500-1557) era órfão de pai e muito pobre. Ainda na infância, quando sua cidade foi atacada pelos franceses, sofreu um golpe que perfurou seu palato e o deixou gago para o resto da vida, por isso ele recebeu o apelido Tartaglia (que significa gago). Apesar das dificuldades Tartaglia era autodidata e muito inteligente e se tornou professor de matemática.

A obtenção de uma fórmula resolutiva para as equações do terceiro grau teve início por volta de 1510 quando Scipione del Ferro, professor de Matemática da Universidade de Bolonha encontrou uma fórmula para resolver as equações do tipo $x^3+px+q=0$. Ele não publicou essa fórmula, mas compartilhou-a com seu aluno Antonio Maria Fior que posteriomente iniciou um desafio com Tartaglia que consistia em um passar para o outro uma lista de equações de terceiro grau para serem resolvidas. Tartaglia aceitou o desafio e em 1535 conseguiu encontrar uma forma geral para resolver as equações do tipo $x^3+px^2+q=0$, além daquelas já conhecidas por Fior.

Cardano, que na época estava escrevendo uma obra englobando Álgebra, Aritmética e Geometria, sabendo da resolução obtida por Tartaglia pediu a ele que a revelasse para que fosse colocada em seu livro, mas Tartaglia não concordou alegando que tinha intenção de pulicá-la numa obra própria. Cardano se revoltou contra a atitude de Tartaglia "acusando-o de mesquinho, egoísta e não interessado em colaborar com o desenvolvimento da humanidade."(Garbi, 2009).

Tempos depois Cardano implorou, sob juramento ao Evangelho, que não publicaria a fórmula e Tartaglia decidiu confiar-lhe o segredo. Em 1545, em sua obra Ars Magna, Cardano quebrou a promessa feita a Tartaglia e publicou a fórmula, dizendo ainda que 30 anos antes Scipione del Ferro já havia obtido os mesmos resultados. Tartaglia foi a público a fim de esclarecer os fatos e a traição de Cardano, mas no fim das contas a fórmula obtida por Tartaglia é conhecida até hoje como Fórmula de Cardano.

Para resolver a equação geral (2.9) podemos, sem perda de generalidade, considerar a equação $x^3+bx^2+cx+d=0$, pois caso o coeficiente dominante a seja diferente de 1, podemos dividir toda a equação por a e obter a equação com coeficiente dominante 1.

A primeira equação de terceiro grau a ser resolvida foi a equação sem o termo quadrático que pode ser escrita como

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.10}$$

A ideia central do método de solução é supor que uma raiz desta equação possa ser escrita na forma $y = u + v$. Esta ideia se justifica pelo desenvolvimento da fórmula do cubo de uma soma. Se u e v são dois números reais arbitrários, então

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3,$$

ou equivalentemente

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Note que esta última expressão é uma equação cúbica, no termo $(u+v)$ que não apresenta o termo quadrático. Isto sugere que a soma $(u+v)$ pode ser uma raiz de uma equação cúbica sem o termo quadrático.

Vamos então para a solução da equação (2.10). Para resolvê-la recorremos a uma mudança de variável chamando $y = u + v$, e assim teremos

$$\begin{gathered}
(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\
u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \\
u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \\
(u^3 + v^3 + q) + [(3uv + p)(u+v)] = 0.
\end{gathered}$$

Para solucionar esta última equação basta encontrar u e v tais que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Assim, estamos buscando u^3 e v^3 conhecendo sua soma e seu produto, o que significa que u e v são raízes de

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0,$$

e utilizando a Fórmula de Bháskara vista na seção anterior temos que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Sabendo que $y = u + v$ temos que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{2.12}$$

que é a fórmula de Tartaglia-Cardano.

Agora, observe que a equação (2.12) irá resultar em um número real. Utilizando a notação Δ para representar $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ observamos que há três possibilidades para Δ.

- Se $\Delta > 0$ temos a raiz quadrada de um número positivo, e portanto (2.12) gera um número real.
- Se $\Delta = 0$ temos a raiz quadrada de zero e portanto novamente um número real.
- Se $\Delta < 0$ teremos a raiz quadrada de um número negativo, que irá gerar um número complexo, porém a equação (2.12) irá se tornar $y = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}$, mas pelas propriedades do conjugado vistas no capítulo 1 temos que se $\sqrt[3]{z} = w$ então $\sqrt[3]{\overline{z}} = \overline{w}$, assim, $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = w + \overline{w}$ que é um número real.

Assim, concluímos que a equação (2.12) sempre irá retornar um número real e já sabemos como obter a raiz real da equação (2.10), que já sabíamos possuir raiz real por se tratar de uma equação de grau ímpar.

Retornando para a nossa fórmula resolutiva, para encontrar as demais raízes podemos fazer a divisão entre os polinômios $y^3 + py + q$ pelo polinômio $y - \alpha$, sendo α a raiz obtida em (2.12). Depois de realizar essa divisão obteremos uma equação de grau 2 que pode ser resolvida utilizando a Fórmula de Bháskara, discutida na seção anterior.

Já sabemos como obter as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$, sem o termo quadrático. Vamos resolver um exemplo para mostrar a técnica aplicada na prática.

Exemplo: Considere a equação $y^3 - 6y - 9 = 0$.

Calculamos Δ a fim de encontrar a primeira raiz. Temos então, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{2187}{108} - \frac{864}{108} = \frac{1323}{108} = \frac{49}{4}$.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} \\
&= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\
&= 2 + 1 \\
y_0 &= 3.
\end{aligned}
$$

Assim podemos dividir o polinômio $y^3 - 6y - 9$ por $y - 3$ obtendo $y^3 - 6y - 9 = (y-3)(y^2 + 3y + 3)$, e agora vamos calcular as raízes de $y^2 + 3y + 3 = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\
y &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} \\
y &= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} \\
y_1 &= \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \\
y_2 &= \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto as três raízes encontradas são $y_0 = 3$, $y_1 = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$ e $y_2 = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$.

Agora, uma maneira de encontrar as soluções da equação de 3º grau na forma geral é reescrever a equação (2.9) e deixá-la no formato da equação (2.10). Para isso faremos uma mudança de variável. Utilizando $x = y + t$ temos

$$
\begin{gathered}
x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\
(y+t)^3 + b(y+t)^2 + c(y+t) + d = 0 \\
y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + by^2 + 2tby + bt^2 + cy + ct + d = 0 \\
y^3 + (3t+b)y^2 + (3t^2 + 2bt + c)y + (t^3 + bt^2 + ct + d) = 0.
\end{gathered}
$$

Como pretendemos anular o termo quadrático faremos que $3t + b = 0$, isto é,

$t = \frac{-b}{3}$. Assim,

$$y^3 + \left[3\left(\frac{-b}{3}\right)^2 + 2b\left(\frac{-b}{3}\right) + c\right]y + \left[\left(\frac{-b}{3}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3}\right) + d\right] = 0$$
$$y^3 + \left(\frac{b^2}{3} - 2\frac{b^2}{3} + c\right)y + \left(\frac{-b^3}{27} + \frac{3b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0$$
$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27} - c\frac{b}{3} + d\right) = 0.$$

Tomando $p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - c\frac{b}{3} + d$ temos a equação na forma $y^3 + py + q = 0$ que já sabemos resolver.

Para encontrar as raízes da equação original na variável x basta lembrar que $x = y + t$.

Exemplo: Considere a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$. Utilizando a nomenclatura anterior temos $b = -6$, $c = 6$ e $d = -5$. Assim temos

$$p = c - \frac{b^2}{3} = 6 - \frac{-6^2}{3} = 6 - 12 = -6,$$
$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{6(-6)}{3} - 5 = -16 + 12 - 5 = -9.$$

Assim o polinômio se torna $y^3 - 6y - 9 = 0$ e já sabemos que suas raízes são $y_0 = 3$, $y_1 = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$ e $y_2 = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$.

Para as raízes do polinômio original temos $x = y + t$ onde $t = \frac{-b}{3}$. Assim temos

$$x_0 = 3 + \frac{-(-6)}{3} = 3 + 2 = 5,$$
$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2},$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} + 2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Historicamente, Garbi 2009, relata que apesar de encontrada a fórmula geral ainda haviam dúvidas a serem respondidas. Por exemplo, como encontrar as outras duas raízes da equação de terceiro grau, já que a fórmula só apesentava uma delas? Ainda, mais uma vez a aplicação da fórmula levava à raiz quadrada de números negativos, por exemplo, na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ pode-se verificar facilmente que 4 é uma das raízes, mas a aplicação da fórmula fornecia $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Somente em 1572 Rafael Bombelli deu início à teoria dos números complexos, criando regras para o cálculo com $\sqrt{-1}$.

Sobre os números complexos, Garbi (2009) cita ainda que " foram as equações do 3º grau, e não as do 2º que desencadearam todo o desenvolvimento teórico havido naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli." (Garbi, 2009).

Durante esses dois séculos grandes nomes da Matemática, como Descartes, Fermat e Euler trabalharam na teoria dos números complexos.

2.4 Equações do quarto grau

Definição 21. Uma equação do quarto grau é uma equação na forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{2.13}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

No mesmo documento onde publicou a resolução da equação do 3° grau, na Ars Magna, Cardano também conseguiu publicar um método para a resolução de uma equação do 4° grau, desenvolvida pelo seu discípulo Ludovico Ferrari. De acordo com Garbi 2009, Ferrari (1522-1560) nasceu em Bolonha em uma família humilde, aos 15 anos foi trabalhar como um empregado na casa de Cardano, mas devido à sua inteligência logo foi promovido a secretário. Com 18 anos passou a ensinar e logo se tornou professor na Universidade de Bolonha. Cardano recebeu como desafio um problema que envolvia a resolução da equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, tentou sem sucesso resolvê-la e acabou passando a tarefa para Ferrari que conseguiu encontrar a fórmula geral desejada, transformando uma equação do quarto grau em dois quadrados perfeitos que podem ser resolvidos como a equação do segundo grau, conforme será descrito na próxima seção.

A resolução de uma equação de quarto grau é dada por meio do Método de Ferrari, que na verdade consiste em resolver uma equação na forma

$$x^4 + px^2 + r = qx, \tag{2.14}$$

ou seja uma equação do quarto grau sem o termo cúbico. A ideia da resolução desta equação é deixar os dois membros na forma de um quadrado perfeito. O primeiro termo pode se tornar um quadrado perfeito ajustando-se o termo independente r. O segundo membro pode se tornar um quadrado perfeito acrescentando um termo independente e um termo quadrático. Cabe ressaltar que sempre é possível encontrar um termo independente e um termo quadrático que tornam ambos os membros quadrados perfeitos. Porém, primeiro, precisa-se fazer uma mudança de variável e algumas modificações na equação original para chegar na forma (2.14).

Inicialmente podemos considerar, sem perda de generalidade, a equação $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Utilizando novamente a mudança de variável $x = y + t$ para construir um polinômio sem o termo cúbico basta tomar $t = \frac{-b}{4}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\left(y - \frac{b}{4}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4}\right) + e = 0\\
&y^4 - by^3 + \frac{3b^2y^2}{2} - b^3y + \frac{b^4}{256} + b\left(y^3 - \frac{3by^2}{4}\right)\\
&\qquad + \frac{3b^2y}{16} - \frac{b^3}{64} + c\left(y^2 - \frac{by}{2} + \frac{b^2}{16}\right) + d\left(y - \frac{b}{4}\right) + e = 0\\
&y^4 - by^3 + \frac{3b^2y^2}{2} - b^3y + \frac{b^4}{256} + by^3 - \frac{3b^2y^2}{4}\\
&\qquad + \frac{3b^3y}{16} - \frac{b^4}{64} + cy^2 - \frac{bcy}{2} + \frac{b^2c}{16} + dy - \frac{bd}{4} + e = 0\\
&y^4 + (b-b)y^3 + \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{3b^2}{4} + c\right)y^2\\
&\qquad + \left(\frac{3b^3}{16} - b^3 - \frac{bc}{2} + d\right)y + \left(\frac{b^4}{256} - \frac{b^4}{64} + \frac{b^2c}{16} - \frac{bd}{4} + e\right) = 0\\
&y^4 + \left(\frac{3b^2}{4} + c\right)y^2 + \left(d - \frac{13b^3}{16} - \frac{bc}{2}\right)y + \left(\frac{b^2c}{16} + \frac{-3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Tomando $p = \frac{3b^2}{4} + c$, $q = d - \frac{13b^3}{16} - \frac{bc}{2}$ e $r = \frac{b^2c}{16} + \frac{3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e$ e chegamos na forma desejada.

Agora queremos resolver a equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ para isso reescrevemos a equação como

$$y^4 + py^2 + r = -qy.$$

E queremos encontrar um número α que torne ambos os lados dessa equação quadrados perfeitos. Acrescentando αy^2 e $\frac{q^2}{4\alpha}$ do lado direito da equação ele já se torna um quadrado perfeito, independente do número α, pois $\alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha} = \left(\sqrt{\alpha}y - \frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2$, então devemos acrescentar as mesmas parcelas no lado esquerdo da equação para que a equação continue equilibrada. Assim, ficamos com o seguinte

$$
\begin{aligned}
y^4 + py^2 + r &= -qy\\
y^4 + py^2 + r + \alpha y^2 + \frac{q^2}{4\alpha} &= \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha}\\
y^4 + (p+\alpha)y^2 + r + \frac{q^2}{4\alpha} &= \alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha}.
\end{aligned}
$$

Já sabemos que o lado direito da igualdade é um quadrado perfeito. Agora para que o lado esquerdo também seja quadrado perfeito, usaremos o fato de que uma expressão quadrática ax^2+bx+c, é um quadrado perfeito, se e somente se, o discriminante $b^2 - 4ac$ for igual a 0. Vamos então determinar α tal que o discriminante da equação de segundo grau seja igual a zero. Assim,

$$\Delta = (p+\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} &= 0 \\
\frac{p^2\alpha + 2p\alpha^2 + \alpha^3 - 4r\alpha - q^2}{\alpha} &= 0 \\
\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Obtemos uma equação do terceiro grau na variável α e podemos encontrar os valores de α que solucionam a equação utilizando o método de Tartaglia-Cardano.

Agora, se ambos os lados da equação são quadrados perfeitos, para resolvê-la bastará extrair a raiz quadrada de ambos os lados. Assim teremos

$$
\sqrt{y^4 + (p+\alpha)y^2 + r + \frac{q^2}{4\alpha}} = \pm\sqrt{\alpha y^2 - qy + \frac{q^2}{4\alpha}},
$$

que são equações do segundo grau. Ao resolver essas equações encontramos os valores de y e para retornar à variável x basta lembrar que $x = y + t$.

Note que obteremos o valor de α ao resolver uma equação do terceiro grau. Conforme visto anteriormente o α poderá assumir três valores distintos e se para cada valor de α obtemos quatro raízes para a equação, seriam no total 12 raízes? Certamente que não. O que acontece nesse caso é que temos quatro raízes que serão agrupadas duas a duas de acordo com a escolha de α e a resolução das equações correspondentes. Para agrupar 4 elementos dois a dois temos três formas distintas, conforme o quadro a seguir.

Tabela 2.1: Disposição das raízes na resolução de uma equação do quarto grau

α	Equação 1	Equação 2
α_0	x_1, x_2	x_3, x_4
α_1	x_1, x_3	x_2, x_4
α_2	x_1, x_4	x_2, x_3

O exemplo a seguir pode ajudar a elucidar essa questão.

Exemplo 1: Considere a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$. Note que não será necessária a mudança de variável pois esta equação já apresenta o coeficiente de x^3 sendo zero, vamos resolvê-la utilizando o método de Ferrari. Temos então

$$
\begin{aligned}
x^4 - 15x^2 + 24 &= 10x \\
x^4 + (\alpha - 15)x^2 + 24 + \frac{(-10)^2}{4\alpha} &= \alpha x^2 + 10x + \frac{(-10)^2}{4\alpha} \\
x^4 + (\alpha - 15)x^2 + 24 + \frac{25}{\alpha} &= \alpha x^2 + 10x + \frac{25}{\alpha}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Para que o primeiro termo dessa equação seja um quadrado perfeito temos que o discriminante Δ deve ser igual a zero, assim

$$\begin{aligned}\Delta = (\alpha - 15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(24 + \frac{25}{\alpha}\right) = 0 \\ \alpha^2 - 30\alpha + 225 - 96 - \frac{100}{\alpha} = 0 \\ \alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0.\end{aligned}$$

Obtivemos uma equação de terceiro grau na incógnita α cujas raízes são $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_2 = 25$. (Para encontrar essas raízes podemos usar os métodos discutidos na seção anterior).

Utilizando $\alpha = 1$ a equação (2.15) se torna

$$\begin{aligned}x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25 \\ (x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2 \\ \sqrt{(x^2 - 7)^2} = \pm\sqrt{(x + 5)^2} \\ x^2 - 7 = \pm(x + 5).\end{aligned}$$

Assim obtemos duas equações quadráticas. Da equação

$$x^2 - 7 = x + 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 12 = 0,$$

obtemos as raízes 4 e -3, e da equação

$$x^2 - 7 = -x - 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0,$$

obtemos as raízes 1 e -2.

Observe que já encontramos as quatro raízes da equação original, mas vejamos o que acontecerá se escolhermos outro valor para α.

Utilizando $\alpha = 4$ a equação $x^4 + (\alpha - 15)x^2 + 24 + \frac{25}{\alpha} = \alpha x^2 + 10x + \frac{25}{\alpha}$ se torna

$$\begin{aligned}x^4 + (4 - 15)x^2 + 24 + \frac{25}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} \\ x^4 - 11x^2 + \frac{121}{4} = 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} \\ \left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2 = \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\left(x^2 - \frac{11}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2} \\ x^2 - \frac{11}{2} = \pm\left(2x + \frac{5}{2}\right).\end{aligned}$$

Assim obtemos duas equações quadráticas. A primeira,

$$x^2 - \frac{11}{2} = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0,$$

obtemos as raízes são 4 e -2, e a segunda,

$$x^2 - \frac{11}{2} = -2x - \frac{5}{2} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0,$$

cujas raízes são 1 e -3.

Por fim, utilizando $\alpha = 25$ a equação $x^4 + (\alpha - 15)x^2 + 24 + \frac{25}{\alpha} = \alpha x^2 + 10x + \frac{25}{\alpha}$ se torna

$$\begin{gathered}
x^4 + (25 - 15)x^2 + 24 + \frac{25}{25} = 25x^2 + 10x + \frac{25}{25} \\
x^4 + 10x^2 + 25 = 25x^2 + 10x + 1 \\
(x^2 + 5)^2 = (5x + 1)^2 \\
\sqrt{(x^2 + 5)^2} = \pm\sqrt{(5x + 1)^2} \\
x^2 + 5 = \pm(5x + 1).
\end{gathered}$$

Assim obtemos duas equações quadráticas. A primeira

$$x^2 + 5 = 5x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0,$$

cujas raízes são 4 e 1, e a segunda,

$$x^2 + 5 = -5x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x + 6 = 0,$$

cujas raízes são -2 e -3.

Ou seja, por meio desse exemplo podemos observar que as raízes independem da escolha do α, ou seja, para qualquer α escolhido apareceram as quatro raízes da equação, o que mudou foi apenas a ordem em que aparecerão.

No próximo exemplo, abordaremos o cao geral.

Exemplo 2: Considere a equação $x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 12x + 5 = 0$.

Primeiramente faremos a eliminação do termo cúbico, observe que

$$t = \frac{-b}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$p = \frac{3b^2}{4} + c = \frac{3.4^2}{4} - 24 = -12,$$

$$q = d - \frac{13b^3}{16} - \frac{bc}{2} = -12 - \frac{13.4^3}{16} - \frac{4(-24)}{2} = -12 - 52 + 48 = -16,$$

e

$$r=\frac{b^2c}{16}+\frac{3b^4}{256}-\frac{bd}{4}+e=\frac{4^2(-24)}{16}+\frac{3.4^4}{256}-\frac{4(-12)}{4}+5=-24+3+12+5=-4,$$

e assim a nossa equação se torna

$$y^4-12y^2-16y-4=0,$$

e iremos resolvê-la utilizando o Método de Ferrari. Assim,

$$\begin{aligned} y^4-12y^2-4&=16y\\ y^4+(-12+\alpha)y^2-4+\frac{(-16)^2}{4\alpha}&=\alpha y^2+16y+\frac{(-16)^2}{4\alpha}\\ y^4+(\alpha-12)y^2-4+\frac{64}{\alpha}&=\alpha y^2+16y+\frac{64}{\alpha}. \end{aligned}$$

Precisamos fazer o discriminante do primeiro membro da equação ser igual a zero, então

$$\begin{aligned} (\alpha-12)^2+16-4\left(-4+\frac{64}{\alpha}\right)&=0\\ \alpha^2-24\alpha+144+16-\frac{256}{\alpha}&=0\\ \alpha^3-24\alpha^2+144\alpha+16\alpha-256&=0\\ \alpha^3-24\alpha^2+160\alpha-256&=0. \end{aligned}$$

Usaremos o método de Cardano-Tartaglia para resolver a equação de terceiro grau na variável α.

Fazendo a mudança $\alpha=z+t$ com $t=-\frac{-24}{3}=8$ obtemos $z^3+pz+q=0$, com $p=-32$ e $q=0$ resolvemos então a equação $z^3-32z=0$ a qual podemos observar com facilidade tem raízes $z_0=0$, $z_1=4\sqrt{2}$ e $z_2=-4\sqrt{2}$.

Para retornar à variável original α utilizamos $\alpha=t+8$. Assim, $\alpha_0=8$, $\alpha_1=4\sqrt{2}+8$ e $\alpha_2=-4\sqrt{2}+8$.

Utilizando $\alpha_0=8$ temos

$$\begin{aligned} y^4+(-12+8)y^2-4+\frac{64}{8}&=8y^2+16y+\frac{64}{8}\\ y^4-4y-4+8&=8y^2+16y+8\\ y^4-4y+4&=8y^2+16y+8\\ (y^2-2)^2&=8(y+1)^2\\ (y^2-2)&=\pm\sqrt{8(y+1)^2}\\ (y^2-2)&=\pm2\sqrt{2}(y+1). \end{aligned}$$

Esta última igualdade irá gerar duas equações quadráticas

$$\begin{cases} y^2 - 2\sqrt{2}y - 2 - 2\sqrt{2} = 0 \\ y^2 + 2\sqrt{2}y - 2 + 2\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Para resolver essas duas equações quadráticas utilizamos a fórmula de Bháskara.

Para a primeira equação temos $\Delta = 16 + 8\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

Para a segunda equação temos $\Delta = 16 - 8\sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Os valores $y_0 = \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $y_1 = \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $y_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $y_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ são as quatro raízes da equação de quarto grau modificada, para a equação original lembramos que $x = y + 1$ e portanto as raízes da equação original são

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1 \\ x_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1 \\ x_2 &= -\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1 \\ x_3 &= -\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1. \end{aligned}$$

E conforme visto no exemplo anterior não precisamos utilizar os outros valores de α.

Observe que neste exemplo todas as raízes encontradas são irracionais, o que mostra que o método descrito no teorema (4) pode não conduzir à obtenção de soluções para qualquer tipo de equação.

2.5 Equações de grau $n \geq 5$

Durante quase dois séculos muitos matemáticos de prestígio tentaram encontrar uma fórmula geral que pudesse resolver uma equação do 5° grau. Costa, 2020, cita que nomes como Lagrange e Euler estão envolvidos nas buscas por essa fórmula. De acordo com Costa 2020, o primeiro matemático a desconfiar da não existência da solução geral para a equação de grau maior que 4 foi o italiano Paolo Ruffini (1765-1822). Em 1799 Ruffini publicou um livro intitulado "Teoria Geral das equações na qual se mostra a impossibilidade da solução algébrica da equação geral de grau superior a quatro", onde demonstra que equações de grau maior que 4 não podem ser resolvidas por radicais. Essa demonstração tinha uma falha, mas continha parte da verdade. Porém, mesmo após fazer algumas correções a sua teoria foi vista com desconfiança pelos grandes matemáticos da época.

Outro importante nome associado à resolução de equações de grau maior que 5 é o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), nascido em uma família extremamente pobre, Abel foi enviado juntamente com seu irmão para estudar na escola da Catedral de Oslo, onde ele acreditou ter encontrado a resolução para equações de 5° grau. Uma resolução na qual de acordo com Garbi, 2009, não conseguiram encontrar nenhuma falha no processo e enviaram para que Ferdinand Degen opinasse,

> Este também não encontrou erros mas, prudentemente, pediu maiores informações. Ao dá-las o próprio Abel descobriu que sua solução estava incorreta. Este episódio, entretanto, foi importantíssimo, por duas razões: em primeiro lugar, vencer as equações de 5° grau passou a ser uma obsessão em Abel e, em segundo, Degen aconselhou-o a pesquisar uma fronteira promissora, as Funções Elípticas, estudadas parcialmente pelo francês Adrien-Marie Legendre. (Garbi, 2009, página 147).

Conforme sugerido por Degen, Abel estudou as funções elípticas utilizando uma abordagem diferente da utilizada na época e conseguiu resultados surpreendentes. Voltando a estudar as equações de 5º grau, em 1823 demonstrou que, exceto em casos especiais, é impossível resolvê-las por radicais. Com bastante esforço conseguiu pagar a impressão de seu trabalho e o encaminhou a grandes matemáticos da época, mas foi ignorado por todos que o receberam.

De acordo com Costa, 2020, os trabalhos de Ruffini e Abel resultaram num teorema, chamado Teorema de Abel-Ruffini que diz: “A equação algébrica geral de grau maior ou igual a 5 não pode ser resolvida por radicais”.

Infelizmente, apesar de realizar diversas tentativas de ser reconhecido, Abel não conseguiu nenhum cargo como professor, vivendo em grande dificuldade financeira. Abel faleceu aos 26 anos vítima de tuberculose. Tanto Garbi, 2009, quanto Costa, 2020, afirmam que dois dias depois de sua morte chegava uma carta de Berlim oferecendo a tão sonhada oportunidade como professor.

Garbi, 2009, escreve que apesar da publicação de Abel demonstrar que as equações de grau maior que 4 não poderiam ser resolvidas por radicais, ainda havia campo para novas descobertas sobre esse tipo de equações. O próximo matemático a trabalhar com essa temática foi o francês Èvariste Galois (1811-1832). Galois teve seu primeiro contato com a matemática aos 14 anos e rapidamente estudou Geometria, Análise e Cálculo. Aprendeu o que se sabia sobre as equações com os trabalhos de Lagrange, mas logo percebeu que precisava tomar outos caminhos para resolver as questões ainda em aberto.

Em pouco tempo, Galois escreveu artigos sobre vários temas como funções, teoria dos números e, é claro, equações álgebricas, mas apesar de seus trabalhos irem para as mãos de matemáticos influentes da época, ele acabava por não receber retorno.

Segundo Costa, 2020, em 1831 seu artigo "Sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais" foi examinado pelo matemático e físico Simeón Denis Poison, que o estudou por cerca de 6 meses e o devolveu pedindo que Galois explicasse melhor suas ideias.

Nesse meio tempo, Galois também era envolvido com política e acabou sendo preso por duas vezes. E em 1832 participou de um duelo, possivelmente causado por conflitos amorosos, e levou um tiro que o mataria no dia seguinte.

Na noite anterior à ocorrência do duelo ele tratou de escrever todas as suas ideias e pediu ao seu amigo Auguste Chevalier que se encarregasse de divulgá-las. Apenas depois de 14 anos, outro matemático, Joseph Liouville conseguiu organizar os textos deixados por Galois e os publicou com o nome "Obras Matemáticas de Évariste Galois". Mais tarde outros matemáticos trabalhariam para divulgar e explicar os trabalhos de Galois.

Galois criou uma teoria, chamada Teoria de Grupos, que o permitiu mostrar as condições de resolubilidade por meio de radicais utilizando permutações. Garbi cita que:

> Na realidade Galois estava introduzindo conceitos estruturais muito profundos, que alteravam a própria natureza da Álgebra, algo semelhante ao que Copérnico fizera três séculos antes, tirando a Terra do centro do Universo. Depois de Galois a Álgebra nunca mais foi a mesma, mas é uma pena não podermos resumir, "em duas palavras", o que é a Teoria de Grupos. Ao contrário de vários outros ramos da matemática, onde a intuição é grande auxiliar do aprendizado, a Teoria de Grupos é um campo bastante abstrato e, embora acessível a qualquer estudante, seu ensino depende de bases preliminares que não podemos apresentar nesse livro. (Garbi, 2009, página 164).

Neste trabalho também não apresentaremos a Teoria de Grupos de Galois. Nos limitamos a informar que ela finalmente encerra a busca por fórmulas fechadas de resolução de equações de grau maior que 4. O leitor interessado em entender um pouco mais sobre a Teoria de Galois pode consultar Biazzi, 2014.

Capítulo 3

Casos especiais

Neste capítulo queremos encontrar maneiras de resolver alguns casos especiais de equações de grau maior ou igual a 5.

3.1 Apontamentos sobre a substituição $x = y + t$

Anteriormente utilizamos a substituição $x = y + t$ para eliminar o termo de grau 3 e 2 em equações polinomiais de grau 4 e 3, respectivamente. Mais precisamente, na equação

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

fazendo $x = y + t$ e organizando os termos obtemos

$$y^4 + (4t + b)y^3 + (6t^2 + 3bt + c)y^2 + (4t^3 + 3bt^2 + 2ct + d)y + (t^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e) = 0.$$

Na seção (2.4) foi utilizado $t = -\frac{b}{4}$ para eliminar o termo cúbico. Mas este não é o único termo que pode ser eliminado na equação. Se encontrarmos t de forma que

$$6t^2 + 3bt + c = 0,$$

eliminaremos o termo quadrático. Se encontrarmos t de forma que

$$4t^3 + 3bt^2 + 2ct + d = 0,$$

eliminaremos o termo linear. E se encontrarmos t de forma que

$$t^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0,$$

eliminaremos o termo independente.

Naturalmente notamos que fica cada vez mais difícil eliminarmos as potências conforme elas forem diminuindo (afastando-se de 4). A eliminação do termo independente é impraticável já que exige obter uma raiz para uma equação de grau 4, idêntica à equação original.

Cabe ressaltar que embora possível, a eliminação da potência quadrática ou da potência linear, pode não ser tão útil quanto a eliminação da potência cúbica no caso da equação de grau 4. E que a eliminação de um termo escolhido nunca alterará o grau da equação original.

Podemos generalizar esta ideia para equações polinomiais de grau n. Consideremos então a equação polinomial de grau $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

ou de forma equivalente

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Fazendo $x = y + t$ obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (y+t)^k = 0,$$

e usando o desenvolvimento binomial

$$(y+t)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j t^{k-j}$$

temos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y^j t^{k-j} = 0,$$

ou ainda,

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_k y^j t^{k-j} = 0.$$

Trocando a ordem dos somatórios podemos reescrever

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k y^j t^{k-j} = 0,$$

e portanto

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k t^{k-j} \right) y^j = 0.$$

Assim, para eliminar qualquer que seja a j-ésima potência de y, basta encontrarmos t de forma que

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k t^{k-j} = 0.$$

Evidentemente quanto menor for o valor de j mais termos terá este somatório e portanto mais termos terá esta equação. Notemos que no caso de uma equação de grau 4,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

podemos eliminar a potência cúbica ($n = 4$ e $j = 3$ portanto) por meio da substituição $x = y + t$. Basta tomar t de forma que

$$\sum_{k=3}^{4} \binom{k}{3} a_k t^{k-3} = 0,$$

ou ainda

$$\binom{3}{3} a_3 t^{3-3} + \binom{4}{3} a_4 t^{4-3} = 0,$$

e portanto

$$a_3 + 4a_4 t = 0,$$

e como $a_3 = b$ e $a_4 = a$ então

$$b + 4at = 0,$$

que nos leva a $t = \frac{-b}{4a}$ ou $t = \frac{-b}{4}$ quando já considerado $a = 1$. Exatamente a substituição utilizada na seção (2.4).

Podemos também eliminar a potência quadrática ($n = 4$ e $j = 2$ portanto) por meio da substituição $x = y + t$. Basta tomar t de forma que

$$\sum_{k=2}^{4} \binom{k}{2} a_k t^{k-2} = 0,$$

ou ainda

$$\binom{2}{2} a_2 t^{2-2} + \binom{3}{2} a_3 t^{3-2} + \binom{4}{2} a_4 t^{4-2} = 0,$$

isto é

$$a_2 + 3a_3 t + 6a_4 t^2 = 0,$$

e como $a_4 = a$, $a_3 = b$ e $a_2 = c$ então

$$c + 3bt + 6at^2 = 0,$$

exatamente como mencionado no início desta seção com $a = 1$.

Finalmente para eliminar o termo de grau 1 na equação de grau 4 ($n = 4$ e $j = 1$) temos que obter um valor de t que satisfaça

$$\sum_{k=1}^{4} \binom{k}{1} a_k t^{k-1} = 0,$$

isto é,

$$\binom{1}{1} a_1 t^{1-1} + \binom{2}{1} a_2 t^{2-1} + \binom{3}{1} a_3 t^{3-1} + \binom{4}{1} a_4 t^{4-1} = 0,$$

e portanto

$$a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 = 0,$$

e como $a_4 = a$, $a_3 = b$, $a_2 = c$ e $a_1 = d$, precisamos obter uma solução da equação

$$d + 2ct + 3bt^2 + 4at^3 = 0,$$

exatamente a expressão apresentada no início desta seção com $a = 1$.

Um fato relevante é que esta técnica permite recuperar a fórmula de Bháskara. O completamento do quadrado é um método utilizado para encontrar a fórmula de Bháskara porque ele nos permite isolar x na equação quadrática. Mas se eliminarmos o termo de grau 1, também poderemos isolar x na equação. Vejamos os detalhes, dada a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

fazemos $x = y - \frac{b}{2a}$ e temos

$$a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

e portanto

$$a\left(y^2 - \frac{by}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

ou ainda,

$$ay^2 - by + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

Reorganizando os termos obtemos

$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

que pode agora ser resolvida facilmente por isolamento da variável y. Temos então

$$ay^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

e segue que

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

A solução agora é

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

e voltando para a variável x, temos que

$$x = y - \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

como desejado.

Por exemplo vamos resolver a equação

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

utilizando essa substituição.

Escrevemos $x = y - \frac{b}{2a} = y - 2$, e temos

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x + 2 &= 0\\
(y-2)^2 + 4(y-2) + 2 &= 0\\
y^2 - 4y + 4 + 4y - 8 + 2 &= 0\\
y^2 - 2 &= 0\\
y^2 &= 2\\
y &= \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Retornando para a variável x temos $x = \pm\sqrt{2} - 2$, ou seja $x_0 = -2 + \sqrt{2}$ e $x_1 = -2 - \sqrt{2}$.

3.2 Coeficientes "espelhados"

Consideremos a equação

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

com $a \neq 0$ e $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro par.

Nesse modelo de equação é possível fazer uma mudança de variável que nos permite diminuir o grau da equação para $\frac{n}{2}$ e utilizando os métodos já discutidos no capítulo anterior podemos resolver equações de sexto e oitavo grau que tenham essa forma.

Essa mudança de variável pode ser realizada para transformar todo tipo de equação com coeficientes espelhados, porém para equações de grau maior ou igual a 10 isso não irá resolver pois chegaríamos numa equação de grau maior ou igual a 5 para a qual não temos uma fórmula fechada, conforme visto no capítulo anterior.

3.2.1 Equações de 6º grau

Considere a equação

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{3.1}$$

com $a \neq 0$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Observe aqui que nesse caso sabemos que $x \neq 0$ pois senão teríamos na equação (3.1) que $a = 0$, o que contraria a definição da equação de 6º grau. Podemos, então, dividir a equação inteira por x^3, assim teremos

$$x^3\left(ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{c}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x^3}\right) = 0.$$

Reagrupando os termos de acordo com os coeficientes temos

$$a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0. \tag{3.2}$$

Chamando $x + \frac{1}{x} = y$, notemos que

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

e portanto,

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Também

$$\begin{aligned} y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \\ y^3 - 3x - \frac{3}{x} &= x^3 + \frac{1}{x^3} \\ y^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^3 + \frac{1}{x^3}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Substituindo esses valores na equação (3.2) chegamos em

$$\begin{aligned} a(y^3 - 3y) + b(y^2 - 2) + cy + d &= 0 \\ ay^3 - 3ay + by^2 - 2b + cy + d &= 0 \\ ay^3 + by^2 + (c - 3a)y + (d - 2b) &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Observe que a equação (3.3) é uma equação do terceiro grau na variável y que pode ser resolvida utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Sabemos que ao utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia para a equação (3.3) obteremos três raízes, y_0, y_1 e y_2 e para resolver a equação original temos que retornar para a variável x, para isso lembramos que

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= y \\ \frac{x^2+1}{x} &= y \\ x^2 + 1 &= xy \\ x^2 - xy + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Assim, para cada um dos três valores obtidos para y teremos uma equação de segundo grau onde obteremos 2 valores de x, e portanto chegaremos às 6 raízes da equação original.

Exemplo: Considere a equação $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$, realizando os passos identificados anteriormente podemos reescrevê-la como

$$\begin{gathered} x^3\left(x^3 - 6x^2 + 14x - 18 + \frac{14}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 \\ \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0 \\ y^3 - 3y - 6(y^2 - 2) + 14y - 18 = 0 \\ y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0. \end{gathered}$$

Resolvendo a equação pelo método de Tartaglia-Cardano encontramos

$$\begin{aligned} &t = \frac{-b}{3} = \frac{-(-6)}{3} = 2, \\ &p = c - \frac{b^2}{3} = 11 - \frac{(-6)^2}{3} = 11 - 12 = -1, \\ &q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} - d = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{11(-6)}{3} - 6 = -16 + 22 - 6 = 0, \end{aligned}$$

e reescrevemos a equação como

$$z^3 - z = 0.$$

A equação na incógnita z é facilmente resolvida e identificamos suas raízes $z_0 = 0$, $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$. Retornando para a variável y temos $y_0 = 2$, y_1=1 e $y_2 = 3$.

Assim para resolver a equação original teremos:

- Para $y_0 = 2$ temos
$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$.

- Para $y_1 = 1$ temos
$$x^2 - x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

- para $y_2 = 3$ temos
$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_5 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Portanto a equação $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$ possui as seguintes raízes $x_0 = x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $x_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_5 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3.2.2 Equações de 8º grau

Considere a equação
$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$
com $a \neq 0$ e $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Dividindo a equação por x^4, encontramos
$$x^4\left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e + \frac{d}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{a}{x^4}\right) = 0,$$
e então,
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e + \frac{d}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x^3} + \frac{a}{x^4} = 0.$$

E reagrupando os termos de acordo com os coeficientes temos
$$a\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + b\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + c\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(x + \frac{1}{x}\right) + e = 0. \tag{3.4}$$

Novamente utilizaremos a substituição $y = x + \frac{1}{x}$. Já sabemos que $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Agora
$$\begin{aligned} y^4 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \\ &= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6$$
$$= x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(y^2 - 2) + 6,$$

e então,

$$y^4 - 4y^2 + 8 - 6 = x^4 + \frac{1}{x^4}$$
$$y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Substituindo os termos e reorganizando a equação teremos

$$a(y^4 - 4y^2 + 2) + b(y^3 - 3y) + c(y^2 - 2) + dy + e = 0$$
$$ay^4 - 4ay^2 + 2a + by^3 - 3by + cy^2 - 2c + dy + e = 0$$
$$ay^4 + by^3 + (c - 4a)y^2 + (d - 3b)y + (2a - 2c + e) = 0.$$

Que é uma equação do 4º grau e pode ser resolvida pelo Método de Ferrari. Ao obter as quatro raízes dessa equação em y , novamente poderemos resolver as equações $x^2 - yx + 1 = 0$ para encontrar os valores de x da equação original.

Exemplo: Considere a equação $x^8+x^7-4x^6-9x^5+22x^4-9x^3-4x^2+x+1 = 0$, divindo a equação por x^4 e fazendo a mudança de variável obteremos

$$x^4\left(x^4 + x^3 - 4x^2 - 9x + 22 - \frac{9}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 0$$
$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 22 = 0$$
$$(y^4 - 4y^2 + 2) + (y^3 - 3y) - 4(y^2 - 2) - 9y + 22 = 0$$
$$y^4 + y^3 + (-4 - 4)y^2 + (-9 - 3)y + (2 - 24 + 22) = 0$$
$$y^4 + y^3 - 8y^2 - 12y = 0.$$

Nota-se que $y_0 = 0$ é uma das raízes da equação. Assim podemos reescrevê-la como $y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$ que podemos resolver pelo Método de Cardano-Tartaglia. Temos

$$t = \frac{-1}{3},$$
$$p = c - \frac{b}{3} = -8 - \frac{1}{3} = \frac{-25}{3},$$
$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2 \cdot 1^3}{27} - \frac{1 \cdot (-8)}{3} - 12 = \frac{2}{27} + \frac{8}{3} - 12 = \frac{2 + 72 - 324}{27} = -\frac{250}{27}.$$

A equação se torna $z^3 - \frac{25z}{3} - \frac{250}{27} = 0$. Calculamos $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(\frac{-250}{27})^2}{4} + \frac{(\frac{-25}{3})^3}{27} = \frac{62500}{2916} - \frac{62500}{2916} = 0$ e portanto

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt[3]{\frac{250}{54} + 0} + \sqrt[3]{\frac{250}{54} - 0} \\
z &= \sqrt[3]{\frac{125}{27}} + \sqrt[3]{\frac{125}{27}} \\
z &= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \\
z &= \frac{10}{3}.
\end{aligned}
$$

Como $y = z + t$ temos que $y = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, portanto encontramos a segunda raiz $y_1 = 3$. Vamos dividir a equação por $y-3$ e obtemos $(y-3)(y^2+4y+4) = 0$ e resolveremos $y^2 + 4y + 4 = 0$ cuja raíz dupla é $y_2 = y_3 = -2$.

Assim encontramos as quatro raízes da equação na incógnita y. São elas: $y_0 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = y_3 = -2$. E retornaremos à incógnita x

- Para $y_0 = 0$ temos
$$x^2 + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_0 = i$ e $x_1 = -i$.

- Para $y_1 = 3$ temos
$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- Para $y_2 = y_3 = -2$ temos
$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = -1$.

Portanto a equação $x^8 + x^7 - 4x^6 - 9x^5 + 22x^4 - 9x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ possui as seguintes raízes $x_0 = i$ $x_1 = -i$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, e $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = -1$.

3.2.3 Alternativa para equações de 4º Grau

Apesar de existir o Método de Ferrari para resolver as equações de 4º grau, vimos no capítulo anterior que a utilização de tal método não é tão simples, portanto para equações de 4º grau com coeficientes espelhados podemos utilizar o método que está sendo discutido nessa seção.

Considere a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dividindo a equação por x^2 e agrupando os termos de acordo com os coeficientes temos

$$x^2\left(x^2 + bx + x + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0$$
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Utilizando as substituições já vistas anteriormente $x + \frac{1}{x} = y$ e $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ teremos

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$
$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0.$$

Esta última podemos resolver pela Fórmula de Bhaskára.

Exemplo: Dada a equação $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$, dividindo a equação por x^2 e fazendo a mudança de variável temos

$$x^2\left(x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$
$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$
$$y^2 - 5y + (8 - 2.1) = 0$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Resovendo a equação na incógnita y pela Fórmula de Bhaskára temos

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1}$$
$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$y = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$
$$y_0 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$y_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Retornando para a incógnita x temos:

- Para $y_0 = 2$ temos

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

cuja raiz de multiplicidade 2 é $x_0 = x_1 = -1$.

- Para $y_1 = 3$ temos
$$x^2 - 3x + 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Portanto as raízes da equação $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ são $x_0 = x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3.2.4 Generalização do método anterior

Se considerarmos $y = \left(x + \frac{k}{x}\right)$ então temos

$$\begin{aligned}
y^2 &= \left(x + \frac{k}{x}\right)^2 = x^2 + 2k + \frac{k^2}{x^2} = \left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + 2k \\
y^3 &= \left(x + \frac{k}{x}\right)^3 = x^3 + 3xk + 3\frac{k^2}{x} + \frac{k^3}{x^3} = \left(x^3 + \frac{k^3}{x^3}\right) + 3k\left(x + \frac{k}{x}\right) \\
y^4 &= \left(x + \frac{k}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2k + 6k^2 + 4\frac{k^3}{x^2} + \frac{k^4}{x^4} = \left(x^4 + \frac{k^4}{x^4}\right) + 4k\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + 6k^2.
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned}
x + \frac{k}{x} &= y \\
x^2 + \frac{k^2}{x^2} &= y^2 - 2k \\
x^3 + \frac{k^3}{x^3} &= y^3 - 3ky \\
x^4 + \frac{k^4}{x^4} &= y^4 - 4ky^2 + 4k^2 - 6k^2 = y^4 - 4ky^2 - 2k^2.
\end{aligned}$$

Isto nos permitirá utilizar esta substituição na equação

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ckx^2 + bk^2x + ak^3 = 0$$

e também na equação

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + dkx^3 + ck^2x^2 + bk^3x + ak^4 = 0.$$

De fato, podemos reescrever a equação de grau 6 na forma

$$x^3\left(ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{ck}{x} + \frac{bk^2}{x^2} + \frac{ak^3}{x^3}\right) = 0,$$

que nos leva à busca de raízes da equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{ck}{x} + \frac{bk^2}{x^2} + \frac{ak^3}{x^3} = 0,$$

ou equivalentemente

$$a\left(x^3+\frac{k^3}{x^3}\right)+b\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+c\left(x+\frac{k}{x}\right)+d=0.$$

De acordo com o exposto acima, fazendo a substituição $y=\left(x+\frac{k}{x}\right)$, basta resolvermos a equação

$$a(y^3-3ky)+b(y^2-2k)+cy+d=0,$$

ou equivalentemente

$$ay^3+by^2+(c-3ak)y+(d-2bk)=0.$$

Já para a equação de grau 8, podemos reescrevê-la na forma

$$x^4\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e+\frac{dk}{x}+\frac{ck^2}{x^2}+\frac{bk^3}{x^3}+\frac{ak^4}{x^4}\right)=0,$$

e portanto queremos determinar as soluções da equação

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e+\frac{dk}{x}+\frac{ck^2}{x^2}+\frac{bk^3}{x^3}+\frac{ak^4}{x^4}=0,$$

ou equivalentemente,

$$a\left(x^4+\frac{k^4}{x^4}\right)+b(x^3+\frac{k^3}{x^3})+c\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+d\left(x+\frac{k}{x}\right)+e=0.$$

Novamente do exposto acima, e com a substiuição $y=\left(x+\frac{k}{x}\right)$, basta resolvermos a equação

$$a(y^4-4ky^2-2k^2)+b(y^3-3ky)+c(y^2-2k)+dy+e=0,$$

ou ainda

$$ay^4+by^3+(c-4ak)y^2+(d-3bk)y+(e-2ak^2-2ck)=0.$$

Exemplo: (Caso $k=-1$) Se considerarmos $k=-1$ poderemos resolver a equação de $6^{\underline{o}}$ grau $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+(-1)cx^2+(-1)^2bx+(-1)^3a=0$ que equivale a

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3-cx^2+bx-a=0.$$

Utilizando a substituição $y=x-\frac{1}{x}$, a equação equivalente na variável y se torna

$$ay^3+by^2+(3a+c)y+(2b+d)=0$$

que conforme exposto anteriormente pode ser resolvida pela fómula de Cardano-Tartaglia.

A equação de 8º grau

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a = 0$$

poderá ser resolvida através da substitição $y = x - \frac{1}{x}$ resolvendo-se inicialmente a equação

$$ay^4 + by^3 + (c + 4a)y^2 + (d + 3b)y + (e - 2a + 2c) = 0.$$

Exemplo: Considere a equação $x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0$, onde $a = 1$, $b = -3$, $c = -9$, $d = 14$ e $k = -1$. Utilizando a substituição $y = x - \frac{1}{x}$ temos a equação

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0,$$

agora com $a = 1$, $b = -3$, $c = -6$ e $d = 8$ e vamos resolvê-la utilizando o método já visto. Consideramos

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-b}{3} = \frac{-(-3)}{3} = 1,\\
p &= c - \frac{b^2}{3} = -6 - \frac{(-3)^2}{3} = -6 - 3 = -9,\\
q &= \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2(-3)^3}{27} - \frac{(-6)(-3)}{3} + 8 = -2 - 6 + 8 = 0,
\end{aligned}$$

e reescrevemos a equação como

$$z^3 - 9z = 0,$$

cujas raízes são $z_0 = 0$, $z_1 = -3$ e $z_2 = 3$. Retornando para variável y utilizando a substituição $y = z + t$ temos

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0 + 1 = 1,\\
y_1 &= -3 + 1 = -2,\\
y_2 &= 3 + 1 = 4.
\end{aligned}$$

E assim concluímos a resolução retornando para a varíavel x.

- Para $y = 1$,

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

  cujas raízes são $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Para $y = -2$,

$$x^2 + 2x - 1 = 0,$$

  cujas raízes são $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ e $x_3 = -1 - \sqrt{2}$.

- Para $y = 4$,
$$x^2 - 4x - 1 = 0,$$
cujas raízes são $x_4 = 2 + \sqrt{5}$ e $x_5 = 2 - \sqrt{5}$.

Portanto a equação $x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 3x - 1$ possui as raízes $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, $x_3 = -1 - \sqrt{2}$, $x_4 = 2 + \sqrt{5}$ e $x_5 = 2 - \sqrt{5}$.

Exemplo: (Caso $k = 2$) Considerando $k = 2$ a substituição $y = x + \frac{2}{x}$ permitirá resolver a equação

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + x^3 + 2cx^2 + 4bx + 8a = 0,$$

através da resolução inicial de

$$ay^3 + by^2 + (c - 6a)y + (d - 4b) = 0.$$

O mesmo valendo para a equação de grau 8

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + x^4 + 2dx^3 + 4cx^2 + 8dx + 16a = 0,$$

transformando-a, através da substituição em

$$ay^4 + by^3 + (c - 8a)y^2 + (d - 6k)y + (e - 8a - 4c) = 0.$$

Observe que essa análise pode ser feita para qualquer valor de k, porém pode ser que seja difícil perceber que a equação está no formato desejado, ou seja, com os coeficientes espelhados acompanhados de potências de k.

3.3 Combinação de casos utilizando o Teorema das Raízes Racionais

O teorema (4) do primeiro capítulo mostrou que caso a equação tenha uma raiz racional essa pode ser encontrada com uma técnica simples.

Aqui nessa seção nosso interesse é mesclar duas técnicas a fim de resolver alguns exemplos específicos de equações de grau 5, 6 e 7, podendo até ser expandida para graus maiores de acordo com o número de raízes racionais que o polinômio possua.

Exemplos 1: Considere a equação

$$x^7 - 5x^6 - 3x^5 + 32x^4 - 19x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0,$$

para procurar raízes racionais do polinômio $p(x) = x^7 - 5x^6 - 3x^5 + 32x^4 - 19x^3 - 21x^2 + 5x + 2$ precisamos dos divisores de $a_n = 1$ para determinar os possíveis valores de q e os divisores de $a_0 = 2$ que nos fornecerão os possíveis valores para p, assim temos

$$q \in \{\pm 1\}$$

$$p \in \{\pm 2\}$$

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

Testando os possíveis valores de $\frac{p}{q}$ encontramos

$$p(1) = -17$$

$$p(-1) = 23$$

$$p(2) = 0$$

$$p(-2) = 220,$$

ou seja uma das raízes de $p(x)$, e consequentemente da equação polinomial associada, é $x = 2$.

Efetuando a divisão dos polinômios temos

$$x^7 - 5x^6 - 3x^5 + 32x^4 - 19x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = (x - 2)(x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 3x - 1).$$

Note que a equação

$$x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 14x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0$$

já foi resolvida na seção 3.2.1, com as seguintes raízes $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = -1+\sqrt{2}$, $x_3 = -1 - \sqrt{2}$, $x_4 = 2 + \sqrt{5}$ e $x_5 = 2 - \sqrt{5}$.

Portanto a equação original desse problema $x^7 - 5x^6 - 3x^5 + 32x^4 - 19x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ possui as raízes $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = -1 + \sqrt{2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{2}$, $x_5 = 2 + \sqrt{5}$ e $x_6 = 2 - \sqrt{5}$.

Exemplo 2: Considere a equação

$$x^6 - 6x^5 - 19x^4 - 7^2x^3 + 53x^2 + 46x - 15 = 0,$$

para procurar as raízes do polinômio associado

$$p(x) = x^6 - 6x^5 - 19x^4 - 7^2x^3 + 53x^2 + 46x - 15$$

precisamos dos divisores de $a_n = 1$ e de $a_0 = -15$. Assim temos

$$q \in \{\pm 1\},$$

$$p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\},$$
$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}.$$

Testando os possíveis valores de $\frac{p}{q}$ temos

$$p(1) = 0,$$

$$p(-1) = 40,$$

$$p(3) = -696,$$

$$p(-3) = 0,$$

$$p(5) = 15070,$$

$$p(-5) = -4890,$$

$$p(15) = 15665850,$$

$$p(-15) = 7037970,$$

então as raízes racionais do polinômio $p(x)$ e consequentemente da equação associada são $x = 1$ e $x = -3$.

Como encontramos duas raízes racionais poderíamos fazer duas divisões consecutivas do polinômio por $x - 1$ e $x + 3$, ou equivalentemente dividimos o polinômio por $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$.

Efetuando a divisão dos polinômios obtemos

$$x^6 - 6x^5 - 19x^4 - 7^2x^3 + 53x^2 + 46x - 15 = (x^2 + 2x - 3)(x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 12x + 5).$$

E agora podemos resolver a equação

$$(x^2 + 2x - 3)(x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 12x + 5) = 0$$

que é equivalente a resolver as equações $x^2 + 2x - 3 = 0$ e $x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 12x + 5 = 0$.

Da primeira equação sabemos que $x_0 = 1$ ou $x_1 = -3$. A segunda equação pode ser resolvida pelo Método de Ferrari, conforme já foi realizado na seção 2.4, obtendo as raízes: $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1$, $x_1 = \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1$, $x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1$ e $x_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1$.

Assim podemos concluir que a equação original

$$x^6 - 6x^5 - 19x^4 - 7^2x^3 + 53x^2 + 46x - 15 = 0$$

possui seis raízes distintas, sendo elas $x_0 = 1$, $x_1 = -3$, $x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1$, $x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 1$, $x_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1$ e $x_5 = -\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + 1$.

3.4 Resolvendo uma equação especial de grau 5

Esta técnica de resolução de uma equação especial em grau 5 foi estudada no trabalho de Cardoso (2016).

Observe o desenvolvimento dos binômios $(a+b)^5$ e $(a+b)^3$, dados por

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\\ &= a^5 + 5ab(a^3+b^3) + 10a^2b^2(a+b) + b^5. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^3 &= 3ab(a+b) + (a^3+b^3)\\ a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Agora, substituindo (3.6) em (3.5) temos

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + 5ab[(a+b)^3 - 3ab(a+b)] + 10a^2b^2(a+b) + b^5\\ &= 5ab(a+b)^3 - 15a^2b^2(a+b) + 10a^2b^2(a+b) + (a^5+b^5)\\ &= 5ab(a+b)^3 - 5a^2b^2(a+b) + (a^5+b^5).\end{aligned}$$

Podemos reescrever essa última equação como

$$(a+b)^5 - 5ab(a+b)^3 + 5a^2b^2(a+b) - (a^5+b^5) = 0. \qquad (3.7)$$

Na equação (3.7) chamando $x = a+b$, $z = -(a^5+b^5)$ e $m = -5ab$, temos $(\frac{m}{5})^2 = a^2b^2$ e podemos reescrevê-la como

$$x^5 + mx^3 + \frac{m^2}{5}x + z = 0. \qquad (3.8)$$

Podemos agora encontrar uma fórmula para determinar uma de suas raízes. Vamos fazer um desenvolvimento parecido com o que foi feito para a equação de terceiro grau. Observe que o produto $a^5b^5 = -\left(\frac{m}{5}\right)^5$ e a soma $a^5+b^5 = -z$. Assim, a^5 e b^5 sao raízes da equação do segundo grau

$$t^2 + zt - \left(\frac{m}{5}\right)^5 = 0,$$

cujas raízes também podem ser calculadas pela Fórmula de Bhaskara

$$t = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 + 4(\frac{m}{5})^5}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{-z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{4(\frac{m}{5})^5}{4}} \\
t &= \frac{-z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}.
\end{aligned}
$$

Como $t_1 = a^5$ e $t_2 = b^5$ temos

$$
a = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}},
$$

$$
b = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}.
$$

Sabendo que $x = a + b$ temos

$$
x = \sqrt[5]{\frac{-z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{-z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^5}}
$$

é uma solução para a equação (3.8).

Exemplo: Dada a equação

$$
x^5 - 5x^3 + 5x - 2,
$$

temos $z = -2$ e $m = -5$ substituindo na fórmula encontramos

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[5]{\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{5}\right)^2}} + \sqrt[5]{\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{5}\right)^2}} \\
&= \sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{1} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Agora utilizando a divisão de polinômios temos que

$$
x^5 - 5x^3 + 5x - 2 = (x - 2)(x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1).
$$

A equação $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ pode ser resolvida utilizando-se o Método de Ferrari, onde as raízes encontradas são $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, ambas com multiplicidade dois. O leitor interessado pode calcular essas raízes utilizando o método citado.

Assim a equação do 5^o grau possui as raízes $x_0 = 2$, $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ e $x_3 = x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$.

Cardoso amplia essa técnica para equações de grau 7, 9 e generaliza para um modelo de grau ímpar. Neste caso finalizamos o nosso estudo com esse exemplo pois para os graus maiores não teríamos condições de encontrar todas as raízes.

Capítulo 4

O que trazem os livros didáticos de ensino médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) consideram que a matemática deve possuir um caráter formativo à fim de fornecer instrumentos e técnicas que permitam associá-las a diversas outras ciências e contextos. Além disso, a matemática também deve ser apresentada como ciência no seu modelo mais formal para que o aluno compreenda a importância das definições, demonstrações e encaminhamentos lógicos que constroem um novo conceito a partir daqueles já aprendidos.

Com relação às equações polinômiais os PCNEM citam que:

> "Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (Brasil, 2000. p. 43).

A fim de observar como os livros didáticos trabalham essas questões e se esse trabalho esta de acordo com o que é apresentado nos PCNEM neste capítulo vamos fazer um compilado das informações de quatro livros didáticos de terceiro ano de ensino médio mostrando o que os mesmos trazem sobre o tema: Polinômios, Equações Polinomiais e Resolução de Equações.

O Smole e Diniz, 2013, traz dois capítulos sobre o tema. São eles:

1) Polinômios, com as seguintes seções:

   Polinômio: onde define polinômios, o polinômio identicamente nulo e valor numérico.

   Função polinomial: onde define função polinomial e raiz ou zero de uma função polinomial.

   Operações com polinômios: onde define e exemplifica as operações adição, subtração, multiplicação e divisão e ainda, mostra a divisão por um binômio do tipo $x - a$ e o dispositivo de Briot-Ruffini.

   Decomposição em fatores e resolução de equações polinomiais: onde mostra como resolver uma equação dividindo-a em resolução de seus fatores.

2) Equações Polinomiais, com as seguintes seções:

   Introdução: com um exemplo de problema a ser resolvido por meio de uma equação polinomial.

   Equação Polinomial: com a definição de equação polinomial e raiz de uma equação.

   Teorema fundamental da Álgebra (TFA) e teorema da decomposição: onde cita o TFA e a fórmula de Cardano-Tartaglia e mostra uma ideia de como decompor um polinômio de acordo com suas raízes.

   Multiplicidade de uma raiz: onde define raiz múltipla com exemplos.

   Relações de Girard: onde mostra as relações de Girard para graus 2, 3 e 4.

   Raízes Imaginárias: onde cita o teorema das raízes conjugadas e suas consequências que são as raízes complexas sempre virem aos pares e toda equação de grau ímpar ter pelo menos uma raiz real.

   Pesquisa de raízes racionais: onde demonstra o teorema das raízes racionais.

Leonardo, 2013, possui um capítulo sobre o tema, intitulado "Polinômios e equações polinomiais". Abaixo mostramos as seções do capítulo em questão.

Os polinômios: onde define polinômio, grau, valor numérico, raiz e igualdade de polinômios.

Operações entre polinômios: mostrando as técnicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios. Ainda mostra a divisão pelos binômios na forma $x - a$ e pelo produto de binômios $(x - a)(x - b)$, teoremas do resto e d'Alembert e o dispositivo de Briot-Ruffini.

Equações polinomiais ou algébricas: onde define equações e raiz, cita o TFA, demonstra o teorema da decomposição e fala de multiplicidade de raízes, raízes conjugadas, raízes racionais e relações de Girard para graus 2,3, e 4.

Souza, 2013, possui um capítulo sobre o tema denominado "Os polinômios e as equações polinomiais", com as seguintes seções:

Polinômios: onde define polinômios e igualdade.

Operações com polinômios: trazendo as definições de adição, subtração, multiplicação e divisão, além da divisão pelo binômio $x - a$ e dispositivo de Briot-Ruffini.

Equações polinomiais: onde define equações.

Teorema fundamental da Álgebra: onde apresenta o TFA e o teorema da decomposição.

Relações de Girard:no qual apresenta as relações de Girard para graus 2,3 e n.

Multiplicidade de uma raiz: onde define multiplicidade de uma raiz.

Raízes Complexas: apresenta o teorema das raízes conjugadas e suas consequências.

Pesquisando raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros: no qual apresenta o teorema das raízes racionais e alguns exemplos.

Este livro ainda apresenta numa seção extra "Explorando o Tema: Equações cúbicas e quárticas" com parte da história de como foram obtidas as fórmulas gerais para esse tipo de equações.

O último livro da nossa análise é Dante, 2016, que possui dois cápitulos sobre o nosso tema, vamos descever as seções destes capítulos.

1) Polinômios, com as seções:

   Definição: onde define polinômios.

   Função polinomial: no qual define função polinomial e polinômio identicamente nulo.

   Valor numérico de um polinômio: onde define valor numérico.

   Igualdade de polinômios: onde define igualdade.

   Raiz de um polinômio: em que define raiz com exemplos.

   Operações com polinômios: no qual apresenta as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Ainda mostra a divisão por $x - a$, o dispositivo de Briot-Ruffini, o Teorema de d'Alembert e o teorema da raiz, que diz que se c é raiz do polinômio então $x - c$ é um dos fatores do polinômio.

2) Equações algébricas, com as seções:

Equações algébricas ou polinomiais: onde faz um apanhado histórico desde a Babilônia de 2000 a.C.

Definições e elementos: em que define raiz e conjunto solução de uma equação.

Teorema fundamental da Álgebra, cita o TFA.

Decomposição em fatores de 1º grau: onde mostra como decompor o polinômio em fatores de grau 1 e define multiplicidade de raiz.

Relações de Girard: na qual apresenta as relações para graus 2, 3 e n.

Equações algébricas de grau maior que 3: onde apresenta um histórico de como foram obtidas as fórmulas de grau 3 e 4 e fala da impossibilidade de resolver a equação de grau 5.

Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros: onde apresenta o teorema das raízes racionais.

Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais: onde cita o teorema das raízes conjugadas.

Podemos observar nessa análise que os livros didáticos de ensino médio trazem bastante informações sobre os polinômios e equações polinomiais. Na comparação com os PCNEM pode-se dizer que os conteúdos apresentados nos livros podem fazer essa instrumentalização da matemática a fim de associá-la a outras áreas. Alguns dos livros citados conseguem ir um pouco além na questão rigor matemático apresentando algumas demonstrações que sejam passíveis de compreensão para os alunos de ensino médio.

Apesar de fazer essa análise dos livros didáticos de forma bem rasa, não foram encontrados erros nas definições ou demonstrações, nota-se que na prática em sala de aula utiliza-se com mais frequência as atividades numéricas e com raízes e coeficientes racionais para facilitar o entendimento dos alunos.

Acredito que uma abordagem mais histórica das obtenções das resoluções seria muito relevante para a construção do conhecimento do estudante e compreensão do quanto o tema de resolução de equações é rico e importante.

Capítulo 5

Considerações finais

Ao longo desse trabalho tivemos a oportunidade de observar o quanto a busca por soluções de equações polinomiais fez com que a matemática evoluisse ao longo dos anos. A própria linguagem matemática sofreu diversas adaptações e, podemos dizer até, melhorias para que fosse mais prático resolver equações. Conforme citado no texto, algumas descobertas da área de resoluções de equações alteraram de forma definitiva os rumos da matemática.

Por exemplo toda a álgebra de números complexos teve início na descoberta da fórmula resolutiva para equações do terceiro grau, onde conhecendo uma raiz real os matemáticos chegavam a resultados que envolviam raízes quadradas de números negativos. Sabendo que a equação tinha raízes reais era impossível ignorar o resultado estranho obtido, durante mais de um século as maiores mentes matemáticas tentarem explicar esse fenômeno. Até conseguir formular as regras para se trabalhar com esse número completamente novo, criando assim o conjunto dos números complexos.

Encontramos equações polinomiais em diversas ocasiões e ciências, portanto é muito importante que saibamos resolvê-las. Hoje em dia, com a obtenção de métodos numéricos avançados e softwares cada vez mais precisos a resolução das equações é feita na prática buscando aproximações através de cálculos computacionais. Porém se faz muito importante para as novas gerações mostrar como é feita a resolução por radicais.

Um fato que chama a atenção nessa temática é que apesar de as últimas atualizações nas resoluções por radicais terem mais de 300 anos a maior parte dos alunos de ensino médio não conhece essas fórmulas ou mesmo a história tão rica por trás delas.

Esse trabalho mostrou um pouco mais do que o visto no Ensino Médio sobre as resoluções de equações polinomiais, desde a teoria de polinômios necessária para resolver equações, a história da obtenção das fórmulas para equações de grau 2,3 e 4 e da demonstração da impossibilidade de se resolver equações de grau maior ou igual a 5, além de alguns exemlos sobre o que chamamos de casos especiais, que são alguns modelos de equações de grau maior ou igual a 5 que conseguimos encontrar um método para resolução.

É importante citar que essas fórmulas não são muito simples, sendo que algumas vezes é mais difícil resolver uma equação pela fórmula do que utilizando outros métodos.

Podemos sugerir para quem queira trabalhar o tema produzir roteiros de atividades para ensino médio, onde o aluno consiga utilizar as fórmulas resolutivas para equações de grau 3 e 4 ou pelo menos partes das fórmulas, ou que consiga transmitir aos alunos ideias de como resolver alguns modelos de graus maiores, como foi feito aqui nesse trabalho.

Referências

[1] Baumgart, John K. *Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula - Álgebra*. Editora Atual. São Paulo, 1992.

[2] Biazzi, Ricardo N. *Polinômios Irredutíveis - Critérios e Aplicações*. Dissertação, UNESP. Rio Claro, 2014.

[3] BRASIL,Parâmetros Curriculares Nacionais.*Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC, 2000.

[4] Cardoso, Luiz C. de S. *Solução por radicais de certas equações de grau ímpar e Método de Newton*. Dissertação, UFMS. Três Lagoas, 2016.

[5] Carneiro, Renato. *Equações Algébricas: estudos e sala de aula*. Dissertação, UFOP. Ouro Preto, 2017.

[6] Carvalho, Kiscinger M. *A álgebra das equações polinomiais e sua solubilidade*. Dissertação, UNICAMP. Campinas, 2015.

[7] Cortes, George L. C. *Polinômios e equações polinômiais: propriedades e aplicações*. Dissertação, UFRN. Natal, 2020.

[8] Costa, Ueslei F. *Equações Algébricas Algébricas: do Papiro de Ahmes até Évariste Galois*. Dissertação, UFTM. Uberaba, 2020.

[9] Dante, Luiz R. *Matemática: contexto e aplicações: Ensino Médio 3*. 3^a Edição. Editora Ática. São Paulo, 2016.

[10] Garbi, Gilberto G. *O Romance das Equações Álgébricas*. 3^a edição revista e ampliada. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2009.

[11] Leonardo, Fabio M. *Conexões com a Matemática 3*. 2^a Edição. Editora Moderna. São Paulo, 2013.

[12] Nascimento, Carlos K. A. *Polinômios, equações algébricas e estudo de suas raízes reais*. Dissertação, UFC. Fortaleza, 2015.

[13] Ribeiro, Arlediane de N. L., Botelho, Dayla S. *Estudo do cálculo de raízes de equações polinomiais*. Trabalho de conclusão de curso, UFAP. Macapá, 2016.

[14] Schuvaab, Jair L. *Resoluções de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica*. Dissertação, UEM. Maringa, 2013.

[15] Smole, Katia S., Diniz, Maria I. *Matemática Ensino Médio 3*. 8^a Edição. Editora Saraiva. São Paulo 2013.

[16] Souza, Joamir R. *Novo Olhar Matemática: 3*. 2^a Edição. Editora FTD. São Paulo, 2013.

[17] Trotta, Fernando. *Matemática por Assunto: Volume 8 - números complexos, polinômios e equações algébricas*. Editora Scipione.São Paulo, 1988.