Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

TAMIRES VIEIRA CALADO

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

CASCAVEL
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

TAMIRES VIEIRA CALADO

CASCAVEL - PR
2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ – UNIOESTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO – PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

TAMIRES VIEIRA CALADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE - *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Dra. Veridiana Rezende

CASCAVEL – PR
2020

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Calado, Tamires Vieira
INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO : uma investigação com estudantes do 9° ano a partir de situações que envolvem função afim / Tamires Vieira Calado; orientador(a), Veridiana Rezende, 2020.
197 f.

Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2020.

1. Didática da Matemática . 2. Função Afim. 3. Ideias Base . 4. Generalização. I. Rezende, Veridiana . II. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TAMIRES VIEIRA CALADO

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.

Esta dissertação foi aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Nível de Mestrado e Doutorado, área de Concentração Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE.

Veridiana Rezende

____
Professora Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) Orientadora

Por videoconferência

____
Professor Dr. Luiz Marcio Santos Farias
Universidade Federal da Bahia - (UTBA)
Membro Convidado

Por videoconferência

____
Professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles
Universidade Federal de Pernambuco - (UFPE)
Membro Convidado

Por videoconferência

____
Professora Dra. Andréia Buttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – (UNIOESTE)
Membro da Instituição

Cascavel, 11 de setembro de 2020

Aos meus pais e a meu esposo pelo incentivo e apoio incondicional para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado vida e saúde para superar os obstáculos enfrentados durante a realização deste estudo.

Agradeço de forma especial:

Aos meus pais, Paulo Antonio Calado e Maria da Glória Vieira Calado, por me ensinarem a trilhar caminhos bons e sempre me incentivarem com muito amor e carinho, em mais esta conquista. Agradeço imensamente por terem acreditado em minha carreira acadêmica. Sem vocês esse sonho não se concretizaria.

Ao meu esposo, pela amizade, pelo amor e companheirismo, por embarcar comigo nesse sonho e sempre estar ao meu lado, ouvindo, incentivando e aconselhando.

À UNIOESTE, especialmente, ao PPGECEM e a todo o corpo docente, por me proporcionar as condições necessárias para a realização desta pesquisa.

À minha querida orientadora, Dra. Veridiana Rezende, por aceitar me orientar, pela sabedoria compartilhada e por dedicar o seu tempo com contribuições valiosas em suas orientações, apontamentos e correções.

Aos professores, Dr. Luiz Marcio Santos Farias e Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira, pelas valiosas contribuições no exame de qualificação, que enriqueceram o texto final desta pesquisa. Às professoras, Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles e Dra. Andréia Buttner Ciani, por aceitarem participar e contribuir com a banca final da dissertação.

Aos colegas do grupo GEPeDiMa, pelas contribuições e estudos compartilhados.

Aos colegas do curso de mestrado, especialmente Eliane e Lisiane que, direta ou indiretamente, me deram forças e incentivo nesta caminhada.

À Secretaria de Estado da Educação e ao Núcleo Regional de Educação de Campo Mourão, que autorizaram a aplicação da sequência didática, em sala de aula, e tornou possível a realização desta pesquisa.

À professora Sara, que gentilmente me cedeu uma de suas turmas para a aplicação desta pesquisa.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, estiveram comigo nesta jornada. Muito obrigada!

CALADO, T. V. **INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.** 2020. 193f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

RESUMO

As ideias base do conceito de função – *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização* - são consideradas essenciais para a compreensão deste conceito, e devem se fazer presentes a partir dos primeiros anos do Ensino Fundamental. No entanto, a formalização do conceito de função deve ocorrer no último ano desse nível de ensino. Algumas pesquisas vêm mostrando que é a ideia de *generalização* que ocasiona maior dificuldade para os alunos, impossibilitando a compreensão do conceito de função em sua essência. Dessa forma, com vistas a investigar os conhecimentos relacionados à generalização mobilizados por estudantes da educação básica, a presente pesquisa se propõe a buscar respostas para a seguinte questão: *quais teoremas em ação relacionados à generalização podem ser mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações envolvendo função afim?* Para tanto, elaboramos uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática, que foi aplicada em uma turma de 32 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no interior do Paraná. As atividades foram elaboradas com atenção à diversidade de situações e conceitos presentes no Campo Conceitual da função afim. A organização das atividades e a implementação da sequência didática pela pesquisadora tiveram como respaldo a Teoria das Situações Didáticas. Os dados desta pesquisa são oriundos dos protocolos dos alunos e das gravações de áudio produzidos durante o desenvolvimento das atividades e foram analisados à luz da teoria dos Campos Conceituais, com atenção aos conhecimentos implícitos possíveis de serem manifestados nas resoluções dos estudantes. Os resultados desta investigação apontam que a sequência didática organizada e implementada permitiu desvendar, a partir das estratégias de resolução dos alunos, doze teoremas em ação implícitos nas respostas dos participantes da pesquisa, sendo sete relativos a conhecimentos verdadeiros e cinco, a conhecimentos equivocados. Dentre esses conhecimentos errôneos identificados, três estão relacionados especificamente à generalização, os demais teoremas em ação falsos dizem respeito a casos particulares das situações, etapa necessária para se chegar ao processo de generalização. A partir da resolução das atividades também foi possível identificar aprendizagens e avanços nos conhecimentos dos alunos relacionados à generalização para os estudantes colaboradores desta pesquisa, especialmente no que se refere às expressões algébricas elaboradas pelos estudantes e aprimoradas no decorrer da sequência didática.

Palavras-chave: Didática da Matemática; Função afim; Ideias base; Generalização; Teorema em ação.

CALADO, T. V. **OPERATING INVARIATORS RELATED TO GENERALIZATION**: an **investigation with 9th grade students based on situations that involve a linear function.** 2020. 193f. Dissertation (Master in Science Education and Mathematical Education) – Graduate Program in Science Education and Mathematical Education State University of Western Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

ABSTRACT

The basic ideas of the concept of function - *variable, correspondence*, *dependence, regularity and generalization* - are considered essential for the understanding of this concept, and must be present from the first years of Elementary School. However, the formalization of the concept of function must occur in the last year of that level of education. Some researches have shown that it is the idea of *generalization* that causes bigger difficulty for students, making it impossible to understand the concept of function in its essence. In this way, in order to investigate the knowledge related to generalization mobilized by students of basic education, this research proposes to look for answers to the following question: *which theorems in action related to generalization can be mobilized by 9th grade students, from situations involving a linear function?* For that, we elaborated a didactic sequence, along the lines of Didactic Engineering, which was applied with a class of 32 students from the 9th grade of Elementary School in a public school in the countyside of Paraná. The activities were designed with attention to the diversity of situations and concepts present in the Conceptual Field of the related function. The organization of activities and the implementation of the didactic sequence by the researcher were supported by the Theory of Didactic Situations. The data produced in this research come from the protocols of the students and from the audio recordings produced during the development of the activities, and were analyzed in the light of the Conceptual Fields theory, with attention to the implicit knowledge possible to be manifested in the students' resolutions. The results of this investigation point out that the organized and implemented didactic sequence allowed to unravel, from the students' resolution strategies, twelve theorems in action implicit in the responses of the participants of this research, seven of which related to true knowledge and five to mistaken knowledge. Among these identified erroneous knowledge, three are related specifically to generalization, the other false theorems in action refer to particular cases of situations, a necessary step to reach the generalization process. From the resolution of the activities it was also possible to identify learning and advances in students' knowledge related to generalization for the students collaborating in this research, especially with regard to the algebraic expressions developed by the students and improved during the didactic sequence.

Keywords: Didactics of Mathematics; Linear function; Base ideas; Generalization; Theorem in action.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse pela Educação Matemática está presente em minhas[1] atividades acadêmicas desde a graduação em Licenciatura em Matemática, cursada entre os anos de 2011 e 2014. Enquanto estudante do Ensino Superior, dediquei-me por dois anos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), período em que vivenciei minhas primeiras experiências docentes em sala de aula de Matemática da Educação Básica. Em paralelo a esse projeto, dei início aos meus estudos envolvendo pesquisas na área da Educação Matemática, com o ingresso no Projeto de Iniciação Científica (PIC). Ao finalizar a graduação, dediquei-me à carreira docente na Educação Básica por dois anos, atuando nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Em 2016, cursei a Pós-Graduação *Lato Sensu* com estudos voltados à Metodologia do Ensino da Matemática e, entre os anos de 2017 e 2018, atuei como professora de disciplinas de Matemática no Ensino Superior.

Durante as experiências na carreira docente, deparei-me com a necessidade de me aprofundar em estudos que pudessem dar respaldo a compreender e melhor contribuir com o processo de aprendizagem dos estudantes nas aulas de Matemática. Nesse contexto, busquei processos seletivos de Pós-graduação *Stricto Sensu* e, em 2018, fui selecionada para o Curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), que me conduziu à participação no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa[2]. Os membros desse grupo de pesquisa têm o propósito de mapear o Campo Conceitual das Funções, iniciando pelas investigações sobre o Campo Conceitual da Função Afim, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990). Como membro do GEPEDiMa, busco contribuir para o estabelecimento do referido Campo Conceitual, motivo pelo qual a presente pesquisa é relacionada ao conceito de *função afim*.

[1] O início da introdução deste texto está escrito na primeira pessoa do singular, porque apresenta as impressões e experiências pessoais da autora desta dissertação. O texto aparece escrito na primeira pessoa do plural a partir do momento em que se trata da pesquisa desenvolvida pela autora da dissertação com as contribuições e parcerias da orientadora deste trabalho.
[2] Endereço do *site* do GEPeDiMa: http://prpgem.unespar.edu.br/gepedima.

No que se refere às funções, elas estão presentes no ensino da Matemática em diferentes anos do processo escolar. A aprendizagem de algumas ideias base para a construção desse conceito, como regularidade, descrição de padrões e propriedades de igualdade, inicia-se ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Tais ideias devem ser aprofundadas no decorrer da escolarização, de modo que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o aluno seja capaz de compreender diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer generalizações, regularidades e indicar valores desconhecidos em uma sentença algébrica. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação (BRASIL, 2017).

Desenvolvidas tais habilidades ao longo do processo escolar, a BNCC (BRASIL, 2017) sugere que, no 9º ano do Ensino Fundamental, o aluno estude o conceito de função, compreendo-a como uma relação de dependência unívoca entre duas variáveis e reconhecendo suas representações numérica, algébrica e gráfica. O conceito de função deve ainda ser retomado e aprofundado na 1ª série do Ensino Médio (BRASIL, 2017).

Com esse mesmo direcionamento, isto é, que ideias de função sejam contempladas no decorrer do processo escolar, algumas obras (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; NOGUEIRA, 2014) destacam a importância de, durante a escolarização, serem incluídas situações que envolvam ideias base, consideradas essenciais para a compreensão desse conceito, são elas: *correspondência, dependência, regularidade, variável* e *generalização.* Dentre essas ideias fundamentais para a constituição do conceito de função, algumas pesquisas (ARDENGHI, 2008; NOGUEIRA, 2014; PINTO, 2014; REZENDE, NOGUEIRA, CALADO, no prelo) vêm mostrando que é a *generalização* que ocasiona maior dificuldade para os alunos, impossibilitando a compreensão do conceito de função em sua essência.

Rezende, Nogueira e Calado (no prelo), ao aplicarem três tarefas sobre função afim para doze estudantes (seis do 9º ano do Ensino Fundamental e seis da 3ª série do Ensino Médio), relatam que nenhum dos alunos mobilizou corretamente a ideia de generalização. Considerando que a ideia base de generalização está associada ao pensamento algébrico, aos símbolos matemáticos e à linguagem algébrica, Tinoco (2011) afirma que “[...] é na passagem da linguagem corrente para a algébrica que reside a maior dificuldade dos alunos iniciantes em Álgebra" (p.51). A pesquisadora relaciona essa dificuldade ao fato de os alunos terem que se familiarizar com uma linguagem simbólica ao mesmo tempo em que constroem diversos outros conceitos matemáticos.

Portanto, "[...] o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil" (NOGUEIRA, 2014, p. 9). Para Tinoco (2011), é importante permitir que o aluno utilize e compreenda a simbologia matemática, manipulando os símbolos corretamente e tendo cuidado com as "justificações", atribuindo a eles significados e podendo aplicá-los quando necessário.

No longo processo de desenvolvimento do conceito de função, Pires (2016) destaca que somente a partir da generalização das leis quantitativas, em termos matemáticos, simbólicos e algébricos, a função adquiriu uma formalização, fato que revolucionou a Matemática e fez com que a função assumisse um lugar de destaque no meio das ciências exatas. No entanto, ainda segundo Pires (2016), apesar dos avanços que a representação algébrica de função proporcionou para o desenvolvimento de tal conceito, ela também contribuiu para um dos obstáculos epistemológicos intrínsecos a esse conceito: a ideia de que apenas relações que pudessem ser descritas por expressões analíticas poderiam ser chamadas de função. Mas esse obstáculo foi superado quando Riemann-Dirichlet separou o conceito de função da expressão analítica e definiu função como uma correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos.

Diante das considerações levantadas, foi realizada uma busca no Banco de Dissertações e Teses da Capes, rastreando por pesquisas que explorassem o ensino das funções. Foram encontradas 1778 pesquisas utilizando como busca a palavra *"função"* e 122 pesquisas utilizando como busca as palavras *"função afim",* as quais podem ser encontradas no título, palavras-chaves ou resumo dessas pesquisas. Além disso, para essa busca, foram utilizados filtros que selecionam pesquisas relacionadas a *Ciências Humanas*, para a Grande Área de Conhecimento, e *Educação,* para a Área de Conhecimento. No entanto, nossos estudos indicaram que nenhuma dessas pesquisas teve como foco investigar a ideia de generalização associada à função afim.

Assim, diante de uma série de fatores, tais como: as dificuldades dos alunos relacionadas à compreensão da ideia de generalização (REZENDE, NOGUEIRA, CALADO, no prelo; NOGUEIRA, 2014); a importância da linguagem algébrica para a construção do conceito de função (TINOCO, 2002; 2011); a função afim ser uma das primeiras funções estudadas formalmente pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (PARANÁ, 2019); não terem sido identificadas pesquisas sobre função afim que tratassem especificamente da ideia de generalização, juntamente com o propósito do GEPeDiMa (mapeamento do Campo Conceitual das funções, especialmente, da função afim), desenvolvemos a presente pesquisa com a intenção de analisar conhecimentos de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental relacionados à *generalização* tendo como base situações envolvendo função afim.

Para Vergnaud (1996; 2009), um conceito é compreendido pelo estudante a partir de uma diversidade de situações vivenciadas no decorrer do processo escolar e de outros conceitos, teoremas, propriedades, símbolos, representações, relações, invariantes operatórios, entre outros aspectos interligados, o que o pesquisador denomina como Campo Conceitual. Essa definição nos leva a considerar a ideia de generalização como um elemento do campo conceitual da função afim, uma vez que ela é uma das ideias essenciais (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002, 2011; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; NOGUEIRA, 2014) para a compreensão do conceito de função.

Vergnaud (2009; 1996) atribui importância aos conhecimentos implícitos manifestados nas ações dos sujeitos diante de uma situação. Esses conhecimentos são classificados pelo pesquisador em dois tipos: teoremas em ação e conceitos em ação. Segundo Vergnaud (1993), os teoremas em ação são categorias de conhecimentos na forma de proposição e podem ser verdadeiros ou falsos, do ponto de vista científico. Os conceitos em ação, por sua vez, são os conceitos manifestados pelos sujeitos por meio dos teoremas em ação.

Assim, levando em conta as intenções desta pesquisa, interessa-nos, principalmente, analisar teoremas em ação – categorias de conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos colaboradores da pesquisa, passíveis de serem verdadeiros ou falsos (VERGNAUD, 1996) – relacionados à generalização e manifestados por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem situações envolvendo função afim. Entendemos situação no sentido de Vergnaud (1993), ou seja, como sendo tarefas a serem realizadas pelos sujeitos.

Desse modo, estabelecemos a seguinte questão a ser investigada nesta pesquisa: *Quais teoremas em ação relacionados à generalização podem ser mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações envolvendo função afim?*

Para responder à questão de pesquisa, elaboramos uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), para ser desenvolvida em horário normal de sala de aula de Matemática por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Além da teoria dos Campos Conceituais, que respaldou a organização das situações e as análises nesta pesquisa, a organização das atividades e a implementação da sequência didática pela pesquisadora tiveram como respaldo a teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 2008).

Sendo assim, elaboramos e implementamos uma sequência didática contendo sete atividades que envolvem função afim, cujo foco foi a ideia de *generalização*. A sequência foi implementada com trinta e dois (32) estudantes de 9º ano de um colégio público do interior do Paraná. As atividades foram resolvidas pelos estudantes organizados em duplas. A análise dos dados baseou-se nas estratégias de resolução escrita dos alunos, bem como nos diálogos dos alunos, gravados em áudio, com vistas à identificação de teoremas em ação, verdadeiros ou falsos do ponto de vista científico, manifestados implicitamente pelos sujeitos colaboradores desta pesquisa.

Quanto à estrutura, este texto organiza-se em sete partes: esta *Introdução*, seguida de cinco capítulos e das considerações finais. O Capítulo 1, intitulado *Alguns aspectos históricos, epistemológicos e didáticos das funções envolvendo as ideias base*, consiste em um breve estudo do desenvolvimento histórico e epistemológico das funções, destacando as ideias base relacionadas a esse conceito, com atenção especial à ideia de generalização. Ainda nesse capítulo, são apresentados elementos do ensino das funções analisando orientações propostas em documentos curriculares e pesquisas relacionadas às funções, cujos resultados se fizeram pertinentes tanto para a elaboração da sequência didática quanto para a análise e os resultados finais desta pesquisa.

O Capítulo 2, intitulado *Aspectos teóricos e metodológicos*, apresenta aspectos da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gérard Vergnaud (1996), que fundamenta teoricamente esta pesquisa. Nesse capítulo, também são abordados aspectos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008) e da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) que orientam a elaboração, o desenvolvimento e a análise da sequência didática proposta nesta investigação.

No Capítulo 3, *Escolhas Metodológicas,* faz-se uma descrição dos sujeitos colaboradores e do contexto da pesquisa. São abordados o estudo piloto e o teste diagnóstico, realizados previamente ao início da investigação em sala de aula, seguidos de seus principais resultados.

O Capítulo 4, intitulado *A construção da sequência didática,* traz as atividades que compõem a sequência didática desta pesquisa, os critérios para a elaboração/seleção das atividades, seguidas de suas análises *a priori.*

O Capítulo 5, *Experimentação e Análises a posteriori*, descreve os momentos de experimentação das atividades, seguidos das análises *a posteriori* dessas atividades, com a identificação de teoremas em ação, possivelmente mobilizados pelos alunos em suas estratégias de resolução.

O texto encerra-se com as considerações finais da pesquisa, seguidas das referências bibliográficas, dos anexos e dos apêndices.

CAPÍTULO 1

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS, EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS DAS FUNÇÕES ENVOLVENDO AS IDEIAS BASE

Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre o desenvolvimento histórico e epistemológico das funções, no qual procuramos destacar as ideias base relacionadas a esse conceito, com atenção especial à ideia de generalização. Contemplamos também aspectos associados ao ensino das funções. Para Carvalho (2019), o estudo da gênese e do desenvolvimento de um conhecimento (objetivo da epistemologia) não pode estar separado do estudo da difusão e utilização desse conhecimento (objeto de estudo da didática).

Esses estudos preliminares, bem como a fundamentação teórica e metodológica (Capítulo 2), direcionaram a elaboração e implementação da sequência didática (Capítulo 4), que serviu como instrumento desta pesquisa.

1.1 Alguns aspectos históricos e epistemológicos das funções

Nesta seção, apresentamos um panorama histórico e epistemológico da evolução do conceito de função. Nesse processo, destacamos as ideias base relacionadas a esse conceito.

Caraça (1963) indica que o ser humano, ao desenvolver suas habilidades, visa, cada vez mais, à necessidade de observar e estudar os fenômenos da natureza a fim de descobrir suas causas e encadeamentos. Segundo esse mesmo autor, a partir dos resultados desses estudos construídos ao longo do tempo, foi se constituindo o que chamamos de Ciência. O conhecimento científico distingue-se, portanto, do conhecimento primário, uma vez que aquele se preocupa em questionar e explicar um conhecimento, e este se satisfaz com o resultado imediato do fenômeno sem se perguntar os porquês. Sendo assim, a Ciência se ocupa com a formação de explicações ordenadas para os fenômenos naturais do mundo físico, humano, individual e social.

No que diz respeito à ideia de função, a história da matemática resulta de uma evolução no questionamento dos fenômenos observáveis que vão da causalidade filosófica à causalidade científica (CARVALHO, 2019). Esse mesmo autor afirma que "[...] o fundamento da noção de função é o estudo das "leis de variação" de certos fenômenos e da busca por uma modelagem dessas leis" (CARVALHO, 2019, p.38).

Na Antiguidade, é possível verificar o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades. Por volta de 2000 a. C., os babilônios utilizavam tabelas de correspondência, revelando, de forma implícita, uma definição operacional de função, por exemplo: numa tabela, em uma coluna, aparecem valores para n e, em outra coluna, os valores calculados para $n^2 + n^3$, no intervalo de números inteiros de 1 a 30. Assim como a noção de dependência, a ideia de regularidade também é possível de ser identificada nos registros dos povos babilônios, por exemplo, por meio de tábuas de multiplicação, disponibilizadas em tabletas de argila (EVES, 2004). A relação de dependência se dá no caso de uma grandeza ser determinada a partir da determinação de outra grandeza, e a noção de regularidade permite que sejam feitas previsões de etapas que ainda não foram observadas.

Conforme Eves (2004), "[...] os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria" (p. 63). Para Pires (2016), "[...] nessas tábuas era possível encontrar a principal ideia envolvida no conceito de função: a relação funcional entre variáveis" (p.4). Carvalho (2019) observa que as funções tabuladas

> [...] atendiam as necessidades práticas de um período, e ainda que não fossem compreendidas como função de acordo com conceito formatado contemporaneamente, mantinham a essência do que podemos dizer que é a raiz epistemológica desse conceito, a ideia de relação de variabilidade entre quantidades (p. 30).

Nesse período, segundo Boyer (1996), não se utilizavam letras para representar quantidades desconhecidas, pois o alfabeto ainda não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área", "volume" serviam bem nesse papel, e "[...] que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um ‘comprimento’ com uma ‘área’, ou uma ‘área’ com um ‘volume’” (BOYER, 1996, p. 21).

Ainda na Grécia, no período entre 600 e 500 a.C., os pitagóricos descobriram as leis simples que regem a harmonia musical, ou seja, eles notaram que o som produzido por uma corda distendida depende do seu comprimento. Dessa forma, podemos considerar que a escola pitagórica já conhecia a interdependência de grandezas físicas. O uso sistemático de tabela de cordas de um círculo e as tabelas trigonométricas são, na visão de Ribeiro e Cury (2015), indícios de que os gregos trataram de problemas que tinham implícita a noção de função, mas a falta de simbolismo os impediu de desenvolver a ideia de funcionalidade.

De acordo com Pires (2016), em Alexandria, os astrônomos utilizaram teoremas da geometria para confeccionar tábuas de cordas que eram equivalentes às tábuas dos senos. Boyer (1996) ensina que a tábua de cordas mais antiga encontra-se no *Almagest* do astrônomo Claudius Ptolomeu. Nessas tábuas, a posição do Sol, da Lua e dos planetas mudava de maneira contínua e periódica, e as posições eram determinadas por meio de procedimentos que seguiam alguns padrões.

Além de conhecer um fenômeno, começou-se a desenvolver, por meio da Ciência, a possibilidade de prever fenômenos, quanto melhor a previsão maior o domínio que se tem sobre a Natureza. Conforme Caraça (1963), “[...] a Ciência não tem, nem pode ter, como objetivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de interpretação e previsão” (p.108).

Caraça (1963) deixa clara a necessidade de considerar dois aspectos fundamentais da Realidade para que o homem compreenda o Mundo: a *interdependência* e a *fluência*. A *interdependência* pode ser notada na relação que os fenômenos estabelecem uns com os outros, como um fenômeno pode interferir nos resultados de outros fenômenos. A *fluência* é considerada na permanente evolução a que todas as coisas se submetem a todo momento, transformando-se e fluindo, e essa fluência pode ser observada por qualquer um de nós.

Caraça (1963) explica que o fato de as coisas serem interdependentes e fluentes dificulta a análise de apenas um determinado aspecto. Nesse sentido, é necessário que o observador faça um recorte desse objeto no universo, abstraindo os fatos de todos os outros objetos que estão relacionados. A isso é dado o nome de *isolado*. No entanto, esse recorte precisa ser feito com certa cautela para que o *isolado* contenha todos os fatores, isto é, que a ação da interdependência e da influência no fenômeno esteja no objeto de estudo. No entanto, o *isolado* está sempre em mudança e evolução. A essa evolução dá-se o nome de Fenômeno Natural.

Cabe, então, ao cientista observar e descrever os fenômenos ordenando seus resultados, cujas previsões podem ser confirmadas por observação e experimentação. Em alguns desses fenômenos pode ser notada a regularidade, ou seja, comportamentos idênticos desde que as condições iniciais sejam as mesmas. A existência da regularidade permite que sejam feitas previsões, ação essencial para o homem estabelecer seu domínio sobre a Natureza. Para Ciani, Nogueira e Berns (2019), "[...] uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Realidade, é o de procurar, identificar, expressar, tratar e prever regularidades dos fenômenos naturais" (p. 42).

Caraça (1963) afirma que a regularidade de evolução de um fenômeno é chamada de *Lei Natural*, podendo ser do tipo *lei quantitativa* ou *lei qualitativa*. A história da Ciência deixa claro, à medida que se vai conhecendo melhor a Realidade, que a preferência para aplicá-la tende a ser do tipo *quantitativ*a, sem deixar de se preocupar com a *qualitativa*. Nesse sentido, para Ciani, Nogueira e Berns (2019), é natural esperar que surja a necessidade de criar instrumentos matemáticos adequados para o estudo de *leis quantitativas*. O conceito de função surge de buscar entender, explicar e, principalmente, prever fenômenos naturais, o que contribui para que as funções sejam um dos mais importantes conceitos da Matemática.

No entanto, o conceito de função não saiu pronto e acabado. Mais de 20 séculos se passaram entre os primeiros indícios da utilização de noções de função até Newton, em 1687. Para Ciani, Nogueira e Berns (2019), "[...] compreender o longo processo de criação do conceito de função pela humanidade é fundamental ao professor para entender que a formação do conceito de função pelos alunos também é um processo complexo e demorado" (p. 43). Nogueira (2014) atesta que o conceito de função surge com a busca incessante de cientistas e filósofos de explicar a realidade, mais especificamente, da necessidade de construir quadros explicativos para os fenômenos naturais, ou seja, fenômenos que relacionam “causa-efeito”, ou, em linguagem matemática, a dependência entre variáveis.

A partir do Renascimento (1300-1600), segundo Pires (2016), a Ciência tomou o rumo da observação e da experimentação. Oresme (1323-1382) utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo (longitudes) de um corpo que se move com aceleração constante, e marcou pontos representando instantes de tempo. Para cada instante, traçou, perpendicularmente à reta das longitudes, um segmento de reta (latitude), em que o comprimento denotava a velocidade. Nesse caso, os termos latitude e longitude são equivalentes às ordenadas e abscissas na linguagem matemática atual. Dessa maneira, uma função pode ser representada por meio de uma descrição verbal ou de um gráfico.

Galileu (1564-1642) observava os astros, fazia experimentos, anotava seus resultados em gráficos e tabelas e, em seus estudos mostrou que existe dependência entre duas variáveis. Em paralelo ao trabalho de Galileu, François Viéte (1540-1603) utilizou uma linguagem simbólica para representar variáveis. Logo a construção de gráficos passou a fazer parte das representações das variáveis em um sistema cartesiano de referência, em que um eixo representa as variáveis dependentes e o outro eixo representa as variáveis independentes (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019).

Segundo Youschkevitch (1981, *apud* PIRES, 2016), foi com os trabalhos publicados por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) que o método analítico de introduzir funções por meio de fórmulas e equações começou a ganhar destaque. Foram eles que aplicaram a álgebra à geometria. A ideia de generalização que, até então, era rudimentar começou a ser formalizada. A generalização das leis quantitativas, em termos matemáticos, simbólicos, algébricos, deu-se de maneira lenta na história. Somente, porém, a partir disso a função adquiriu uma formalização, o que revolucionou a Matemática e fez com que a função assumisse um lugar de destaque no meio das ciências exatas.

De acordo com Ciani, Nogueira e Berns (2019), em 1637, René Descartes apresenta, em um de seus textos, ideias mais próximas ao conceito atual de função ao estabelecer a interdependência entre os valores de um número *x* e qualquer potência de *x*. Além disso, “[...] a convenção do uso das primeiras letras do nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas letras para indicar variáveis começou com Descartes em *La géométrie”* (EVES, 2004, p. 388). Devem-se a ele também nossa atual notação para potências e a concepção de que uma letra pode representar qualquer quantidade, positiva ou negativa. Encontramos também em Eves (2004) informações de que os primeiros registros da palavra função teriam sido feitos por Leibniz, em agosto de 1673. Em 1694, em uma carta para Jean Bernoulli, Leibniz utiliza os termos *variável independente* e *functio*. Nesse caso, Leibniz utilizou a expressão *função* para designar quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto da curva e o comprimento de uma tangente à curva.

Ponte (1992) coloca que a representação de uma função por meio de expressão algébrica apareceu em correspondências trocadas por Leibniz e Jean Bernoulli entre 1694 e 1698, no estudo do comportamento de curvas por métodos algébricos. Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que teve ampla divulgação, o qual continha a definição de uma função de uma variável como uma quantidade que é composta de alguma forma a partir de variáveis e constantes. Entretanto, com o avanço da Ciência, essa definição se mostrou insuficiente, pois era necessário evidenciar a dependência entre duas variáveis. Nesse tempo, houve a união dos campos geométrico e analítico (CARAÇA, 1963).

Leonard Euler (1707-1783), mais tarde, em 1750, contribuiu para a definição de Bernoulli acrescentando o termo *expressão analítica*, em vez de *quantidade* e considerando que uma função não precisa necessariamente ser representada por uma expressão analítica, podendo, por exemplo, ser representada por uma curva. Boyer (1996) afirma que se deve a Euler a notação $f(x)$ para uma função em x. Fourier também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função. Ele estudou o fluxo de calor nos corpos materiais e, para tanto, considerava a temperatura como função de duas variáveis, o tempo e o espaço.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) separou o conceito de função de sua representação analítica lançando a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre as variáveis que representam conjuntos numéricos. Dessa forma, consoante Pires (2016), uma função “[...] passou a ser entendida também como uma relação entre dois conjuntos, de modo que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente” (p. 8).

No século XIX e início do século XX, o conceito de função passou por alguns refinamentos e apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Dentre as contribuições para a evolução do conceito de função no início do século XX, Pires (2016) destaca aquela dada pelo grupo Bourbaki, que consistia em um grupo de jovens franceses com o compromisso de (re) organizar toda a Matemática conhecida até o momento, 1935. Bourbaki publicou, em 1939, o primeiro livro da coleção *Théorie dês Ensembles*, que contém a seguinte definição de função:

> Sejam *E* e *F* dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de *E* e uma variável *y* de *F* chama-se relação funcional em *y*, ou relação funcional de *E* em *F*, se, qualquer que seja *x* de *E*, existe um elemento *y* de *F,* e somente um, que esteja na relação considerada com *x*. Dá-se o nome de função à operação que associa a todo elemento *x de E* o elemento *y de F* que encontra na relação dada como *x;* diz-se que *y* é o valor da função para o elemento *x*, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p.6, *apud* Pires, 2016).

A definição de Bourbaki, além de trazer a questão da unicidade de y, faz uma distinção entre relação funcional e função.

No entendimento de Pires (2016), apesar dos avanços que a representação algébrica de função proporcionou para o desenvolvimento de tal conceito, ela também contribuiu para um dos obstáculos epistemológicos intrínsecos a esse conceito: a ideia de que apenas relações que pudessem ser descritas por expressões analíticas poderiam ser chamadas de função. Esse obstáculo só foi superado quando Riemann-Dirichlet, no século XIX, separou o conceito de função da expressão analítica e definiu função como uma correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos.

Ciani, Nogueira e Berns (2019) destacam que, na definição de Riemann-Dirichlet, mencionada anteriormente, aparece a palavra *conjunto,* no entanto a noção ainda era de variáveis representativas de conjuntos numéricos, já que não existia a *Teoria dos Conjuntos,* indicada por Cantor. A partir dessa teoria, as funções foram definidas em termos de pares ordenados de elementos de conjuntos, permitindo que esses elementos não fossem necessariamente números. A definição de função “[...] adquiriu, então, uma forma eminentemente matemática e o conceito de função possui, hoje, uma amplitude tal que independe da natureza do campo em que é aplicado" (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 46).

Caraça (1963) apresenta uma definição de função usada até os dias de hoje: sejam *x* e *y* duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que *y* é função de *x* e escreve-se *y=f(x)* se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente e a y variável dependente. Contudo, as funções já não são apenas previsões, o grau de generalização das funções supera o real e exige que a abstração seja fundamental no entendimento desse conceito.

O breve resgate histórico apresentado até o momento mostra que as ideias de *variável, correspondência, dependência, regularidade* e *generalização* são essenciais para a compreensão do conceito de função, fato que é destacado em Caraça (1963); Tinoco (2002); Campiteli, Campiteli (2006); Castro (2012); Nogueira (2014) e que também pode ser percebido na própria definição do conceito de função. Nogueira (2014) e Rezende, Nogueira e Calado (no prelo) vêm denominando tais noções de *ideias base* do conceito de função, denominação assumida no âmbito do GEPeDiMa e também nesta pesquisa.

1.2 Alguns aspectos associados ao ensino das funções

Nesta seção, apresentamos alguns aspectos relacionados ao ensino das funções e destacamos, nesse processo, as ideias base relacionadas a esse conceito. Esta seção é dividida em duas partes, a primeira delas está relacionada a documentos curriculares e a outra, a resultados de pesquisas, com destaque para a ideia de generalização e funções.

Documentos curriculares e a ideia de generalização

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) afirma ser necessário que a Matemática esteja presente em toda a Educação Básica, tanto pela sua aplicação na sociedade contemporânea quanto pelas potencialidades na formação de cidadãos críticos. No Ensino Fundamental, é importante que os estudantes “[...] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2017, p. 221).

A BNCC (BRASIL, 2017) divide o componente Matemática em cinco unidades temáticas, sendo uma delas a unidade da Álgebra, que tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico considerado essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise quantitativa de grandezas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

> [...] Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2017, p. 226).

Para as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008), o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente, defende uma abordagem pedagógica que os articule e traga significados aos conteúdos abordados. “[...] na Educação Básica, é preciso estabelecer uma relação intrínseca entre pensamento e linguagem, ou seja, a linguagem algébrica entendida como expressão do pensamento matemático” (PARANÁ, 2008, p. 52).

A BNCC (BRASIL, 2017) apresenta as habilidades específicas que o aluno deve desenvolver em cada ano escolar segundo cada unidade temática, uma vez que a compreensão do papel de cada habilidade demanda a compreensão de que ela se conecte com habilidades dos anos anteriores, “[...] o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores” (BRASIL, 2017, p. 232).

Sendo assim, desde o 1º ano do Ensino Fundamental é recomendável, com o estudo da Álgebra, que o aluno tenha acesso a padrões figurais e numéricos, investigando a regularidade em sequências. Com isso, ele desenvolve a habilidade de reconhecer padrões em sequências e determinar os elementos ausentes. Em cada ano escolar, o reconhecimento desse padrão exige maiores habilidades do sujeito. No 5º ano do Ensino Fundamental, é recomendável que o aluno tenha acesso às propriedades de igualdade e noção de equivalência, para que, no 7º e no 8º ano desse nível de ensino, tenha acesso à linguagem algébrica utilizando variável e incógnita, envolvendo equações polinomiais e associando-as com sua representação gráfica (BRASIL, 2017).

Portanto, no 9º ano desse nível de ensino, o aluno deve “[...] compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébricas e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 269).

Assim, as ideias base do conceito de função estão presentes no desenvolvimento do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, enquanto a formalização do estudo de funções em suas diferentes representações deve acontecer no 9º ano desse nível de ensino, momento em que o aluno já desenvolveu as habilidades e competências que subsidiarão tal formalização.

A partir de nossos estudos da BNCC, notamos que, mesmo de modo implícito, a perspectiva apontada nesse documento para que as ideias de função sejam contempladas e aprofundadas com os estudantes no decorrer do processo escolar vai ao encontro dos pressupostos da teoria dos Campos Conceituais, uma vez que Vergnaud (1996) defende que a compreensão de um conceito ocorre ao longo da escolarização e em decorrência das diferentes situações vivenciadas pelos sujeitos.

Pesquisas que abordam aspectos do ensino das funções

Abordamos, nesta seção, algumas pesquisas relacionadas ao ensino das funções, com destaque para a ideia de generalização.

Para Ribeiro e Cury (2015), a Álgebra, quando trabalhada desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, “[...] pode ser o fio condutor do currículo escolar e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real” (p. 11).

Esses autores declaram, ainda, que experiências precoces com classificação e ordenação de sequências podem levar os alunos a compreenderem a regularidade dos padrões, além disso, “[...] o entendimento da noção de variável, ao longo dos anos da Educação Básica, é importante para a destreza em operações com símbolos, que, por sua vez, facilita o trabalho com modelos matemáticos de fenômenos, até chegar à noção de variação” (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 16), pois,

> [...] a formação de um conceito por um indivíduo não é um processo pontual e imediato. Na maior parte das vezes, partes do conceito vão sendo agregadas a outros elementos, tornando-se um amálgama que, posteriormente, pode vir a ter a clareza, a precisão e o detalhamento [...] (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 20).

Ponte (1984) entende que a compreensão da noção de variável e a capacidade de identificar relações entre as variáveis envolvidas em uma dada situação são a base fundamental para o raciocínio funcional. A ideia de variável, portanto, aparece como base para a formalização do conceito de função. Tinoco (2011) cita que a ideia de variável é uma das noções de maior obstáculo na compreensão do conceito de função pelos estudantes. Tal fato estaria ligado à própria noção de variável, pois uma letra é denominada uma variável quando representa um número qualquer, não especificado (NOGUEIRA,2014).

A variável está na base do processo de formação do pensamento algébrico, e esse símbolo não pode coincidir com nenhum dos elementos do conjunto ao qual se refere e, ao mesmo tempo, precisa representar todos os elementos (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2011). Suponhamos que A seja um conjunto qualquer de números. Podemos representar qualquer um de seus elementos por um símbolo, por exemplo, *x*. Nesse caso, *x* representa qualquer elemento do conjunto A e é denominado por variável. Para Queiroz (2008), um pré-requisito para desenvolver a compreensão de variável como número genérico é a habilidade de reconhecer padrões e encontrar, ou deduzir, regras gerais que os descrevem.

Além da ideia de variável, segundo Tinoco (2002), identificar a regularidade é uma habilidade essencial para a construção do conceito de função, uma vez que ela permite que sejam feitas previsões sobre etapas que não podem ser observadas. O reconhecimento de regularidades em situações reais, em sequências numéricas ou em padrões geométricos, é essencial à construção do conceito de função (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002; NOGUEIRA, 2014). Para Castro (2012), o aluno do Ensino Fundamental, a partir do contato com padrões, pode desenvolver a habilidade de previsão, ou seja, apontar determinados resultados de maneira intuitiva. No entanto, é importante explorar situações em que não haja regularidade para evitar que o aluno acredite que todos os fenômenos obedecem a uma lei geral.

Nogueira (2014) e Tinoco (2002) observam que a capacidade de generalizar é importante e, em geral, envolve a abstração. Nesse processo, é necessário apresentar argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os, pois "[...] o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito e função, embora não seja fácil" (NOGUEIRA, 2014, p. 9). Para Dreufus (1991, *apud* PROENÇA, 2019), a generalização é um processo mental, constituinte de parte do pensamento matemático avançado e que auxilia a construir estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas. A capacidade de generalização ocupa um papel de destaque na Álgebra e é vista como uma extensão do raciocínio, para além do caso ou dos casos considerados, identificando o que existe de comum.

Mateus (2013), por sua vez, afirma que "[...] a generalização é entendida como um processo dinâmico de identificação de semelhanças e de descoberta de extensões que os alunos percebem como gerais [...]" (p. 20). Nesse mesmo sentido, Merino, Cañadas e Molina (2013) defendem que generalizar é estender deliberadamente o alcance do raciocínio ou da comunicação além dos casos considerados, explicitando a similaridade entre os casos, aumentando o raciocínio ou a comunicação a um nível em que o foco sejam os padrões, uma vez que, a partir da regularidade observada, um padrão, que é válido para mais casos, é procurado.

De acordo com Radford (2006 *apud* PROENÇA 2019), generalizar um padrão algebricamente consiste na capacidade de apreender uma regularidade, percebida em alguns elementos de uma sequência, sabendo que essa regularidade se aplica a todos os termos da sequência e é possível usá-la para fornecer uma expressão direta de qualquer termo da sequência. Sendo assim, nos padrões, a generalização algébrica se baseia na identificação de características comuns que são locais e que são estendidas a todos os termos e servem de garantia para construir expressões de elementos que estão para além dos termos observáveis.

No entanto, essa identificação do comum não ocorre de repente e deve ser um processo que se constrói de maneira gradual. Mateus (2013) defende a generalização como uma capacidade construída coletivamente, resultante de um debate com a turma no qual os alunos têm um papel ativo, explorando padrões, identificando relações e formulando generalizações, que mais tarde devem ser expressas algebricamente. Lannin (2009) afirma que, para os alunos compreenderem generalizações algébricas, devem entender que a generalização é uma declaração matemática que modela uma situação para qualquer valor no domínio definido da variável.

Mateus (2013) apresenta, com base nas ideias de Ellis (2011), que a generalização é uma atividade na qual o indivíduo se envolve em pelo menos uma destas três ações: i) identificar o que é comum entre casos; ii) estender o raciocínio para além dos casos particulares; ou, ainda, iii) derivar resultados mais amplos a partir de casos particulares. Logo, para que a generalização seja construída corretamente pelo aluno, ele deve ter clareza dessas ações.

Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam algumas das estratégias que aparecem com mais frequência na produção de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, envolvendo o processo de generalização de sequências pictóricas crescentes:

1. *Estratégia de representação e contagem:* Nesse caso, o aluno apresenta todos os termos da sequência até o termo solicitado. Para os autores, essa estratégia não reflete de modo claro uma generalização de caráter global. Para exemplificar, eles apresentam a resolução de um aluno, que, a partir de uma sequência pictórica com quatro elementos, representou cada termo até chegar ao elemento desejado (oitavo elemento).

2. *Estratégia aditiva:* Nessa estratégia, o aluno compara termos consecutivos identificando as alterações que ocorrem de uns para os outros. Os autores dão como exemplo um caso em que o aluno, para representar o oitavo termo de uma sequência pictórica, apresenta a relação do temo desejado com o termo anterior. No entanto, essa estratégia, segundo os autores, por vezes, constitui um obstáculo à determinação entre cada termo e a sua ordem.

3. *Estratégia do objeto inteiro:* Nessa situação, o aluno se baseia em um termo de uma ordem e determina outro termo de uma ordem múltipla daquele de

onde partiu. Por exemplo, o aluno determina o termo de ordem 36 com base no termo de ordem 4 e 9, multiplicando-os. Entretanto, no caso de não haver proporcionalidade direta, essa estratégia pode conduzir a generalizações erradas.

4. *Estratégia de decomposição de termos*: Nessa estratégia, o aluno relaciona o termo com a sua ordem. Essa relação, conforme os autores, é representada pela expressão algébrica que indica o termo geral, caso em que é possível determinar facilmente termos de ordem distante.

Mateus (2013) também cita o fato de os alunos não sentirem necessidade de testar as suas conjecturas, recorrendo a casos particulares. Por isso, a autora sugere que “[...] devemos incentivar os alunos a justificarem raciocínios e a testar as regras que encontram” (MATEUS, 2013, p. 30). Merino, Cañadas e Molina (2013) também mencionam esse fato. Eles buscaram identificar as estratégias de generalização usadas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular na Espanha, prestando atenção especial ao uso de padrões. Constataram, também, que, no momento de apresentar a generalização para qualquer caso, foi recorrente os alunos responderem referindo-se a casos específicos. Para Lannin (2009), o foco dos alunos em encontrar uma fórmula para um caso específico, em vez de considerar uma relação geral, muitas vezes limita seu sucesso. Nesse sentido, esse autor sugere que tarefas que incentivem os alunos a examinarem o uso de suas estratégias os levariam a avançar em relação à generalização. Tal fato foi considerado na construção da sequência didática que serviu como instrumento para esta pesquisa. Assim, em duas atividades, propusemos que os alunos utilizassem as expressões algébricas desenvolvidas por eles e atribuíssem valores específicos para as variáveis envolvidas.

Embora todas as ideias base sejam essenciais para a compreensão do conceito de função, o foco maior da nossa investigação é a ideia de generalização, uma vez que, segundo Nogueira (2014), essa é a ideia base em que os alunos mais apresentam dificuldades de compreensão. Nessa mesma direção, Nogueira, Rezende e Calado (no prelo) relatam que, dentre doze alunos colaboradores da pesquisa (seis estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e seis estudantes da 3ª série do Ensino Médio), nenhum sujeito mobilizou corretamente a ideia de generalização em três tarefas propostas. Para as autoras, esse fato “[...] demonstra a necessidade de serem propostas mais atividades que possibilitem a constituição, desenvolvimento e consolidação das ideias base do conceito de função, particularmente à generalização" (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, no prelo).

Bernardino *et al* (2019) também obtiveram resultados semelhantes ao aplicar uma tarefa de função afim com alunos do 6º e 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, na qual foi constatado que, de cinquenta e cinco protocolos, apenas doze apresentaram respostas corretas. Os demais grupos de alunos não mobilizaram corretamente a ideia de generalização.

Tinoco (2011) afirma que a dificuldade que os alunos apresentam na linguagem algébrica pode vir do fato de eles terem que se familiarizar com uma linguagem simbólica ao mesmo tempo em que constroem diversos outros conceitos. Para a mesma autora, a manipulação simbólica tem sido uma das questões centrais no ensino da Álgebra, pois, muitas vezes, os alunos iniciantes no estudo da Álgebra têm dificuldades em admitir que números podem ser representados por símbolos. Além disso, para eles, é difícil lidar com situações em cuja resolução seja necessário interpretar informações apresentadas em diversas linguagens e estabelecer uma estratégia. "Até mesmo estudantes que executam a manipulação das técnicas algébricas com êxito, muitas vezes, não compreendem tais técnicas e pouco conseguem concluir a partir de e/ou comunicar por meio das expressões simbólicas" (TINOCO, 2011, p. 33).

Santos *et al* (2019) defendem que a leitura e a interpretação de situações problema e da solução encontrada na resolução para essas situações são ações que devem ser privilegiadas nas aulas, de modo que o professor conduza o estudante a analisar se há coerência no que ele está fazendo para solucionar as questões propostas e, ao encontrar a solução, é fundamental que o estudante consiga interpretá-la de acordo com o contexto, atribuindo sentido ao resultado que obteve.

Para Tinoco (2011),

> [...] o registro e a compreensão de leis gerais em linguagem corrente, aritmética, algébrica, geométrica e outras são passos decisivos para que os alunos deem significados às expressões algébricas, familiarizando-se com esse tipo de linguagem e desenvolvendo este tipo de pensamento (p. 51).

Para alguns autores (TINOCO, 2001; CASTRO, 2012), a ideia matemática de generalização pode ocorrer tanto em linguagem algébrica quanto em linguagem natural. No entanto, para esta pesquisa, optamos por assumir como foco a generalização na linguagem algébrica, principalmente pelo fato de que, em uma pesquisa inicial já realizada por nós – Rezende, Nogueira e Calado (no prelo) -, nenhum dos estudantes colaboradores da investigação mobilizou corretamente a generalização em linguagem algébrica. Assim como Castro (2012), partimos do pressuposto de que o desenvolvimento da generalização em linguagem natural pode auxiliar na construção da generalização na linguagem algébrica. Por esse motivo, a sequência de atividades proposta, embora tenha sido elaborada com o foco em explorar com os sujeitos da pesquisa a ideia de generalização algébrica, também explora, de modo concomitante, a generalização em linguagem corrente[3].

Os resultados da pesquisa apresentados nesta seção mostram a necessidade do desenvolvimento de outras investigações relacionadas à ideia de generalização e revelam, juntamente com as pesquisas identificadas no banco de Teses da CAPES sobre função afim, a diferença da presente investigação para as demais já realizadas, e identificadas por nós, acerca do conceito de função afim, com o foco na ideia de generalização. Ainda, os resultados apresentados auxiliaram tanto na organização da sequência didática quanto nas análises feitas nesta dissertação de Mestrado.

[3] Entendemos como linguagem corrente a linguagem natural dos sujeitos, ou seja, a língua portuguesa.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos elementos da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) que constitui o referencial teórico desta pesquisa. Abordamos, também, aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), com foco nas situações adidáticas, e a Engenharia Didática, que orientaram a elaboração, o desenvolvimento e a análise da sequência didática proposta nesta pesquisa.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais – TCC é uma teoria do desenvolvimento cognitivo que traz contribuições para a Didática, embora não seja uma teoria didática, pois "[...] sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por 'conhecimentos', tanto as habilidades quanto as informações expressas" (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Para Vergnaud (2009), a Teoria dos Campos Conceituais tem dois objetivos, o de descrever e analisar a complexidade progressiva das competências matemáticas que os alunos desenvolvem dentro e fora da escola e o de estabelecer melhores conexões entre a forma operacional e a forma predicativa do conhecimento. Todavia, um dos problemas do ensino é desenvolver ao mesmo tempo a forma operatória do conhecimento, isto é, o saber-fazer, e a forma predicativa do conhecimento, isto é, saber explicitar os objetos e suas propriedades.

Vergnaud (1993) afirma que, embora a Teoria dos Campos Conceituais tenha sido elaborada para explicar inicialmente o processo de conceitualização das estruturas aditivas, multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra, ela não é específica da Matemática, podendo ser utilizada em outras áreas do conhecimento. Vergnaud (1996) ainda declara que desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais para melhor compreender os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento, pois o desenvolvimento de um campo conceitual envolve situações, esquemas e ferramentas simbólicas de representação. Nesse cenário, é por meio das situações e dos problemas - teóricos ou práticos - a serem resolvidos que um conceito passa a ter alguma significação para o sujeito. Para Grings, Caballero e Moreira (2008), o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos acontece a partir do desenvolvimento de esquemas, mediante o enfrentamento de situações.

Vergnaud (1993) ensina que podemos distinguir duas classes de situações-problemas: a classe de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação e a classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que exige um tempo de reflexão e hesitações, podendo levá-lo ao sucesso ou ao fracasso na resolução de determinada situação.

Nesses dois tipos de classes de situações, o aluno mobiliza esquemas no desenvolvimento de suas estratégias. No primeiro caso, o aluno mobiliza comportamentos automatizados, organizados em um só esquema; no segundo, o aluno utiliza vários esquemas, que podem ser recombinados para atingir a solução desejada. Quando se trata de uma situação nova para o aluno, muitos esquemas podem ser sucessivamente, ou até mesmo simultaneamente, evocados.

Nesse cenário, Vergnaud (1993) define o esquema como sendo:

> [...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. São nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Considerar esses esquemas é importante para entender o desenvolvimento cognitivo dos alunos, uma vez que um esquema é a organização sequencial da atividade para uma determinada situação. Vergnaud (2009) exemplifica um esquema de uma criança que aprende a contar um pequeno número de objetos e, para isso, usa três diferentes repertórios: movimentos dos dedos, movimentos oculares e palavras. A eficácia do esquema, nessa situação, depende da correspondência um-para-um entre essas três atividades e o conjunto de objetos. Também depende da capacidade de concluir o episódio, associando o número de elementos ao último elemento do conjunto. Nesse caso, o conceito de cardinal está implícito na atividade da criança e implica um conceito em ação.

Na Teoria dos Campos Conceituais, consoante Vergnaud (2009), os esquemas servem tanto para descrever formas comuns de proceder em situações já dominadas, quanto para dar dicas sobre como lidar com situações novas. Para o autor, os esquemas são adaptáveis, eles assimilam novas situações acomodando-se a elas. Sendo assim, os esquemas contêm regras prontas e procedimentos que foram moldados por situações já dominadas. Os esquemas são essenciais por organizarem gestos e ação dos sujeitos no ambiente físico.

Na visão de Vergnaud (1996), os algoritmos matemáticos representam uma forma de organização da atividade e, por isso, é um tipo de esquema. Nesse sentido, podemos mencionar um esquema mobilizado pelos sujeitos colaboradores desta pesquisa ao desenvolverem o item a) da atividade 2:

$$2 - 0{,}18 \cdot 3 = x$$

$$2 - 0{,}54 - x$$

$$1{,}46 = x$$

Os registros escritos produzidos pelos alunos mostraram uma organização invariante, apoiada em hábitos adquiridos e em teoremas em ação do tipo: “em uma expressão numérica resolve-se primeiro a multiplicação para depois a subtração”.

Vergnaud (2009) considera que, frequentemente, cada sujeito dispõe de vários esquemas alternativos, entre os quais ele pode escolher em função dos valores das variáveis na situação com que ele se depara. Quando o aluno utiliza um esquema não eficaz para determinada situação, a experiência o leva a mudar ou modificar seu esquema, dado que há muito de implícito nesse processo. Além disso, desenvolvendo novos esquemas, os alunos tornam-se capazes de enfrentar situações cada vez mais complexas. Grings, Caballero e Moreira (2008) relatam que um esquema é um plano de ação, uma estratégia que abrange uma classe de situações, numa certa sequência, para dar conta de uma tarefa de certa complexidade.

Os conhecimentos contidos nos esquemas são chamados de “conceito-em-ação” e “teorema-em-ação”, também denominados como invariantes operatórios. Esses invariantes operatórios são, consoante Vergnaud (1993), modelos para descrever a conduta do sujeito, uma vez que "[...] um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação. Um teorema em ação uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" (VERGNAUD, 2009, p. 23).

Vergnaud (1993) apresenta um exemplo de teorema-em-ação e conceito-em-ação mobilizados na seguinte situação: "para indicar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já foram contados, não é preciso recontar o todo". Esse conhecimento pode ser expresso por um teorema-em-ação deste tipo: $Card\,(A \cup B) = Card(A) + Cord(B) desde\ que\ A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, podemos indicar que um conceito-em-ação mobilizado é o de cardinalidade.

Em Vergnaud (2007), podemos encontrar um conjunto de teoremas que permitem analisar situações que podem ser relacionadas às funções:

- isomorfismo das funções lineares: $f(kx) = k \cdot f(x)$.
- a expressão algébrica da função como o coeficiente de proporcionalidade: $f(x) = ax$.
- isomorfismo aditivo: $f(x + x + x + \cdots x') = f(x) + f(x) + \cdots + f(x')$.

Esses teoremas representam, para Vergnaud (2007), formas de resolução resultantes da representação de diferentes raciocínios dos sujeitos, que podem ser mobilizados de forma implícita ou até mesmo inconsciente pelos alunos, caracterizando-se como teoremas em ação, possíveis de serem manifestados nas resoluções dos sujeitos.

Os teoremas em ação podem produzir conhecimentos verdadeiros ou não, do ponto de vista do conhecimento escolar. Nesta pesquisa, atribuímos atenção especial aos teoremas em ação mobilizados pelos estudantes durante a resolução de atividades matemática sobre função afim. Com base na Teoria dos Campos Conceituais, defendemos a importância da análise, da modelação e da divulgação de teoremas em ação a fim de que a comunidade científica e professores que ensinam Matemática tomem ciência desses conhecimentos. Isso é necessário para que a comunidade científica possa dar continuidade às pesquisas relativas às ideias de função especialmente associadas aos erros manifestados pelos alunos sobre a ideia de generalização; assim como para que os professores possam preparar as suas aulas com atenção especial aos possíveis equívocos mobilizados pelos alunos, lançando atividades em sala de aula na tentativa de levar os alunos a compreenderem seus próprios erros.

A palavra *conceito* é tomada por Vergnaud (2009) em um sentido mais amplo que o usual, que, normalmente, restringe-se a objetos explícitos de pensamento. Ao tratar do ponto de vista cognitivo, o pesquisador deve analisar uma grande variedade de comportamentos e esquemas, uma vez que cada conceito comporta, de fato, diversas propriedades cuja pertinência varia de acordo com as situações a tratar. Dessa forma, "[...] a definição pragmática de um conceito decorre, portanto, ao conjunto de situações que constituem a referência de suas diversas propriedades, e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações" (VERGNAUD, 1993, p.8).

Do ponto de vista psicológico, Vergnaud (1993) define um conceito como sendo formado por três conjuntos, representado por C = (S, I, R), em que:

- S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
- I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais se encontram a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto e
- R é o conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Isso implica que, para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é preciso considerar esses três conjuntos simultaneamente (MOREIRA, 2017).

De acordo com Moreira (2017), três argumentos principais levaram Vergnaud ao conceito de Campo Conceitual: um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; uma situação não se analisa com um só conceito, e a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou de todos os aspectos de uma situação é um processo que se estende ao longo dos anos, considerando um Campo Conceitual como um conjunto de situações.

O conceito de situação, nessa perspectiva, não está sendo usado no sentido de situação didática, mas, sim, de tarefas. O autor ainda afirma que "[...] os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com que ele se confronta” (VERGNAUD, 1993 p.12), considerando que existe uma grande variedade de situações num campo conceitual e os conhecimentos dos alunos são elaborados a partir de situações que eles enfrentaram e dominaram gradativamente. Sendo assim, “[...] é importante propor situações de avaliação que permitam verificar o desenvolvimento das competências, tanto de fazer como do dizer” (VERGNAUD, 2003, p. 49).

Vergnaud menciona também que o professor tem

> [...] como responsabilidade escolher situações para oferecer ao aprendiz que esclareçam o objeto da atividade, contribuir com a organização da atividade, inclusive com a tomada de informação e de controle, de fazer aparecer, ao menos parcialmente, os teoremas em ação pertinentes, de facilitar as inferências em situação (VERGNAUD, 2009, p. 33).

Os professores usam palavras e sentenças para explicar, formular questões, selecionar informações, propor metas, expectativas, regras e plano. Contudo, Moreira (2017) destaca que a ação mediadora mais importante do professor é a de “[...] prover situações (de aprendizagem) frutíferas para os estudantes. Tais situações devem ser cuidadosamente escolhidas, ordenadas, diversificadas, apresentadas no momento certo e dentro da zona de desenvolvimento proximal do aluno” (MOREIRA, 2017, p. 97). Vergnaud (2009) alega que a estrutura do Campo Conceitual ajuda os professores a organizarem situações e intervenções didáticas.

Relativamente à diversidade de situações para a aprendizagem de um conceito, elaboramos (e/ou adaptamos de outros autores), para a presente pesquisa, sete (07) atividades matemáticas associadas ao conceito de função afim, cujo foco é a ideia base de generalização, a serem resolvidas pelos estudantes, sujeitos da pesquisa. Cada uma das atividades foi selecionada, cuidadosamente, com a intenção de que elas fossem diferenciadas uma das outras em decorrência dos elementos envolvidos (estrutura, símbolos, linguagem, representações, propriedades). Ainda buscamos organizar as atividades propostas numa sequência de menor para maior grau de complexidade.

Consideramos, portanto, que

> [...] no ensino é necessário desestabilizar cognitivamente o aluno, mas não demais. É preciso identificar sobre quais conhecimentos prévios a criança pode se apoiar para aprender, mas é forçoso também distinguir quais rupturas necessárias. Quer dizer, é preciso propor também, com cuidado,

> situações para as quais os alunos não têm onde se apoiar, ou não devem se apoiar, em conhecimentos prévios (MOREIRA, 2017, p. 94).

Nesse sentido, Vergnaud (2003) considera três atos importantes do professor. O primeiro é a escolha de situações, momento em que o professor pode se apoiar na produção de outros pesquisadores da área; o segundo é o auxílio oferecido ao aluno quando ele entra na situação, o que exige muita atenção para os sinais manifestados pelos alunos em termos de compreensão, ou não compreensão, e o terceiro ato é a avaliação, para que o professor tenha condições de controlar o desenvolvimento das competências que ele objetiva.

A complexidade de uma situação vem não só de fazer, mas também de colocar algo em palavras. “A enunciação desempenha um papel essencial no processo de conceitualização” (VERGNAUD, 2009, p. 9). Uma das dificuldades que os estudantes encontram, quando aprendem matemática, é que algumas sentenças matemáticas e expressões simbólicas são tão complexas quanto as situações e operações de pensamento necessárias para lidar com elas.

Em geral, os alunos não são capazes de explicitar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. A maioria desses conceitos e teoremas permanecem implícitos, mas podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e, nesse sentido, o ensino deve ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos a partir do conhecimento implícito (MOREIRA, 2017).

Tendo em vista que o objetivo principal desta pesquisa é investigar invariantes operatórios relacionados à generalização mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de atividades relacionadas à função afim, a Teoria dos Campos Conceituais contribuiu para o desenvolvimento desta investigação, pois auxiliou na elaboração/seleção das atividades propostas, ao indicar que, para a compreensão de um conceito, são necessárias diversas situações, com variações em suas estruturas, símbolos, representações, linguagens (matemática e linguagem natural), diferentes conceitos. A TCC também orientou as análises das estratégias (esquemas) desenvolvidas pelos sujeitos, com atenção especial aos conhecimentos implícitos, na forma de teoremas em ação mobilizados pelos participantes desta pesquisa.

2.2 Situações Didáticas e Situações Adidáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Guy Brousseau, considera o modo como o matemático produz matemática (a partir de um problema), a recontextualização que o professor deve realizar e o modo como o aluno aprende (BITTAR, 2017). Logo, o trabalho do matemático pesquisador, do professor de matemática e dos alunos é de natureza diferente.

Para Freitas (2007), o matemático pesquisador realiza inúmeras reflexões, escolhas inadequadas e mudanças de percurso que não são descritas na publicação de seus resultados gerais encontrados. A linguagem utilizada para divulgá-las é despersonalizada, descontextualizada e destemporalizada. Já o professor deve fazer um trabalho inverso ao do matemático pesquisador, ou seja, recontextualizar, repersonalizar e temporalizar. Desse modo,

> [...] o professor deve evitar a apresentação precoce de resultados gerais envolvendo conteúdos formalizados e, sempre que possível, deve promover a simulação de um ambiente científico de pesquisa que permita aos alunos vivenciarem momentos de investigação em sala de aula, para que possam "refazer" alguns passos dados pelo cientista (FREITAS, 2007, p. 82).

É preciso considerar que a palavra situação tem significado diferente tanto para Vergnaud, na Teoria dos Campos Conceituais, quanto para Brousseau, na Teoria das Situações Didáticas. Segundo Queiroz (2014), a situação, no sentido de Vergnaud, pode fazer parte da situação estabelecida por Brousseau, uma vez que, na teoria das situações didáticas, "[...] a situação envolve todo o trinômio aluno-professor-saber" (p. 37). O pesquisador complementa:

> A maior diferença é o foco das duas teorias: na TCC o foco é a importância da variedade de situações por meio das quais o conceito adquire significado. Na TSD ao se analisar uma situação está-se analisando um conjunto de elementos que envolvem professor e aluno, ou seja, uma situação didática é entendida como todo o contexto que cerca o aluno, incluindo o professor (QUEIROZ, 2014, p. 37).

Um dos pontos fundamentais que dão suporte à Teoria das Situações Didáticas é a noção de *milieu,* que foi introduzida por Brousseau para "analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações"

(ALMOULOUD, 2014, p.42). A TSD busca criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio), no qual a aprendizagem deve acontecer.

O objetivo da teoria é caracterizar um processo de aprendizagem por meio de situações reprodutíveis conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa (ALMOULOUD, 2014).

Para Almouloud (2014), o objeto central da *teoria das situações* são as situações didáticas nas quais são identificadas as interações entre professor, aluno e saber, apoiando-se em três hipóteses: 1) O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, contradições e desequilíbrio. Nesse sentido, o saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem; 2) O *milieu* sem intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos pelo aprendiz. Para que haja a intenção didática, o professor deve criar um *milieu* no qual serão desenvolvidas as situações capazes de provocar essas aprendizagens; 3) O *milieu* e as situações nele envolvidas, devem engajar fortemente os saberes relacionados no processo de ensino e aprendizagem.

Almouloud (2014) destaca que, ao definir a teoria das situações, Brousseau apresenta as situações *didáticas* e as situações *adidáticas*. Uma situação didática é o conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre aluno, *milieu* e o sistema educativo (professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído. Nesse sentido, a forma de propor os problemas ao aluno é chamada de *devolução* e deve ter a intenção de provocar uma interação que permita ao aluno o desenvolvimento autônomo.

Já a situação adidática, segundo Bittar (2017), considerada como parte das situações didáticas, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi imaginada e construída pelo professor a fim de proporcionar condições favoráveis para a apropriação do saber que se deseja ensinar. Nesse sentido, uma situação adidática tem as seguintes características: a atividade matemática é escolhida de modo a fazer o aluno refletir, pensar, agir por iniciativa própria; essa atividade é escolhida para que o aluno adquira novos conhecimentos por necessidades próprias, e não por necessidade aparente do professor, e, ainda, em uma situação adidática, o professor assume o papel de mediador. Bittar (2017) afirma que, nesse sentido, o professor não deve fornecer respostas ou pistas sobre o que pode ser usado para resolver a situação, porém o professor não se ausenta do processo. Ele deve incentivar os alunos, questionando-os com perguntas. Assim, "cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividades(s) proposta(s)" (ALMOUDOUD, 2014, p. 33).

Nesta pesquisa, a aplicação das atividades propostas se caracterizou como situações adidáticas, permitindo ao aluno refletir na busca de diferentes estratégias para as atividades propostas, a partir de seus conhecimentos prévios. Além disso, a pesquisadora atuou como mediadora no processo, incentivando o diálogo entre os estudantes e questionando-os acerca das estratégias desenvolvidas, a fim de que refletissem em suas resoluções.

Na teoria piagetiana, o aluno aprende adaptando-se ao *milieu.* No entanto, "[...] um meio sem intenções didáticas é manifestamente insuficiente para induzir no aluno todos os conhecimentos culturais que se deseja que ele adquira" (BROUSSEAU, 1996, p. 49). Almouloud (2014) menciona a importância de a relação didática desaparecer para que o sujeito seja capaz de utilizar os conhecimentos construídos fora do contexto didático. A esse respeito, Brousseau (1996) menciona que:

> [...] a concepção moderna de ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o aluno possa aceitá-los, devem levá-los a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe que perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem que saber igualmente que esse problema é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

À situação específica do saber, na qual desaparece a intenção de ensinar, Brousseau (1996) denomina situação adidática. Essa situação é parte de uma situação mais ampla: "[...] o professor procura transmitir ao aluno uma situação adidática que provoque nele a interação mais independente e mais fecunda possível" (BROUSSEAU, 1996, p. 50). Nesse momento, o professor pode se comunicar (ou não) com os alunos, pode haver trocas de informações, de questões etc. Esse jogo mais vasto de interações entre professor e aluno com os problemas propostos é denominado de *situação didática* (BROUSSEAU, 1996).

Segundo Almouloud (2014), as situações adidáticas são modeladas de forma a provocar uma aprendizagem. Nelas, o aluno dispõe de uma estratégia básica para iniciar suas resoluções, que deve permitir ao sujeito compreender o problema. No entanto, o *milieu* lhe permite perceber que a estratégia não será suficiente e, assim, outra estratégia deve ser criada utilizando-se do conhecimento visado.

> Desta forma, a atividade proposta deve ser tal que o aluno tenha uma estratégia inicial, um procedimento “inicial” ancorado nos saberes e conhecimentos anteriores, porém tal procedimento não permite resolver o problema, caso contrário não seria uma situação de aprendizagem (BITTAR, 2017, p.110).

A teoria das situações decompõe esse processo de aprendizagem em quatro fases, chamadas de situação: de *ação*, de *formulação*, de *validação* e de *institucionalização*. Essas fases estão interligadas e, em cada uma delas, o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber.

A dialética da ação inicia-se, para Bittar (2017), quando o aluno aceita o problema proposto e passa a buscar uma solução, o que consiste em colocar o aprendiz em uma situação de ação. Nessa situação, de acordo com Almouloud (2014), o professor propõe ao aluno um problema cuja melhor solução é o conhecimento a ensinar e o aluno possa agir sobre essa situação. Uma boa situação de ação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, no entanto sem a intervenção do professor, somente pela interação com o *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou até mesmo refazer seu modelo, podendo essa interação acontecer mesmo que os alunos estejam dispostos em grupos.

A dialética da formulação de uma situação adidática é o momento de troca de informações entre os sujeitos, sejam elas escritas ou orais, em linguagem natural ou matemática. É o momento em que o aluno, ou o grupo de alunos, explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que foram utilizadas e a solução encontrada para o problema proposto. Nessa fase, são propostas ao aluno condições para que ele construa, progressivamente, uma linguagem que considere os objetivos e as relações matemáticas envolvidas (ALMOULOUD, 2014).

A dialética da validação é o momento em que o aluno deve mostrar a validade do modelo que ele criou, submetendo-o ao julgamento de um interlocutor. Para isso, deve justificar a precisão e a pertinência de seu modelo. O interlocutor, por sua vez, pode pedir mais explicações, ou até mesmo rejeitar a resolução, desde que justifique sua rejeição. Assim, “[...] o objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação [...]” (ALMOULOUD, 2014, p. 40).

Em sua primeira formulação, a teoria só apresenta essas três primeiras fases. No entanto, com sua evolução e utilização, foi enriquecida com a noção de institucionalização, definida como aquela em que o professor fixa, convencional e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber. Depois de constituído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe (ALMOULOUD, 2014).

Almouloud (2014) destaca, ainda, o cuidado que se deve ter com o momento de realizar a institucionalização, uma vez que, se feita muito cedo, interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada, e, quando feita após o momento adequado, atrasa a aprendizagem e dificulta aplicações. Assim, a institucionalização é negociada numa dialética e, então, “[...] o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos” (ALMOULOUD, 2014, p. 40).

Sendo assim, a Teoria das Situações Didáticas surge como base nesta pesquisa para orientar as ações didáticas da pesquisadora em sala de aula, durante a aplicação das atividades propostas aos sujeitos colaboradores.

2.3 A Engenharia Didática

Como campo de conhecimento, a Didática da Matemática teve início na década de 1970. As pesquisas, nessa época, analisavam a realização de sequências didáticas na sala de aula, mas não havia uma metodologia que auxiliasse o preparo e a análise dessas sequências. As metodologias, até então desenvolvidas pelos pesquisadores do campo da educação, não atendiam às especificidades dos trabalhos que estavam sendo desenvolvidos, pois era necessário considerar o conteúdo matemático e, ao mesmo tempo, questões didáticas (BITTAR, 2017).

De acordo com Bittar (2017), apesar de não haver uma metodologia de pesquisa que considerasse tal especificidade, os experimentos em sala de aula de Matemática seguiam alguns padrões quanto à realização e à análise de dados. Além disso, esses experimentos tinham o desejo comum de levar o aluno a construir seu conhecimento. Os trabalhos desenvolvidos nessa época deram origem ao que hoje é denominado Didática da Matemática (corrente francesa), que teve estudos realizados por Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Raymond Duval, Michele Artigue, Régine Douady, Aline Robert, entre outros (BITTAR, 2017).

Nesse cenário, no início dos anos 1980, a Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática com a intenção de

> [...] etiquetar uma forma de trabalho didático: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar (ARTIGUE, 1996, p. 193).

Caracterizada como uma metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática surge, segundo Machado (1999), com o objetivo de analisar as situações didáticas associadas às pesquisas em Didática da Matemática que incluem uma parte experimental. Nesse mesmo sentido, Artigue (1996) concebe a Engenharia Didática como “[...] um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino” (p. 196).

Para Bittar (2017), o ponto de partida da Engenharia Didática é a escolha de um tema no qual se identificam dificuldades na aprendizagem por parte dos alunos. Nessa metodologia, a investigação da aprendizagem é focada no sistema didático (aluno, professor, saber e ambiente) e preocupa-se em desenvolver condições que favorecem a aprendizagem. Para Artigue (1996), a Engenharia Didática é constituída de quatro fases: *análise preliminar*; concepções e *análise a priori* das situações a serem propostas; *experimentação*; *análise a posteriori* e *validação*. Apesar de, inicialmente, essas fases possuírem uma ordem, elas não precisam ser seguidas de maneira linear, podendo haver alternância e até mesmo repetir uma mesma fase, pois, para Almouloud (2014), “[...] cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes” (p. 173).

Bittar (2017) apresenta a *análise preliminar* como sendo um estudo do objeto matemático em questão, o que auxilia o pesquisador na elaboração de hipóteses que fundamentam a sequência didática. Artigue (1996) ensina que, na maior parte dos casos, as análises preliminares envolvem

> [...] a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; a análise do ensino habitual e dos seus efeitos; a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução; a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva; e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação (ARTIGUE, 1996, p. 198).

No estudo da organização matemática do conceito investigado, é importante incluir a gênese história desse saber, o ensino usual e seus efeitos. Também é essencial realizar uma análise da organização didática do objeto matemático, envolvendo análise de documentos curriculares e busca por referências bibliográficas que abordam os fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do objeto em questão. É importante, ainda, que ocorra a definição das questões de pesquisa, discutindo e definindo os fundamentos teóricos e os procedimentos metodológicos que nortearão a fase experimental e as *análises a priori* e *a posteriori* da pesquisa (ALMOULOUD, 2014).

Para a presente pesquisa, em nossa *análise preliminar,* contemplamos estudos feitos em documentos curriculares a respeito do ensino das funções, mais especificamente, da função afim e da ideia de generalização. Realizamos um estudo de aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos das funções, bem como de pesquisas que investigam a aprendizagem da função afim envolvendo a ideia de generalização. Em tais pesquisas, levamos em consideração suas estratégias metodológicas e as principais dificuldades dos estudantes acerca do conhecimento em jogo. Nessa etapa, buscamos delinear a questão de pesquisa, os objetivos geral e específicos e a escolha dos fundamentos teóricos e metodológicos, a saber, a Teoria dos Campos Conceituais, Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática, que sustentam o desenvolvimento desta dissertação.

Em seguida à *análise preliminar*, inicia-se a elaboração da sequência didática acompanhada da *análise a priori*. As atividades e suas estratégias de resolução são discutidas preocupando-se com os conceitos/propriedades que podem ser usados nas estratégias de resolução dos alunos, com as dificuldades que eles podem manifestar e os conhecimentos prévios necessários para resolver a atividade. De acordo com Artigue (1996), o objetivo da análise *a priori* é “[...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar o comportamento dos alunos e o sentido dos comportamentos” (p. 205). Para essa pesquisadora, tradicionalmente, na análise *a priori*:

> [...] descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local [...], e as características da situação adidática que delas decorrem; analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor; preveem-se os campos de comportamento possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem (ARTIGUE, 1996, p. 205).

A análise *a priori* permite pensar na atividade em sua generalidade, fornecendo explicações racionais para o comportamento dos estudantes em termos de escolhas e estratégias. Neste sentido, nem sempre tudo pode ser antecipado, o principal é que, a partir da análise *a priori*, tudo o que será observado fará sentido em termos do comportamento cognitivo dos estudantes.

Em síntese, consoante Bittar (2017), uma análise *a priori* deve conter “a sequência didática, a descrição e justificativa das escolhas ligadas tanto a organização geral de cada sessão quanto às situações propostas e as possíveis estratégias de resolução das atividades propostas” (BITTAR, 2017, p. 104). Almouloud (2014) declara que se deve colocar em jogo o campo conceitual que se deseja efetivamente explorar e no qual o conhecimento está inserido. É importante também que os conhecimentos prévios dos alunos, em um dado momento, sejam insuficientes para a resolução completa do problema e, assim, o objeto de aprendizagem deve ser uma ferramenta mobilizada, em última instância, para se obter o resultado final. Nesse sentido, “[...] as atividades devem ser concebidas levando-se em consideração os resultados dos estudos prévios e permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades" (ALMOULOUD, 2014, p. 174).

Machado (1999) afirma que é importante analisar também qual é o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá, prever os comportamentos possíveis e assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão no desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. Nesse sentido,

> As situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos. O papel do professor é o de mediador e orientador; suas intervenções devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem (ALMOULOUD, 2014, p. 175).

Nesta pesquisa, o campo conceitual envolvido é o da função afim, que vem sendo investigado pelos membros do GEPeDiMa, por meio de diversas pesquisas que investigam conhecimentos de alunos de diferentes níveis e modalidades de ensino, diferentes situações sobre função afim e suas estruturas, diferentes instrumentos e procedimentos metodológicos para o ensino de função de diferentes modalidades de ensino, entre outras. No entanto, o foco principal desta investigação é a ideia de generalização que está ligada ao conceito de função afim. Assim como sugere Almouloud (2014), nossos estudos prévios respaldaram a elaboração e organização da sequência didática, a previsão de estratégias adotadas pelos alunos, que ocorreram principalmente pelos resultados de pesquisas, análises de livro didático e documentos curriculares que nos permitiram a organização das análises *a priori*. Os resultados do pré-teste aplicado 18 dias antes da implementação da sequência didática a 4 estudantes de turma com as mesmas características da turma investigada (mesma professora, mesmo turno, mesmo colégio) também serviu de respaldo para a (re)organização das análises *a priori* e preparação da pesquisadora para a implementação da sequência didática.

Para a organização da sequência didática, devem ser levadas em consideração variáveis didáticas[4] – elementos das situações que, ao serem alterados, implicam mudanças de estratégias de resolução (BITTAR, 2017). Como Bittar (2017) afirma, a alteração de uma variável didática pode implicar mobilização,

[4] As variáveis didáticas consideradas no instrumento desta pesquisa serão apresentadas no capítulo 4.

por parte dos alunos, de diferentes estratégias para a resolução das atividades e a mudança de valores de uma variável pode favorecer ou não uma estratégia de resolução. Com isso, é importante descrever estratégias de resolução, corretas ou não, dos problemas propostos, pois, desse modo, durante a realização das atividades, o professor/pesquisador está mais preparado para compreender o desenvolvimento do aluno e é capaz de intervir, quando necessário, favorecendo a aprendizagem.

Para Bittar (2017), depois de preparada a sequência didática, é o momento de aplicar as atividades em sala de aula, fase chamada de *experimentação*. Durante a aplicação da sequência didática, o professor deve observar os alunos e estar atento quanto ao envolvimento deles, podendo haver um retorno à *análise a priori*, num processo de complementação. Para Machado (1999), é importante explicitar os objetivos e as condições da realização da pesquisa e estabelecer o contrato didático[5] antes da aplicação da sequência didática.

A partir de daí, entram em ação a análise *a posteriori* e a *validação*. Segundo Artigue (1996), a análise *a posteriori* se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação:

> [...] observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Nessa etapa, ocorre a análise do comportamento cognitivo dos alunos diante das atividades propostas, análise que deve ser feita sempre em confronto com as previsões realizadas na análise *a priori* e com os objetivos a serem alcançados, uma vez que "[...] é da confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori* que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas do início da engenharia" (MACHADO, 1999, p. 208).

Para Machado (1999), "[...] essa validação da pesquisa é feita sobretudo internamente, pois ela se baseia na confrontação entre a análise a priori, que por sua vez se apoia no quadro teórico, e a análise a posteriori" (p. 199, 200). Esse confronto deve ser realizado em vários momentos da engenharia didática e permite

[5] Um conjunto de obrigações explícitas e implícitas relativas a um saber interposto entre o professor e os alunos.

ao professor definir rumos, quando necessário. “[...] se durante uma atividade ele percebe que o aluno está manifestando uma dificuldade já indicada em outras pesquisas, ele pode lançar mão de atividades que auxiliem o aluno e/ou o confrontem a uma falsa concepção que ele manifesta, se for o caso” (BITTAR, 2017, p. 107).

Entendemos, portanto, que é necessário conhecer as dificuldades e concepções que os alunos manifestam a respeito do conceito em questão, para, assim, apresentar situações e alternativas com o intuito de ajudá-lo a superar tais dificuldades. Além disso,

> [...] a análise *a posteriori* de uma sessão é um conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa [...] (ALMOULOUD, 2014, p. 177).

Bittar (2017) não considera a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa fechada, ao contrário, é preciso considerar o seu dinamismo que respalda o modo de preparar, propor e analisar uma sequência didática.

> Seu objetivo é promover a construção do conhecimento pelo aluno, com papel importante atribuído ao professor, e para que isso aconteça, ela é aberta. Essa metodologia propõe analisar o que ocorre ao longo do processo de ensino: conforme a situação vai se desenvolvendo, em sala de aula, o pesquisador redireciona, apresenta alternativas (BITTAR, 2017, p. 107).

O pesquisador em Educação Matemática deve, então, buscar uma metodologia que ajude não somente a elaborar as atividades, mas também, e principalmente, a analisar possibilidades das atividades e os resultados obtidos com a realização dessa sequência didática (BITTAR, 2017). É assim que a Engenharia Didática surge como uma escolha pertinente para esta pesquisa, uma vez que, para atingir o objetivo principal, elaboramos e aplicamos uma sequência didática com atividades que envolvem função afim, com a intenção de analisar teoremas em ação relacionados à generalização e mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mediante situações envolvendo esse tipo de função. Além disso, buscamos que esses estudantes aprimorassem seus conhecimentos em relação à generalização.

CAPÍTULO 3

ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Neste capítulo, discorremos a respeito das escolhas metodológicas feitas nesta pesquisa. Apresentamos o problema de pesquisa, os objetivos (geral e específicos), o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, o estudo piloto e o teste diagnóstico seguido de suas análises.

3.1 Problemática e objetivos da pesquisa

Considerando as justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa, já apresentadas na introdução deste texto, bem como os estudos preliminares descritos nos capítulos 1 e 2, propomos nesta investigação responder ao seguinte problema de pesquisa: *quais teoremas em ação, relacionados à generalização, podem ser mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações envolvendo função afim?*

Com vistas a responder ao problema de pesquisa, elencamos os seguintes objetivos, geral e específicos:

Objetivo geral: analisar invariantes operatórios, relacionados à generalização, mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mediante situações envolvendo função afim.

Objetivos específicos: 1) Investigar a mobilização das ideias base de função durante a resolução das situações propostas aos alunos e 2) Identificar as estratégias de resolução desenvolvidas pelos sujeitos em situações de função afim.

3.2 Sujeitos da pesquisa

Considerando os objetivos da pesquisa, os estudantes colaboradores desta investigação são trinta e dois (32) alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de um colégio da rede estadual do interior do Paraná. Outros quatro (04) sujeitos com características semelhantes participaram de um estudo piloto.

3.3 Contexto da pesquisa

Esta pesquisa foi autorizada pelo Comitê de Ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE/Campus Cascavel e também pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná/SEED, conforme a Resolução n.º 406/2018 - GS/SEED.

Antes da aplicação das atividades, os sujeitos colaboradores foram orientados pela pesquisadora quanto à importância do estudo para o meio acadêmico e quanto à importância da participação de toda a classe. Em seguida, os alunos receberam o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Apêndice I), para leitura e esclarecimento de possíveis questionamentos, e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido a ser entregue aos seus responsáveis para que eles autorizassem a participação na pesquisa e o uso da imagem e do som de voz.

O colégio, no qual foi realizada a pesquisa, situa-se na área central da cidade de Campo Mourão, localizada na região centro-oeste do estado do Paraná, contando com Ensino Fundamental, Médio e profissionalizante, incluindo três cursos técnicos. O horário de funcionamento abrange os três turnos: matutino, vespertino e noturno, reunindo mais de 2000 alunos matriculados.

Considerando o objetivo da pesquisa, optou-se por escolher uma turma do 9º ano do período matutino. Visto que, no momento da aplicação das atividades, a pesquisadora não atuava em turmas da Educação Básica, a orientadora desta pesquisa entrou em contato com uma professora da Educação Básica, parceira de grupos de estudos e Residência Pedagógica, que disponibilizou uma de suas turmas para a realização do trabalho. Depois de definida a turma, a pesquisadora e a professora regente realizaram dois encontros no próprio colégio, em período de hora atividade, nos quais foram debatidos a sequência das atividades propostas e os conteúdos que já haviam sido abordados com os sujeitos da pesquisa.

A professora regente da turma afirmou que já havia abordado todo o conteúdo de função presente no livro didático destinado ao 9º no Ensino Fundamental e adotado pela escola – Andrini e Vasconcellos (2015). Dentre essas abordagens, está a definição de função, domínio, imagem, lei de formação e gráficos para as funções do tipo constante, linear, do 1º grau e do 2º grau, incluindo a generalização, que, no livro didático mencionado, é chamada de *lei de formação* da função. No entanto, os problemas trabalhados com a turma, segundo a professora regente, apresentavam um caráter de exercício fechado, sem muitas contextualizações.

Sendo assim, consideramos que o fato de os sujeitos colaboradores já terem tido contato formalmente com o conteúdo de função, inclusive com a ideia de generalização (*lei de formação*), antes da aplicação das atividades, não descaracteriza os objetivos da pesquisa, pois, para Vergnaud (1993), um sujeito compreende um conceito a partir das diferentes situações vivenciadas por ele ao longo do processo escolar. No entanto, para termos ciência dos conhecimentos sobre generalização mobilizados pelos estudantes antes da aplicação da sequência didática, foi realizado um estudo piloto (com uma turma em condições semelhantes à turma investigada) e um teste diagnóstico com a própria turma.

A *sequência didática* elaborada para esta pesquisa é composta por sete (07) atividades que abordam contextos diferentes e são organizadas, sequencialmente, segundo seu grau de dificuldade, ou seja, cada atividade exige conhecimentos mais elaborados do aluno do que a atividade anterior, seja por envolver mais cálculos matemáticos, exigir mais de uma operação matemática na generalização, apresentar (ou não) parte dos seus dados em tabelas, seja pela necessidade da interpretação gráfica.

Depois de preparada a sequência didática, a pesquisadora apresentou esse instrumento ao GEPeDiMa - Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática, do qual participam a pesquisadora e a orientadora desta pesquisa. Em um primeiro momento, a pesquisadora apresentou os objetivos e as atividades selecionadas. Cada item de cada atividade foi discutido pelos membros do grupo, que opinaram sobre melhorias para que a sequência didática alcançasse o objetivo pretendido. Depois de realizadas as alterações sugeridas pelo grupo, a sequência didática foi novamente enviada para os membros do GEPeDiMa recebendo, ainda, outras contribuições, que serviram para a constituição do instrumento final para a coleta de dados da pesquisa. Antes de implementar a sequência de atividades com os sujeitos da pesquisa, foram realizadas duas etapas: i) um estudo piloto com alunos de outra turma; ii) um teste diagnóstico com a turma investigada, conforme descrições a seguir.

Estudo piloto

O estudo piloto consistiu na aplicação de uma atividade que abrange boa parte dos conteúdos matemáticos que, posteriormente, foram abordados na sequência didática, tais como o desenvolvimento da generalização na linguagem natural e na linguagem algébrica e a construção da representação gráfica, envolvendo as ideias base relacionadas ao conceito de função. O propósito do estudo piloto foi ponderar se a sequência didática serviria como instrumento para investigar os teoremas em ação mobilizados pelos alunos, ao mesmo tempo que poderia trazer novas aprendizagens aos sujeitos, possibilitando a elaboração de novos esquemas. A turma convidada para desenvolver o estudo piloto foi sugerida pela professora regente por estar em condições de estudos e infraestrutura física e pedagógica semelhante à turma investigada, pois também cursava o 9º ano do Ensino Fundamental, já havia estudado todo o conteúdo de função sugerido no livro didático adotado pela escola e possuía a mesma professora da turma investigada em que seria aplicada a sequência didática.

A realização do estudo piloto foi revelada à turma no momento da aplicação, dia 11 de julho de 2019, último dia de aula antes do recesso escolar e, provavelmente por conta disso, estavam presentes apenas quatro (04) alunos. A professora regente acompanhou toda a aplicação do estudo piloto, porém não interferiu na resolução dos alunos, que desenvolveram a atividade individualmente e no tempo de uma hora/aula. Para a análise desses dados, consideramos todos os registros escritos produzidos pelos alunos.

Com essa primeira aplicação do teste diagnóstico (estudo piloto), já percebemos as principais dificuldades dos alunos na mobilização das ideias base, pois um (01) aluno deixou a maioria dos itens sem resolução e dois (02) mobilizaram apenas as ideias base de correspondência e dependência. Além disso, somente um (01) aluno desenvolveu uma representação gráfica, mas de forma equivocada. O mesmo ocorreu com a ideia de generalização, pois apenas um (01) sujeito apresentou resolução para a generalização nas linguagens natural e algébrica, também de forma equivocada.

Portanto, a atividade não se mostrou trivial para esses sujeitos, o que nos levou a considerar que a sequência didática preparada para esta pesquisa poderia trazer novas aprendizagens para os alunos em condições de ensino semelhantes aos do estudo piloto, por isso não foram feitas alterações na sequência didática.

Aplicação do teste diagnóstico

Considerando que a turma já havia estudado função afim, aplicamos o teste diagnóstico também na turma investigada, com a intenção de identificar os conhecimentos, referentes às ideias base do conceito de função, mobilizados previamente pelos sujeitos da pesquisa, antes de iniciar a aplicação da sequência didática. Dependendo do resultado dessa aplicação, ainda seria possível realizar adaptações na sequência, antes do início da investigação.

A aplicação do teste diagnóstico ocorreu no dia 26 de julho de 2019, em horário convencional das aulas de matemática, e vinte e nove (29) alunos estiveram presentes e desenvolveram a atividade individualmente durante uma hora/aula. Ao final da aula, a pesquisadora recolheu as resoluções produzidas pelos alunos para posterior análise. Durante a aplicação do teste diagnóstico e da sequência didática, os alunos utilizaram calculadora própria para auxiliar no cálculo com números decimais. Acreditamos, assim como Santos *et al* (2019), que ao utilizarem a calculadora, os estudantes precisam saber manuseá-la, reconhecer suas funções, mas para isso é fundamental que eles saibam a parte conceitual do sistema de numeração decimal para conseguirem usá-la e para compreenderem os resultados mostrados no seu visor.

Apresentamos a seguir, de modo breve, os principais resultados obtidos com o teste diagnóstico.

A atividade

Buscando atingir diferentes perfis de consumidores, a empresa de telefonia Ligue Mais oferece cinco opções de planos para telefone móvel. Os diferentes planos ofertados pela empresa são apresentados a seguir.

Plano	**Franquia (minutos)**	**Preço mensal da assinatura**	**Preço por minuto excedente**
A	100	R$ 25,90	R$ 0,25
B	150	R$ 35,90	R$ 0,20
C	250	R$ 49,90	R$ 0,20
D	300	R$ 55,90	R$ 0,10
E	ilimitado	R$ 69,90	-

Em cada plano, o consumidor paga um valor fixo (preço mensal da assinatura) pela franquia contratada e um valor variável, que depende da quantidade de minutos utilizados além da franquia. Com base nas informações apresentadas, responda às questões a seguir.

a) Camila contratou o plano A e Daiane o plano B, no entanto as duas utilizam em média 120 minutos de ligação por mês. Quanto cada uma delas paga por mês de conta telefônica? Qual é o plano mais vantajoso neste caso? Justifique a sua resposta.
b) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores a serem pagos pelos clientes que contratam o plano C e para os que contratam o plano D. Determine para quantos minutos em ligações cada um desses planos é o mais vantajoso.
c) No mês de março, dona Ana utilizou 270 minutos em ligações, sendo que ao final do mês pagou $R\$\ 59{,}90$ de conta de telefônica. Em que plano dona Ana está cadastrada? Este é o plano mais vantajoso para ela? Justifique sua resposta.
d) Considerando que Kaio contratou o plano D e que todo mês ele excede uma quantidade qualquer de minutos, além da permitida para o seu plano, descreva com as suas palavras os passos para determinar o valor a ser pago por Kaio.
e) Escreva uma expressão algébrica que representa o valor a ser pago por Kaio.

Principais resultados o teste diagnóstico

A partir das resoluções e estratégias desenvolvidas pelos alunos, elaboramos quadros contendo as diferentes estratégias utilizadas pelos sujeitos da pesquisa em cada item da atividade, a quantidade de alunos que desenvolveu a estratégia descrita, bem como as ideias base do conceito de função mobilizadas pelos sujeitos em cada estratégia. Entendemos que, dentre outras informações, tais como a manifestação das ideias base pelos alunos e os conhecimentos acerca de interpretação de tabelas e construção de gráficos, essa organização dos dados auxilia a observação dos conhecimentos relativos à ideia de generalização mobilizados pelos sujeitos antes da aplicação da sequência didática.

Depois de distribuída a atividade, os sujeitos permaneceram por alguns minutos tentando resolvê-la, porém não conseguiram desenvolver estratégias de resoluções, apresentando dificuldades em compreender o contexto da atividade e os dados contidos na tabela, assim como os sujeitos do estudo piloto. Nesse momento, surgiram alguns questionamentos por parte dos sujeitos, tais como: "O que é minuto excedente?"; "A pessoa pode falar mais ou falar menos que os minutos permitidos na franquia?;, "O que significa o plano ser mais vantajoso?"; "O que é plano cartesiano?"; "O que é expressão algébrica?". Sendo assim, foi necessário realizar, junto com a turma, a leitura do enunciado, dos dados contidos na atividade e uma discussão das condições de cada plano de telefonia. Em seguida, os sujeitos desenvolveram suas estratégias de resolução.

No item a) da atividade, treze (13), dos vinte e nove (29) alunos participantes da pesquisa, desenvolveram estratégias corretas, calculando o valor a ser pago no plano A e no plano B para 120 minutos, concluindo que o plano mais vantajoso era o plano em que o valor a ser pago é menor (plano A). No entanto, sete (07) alunos, apesar de desenvolverem os cálculos corretamente, interpretaram de maneira equivocada o contexto da atividade e concluíram que o plano mais vantajoso era o plano em que sobra mais minutos (plano B).

Consideramos essa afirmação equivocada, pois, no contexto da atividade, afirma-se que, para aquela situação, são necessários apenas 120 minutos. Para essas duas estratégias de resolução apresentadas, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

As demais estratégias de resolução desenvolvidas foram consideradas incorretas. Nesses casos, quatro (04) alunos afirmaram que o plano mais vantajoso é o plano B, pois não é necessário pagar minutos excedentes. Além dessa estratégia incorreta, três (03) alunos, ao calcularem o valor a ser pago no plano B, subtraíram os minutos que não foram utilizados no plano, uma vez que o plano B permite que sejam utilizados 150 minutos e foram usados apenas 120 minutos.

O Quadro 1 descreve as estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos no item a) da atividade.

Quadro 1: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item a) do teste diagnóstico

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (13)**	**Ideias base**
Para calcular o valor pago com o plano A, multiplica 0,25 (valor do minuto excedente) por 20 (quantidade de minutos excedentes) e soma 25,90 (preço mensal) ao resultado, obtendo 30,90. Observa por meio das informações contidas na tabela que o valor pago com o plano B é 35,90. E, assim, conclui que o plano mais vantajoso, nesse caso, é o plano A.	13	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (14)**	**Ideias base**
Realiza os cálculos corretamente, no entanto, afirma que o plano mais vantajoso é o plano B, pois, nesse caso, podem-se usar os minutos desejados e ainda sobram alguns minutos.	7	Correspondência Dependência Regularidade
Afirma que o plano B é o plano mais vantajoso, pois, para este caso, não é necessário pagar minutos excedentes.	4	Correspondência Dependência Regularidade
Para calcular o valor pago com o plano A, multiplica 0,25 (valor do minuto excedente) por 20 (quantidade de minutos excedentes) e soma 25,90 ao resultado, obtendo 30,90. Para calcular o valor gasto com o plano B, subtrai 120 (quantidade de minutos utilizados) de 150 (quantidade de minutos da franquia) e multiplica o resultado obtido por 0,20 (valor do minuto excedente) obtendo 6,00. Por fim, subtrai 6,00 de 25,90, resultando em 19,90 e conclui que este é o valor pago no plano B. Desta forma, afirma que o plano B é o plano mais vantajoso.	3	Correspondência Dependência Regularidade
Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Não apresenta cálculos e afirma apenas que o plano B é o plano mais vantajoso.	2	Não identificada

Para o item b), foi solicitado que os alunos fizessem uma representação gráfica no mesmo plano cartesiano para os planos de telefonia C e D, relacionando o valor a ser pago com a quantidade de minutos excedentes em cada plano. Nesse item da atividade, nenhum aluno desenvolveu estratégias corretas, e dezoito (18) alunos não apresentaram estratégias de resolução, deixando o item em branco. Dessa forma, ficou evidente a dificuldade dos sujeitos em desenvolverem a representação gráfica. Além disso, sete (07) alunos apresentaram gráfico de colunas (de modo incorreto) ao invés de representarem gráfico de retas no plano cartesiano. Cinco (05) desses sujeitos posicionaram, no eixo vertical, os minutos da franquia de cada plano e, em cada coluna, destacaram o preço mensal da assinatura. Os outros (02) dois alunos que utilizaram esse tipo de gráfico relacionaram cada plano com o seu preço mensal da assinatura. A Figura 1 apresenta a resolução de um desses sujeitos.

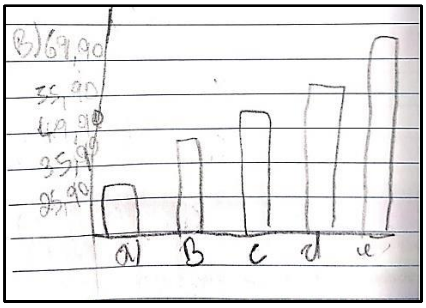


Figura 1 - Gráfico de colunas produzido pelos sujeitos da pesquisa
Fonte: Dados da pesquisa

Além dos erros já mencionados na representação gráfica, notamos que todas as resoluções apresentaram erros na escala do gráfico, considerando a mesma distância para intervalos diferentes. Além disso, nenhum dos sujeitos utilizou régua, comprometendo ainda mais a construção do gráfico. Para as resoluções apresentadas, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência e dependência.

O Quadro 2 apresenta as estratégias de resolução desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa no item b) da atividade.

Quadro 2: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item b) do teste diagnóstico

Não apresenta estratégias e o resultado é incorreto	**Quantidade (4)**	**Ideias base**
Não faz a representação gráfica, apenas afirma que o plano mais vantajoso é o plano D.	4	Não identificada
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (7)**	**Ideias base**
Faz a representação de um gráfico de barras de maneira equivocada associando cada plano com seu preço mensal da assinatura.	7	Correspondência Dependência
Em branco	**Quantidade (18)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução	18	Não identificada

Para o item c), é proposta uma situação na qual foram utilizados 270 minutos, pagos $R\$ \, 59{,}90$ e solicitado ao aluno que determinasse o plano cadastrado e o plano mais vantajoso no caso. Nesse item da atividade, cinco (05) alunos apresentaram respostas corretas afirmando que o plano cadastrado é o plano B e que o plano mais vantajoso para 270 minutos é o plano C, porém não deixaram claras suas estratégias de resolução. Outros dois (02) alunos apresentaram respostas parcialmente corretas por responderem a apenas um dos questionamentos, afirmando somente que o plano cadastrado é o plano B. Nesses dois casos, consideramos que os estudantes mobilizaram as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

Além das resoluções já mencionadas, treze (13) alunos apresentaram resultados incorretos ao afirmarem que o plano cadastrado é o plano C e nove (09) alunos não apresentaram resolução deixando o item da atividade em branco. O Quadro 3 apresenta as estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da atividade.

Quadro 3: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item c) do teste diagnóstico

Não apresenta estratégias e o resultado é correto	**Quantidade (5)**	**Ideias base**
Afirma que dona Ana está cadastrada no plano B, mas o plano mais vantajoso é o plano C, pois economiza 2 reais.	5	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégia das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (2)**	**Ideias base**
Afirma apenas que dona Ana está cadastrada no plano B, pois excedeu 120 minutos.	2	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (5)**	**Ideias base**
Afirma que dona Ana está cadastrada no plano C, no entanto o mais vantajoso é o plano D, pois sobram minutos.	4	Correspondência Dependência Regularidade
Afirma que dona Ana está cadastrada no plano C, no entanto o mais vantajoso é o plano D, pois o preço por minuto excedente é menor.	1	Correspondência Dependência Regularidade
Não apresenta estratégias e o resultado é incorreto	**Quantidade (8)**	**Ideias base**
Afirma que o plano D é mais barato.	8	Não identificada
Em branco	**Quantidade (9)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução.	9	Não identificada

Para o item d) da atividade, em que é solicitada ao aluno a generalização por meio da linguagem natural, apenas um (01) aluno desenvolveu uma estratégia de resolução correta, afirmando que o valor a ser pago é determinado somando-se o valor fixo ($R\$\ 55{,}90$) com o valor variável ($0{,}10$ multiplicado pela quantidade de minutos excedidos). Nesse caso, foram mobilizadas as cinco ideias base relacionadas ao conceito de função. A Figura 2 apresenta essa estratégia de resolução desenvolvida por um dos sujeitos da pesquisa.

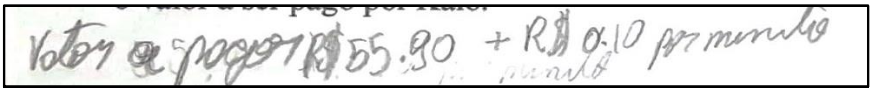


Figura 2 - Resolução apresentada para o item d) do teste diagnóstico
Fonte: Dados da pesquisa

Outras oito (08) estratégias de resolução foram consideradas incorretas. Seis (06) estratégias utilizaram um valor específico para a variável independente (1 minuto) e calcularam o valor a ser pago em vez de considerarem para qualquer valor dessa variável. A Figura 3 apresenta a resolução de um desses alunos.

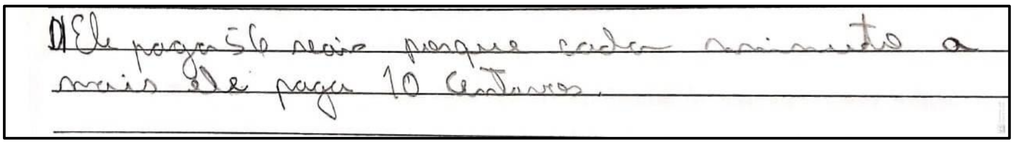


Figura 3 - Resolução apresentada para o item d) do teste diagnóstico
Fonte: Dados da pesquisa

Além das resoluções apresentadas, vinte (20) alunos deixaram esse item da atividade em branco, não apresentando estratégia de resolução, deixando clara a dificuldade em desenvolver a generalização, inclusive por meio da linguagem natural. Destacamos a importância da generalização em linguagem natural, pois concordamos com Tinoco (2011) quando ela afirma que "[...] o registro e a compreensão de leis gerais em linguagem corrente, aritmética, algébrica, geométrica e outras são passos decisivos para que os alunos deem significado às expressões algébricas [...]" (p.51).

O Quadro 4 apresenta as estratégias de resolução desenvolvidas para o item d) do teste diagnóstico.

Quadro 4: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item d) do teste diagnóstico

Estratégia da resolução correta	**Quantidade (1)**	**Ideias base**
Afirma que o valor a ser pago é R$ 55,90 + 0,10 por minuto excedente.	1	Variável Correspondência Dependência Regularidade Generalização
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (8)**	**Ideias base**
Afirma que é necessário fazer uma conta de +	2	Não identificada
Afirma que, para calcular o valor a ser pago, é necessário fazer a soma de 55,90+0,10, concluindo que o valor gasto é 56,00.	6	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Em branco	**Quantidade (20)**	**Ideias base**

Não apresenta resolução.	20	Não identificada

No último item da atividade, solicita-se ao aluno que desenvolva a generalização por meio da expressão algébrica. Nesse caso, nenhum aluno desenvolveu estratégia correta, mas consideramos uma resolução como parcialmente correta por representar parte da expressão algébrica na linguagem natural e parte na linguagem algébrica. Nesse caso, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência, regularidade e generalização. A Figura 4 apresenta a estratégia descrita, desenvolvida por um dos alunos.

Figura 4 - Estratégia de resolução desenvolvida para o item e) do teste diagnóstico
Fonte: Dados da pesquisa

Outras quatro (04) estratégias foram consideradas incorretas, duas (02) delas escolheram um valor específico (1 minuto) para representar qualquer quantidade da variável dependente e calcularam o valor a ser pago. Além disso, vinte e quatro (24) alunos não desenvolveram estratégia de resolução, deixando o item da atividade em branco. Nesses casos, as ideias base de função não foram mobilizadas. Assim, reafirmamos que “[...] é na passagem da linguagem corrente para a algébrica que reside a maior dificuldade dos alunos iniciantes em Álgebra” (TINOCO, 2011, p.51).

O Quadro 5 apresenta as estratégias de resolução desenvolvidas no item e) da atividade.

Quadro 5: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item e) do teste diagnóstico

Estratégia da resolução parcialmente correta	**Quantidade (1)**	**Ideias base**
P = 55,90+0,10 por minuto (Não usa a variável)	1	Correspondência Dependência Regularidade Generalização
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (4)**	**Ideias base**
Calcula o valor a ser pago com o plano D quando excede apenas 1 minuto e conclui que o valor a ser pago é R$56,00.	2	Correspondência Dependência
300x+55,90+0,10	1	Não identificada
55,90+x+y+z	1	Não identificada

Em branco	Quantidade (24)	Ideias base
Não apresenta resolução.	24	Não identificada

Diante do exposto, ficaram aparentes as dificuldades dos alunos em interpretar o contexto da atividade, mesmo com parte dos dados dispostos em tabela, o que facilita a visualização e a regularidade presente na atividade. Também ficou evidente, a dificuldade em manipular operações matemáticas, o que foi exigido por meio dos itens a) e b), mesmo se fazendo uso da calculadora. Ou seja, sem a correta interpretação da situação, o uso da calculadora não auxiliou no desenvolvimento da atividade.

Embora já tivessem tido contato com o conteúdo de funções, as dificuldades na construção do gráfico associado à função afim e em desenvolver a generalização também ficaram evidentes, pois nenhum aluno apresentou estratégias corretas para esses casos. Esses fatos também foram constatados nas pesquisas de Ardenghi (2008) e Pinto (2014). No entanto, assim como Vergnaud (2009), acreditamos que um conceito passa a ter significação para o sujeito a partir da diversidade de situações que ele confronta ao longo do processo escolar. Martins, Rezende e Hermann (2019) destacam a necessidade de um olhar mais atento ao propor, em sala de aula, atividades relacionadas ao conceito de função afim, especialmente as representações algébrica e gráfica.

Com os resultados do teste diagnóstico, notamos que as principais dificuldades dos participantes da pesquisa em relação à ideia de generalização estavam sendo reveladas. Tal fato justifica a necessidade do desenvolvimento de uma sequência didática junto aos alunos, para que eles possam revelar (implícita ou explicitamente) os teoremas em ação manifestados durante a resolução das atividades, bem como se apropriar da ideia de generalização, no decorrer da resolução das atividades propostas.

Com a aplicação do teste diagnóstico e diante das dificuldades dos alunos acerca da ideia de generalização, constatamos que não havia necessidade de realizar alterações nas atividades que compõem a sequência didática. Foi possível, porém, retornar às análises *a priori* da sequência didática e propor diferentes estratégias de resolução e, dessa forma, preparar melhor os momentos de aplicação e institucionalização da sequência didática.

CAPÍTULO 4

A CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo descrevemos como se deu a elaboração da sequência didática apresentada nesta pesquisa, as variáveis didáticas que direcionam a construção sequência didática e cada atividade seguida de suas análises *a priori*.

4.1 Variáveis didáticas

Segundo Bittar (2017), na organização das sequências didáticas, devem ser levadas em consideração as variáveis didáticas, definidas pela autora como sendo "[...] elementos das situações, que ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos" (p. 107). De acordo com Brousseau (1986), "[...] é brincando com escolhas apropriadas destas variáveis que um novo aprendizado pode ser trazido à tona". Dessa forma, a alteração de uma variável didática pode implicar na mobilização, por parte dos alunos, de diferentes estratégias para a resolução das atividades, e a mudança de valores de uma variável pode favorecer ou não uma estratégia de resolução.

Com isso, é importante descrever possíveis estratégias de resolução, corretas ou não, dos problemas propostos, pois, desse modo, durante a realização das atividades, o professor/pesquisador está mais preparado para compreender o desenvolvimento do aluno e é capaz de intervir, quando necessário, contribuindo ainda mais com a aprendizagem do conceito em questão. Neste sentido, as variáveis didáticas consideradas na construção da sequência didática desta pesquisa são: a *forma de apresentação dos dados* e *a presença (ou não) do coeficiente linear na expressão algébrica*. Cada um desses casos é descrito a seguir.

Forma de apresentação dos dados

Para cada atividade que compunha a sequência didática, buscamos diferenciar a forma de apresentação dos dados envolvidos, variando entre gráfico, tabela ou texto. Defendemos que a forma como os dados são apresentados, pode influenciar na interpretação por parte dos sujeitos, e consequentemente na estratégia de resolução da atividade.

Presença (ou não) do coeficiente linear na expressão algébrica

As expressões algébricas que descrevem situações definidas por funções do tipo *afim* são descritas pela expressão $ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Nesses casos, quando o valor de b, também chamado de coeficiente linear, é igual a 0, a situação é definida apenas pela expressão ax. Nas atividades que compõem a sequência didática desta pesquisa, buscamos variar as expressões algébricas entre $ax + b$ ou simplesmente ax. Acreditamos que a presença ou não do coeficiente linear b interfere na interpretação e desenvolvimento da estratégia de resolução das atividades.

4.2 Apresentação da sequência didática e análises *a priori*

Apresentamos, nesta seção, cada atividade que compõe a sequência didática seguida de sua análise *a priori.* Consideramos, nas análises *a priori* as possíveis estratégias de resolução a serem desenvolvidas pelos sujeitos colaboradores da pesquisa. Para a apresentação desses dados, organizamos as estratégias em quadros, elencando-as em corretas, parcialmente corretas e incorretas.

4.2.1 Atividade 1

A atividade

Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$\ 0{,}18$ cada um.

a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães?
b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães?
c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 1. Para os itens a) e b) não consideramos a possibilidade de respostas incorretas, pois além de estarem de posse da calculadora, acreditamos ser uma questão de fácil interpretação para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães?

Quadro 6: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 1

Possíveis estratégias de resolução	
$3\ X\ 0{,}18 = R\$\ 0{,}54$	Correta
$0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 = R\$\ 0{,}54$	Correta

b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães?

Quadro 7: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 1

Possíveis estratégias de resolução	
$7\ X\ 0{,}18 = R\$\ 1{,}26$	Correta
$0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18\ + 0{,}18 + 0{,}18 = R\$\ 1{,}26$	Correta
$0{,}54 + 4\ X\ 0{,}18 = R\$\ 1{,}26$	Correta

c) *Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.*

Quadro 8: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 1

Possíveis estratégias de resolução	
$V = p.0{,}18$ *ou* $V = 0{,}18.p$	Correta
Precisa multiplicar a quantidade de pães por $0{,}18$.	Parcialmente correta (utiliza da língua natural para generalizar, mas não define corretamente a expressão algébrica).
$V = 0{,}18$	Incorreta (valor de somente 1 pão).
$V = x + 0{,}18$	Incorreta
$V = 0{,}18\, X\, 3$ *ou* $V = 0{,}18\, X\, 7$	Incorreta (considera os valores dos itens a) e b)).
$V = 10\, X\, 0{,}18$	Incorreta (escolhe um número específico para representar uma quantidade qualquer).

4.2.2 Atividade 2

A atividade

(Adaptada Tinoco (2002)) – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$\ 2{,}00$ para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um.

a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco?
b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco?
c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar?
d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana.
e) Escreva uma expressão algébrica que representa o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade qualquer possível de pães.

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 2. Nos itens a) e b), a intenção é que o aluno utilize o valor gasto com 3 e 7 pães da atividade anterior, mas ele pode não perceber essa intenção e realizar este cálculo novamente.

a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco?

Quadro 9: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 2

Possíveis estratégias de resolução	
$2{,}00 - 0{,}54 = R\$\ 1{,}46$	Correta
$2{,}00 + 0{,}54 = R\$\ 2{,}54$	Incorreta (soma o valor inicial com o valor gasto).
$R\$\ 0{,}54$	Incorreta (define apenas quanto Ana vai gastar, mas não define o troco).
$2{,}00 \div 0{,}54 = R\$\ 3{,}7$	Incorreta (divide o valor inicial pelo valor gasto).
$2{,}00 \div 3 = R\$\ 0{,}67$	Incorreta (divide o valor inicial pela quantidade de pães comprados).

b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco?

Quadro 10: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 2

Possíveis estratégias de resolução	
$2{,}00 - 1{,}26 = R\$\ 0{,}74$	Correta
$2{,}00 + 1{,}26 = R\$\ 3{,}26$	Incorreta (soma o valor inicial com o valor gasto).
$R\$\ 1{,}26$	Incorreta (define apenas quanto Ana vai gastar, mas não define o troco).
$2{,}00 \div 1{,}26 = R\$\ 1{,}58$	Incorreta (divide o valor inicial pelo valor gasto).
$2{,}00 \div 7 = R\$\ 0{,}28$	Incorreta (divide o valor inicial pela quantidade de pães comprados).

c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar?

Quadro 11: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 2

Possíveis estratégias de resolução	
Por meio de tentativas o aluno percebe que 11 é a quantidade máxima de pães que podem ser comprados, pois $11\ X\ 0{,}18 = R\$\ 1{,}98$.	Correta
$2 - 0{,}18 - 0{,}18 - \cdots - 0{,}18 = R\$\ 0{,}02$ Conclui que a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar é 11.	Correta
$0{,}18 + 0{,}18 + \cdots + 0{,}18 = 1{,}98$ Conclui que a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar é 11.	Correta
$2 \div 0{,}18 = 11{,}11$ Conclui que a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar é 11.	Correta
7 pães	Incorreta (considera apenas a quantidade máxima proposta nos itens anteriores).
12 pães	Incorreta (aproxima a quantidade máxima de pães que podem ser compradas).

d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana.

Quadro 12: Possíveis estratégias de resolução para o item d) da atividade 2

Possíveis estratégias de resolução	
Multiplica a quantidade de pães por 0,18 e depois subtrai de 2.	Correta
Precisa fazer 2 menos a quantidade gasta com os pães.	Correta
Multiplica a quantidade de pães por 0,18.	Incorreta
Multiplica a quantidade de pães por 0,18 e depois soma 2.	Incorreta
Multiplica a quantidade de pães por 0,18 e depois subtrai 2.	Incorreta

e) Escreva uma expressão algébrica que representa o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade qualquer possível de pães.

Quadro 13: Possíveis estratégias de resolução para o item e) da atividade 2

Possíveis estratégias de resolução	
$T = 2 - p.0{,}18$ *ou* $T = 2 - 0{,}18.p$	Correta
$T = p.0{,}18 - 2$ *ou* $T = 0{,}18.p - 2$	Incorreta
$T = 2 + 0{,}18p$	Incorreta (somar ao invés de subtrair).
$T = 2 - 0{,}18$ $T = R\$\ 1{,}82$	Incorreto (troco para a compra de apenas 1 pão).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

4.2.3 Atividade 3

A atividade

A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 3.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?

Quadro 14: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 3

Possíveis estratégias de resolução	
$R\$ \ 150{,}00$	Correta
$R\$ \ 90{,}00$	Incorreta (considera o valor da mensalidade).
$R\$ \ 240{,}00$	Incorreta (considera a matrícula e uma mensalidade).
$R\$ \ 0$	Incorreta (desconsidera o valor da matrícula realizada).

b) *Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?*

Quadro 15: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 3

Possíveis estratégias de resolução	
$90 \ X \ 4 = 360$ $360 + 150 = R\$ \ 510$	Correta
$90 \ X \ 4 = 360$	Incorreta (considera apenas a mensalidade).
$150 \ X \ 4 = R\$ \ 600$	Incorreta (considera o valor da matrícula quatro vezes).
$150 + 90 = R\$ \ 240$	Incorreta (considera a matrícula e apenas uma mensalidade).

c) *Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?*

Quadro 16: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 3

Possíveis estratégias de resolução	
$1230 - 150 = 1080$ $1080 \div 90 = 12$	Correta
$150 + 90 + 90 + 90 + \cdots + 90 = 1230$ Conclui que o foi realizado o curso por 12 meses.	Correta (realiza tentativas até chegar aos 12 meses no valor gasto de 1230).
$1230 - 150 = 1080$ $1080 - 90 - 90 - \cdots - 90 = 0$ Conclui que o foi realizado o curso por 12 meses.	Correta (realiza tentativas por meio de subtrações sucessivas).
$1230 \div 90 = 13{,}67$	Incorreta (desconsidera o valor pago na matrícula).

$90 + 90 + \cdots + 90 = 1170$	Incorreta (realiza tentativas sucessivas por meio da soma do valor da mensalidade, mas não inclui o valor da matrícula e não consegue concluir a quantidade de meses cursados).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Quadro 17: Possíveis estratégias de resolução para o item d) da atividade 3

Possíveis estratégias de resolução	
$V = 150 + 90x$ *ou* $V = 90x + 150$	Correta
$V = 150x + 90$	Incorreta (confunde parte fixa e parte variável).
$V = 150x$	Incorreta (considera a parte fixa como variável).
$V = 90x$	Incorreta (desconsidera o valor da matrícula).
$V = 150 + 90$	Incorreta
$V = 150\ X\ 90$	Incorreta (multiplica os valores apresentados no enunciado).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

4.2.4 Atividade 4

A atividade

(Adaptada de Tinoco (2002)) D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador;

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.
b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.
c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 4.

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.

Quadro 18: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 4

Possíveis estratégias de resolução	
Faz uma representação das camisas penduradas em forma de desenho e conclui que com 24 pregadores podem ser penduradas 23 camisas.	Correta
Faz uma tabela relacionando o número camisas com o numero de pregadores necessários para pendurá-las e conclui que com 24 pregadores podem ser penduradas 23 camisas.	Correta
$22\,X\,2 = 44$ (conclui que para pendurar 22 camisas são necessários 44 pregadores).	Incorreta (considera que para cada camisa são necessários dois pregadores diferentes).
Considera apenas 12 pregadores e conclui que não são suficientes para pendurar 22 camisas.	Incorreta

b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

Quadro 19: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 4

Possíveis estratégias de resolução	
A quantidade de camisas mais 1	Correta (se o aluno desenvolver a tabela no item anterior relacionando a quantidade de camisas penduradas com a quantidade de pregadores

	necessários, pode chegar a essa conclusão observando da regularidade entre os valores da tabela. Ou ainda, se desenvolver uma representação das camisas no varal por meio de desenho).
Usar dois pregadores para cada camisa	Incorreta

c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

Quadro 20: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 4

Possíveis estratégias de resolução	
$P = x + 1$ *ou* $P = 1 + x$	Correta
$P = x - 1$	Incorreta
$P = 2x$	Incorreta (considera que cada camisa é presa por dois pregadores diferentes).
$P = x$	Incorreta (considera que para cada camisa utiliza um pregador, desconsiderando o primeiro pregador).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

4.2.5 Atividade 5

A atividade

Paulo é mecânico e, quando possível realiza atendimento em domicílio. Sendo assim, a expressão algébrica que melhor representa o valor a ser pago pelos clientes de Paulo é: $v = 45h + 35$, em que h representa o número de horas trabalhadas de Paulo e v representa o valor a ser pago pelos clientes que o contratam.
Com base nas informações apresentadas faça uma representação gráfica da situação e responda os itens a seguir.

a) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação?

b) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente que firmou o contrato, no entanto, no dia seguinte desistiu do serviço, antes que Paulo começasse seu trabalho. Neste caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo?
c) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa deste cliente?
d) Escreva os passos para se determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 5.

Representação gráfica

Quadro 21: Possíveis estratégias a representação gráfica da atividade 5

Possíveis estratégias de resolução	
Constrói um gráfico relacionando as horas trabalhadas com o valor a ser pago pelo serviço atribuindo valores na expressão algébrica.	Correta
Constrói uma tabela atribuindo valores para as variáveis horas trabalhadas e valor a ser pago pelo serviço, a partir desses valores constrói a representação gráfica posicionando os pares ordenados e traçando a reta.	Correta
Erra a escala na construção do gráfico e não relaciona corretamente as variáveis envolvidas.	Incorreta
Atribui valores incorretos para as variáveis e não constrói o gráfico corretamente.	Incorreta
Constrói um gráfico de barras relacionando as variáveis horas trabalhadas e valor a ser pago.	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

a) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação?

Quadro 22: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 5

Possíveis estratégias de resolução	
Horas trabalhadas e valor a ser pago.	Correta
Valor a ser pago.	Parcialmente correta (considera apenas a variável dependente).
Horas trabalhadas.	Parcialmente correta (considera apenas a variável independente).

b) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente que firmou o contrato, no entanto, no dia seguinte desistiu do serviço, antes que Paulo começasse seu trabalho. Neste caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo?

Quadro 23: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 5

Possíveis estratégias de resolução	
$R\$ \ 35{,}00$	Correta (o aluno pode utilizar a expressão algébrica e considerar *h* valendo 0).
$R\$ \ 0$	Incorreta (não considera o valor da visita).
$R\$ \ 45{,}00$	Incorreta (considera o valor da hora trabalhada).
$R\$ \ 80{,}00$	Incorreta

c) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa deste cliente?

Quadro 24: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 5

Possíveis estratégias de resolução	
$215 - 35 = 180$ $180 \div 45 = 4$	Correta
$215 = 45h + 35$ $215 - 35 = 45h$ $180 = 45h$ $h = 180 \div 45$ $h = 4$	Correta
$35 + 45 + 45 + 45 + 45 = 215$	Correta
$215 \div 45 = 4{,}78$	Incorreta (desconsidera o valor da visita).
$215 \div 35 = 6{,}14$	Incorreta
$215 - 35 = 180$	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

d) Escreva os passos para se determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

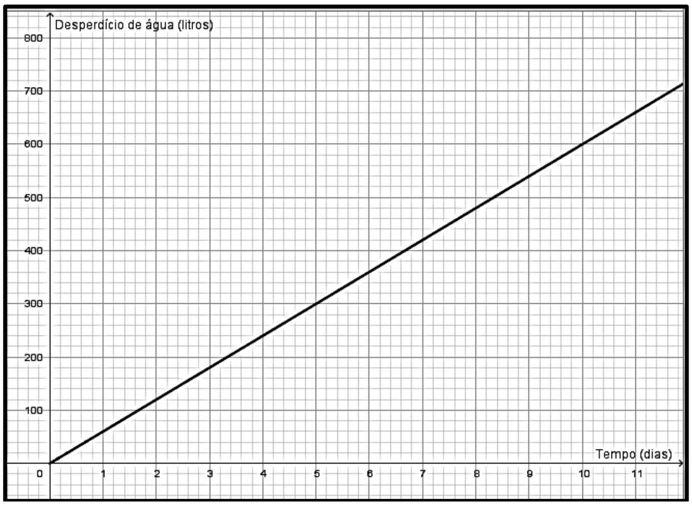
Quadro 25: Possíveis estratégias de resolução para o item d) da atividade 5

Possíveis estratégias de resolução	
Multiplica a quantidade de horas trabalhadas por 45 e depois soma 35 ao resultado obtido.	Correta
Multiplica a quantidade de horas trabalhadas por 45.	Incorreta (desconsidera a parte fixa).
Multiplica a quantidade de horas trabalhadas por 35 e soma 45 ao resultado obtido.	Incorreta (confunde parte fixa e parte variável).
Multiplica a quantidade de horas trabalhadas por 35.	Incorreta
$R\$ \ 35,00$	Incorreta
$R\$ \ 45,00$	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

4.2.6 Atividade 6

A atividade

(Adaptada ENEM (2010)) – Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira. Sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, observe o gráfico a seguir e responda as questões seguintes.



a) De quanto será o desperdício se a torneira permanecer por 5 dias gotejando?
b) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?
c) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?
d) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.
e) Utilizando a expressão do item anterior determine de quantos litros será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?
f) Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

Análise a priori

Apresentamos nesta seção as análises *a priori* de cada item da atividade 6. Para o item a) da atividade 6, não consideramos a possibilidade de respostas incorretas, pois acreditamos ser uma questão de fácil interpretação para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, uma vez que já haviam estudado a representação gráfica.

a) De quanto será o desperdício se a torneira permanecer por 5 dias gotejando?

Quadro 26: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
300 L	Correta (chega a essa conclusão observando a representação gráfica).

b) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?

Quadro 27: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
420 L	Correta (chega a essa conclusão observando a representação gráfica).
400 L	Incorreta (utiliza um valor aproximado).
410 L	Incorreta (estima um valor aproximado).

c) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?

Quadro 28: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
14 dias	Correta (como esta informação não aparece no gráfico, o aluno pode utilizar a regularidade dos valores explícitos no gráfico para chegar a essa conclusão).
$Y = 60x$ $840 = 60x$ $x = 14$ Conclui que a torneira ficou aberta por 14 dias.	Correta (observa pontos do gráfico para desenvolver a expressão algébrica que relacionada as variáveis dias e desperdício).
12 dias	Incorreta (próximo valor que não aparece no gráfico).
11 dias	Incorreta (último valor que aparece no gráfico para a variável *tempo*).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

d) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.

Quadro 29: Possíveis estratégias de resolução para o item d) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
$Y = 60x$	Correta (o aluno pode chegar a essa conclusão observando a regularidade presente no gráfico).
$Y = 60 + x$	Incorreta
$Y = x$	Incorreta
$Y = 100x$	Incorreta (o aluno pode chegar a essa conclusão observando a escala do eixo y).
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

e) Utilizando a expressão do item anterior determine de quantos litros será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?

Quadro 30: Possíveis estratégias de resolução para o item e) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
$Y = 60\ X\ 7 = 420$ L Conclui que os valores observando o gráfico ou utilizando a expressão algébrica são os mesmos.	Correta
$Y = 100\ X\ 7 = 700$ L Conclui que os valores observados no gráfico e utilizando a expressão algébrica são diferentes.	Incorreta
$Y = 60 + 7 = 67$ Conclui que os valores observados no gráfico e utilizando a expressão algébrica são diferentes.	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

f) Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

Quadro 31: Possíveis estratégias de resolução para o item f) da atividade 6

Possíveis estratégias de resolução	
$840 = 60x$ $x = 14$ dias Conclui que os valores observando o gráfico ou utilizando a expressão algébrica são os mesmos.	Correta
$840 = 60 + x$ $x = 833$ dias Conclui que os valores observados no gráfico e utilizando a expressão algébrica são diferentes.	Incorreta
$840 = 100x$ $x = 84$ dias Conclui que os valores observados no gráfico e utilizando a expressão algébrica são diferentes.	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

4.2.7 Atividade 7

A atividade

(Adaptada Martins, Rezende e Hermann (2019)) – Uma das maneiras de reduzir o consumo de energia elétrica foi a criação da tecnologia LED (sigla em inglês para diodo emissor de luz) que já está substituindo as lâmpadas fluorescentes. As lâmpadas LED são mais eficientes que as fluorescentes, produzem a mesma luminosidade com menor consumo de energia. No quadro abaixo relacionamos os preços e os consumos de duas lâmpadas equivalentes.

Lâmpada	**Potência**	**Preço da lâmpada**	**Gasto mensal de energia**
LED	11 Watts	R$ 12,00	R$ 1,10
FLUORESCENTE	22 Watts	R$ 8,00	R$ 2,20

Sabendo que Paula possui na sala de sua casa os dois tipos de lâmpadas e que elas são sempre ligadas ao mesmo tempo, responda as questões que seguem.

a) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?
b) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?
c) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.
d) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).
e) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.

Análise a priori

Consideramos nesta seção as possíveis estratégias de resolução para cada item da atividade 7.

a) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?

Quadro 32: Possíveis estratégias de resolução para o item a) da atividade 7

Possíveis estratégias de resolução	
LED: $1{,}10\ X\ 2 = 2{,}20$	Correta

$2{,}20 + 12{,}00 = R\$\ 14{,}20$ FLUORESCENTE: $2{,}20\ X\ 2 = 4{,}40$ $4{,}40 + 8{,}00 = R\$\ 12{,}40$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada fluorescente.	
LED: $1{,}10 + 1{,}10 = 2{,}20$ $2{,}20 + 12{,}00 = R\$\ 14{,}20$ FLUORESCENTE: $2{,}20 + 2{,}20 = 4{,}40$ $4{,}40 + 8{,}00 = R\$\ 12{,}40$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada fluorescente.	Correta
LED: $1{,}10\ X\ 2 = R\$\ 2{,}20$ FLUORESCENTE: $2{,}20\ X\ 2 = R\$\ 4{,}40$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de LED.	Incorreta (desconsidera o valor pago pela lâmpada).
LED: $1{,}10 + 12 = R\$\ 13{,}10$ FLUORESCENTE: $2{,}20 + 8 = R\$\ 10{,}20$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de fluorescente.	Incorreta (soma as informações contidas na tabela).
LED: $(1{,}10 + 12)X\ 2 = R\$\ 26{,}20$ FLUORESCENTE: $(2{,}20 + 8)\ X\ 2 = R\$\ 20{,}40$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de fluorescente.	Incorreta (realiza a soma e depois a multiplicação).

b) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?

Quadro 33: Possíveis estratégias de resolução para o item b) da atividade 7

Possíveis estratégias de resolução	
LED: $1{,}10\ X\ 5 = 5{,}50$ $5{,}50 + 12 = R\$\ 17{,}50$ FLUORESCENTE: $2{,}20\ X\ 5 = 11$ $11 + 8 = R\$\ 19$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de LED.	Correta
LED: $1{,}10\ X\ 5 = R\$\ 5{,}50$	Incorreta (desconsidera o valor pago

FLUORECENTE: $2{,}20\ X\ 5 = R\$\ 11$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de LED.	pela lâmpada).
LED: $1{,}10 + 12 = R\$\ 13{,}10$ FLUORESCENTE: $2{,}20 + 8 = R\$\ 10{,}20$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de fluorescente.	Incorreta (soma as informações contidas na tabela).
LED: $(1{,}10 + 12)X\ 5 = R\$\ 65{,}50$ FLUORESCENTE: $(2{,}20 + 8)\ X\ 5 = R\$\ 51$ Conclui que o gasto será menor com a lâmpada de fluorescente.	Incorreta (realiza a soma e depois a multiplicação).

c) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.

Quadro 34: Possíveis estratégias de resolução para o item c) da atividade 7

Possíveis estratégias de resolução	
LED: $1{,}10\ X\ 5 = 5{,}50$ $5{,}50 + 12 = R\$\ 17{,}50$ FLUORESCENTE: $2{,}2\ X\ 5 = 11$ $11 + 8 = R\$\ 19{,}00$ Conclui que foi utilizada a lâmpada de LED por 5 meses.	Correta
LED: $17{,}50 - 12 = 5{,}50$ $5{,}50 \div 1{,}10 = 5$ meses FLUORESCENTE: $17{,}50 - 8 = 9{,}5$ $9{,}5 \div 2{,}2 = 4{,}8$ meses Conclui que foi utilizada a lâmpada de LED por 5 meses.	Correta
Constrói uma tabela relacionando valor a ser gasto com cada uma das lâmpadas e tempo de uso. Conclui que a lâmpada de LED foi utilizada por 5 meses .	Correta
LED: $17{,}50 \div 1{,}10 = 15{,}91$ meses FLUORECENTE: $17{,}50 \div 2{,}20 = 7{,}95$ meses	Incorreta (desconsidera o valor pago pela lâmpada).

Não consegue chegar a conclusões concretas.	

d) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).

Quadro 35: Possíveis estratégias de resolução para o item d) da atividade 7

Possíveis estratégias de resolução	
$V = 12 + 1{,}10x$ *ou* $V = 1{,}10x + 12$	Correta
$V = 1{,}10x$	Incorreta (desconsidera o valor pago pela lâmpada).
$V = 12x$	Incorreta
$V = 12x + 1{,}10$	Incorreta
Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

e) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.

Quadro 36: Possíveis estratégias de resolução para o item e) da atividade 7

Possíveis estratégias de resolução	
Constrói um gráfico relacionando o valor a ser pago com cada lâmpada e o tempo de uso utilizando da expressão algébrica determinada. Conclui que até 3 meses compensa a lâmpada fluorescente, no entanto, a partir do 4º mês o valor gasto com a lâmpada de LED é menor.	Correta
Constrói o gráfico corretamente, mas não consegue concluir para quais meses o valor a ser pago com cada lâmpada é menor.	Parcialmente correta
Erra a escala na construção do gráfico e não consegue concluir para quais meses o valor a ser pago com cada lâmpada é menor.	Incorreta
Erra na expressão algébrica, portanto não consegue construir a representação gráfica.	Incorreta

Não apresenta estratégia de resolução.	Em branco

No próximo capítulo apresentamos a descrição da experimentação e das análises *a posteriori* das atividades aqui mencionadas.

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES *A POSTERIORI*

Neste capítulo, apresentamos a descrição dos momentos de experimentação e as análises *a posteriori* de cada atividade que compõe a sequência didática.

Aplicação da sequência didática

A aplicação das atividades ocorreu em horário convencional das aulas de matemática e teve início no dia 29 de julho de 2019, se encerrando no dia 15 de agosto de 2019, totalizando 12 horas/aulas.

A pesquisadora permaneceu em sala de aula durante todo o momento de experimentação, observando o desempenho dos alunos, incentivando o diálogo entre os integrantes de cada grupo e indagando a respeito das estratégias desenvolvidas, a fim de que os sujeitos refletissem acerca de suas resoluções e para que possíveis conhecimentos implícitos pudessem ser revelados.

As atividades foram impressas em papel colorido (verde), em quantidade suficiente para que cada aluno possuísse uma cópia. A sequência didática foi desenvolvida pelos alunos distribuídos em duplas ou trios, pois consideramos que a discussão e a partilha de conhecimento entre os sujeitos auxiliam no desenvolvimento e aprendizagem dos alunos, corroborando a dialética das situações adidáticas, conforme Brousseau (2008). Esses grupos foram constituídos pelos alunos de acordo com suas afinidades e permaneceram os mesmos durante a aplicação de toda a sequência didática.

Ao fim do desenvolvimento de cada atividade, a pesquisadora recolheu as resoluções dos alunos para que eles não fizessem alterações em suas estratégias de modo a não interferir nos dados a serem analisados para a pesquisa. Depois de recolhida cada atividade, a pesquisadora conversou com a turma abordando as principais ideias presentes nas situações, principalmente a ideia de generalização.

De modo geral, os alunos se mostraram interessados em resolver as atividades propostas na sequência didática. Notamos que o fato de estarem dispostos em grupos e as atividades apresentarem um contexto diferenciado das que normalmente são propostas no livro didático foram os motivos de maior envolvimento da turma, caracterizando que houve a *devolução* por parte dos sujeitos da pesquisa.

Os contextos das atividades foram, em sua maioria, bem interpretados pelos alunos e que, para grande parte das atividades, apresentaram resoluções, sejam elas corretas, parcialmente corretas ou até mesmo incorretas, demonstrando tentativas de resolução, estratégias e conhecimentos prévios adequados e pertinentes para iniciar a resolução das atividades. Sendo assim, a sequência didática proposta tem caráter *adidático* com a *devolução* dos alunos, ou seja, os alunos buscam por si mesmos, nos grupos, a resolução das atividades.

Análise da sequência didática

Foram utilizados como meios de levantamento de dados para as análises a produção escrita dos alunos desenvolvida durante a resolução das atividades e as observações da pesquisadora. Além disso, em cada grupo, a pesquisadora colocou um gravador a fim de ter acesso ao áudio dos diálogos produzidos pelos grupos durante o desenvolvimento de suas estratégias de resolução. Esses diálogos foram transcritos e considerados para a análise das atividades.

Para cada atividade, apresentamos a discussão das estratégias desenvolvidas pelos sujeitos, um recorte de suas resoluções e de diálogos produzidos pelos grupos. No decorrer das análises, buscamos identificar os teoremas em ação possivelmente manifestados pelos sujeitos em suas estratégias de resolução, conforme objetivo desta investigação. A partir das resoluções, elaboramos quadros contendo as diferentes estratégias manifestadas pelos estudantes em cada item, a quantidade de grupo que utilizou a estratégia descrita e os teoremas em ação possivelmente manifestados no decorrer das resoluções.

Durante as análises, buscamos classificar as resoluções dos estudantes em: i) corretas, sejam elas manifestadas por meio de estratégias implícitas ou explícitas, mas que conduziam a respostas matematicamente adequadas e pertinentes à situação proposta; ii) parcialmente corretas, aquelas em que os alunos desenvolveram estratégias adequadas, no entanto apresentaram erros de cálculo; iii) incorretas, estratégias que levaram os sujeitos a resoluções equivocadas sem relação com estratégias adequadas.

Para as atividades que envolviam valores em dinheiro (atividades 1, 2, 3, 5 e 7), consideramos que os alunos podiam utilizar o símbolo monetário (R$), a palavra *reais*, ou simplesmente o valor desejado, sem especificar que se tratava de um valor em dinheiro. Em todos esses casos, elencamos as respostas como corretas, desde que os valores apresentados estivessem adequados.

Assim como Rezende, Nogueira e Calado (no prelo), consideramos como estratégia o modo de resolução desenvolvido pelo aluno, ou seja, o caminho escolhido por ele para resolver a atividade e apresentar uma resposta, correta ou não. Em alguns casos, a estratégia está explicitada pelos alunos, sua resolução é claramente registrada. Dependendo, porém, da atividade, pode ocorrer de os alunos apresentarem apenas a resposta, deixando a resolução em branco. Nesse caso, cabe ao pesquisador e professor refletir, a partir dos indícios deixados pelo aluno, em sua resposta final, procurando identificar a estratégia ou as possíveis estratégias adotadas por ele.

A sequência de atividades desta pesquisa visava, além de analisar invariantes operatórios relacionados à generalização mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, proporcionar a mobilização das demais ideias base relacionadas ao conceito de função (variável, dependência, regularidade, correspondência).

Para alcançar os objetivos pretendidos, consideramos que, segundo Vergnaud (2009), muitos dos conhecimentos em ação, designados por ele de invariantes operatórios, não estão necessariamente explícitos. Muitas vezes, eles estão implícitos e, em alguns casos, nem mesmo de forma consciente. Por isso, fundamentadas em Vergnaud, as análises da pesquisa foram direcionadas para a análise de conhecimentos implícitos manifestados, seja na resolução escrita dos alunos ou no diálogo, na tentativa de desvendar possíveis teoremas em ação presentes nas respostas dos sujeitos colaboradores.

Nas próximas seções, apresentamos as análises das repostas dos sujeitos desta pesquisa desenvolvidas para a sequência didática proposta. Para uma melhor organização do texto e buscando preservar a identidade dos sujeitos, nomeamos cada grupo com a letra G seguida de um número de identificação. Sendo assim, os grupos foram nomeados de G1 até G13.

5.1 Atividade 1 e Atividade 2

Por apresentar contextos semelhantes e enunciados curtos, optamos por aplicar as atividades 1 e 2 juntas, que foram entregues aos sujeitos em uma mesma folha para que fossem resolvidas uma seguida da outra. As atividades 1 e 2, que compõem a sequência didática desta pesquisa, as análises *a posteriori* e a descrição dos momentos de discussão das atividades com a turma são apresentadas a seguir..

Atividade 1

Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$\ 0{,}18$ cada um.

d) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães?
e) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães?
f) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Atividade 2

(Adaptada de Tinoco (2002)) – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$\ 2{,}00$ para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um.

f) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco?
g) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco?
h) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar?

i) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana.
j) Escreva uma expressão algébrica que represente o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade possível qualquer de pães.

Análise a posteriori

Descrevemos nesta seção como se deu a aplicação das atividades 1 e 2 e as estratégias de resolução desenvolvidas pelos sujeitos. A aplicação dessas atividades ocorreu no dia 01 de agosto de 2019, teve duração de 1 hora/aula e contou com a presença de 26 alunos organizados em 13 duplas. A seguir apresentamos as análises de cada uma das atividades, seguidas de um quadro síntese com as estratégias e teoremas em ação mobilizados pelos estudantes.

Atividade 1

Nos itens a) e b) da atividade 1, os sujeitos precisaram determinar o valor gasto com a compra de três (03) e sete (07) pães, respectivamente. Conforme previsto na análise *a priori,* os sujeitos não apresentaram erros nesses itens, pois são considerados de fácil interpretação para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Além disso, conforme já mencionado, os alunos utilizaram a calculadora, o que evitou erro nos cálculos com números decimais. Dos treze (13) grupos que resolveram a atividade, doze (12) desenvolveram a mesma estratégia de resolução correta e apresentaram as expressões $3\ X\ 0{,}18 = 0{,}54$ e $7\ X\ 0{,}18 = 1{,}26$ para a compra de três (03) e de sete (07) pães, respectivamente.

As figuras 5 e 6 apresentam a resolução de um desses grupos (G11) para os item a) e b) da atividade 1.

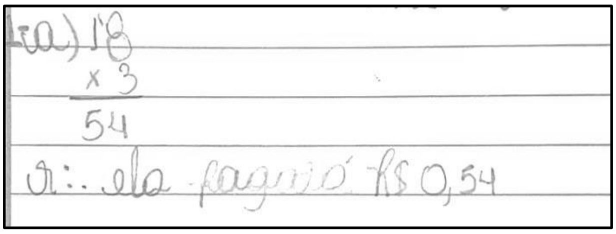


Figura 5 - Resolução apresentada pelo grupo G11 para o item a) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

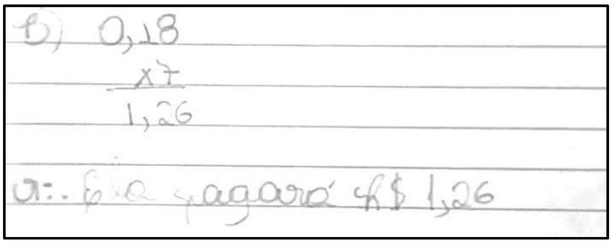


Figura 6 - Resolução apresentada pelo grupo G11 para o item b) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

No desenvolvimento dessas estratégias, o valor gasto com os pães é determinado multiplicando-se a quantidade de pães comprados pelo valor unitário do pão. Esse conhecimento manifestado pelos alunos pode ser modelado na forma de um teorema em ação, associando ao isomorfismo das funções lineares à propriedade linear das relações de proporcionalidade (VERGNAUD, 2007; GITIRANA, 2014). Em termos matemáticos, a quantidade de pães e o valor gasto com os pães podem ser associados a uma função real linear f que satisfaz $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$, para qualquer número n real. Mesmo sem conhecê-la do ponto de vista matemático, ao resolver a atividade 1, os doze (12) grupos de estudantes apresentaram 24 estratégias associadas a essa propriedade. Desse modo, identificamos na estratégia dos estudantes um teorema em ação verdadeiro possivelmente mobilizado pelos sujeitos, pois

$f(3) = f(3 \times 1) = 3 \times f(1) = 3 \times 0{,}18$ e $f(7) = 7(3 \times 1) = 7 \times f(1) = 7 \times 0{,}18$.

Indicamos, pela sigla TAV1, o teorema em ação verdadeiro mencionado desta forma:

TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1),\ n \in \mathbb{N}$

Além da estratégia descrita, um (01) grupo (G3) apresentou as resoluções, disponibilizadas na Figura 7 e na Figura 8, que indicam a seguinte soma como estratégia de resolução: $0{,}18+0{,}18+0{,}18=0{,}54$ e $0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}18=1{,}26$ para a compra de três (03) e de sete (07) pães, respectivamente.

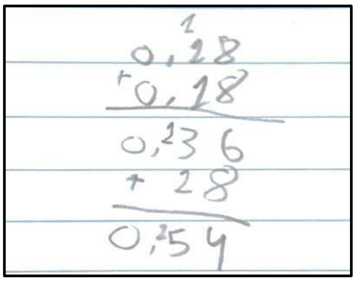


Figura 7 - Resolução apresentada pelo grupo G3 para o item a) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

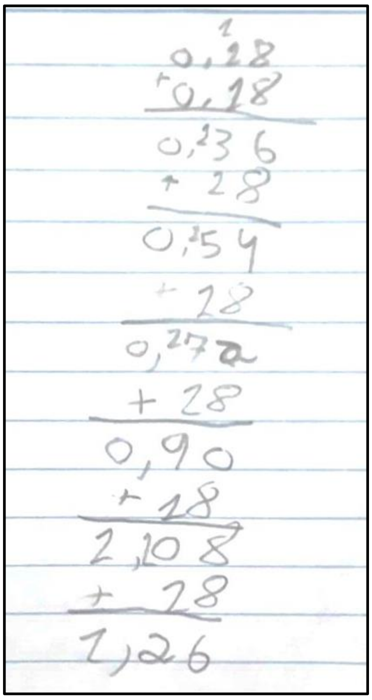


Figura 8 - Resolução apresentada pelo grupo G3 para o item b) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

Para esses casos, em termos matemáticos, assim como apontado por Vergnaud (2007), utiliza-se a propriedade do isomorfismo aditivo para funções lineares, sendo: $f(x+x+x+\cdots+x)=f(x)+f(x)+f(x)+\cdots+f(x)$, para qualquer x. Identificamos essa associação como um teorema em ação verdadeiro, possivelmente mobilizado pelos sujeitos do grupo G1, pois $f(3)=f(1+1+1)=f(1)+f(1)+f(1)=0{,}18+0{,}18+0{,}18=0{,}54$ e $f(7)=f(1+1+1+1+1+1+$

$1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1) = 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 = 1{,}26$.

Sendo assim, indicamos, pela sigla TAV2, o teorema em ação verdadeiro mencionado acima.

TAV2: $f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x),\ \ x \in \mathbb{N}$

Nas estratégias de resolução desenvolvidas para os itens a) e b), consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois, por meio desses cálculos, os estudantes estabelecem uma correspondência entre a quantidade de pães comprados e o valor gasto com a compra dos pães. Além disso, esse valor gasto é determinado por meio da dependência com a quantidade de pães comprados. O mesmo acontece com a ideia de regularidade, pois, para determinar o valor gasto para essas duas quantidades de pães comprados, observa-se a manifestação de uma regularidade a partir do valor unitário do pão. Ressaltamos que, conforme previsto na análise *a priori*, nenhum grupo utilizou o símbolo monetário (R$), no entanto, cindo (05) grupos mencionaram a palavra *reais.*

Os quadros 37 e 38 apresentam as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos nos itens a) e b), respectivamente, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 37: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item a) da atividade 1

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (13)**	**Teoremas em ação**
$3\ X\ 0{,}18 =\ 0{,}54$	G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
$0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 = 0{,}54$	G3	TAV2: $f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x)$

Quadro 38: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item b) da atividade 1

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (13)**	**Teoremas em ação**
$7\ X\ 0{,}18 = R\$\ 1{,}26$	G1, G2, G3, G4,	TAV1: $f(n) =$

	G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13	$f(n \times 1) = n \times f(1)$
$0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}18 = 1.26$	G3	TAV2: $f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x)$

Para o item c) da atividade 1, solicitou-se aos sujeitos que desenvolvessem a generalização por meio da linguagem algébrica. Durante o desenvolvimento desse item, a professora regente da turma chamou a atenção dos alunos para o fato de que algumas expressões algébricas já haviam sido trabalhadas na sala de aula anteriormente, no entanto, eram conhecidas como *lei de formação.*

Nesse item, os sujeitos apresentaram muitas dúvidas, fato que já estava previsto em nossa análise *a priori* por conta dos resultados obtidos no pré-teste. Por isso, foi necessário que a pesquisadora realizasse uma conversa com a turma, lançando questionamentos a respeito das expressões algébricas. Trecho dessa conversa está transcrito a seguir.

Diálogo entre a pesquisadora e a turma - fragmento

\- *Pessoal, o que é uma expressão algébrica?* – a pesquisadora faz o questionamento para a turma.
\- *O jeito que resolve a conta* – aluno A.
\- *Como é a fórmula da conta* – aluno B.
A turma fica em silêncio.
\- *Uma expressão algébrica é uma expressão matemática que envolve letras e números. Vamos dar alguns exemplos de expressões algébricas* – pesquisadora.
\- *3 vezes x* – aluno A.
\- *3 vezes x é uma expressão algébrica, gente?* – pesquisadora.
\- *Sim* – turma.
\- *X mais 2* – aluno C.
\- *X mais 2 é uma expressão algébrica?* – pesquisadora.
\- *Sim* – turma.
\- *Essas expressões que vocês falaram envolvem letras e números. O x representa um número qualquer. Por exemplo, na expressão x+2, eu posso atribuir valores para o x. x pode valer 0, 2, 3 e assim por diante. Agora, vocês têm que pensar em uma expressão que represente essa situação da* atividade – pesquisadora.

Após essa discussão coletiva com a turma, dos treze (13) grupos participantes da pesquisa, nove (09) desenvolveram estratégias corretas para a generalização na linguagem algébrica, as quais variaram entre $Y = 0{,}18 \cdot x$ ou, simplesmente, $0{,}18 \cdot x$, sem mencionar a variável dependente. O diálogo apresentado a seguir é um trecho da conversa entre os integrantes do grupo G5 ao desenvolverem sua estratégia.

Diálogo entre integrantes do grupo 5 (G5) - fragmento

- *Então, seria 18 vezes x. Na verdade, é 0,18 vezes x* – aluno A.
- *Como assim?* – aluno B.
- *O valor do pão é 0,18. Mas a gente não sabe quantos pães ela vai querer, então é x* – aluno A.
- *Verdade* – aluno B.

A partir do diálogo produzido pelo grupo G5, é possível notar que houve uma dialética de validação, pois o aluno A apresentou uma formulação para a situação e validou com o grupo.

A Figura 9 apresenta a resolução desenvolvida pelo grupo.

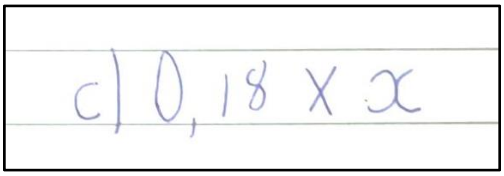


Figura 9 - Resolução apresentada pelo grupo G5 para o item c) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, indicamos a possibilidade de mobilização do TAV1, já mencionado, pois, ao desenvolver a expressão $0{,}18 \cdot x$, os alunos, para determinar o valor gasto com a compra de qualquer quantidade de pães, multiplicam o valor unitário do pão $(0{,}18)$ pela quantidade de pães comprados, neste caso, sendo representado por uma letra (x). Sendo assim, para o desenvolvimento da generalização, os sujeitos mobilizam um teorema em ação já manifestado em casos particulares da situação proposta (TAV1). Além disso, e considerando as demais resoluções dos participantes desta pesquisa no decorrer da sequência didática, indicamos a possibilidade de mobilização de um teorema em ação verdadeiro implícito nas respostas dos alunos relacionado à ideia de generalização ao utilizarem uma letra para representar qualquer quantidade de pão, sendo:

TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.

Outro fato que nos chamou a atenção no desenvolvimento da generalização foi a recorrência nas resoluções dos estudantes ao utilizarem somente a letra x para representar uma quantidade qualquer em todas as respostas durante a resolução de toda sequência didática. Esse fato revela que os sujeitos atrelam uma variável somente à letra x. Acreditamos que, durante as aulas de matemática, a professora regente tenha utilizado apenas essa letra (ou pelo menos a utilizado com predominância) para representar variáveis (e/ou incógnitas). Além disso, a predominância da letra x também pôde ser observada no livro didático Andrini e Vasconcellos (2015) utilizado pela turma, relativo à unidade 4 que trata de funções.

Para as resoluções apresentadas, assumimos que as cinco ideias base relacionadas ao conceito de função foram mobilizadas, pois, ao apresentar a expressão algébrica, os sujeitos, mesmo que implicitamente, utilizam uma variável para representar qualquer quantidade de pães, indicam uma correspondência e uma dependência entre as variáveis *quantidade de pães* e *valor a ser pago, e*stabelecem uma regularidade em relação ao valor unitário do pão e, por meio da expressão algébrica, generalizam a variável *valor a ser pago* para qualquer quantidade de pães comprados.

Ainda nesse item da atividade, quatro (04) grupos apresentaram estratégias incorretas. Um deles (G11) se equivocou na operação matemática e apresentou a expressão $x + 0{,}18 = y$, essa estratégia de resolução incorreta já estava prevista em nossa análise *a priori*.

A Figura 10 apresenta a resolução do grupo G11.

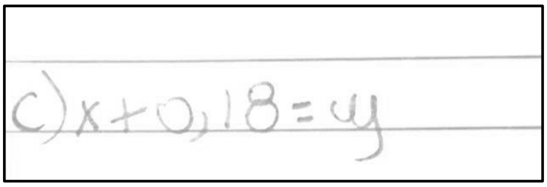


Figura 10 - Resolução apresentada pelo grupo G11 para o item c) da atividade 1
Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, ainda consideramos que as ideias base de variável e correspondência foram mobilizadas, pois esses sujeitos estabeleceram uma correspondência, mesmo que de forma incorreta, entre as variáveis *quantidade de pães* e *valor a ser pago*. Descrevemos a seguir parte do diálogo do grupo G11 ao desenvolver a estratégia mencionada.

Diálogo entre integrantes do grupo 11 (G11) - fragmento

- Olha, vai ser tipo x mais 0,18. Sendo que x é a quantidade de pães que a gente não sabe, mais o valor de cada pão. Como é uma soma de valores, então fica x+0,18 – aluno A.
- Ah tá – aluno B.

No diálogo apresentado por G11 fica evidente que os sujeitos, apesar de desenvolverem uma estratégia de resolução incorreta, mobilizaram o TAV3, pois consideraram uma letra para representar qualquer quantidade.

As demais estratégias incorretas não mostraram relação com os dados apresentados na atividade, sendo elas: $y = 1x$; $2x^2 + 5x - 3$ e $x^2 + 0{,}18 = x$. Acreditamos que, embora já tivessem estudado a *lei de formação* da função afim em momentos anteriores a esta pesquisa, esses sujeitos ainda não compreendiam o que significava representar uma situação por meio de uma expressão algébrica, o que já havia ocorrido no teste diagnóstico aplicado anteriormente.

O Quadro 39 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item c) da atividade 1, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 39: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item c) da atividade 1

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (9)**	**Teoremas em ação**
Com a observação dos casos particulares nos itens a) e b) desenvolve uma das seguintes expressões algébricas para a generalização: $Y = 0{,}18.x$ *ou*	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.

$0{,}18.x$		
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Confunde as operações de multiplicação e adição, apresentando a seguinte expressão: $x + 0{,}18 = y$	G11	TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
$y = 1.x$	G10	Não identificado
$2x^2 + 5x - 3$	G12	Não identificado
$x^2 + 0{,}18 = x$	G13	Não identificado

Conforme previsto na análise *a priori*, os sujeitos apresentaram bom desempenho na atividade 1. Nove (09) dos treze (13) grupos apresentaram estratégias corretas para a generalização na linguagem algébrica. Atribuímos esse acontecimento ao fato de a situação ser de fácil interpretação para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e ser generalizada apenas com uma operação matemática (multiplicação).

Atividade 2

Em relação à atividade 2, nos itens a) e b), doze (12) dos treze (13) grupos apresentaram a mesma estratégia correta, na qual realizaram o cálculo $2 - 0{,}54 = 1{,}46$ para determinar o troco, no caso de três (03) pães comprados, e $2 - 1{,}26 = 0{,}74$ para o caso de sete (07) pães comprados, conforme previsto em nossa análise *a priori*.

As figuras 11 e 12 apresentam esse tipo de resolução desenvolvida pelo grupo 7 (G7).

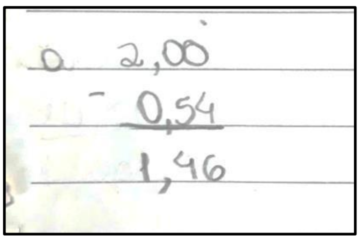


Figura 11- Resolução apresentada pelo grupo G7 para o item a) da atividade 2

Fonte: Dados da pesquisa

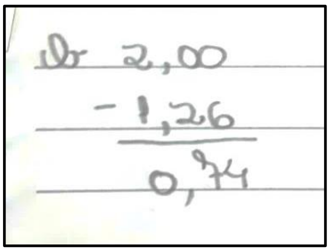


Figura 12- Resolução apresentada pelo grupo G7 para o item b) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa a quantidade de pães comprados e o troco recebido, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismo das relações de proporcionalidade e, nesse caso, $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Identificamos essa associação como um teorema em ação verdadeiro implícito nas respostas dos sujeitos. Nesse caso, $k \times f(x)$ determina o valor gasto com a compra dos pães. Indicamos pela sigla TAV4 o teorema em ação verdadeiro mencionado desta forma:

$$\boxed{\text{TAV4: } f(kx) + c = k \times f(x) + c,\ \ k \in \mathbb{N} \text{ e } c \in \mathbb{R}}$$

Além do teorema mencionado, nas estratégias de resolução desenvolvidas para os itens a) e b) da atividade 2, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois, nos cálculos apresentados, o troco é determinado pelos sujeitos por meio de uma correspondência e uma dependência entre as variáveis *quantidade de pães* e *troco*. Além disso, a ideia de regularidade para a determinação do troco de acordo a quantidade de pães comprados também é manifestada.

Ainda em relação à atividade 2, apenas um (01) grupo (G2) apresentou estratégias incorretas para os itens a) e b). A estratégia, identificada por meio do áudio produzido pelo grupo, não apresenta relação com possíveis estratégias corretas. A seguir apresentamos a transcrição de um trecho do áudio produzido pelo grupo G2.

Diálogo entre integrantes do grupo 2 (G2) - fragmento

- 3 pães deu 54 centavos agora divide por 2 reais. Dá 27 centavos de troco, e agora divide por 2 de novo. A Resposta dá 1 real e 35 centavos – aluno A.
- Huuuun – aluno B.
- Daí pra 7 pães dá 31 centavos de troco – aluno A.

Os quadros 40 e 41 apresentam as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos nos itens a) e b), respectivamente, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 40: Estratégias de resolução apresentadas para o item a) da atividade 2

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (12)**	**Teoremas em ação**
Realiza a subtração do valor inicial pelo valor gasto e apresenta o seguinte cálculo: $2 - 0{,}54 = 1{,}46$	G1, G3, G4, G5, G7, G8, G11	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Realiza novamente o cálculo para determinar o valor gasto e subtrai do valor inicial com os seguintes cálculos: $3\ X\ 0{,}18 = 0{,}54$ $2{,}00 - 0{,}54 = 1{,}46$	G6, G9, G10, G12, G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégia da resolução incorreta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
$0{,}27 \div 2{,}00 = 1{,}35$ (erro no cálculo)	G2	Não identificado

Quadro 41: Estratégias de resolução apresentadas para o item b) da atividade 2

Estratégia da resolução correta	**Quantidade (12)**	**Teoremas em ação**
Realiza a subtração do valor inicial pelo valor gasto e apresenta o seguinte cálculo: $2 - 1{,}26 = 0{,}74$	G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Realiza novamente o cálculo para determinar o valor gasto e subtrai do valor inicial com os seguintes cálculos: $7\ X\ 0{,}18 = 1{,}26$ $2{,}00 - 1{,}26 = 0{,}74$	G6, G9, G10, G12, G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégia da resolução incorreta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
$0{,}63 \div 2 = 0{,}35$ (erro no cálculo)	G2	Não identificado

Para o item c) da atividade 2, é solicitada a quantidade máxima de pães que podem ser comprados tendo disponível apenas $R\$\ 2{,}00$. No entanto, neste caso, é necessário fazer uma análise das possibilidades, uma vez que, para 11 pães comprados, o valor gasto é de $R\$\ 1{,}98$ e, para 12 pães, o valor gasto é de $R\$\ 2{,}16$. Sendo assim, é necessário que os sujeitos interpretem a situação na prática e concluam que a quantidade máxima possível de pães comprados é de 11 pães.

Doze (12) dos treze (13) grupos apresentaram estratégias corretas realizando tentativas de determinação do troco a partir de diferentes quantidades de pães comprados, concluindo que podem ser comprados até 11 pães. Dentre essas estratégias, seis (06) grupos multiplicaram a quantidade de pães comprados pelo valor unitário do pão apresentando o cálculo $11 \times 0{,}18 = 1{,}98$, mobilizando o TAV1.

A Figura 13 apresenta esse tipo de resolução desenvolvida pelo grupo 5 (G5).

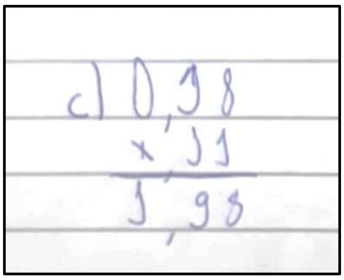


Figura 13 - Resolução apresentada pelo grupo G5 para o item c) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Além dessa estratégia, um (01) grupo apresentou o cálculo $2 \div 0{,}18 = 11{,}1111\ldots$, ou seja, realizou a divisão do valor total pelo valor unitário do pão e também concluiu que é possível comprar até 11 pães. Nesse último caso, também consideramos que houve a mobilização do TAV1 representado por $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$, no entanto, no item c), $n \times f(1) = 2{,}00$.

A figura 14 apresenta esse resolução desenvolvida pelo grupo 9 (G9).

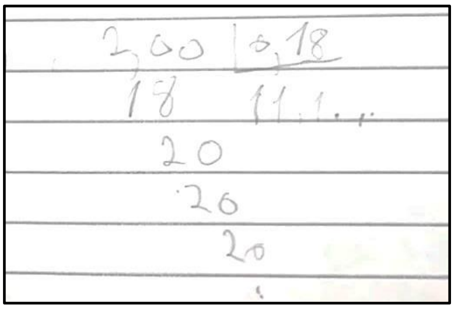


Figura 14 - Resolução apresentada pelo grupo G9 para o item c) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Durante o desenvolvimento das estratégias de resolução mencionadas acima para o item c), foi estabelecida uma correspondência entre o valor gasto e quantidade de pães comprados, estabelecendo também uma regularidade para a determinação da variável dependente. Dessa forma, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

Além das estratégias apresentadas, cinco (05) grupos não especificaram suas estratégias de resolução, apresentando apenas a resposta final, e um (01) grupo não apresentou resolução para esse item da atividade.

O Quadro 42 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item c) da atividade 2, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 42: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item c) da atividade 2

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (7)**	**Teoremas em ação**
Realiza tentativas até concluir que é possível comprar 11 pães. Apresenta o cálculo: $11\ X\ 0{,}18 = 1{,}98$	G1, G4, G5, G8, G12, G13	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Divide o valor inicial (R$ 2,00) pelo valor unitário do pão apresentando o cálculo: $2 \div 0{,}18 = 11{,}111\ ...$	G9	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Não apresenta estratégia e o resultado é correto	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Apenas afirma que é possível comprar 11 pães.	G3, G6, G7, G10, G11	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Em branco	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G2	Não identificado

Para o item d) da atividade 2, foi solicitado aos alunos que desenvolvessem a generalização na linguagem natural, descrevendo os passos para se determinar o troco para a compra de uma quantidade qualquer de pães, ou seja, a forma predicativa do conhecimento indicada por Vergnaud (2003). Segundo esse autor, é importante propor aos alunos situações que permitam verificar o desenvolvimento das competências, tanto do fazer como do dizer (explicitar seus conhecimentos manifestados na ação).

Esse item gerou bastante dúvida por parte dos alunos, que alegaram nunca terem tido contato com esse tipo de questionamento, o que estava previsto nas análises *a priori* em decorrência dos resultados obtidos com o teste diagnóstico. Sendo assim, foi necessário que a pesquisadora realizasse uma conversa com a turma a respeito da generalização utilizando a linguagem natural, deixando claro que deveriam ser descritos os cálculos necessários para a determinação do troco para aquela situação, considerando qualquer quantidade de pães comprados.

Ainda assim, para esse item, apenas três (03) grupos apresentaram estratégias corretas, descrevendo que, para determinar o troco, é necessário multiplicar a quantidade de pães comprados pelo preço unitário do pão. Em seguida, é preciso fazer $2{,}00$ menos o resultado obtido anteriormente na multiplicação, mobilizando o TAV4 por meio da forma predicativa do conhecimento.

A Figura 15 apresenta a resolução de um desses grupos (G6).

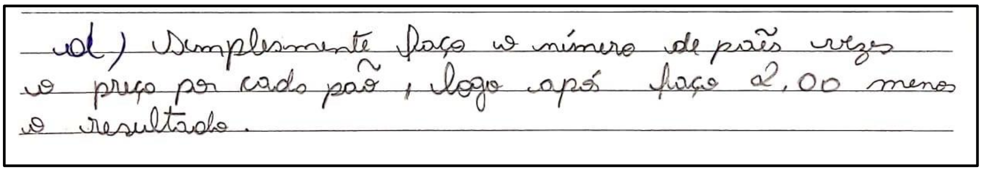

d) Simplesmente faço o número de pães vezes o preço por cado pão, logo após faço 2,00 menos o resultado.

Figura 15 - Resolução apresentada pelo grupo G6 para o item d) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Além dessas estratégias, um (01) grupo desenvolveu uma estratégia parcialmente correta, na qual foram especificados os cálculos necessários, porém não foi utilizado o valor das variáveis dadas na situação. Para essa situação, apresentamos, na Figura 16, a resolução desenvolvida pelo grupo (G11) e, na sequência, transcrevemos um trecho do áudio produzido pelos seus integrantes.

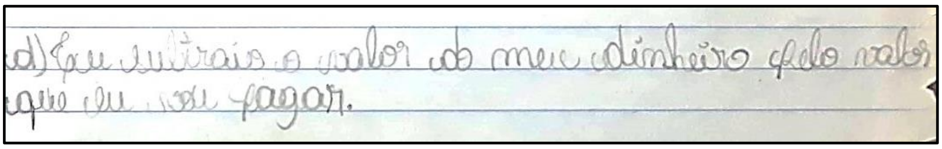

d) Eu subtraio o valor do meu dinheiro pelo valor que eu vou pagar.

Figura 16 - Resolução apresentada pelo grupo G6 para o item d) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Diálogo entre integrantes do grupo 11 (G11) - fragmento

- Coloca assim, Fernanda foi ao mercado... – aluno A.
- Pera aí, ela tinha 2 reais né? – aluno B.
- Mas pode colocar outro preço, coloca 3 reais – aluno A.
- É? – aluno B.
- É, inventa um problema. Tipo assim, ela comprou balas de 40 centavos e ela tinha 3 balas, quanto ia vir de troco pra ela? – aluno A.
- Vai dar 1 real e 20 centavos. Sobra 1,80 – aluno B.
- Então escreve aí, fui ao mercado com 3 reais e comprei 3 balas de 40 centavos, aí coloca o troco – aluno A.

- Não. Então na verdade o que eu tenho que fazer é subtrair o valor que eu tenho pelo valor que eu tenho que pagar. Vou colocar isso – aluno B.

É possível perceber, pela discussão dos alunos, que a intenção era generalizar a determinação do troco para qualquer situação, não apenas para a proposta da atividade. Houve a validação para a situação que eles criaram. Consideramos que, com o desenvolvimento dessa estratégia de resolução os sujeitos mobilizaram o TAV4 na forma predicativa do conhecimento.

Para os casos descritos, consideramos que as cinco ideias base do conceito de função foram mobilizadas, pois, ao generalizarem a situação por meio da linguagem natural, os sujeitos estabeleceram uma correspondência, uma dependência e uma regularidade entre as variáveis *quantidade de pães* e *troco*.

Além disso, seis (06) grupos apresentaram estratégias incorretas, das quais quatro (04) nos chamaram a atenção por considerarem valores específicos para representar qualquer quantidade. Esse fato havia sido observado nos resultados obtidos do teste diagnóstico e, por isso, estava previsto em nossa análise *a priori*. Nesse sentido, a pesquisadora enfatizou com a turma que, quando mencionamos *qualquer quantidade,* precisamos levar em conta que aquela situação não pode ser descrita apenas para um valor específico.

Ainda assim, três (03) grupos consideraram a situação para o caso de qualquer quantidade como sendo a quantidade máxima possível de pães comprados (11 pães) e calcularam o troco recebido.

A Figura 17 apresenta a resolução feita pelo grupo (G1).

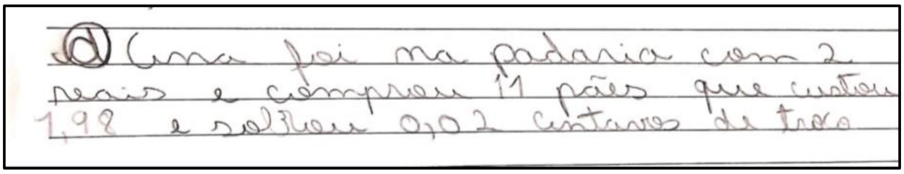

d) Uma foi na padaria com 2 reais e comprou 11 pães que custou 1,98 e voltou 0,02 centavos de troco

Figura 17 - Resolução apresentada pelo grupo G1 para o item d) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, um (01) grupo não considerou que $2{,}00$ reais é parte fixa na situação e calculou a quantidade de pães que é possível comprar e o troco recebido tendo disponível apenas $0{,}50$ centavos.

A resolução apresentada por esse grupo pode ser vista na Figura 14.

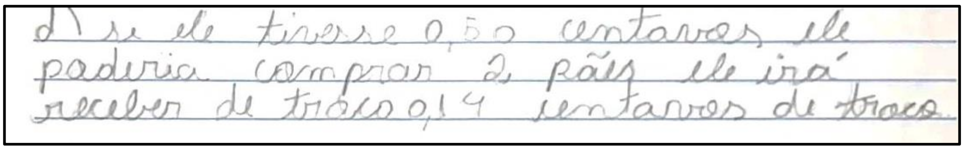


Figura 18 - Resolução apresentada pelo grupo G12 para o item d) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Assim, indicamos a possibilidade de mobilização de um teorema em ação falso implícito nas respostas dos sujeitos quando utilizam uma quantidade específica para identificar qualquer quantidade possível assumida por uma variável, que é apontada pela mobilização do TAF1:

TAF1: Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.

Essa dificuldade em generalizar fatos é mencionada por Tinoco (2011) quando afirma que "[...] os alunos generalizam fatos, verificando apenas a sua validade para casos particulares" (p. 51), no entanto, "[...] é preciso que desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os" (CIANI; NOGUEIRA; BENS, 2019).

Ainda em relação ao item d) da atividade 2, dois (02) grupos não apresentaram estratégias de resolução deixando o item da atividade em branco. Dos treze (13) grupos participantes da pesquisa, apenas três (03) grupos desenvolveram esse item corretamente, deixando evidente mais uma vez as dificuldades dos sujeitos em mobilizar a generalização na linguagem natural (forma predicativa do conhecimento).

O Quadro 43 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item d) da atividade 2, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 43: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item d) da atividade 2

Estratégia das resoluções corretas	Quantidade (3)	Teoremas em ação
Descreve que, para determinar o troco, é necessário multiplicar o número de pães comprados pelo preço unitário do pão, em seguida, diminui 2,00 do resultado obtido.	G5, G6, G9	TAV4: $f(kx)+c = k \times f(x)+c$

Estratégia da resolução parcialmente correta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Afirma que é necessário subtrair do dinheiro que possui o valor a ser pago, mas não utiliza as variáveis da situação proposta.	G11	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Afirma que é necessário descobrir o valor de cada pão e dividir pelo valor inicial.	G7	Não identificado
Baseados na quantidade máxima possível de pães a serem comprados, escolhe uma quantidade específica para representar qualquer quantidade, afirmando que, se Ana comprar 11 pães, vai gastar $1{,}98$ reais e sobram 0.02 centavos de troco.	G1, G4, G13	TAF1: Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.
Escolhe uma quantidade específica de pães para representar qualquer quantidade, afirmando que, se uma pessoa tiver 0,50 centavos, é possível comprar 2 pães e sobrará 0,14 centavos de troco.	G12	TAF1: Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.
Não apresenta estratégia e a resolução é incorreta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Afirma apenas que é necessário fazer contas.	G3	Não identificado
Em branco	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G2, G8, G10	Não identificado

No último item da atividade 2 (item e)), solicitou-se que os alunos desenvolvessem a generalização na linguagem algébrica. Esse item novamente gerou dificuldades, pois apenas um (01) grupo apresentou uma estratégia correta, utilizando a expressão $T = 2{,}00 - 0{,}18x$ para a determinação do troco na compra de qualquer quantidade de pães, na qual $0{,}18x$ representa o valor gasto com os pães.

A Figura 19 apresenta essa resolução, que foi desenvolvida pelo grupo G8.

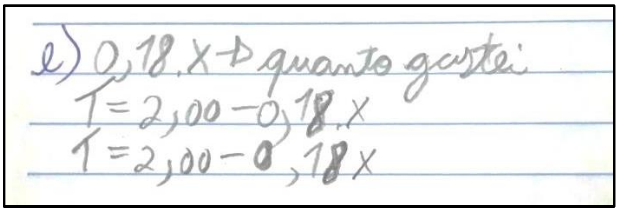


Figura 19 - Resolução apresentada pelo grupo G8 para o item e) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Além da resolução apresentada, três (03) grupos desenvolveram uma estratégia correta, no entanto, utilizaram duas expressões algébricas: $0{,}18x = y$, para representar o valor gasto com os pães, e $2{,}00 - y$, para representar o troco.

A Figura 20 apresenta a resolução desenvolvida pelo grupo G5.

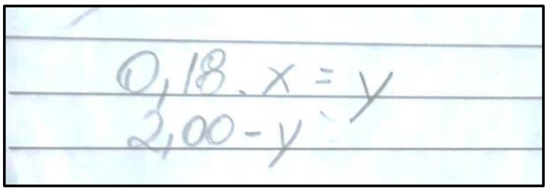


Figura 20 - Resolução apresentada pelo grupo G5 para o item e) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

Ao desenvolverem essas estratégias, os sujeitos mobilizaram, mesmo que implicitamente, o TAV4 para a determinação do troco e o TAV3 por utilizarem uma letra para representar qualquer quantidade. Chamamos a atenção para o fato de que esses grupos também desenvolveram corretamente a generalização na linguagem natural, solicitada no item anterior, ou seja, apresentaram estratégias corretas para a linguagem algébrica e para a linguagem natural, o que, segundo Vergnaud (2007), é sinal de aprendizagem.

Para os casos mencionados, consideramos que as ideias base de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização foram mobilizadas, pois, ao estabelecerem uma expressão algébrica, que relaciona as variáveis *quantidade de pães* e *troco*, os sujeitos estabelecem uma relação de dependência entre essas variáveis a partir de uma regularidade observada. É importante observar, também, que todos os grupos mencionados utilizaram a letra x para representar a variável independente (quantidade de pães comprados), fato que também ocorreu nas atividades anteriores.

Além disso, das seis (06) estratégias incorretas, duas apresentaram os cálculos para a determinação do troco a partir de uma quantidade específica de pães comprados (11 pães), fato que já estava previsto na análise *a priori*, confirmando novamente a manifestação do TAF1. Nesse sentido, Tinoco (2011) observa que, muitas vezes, os alunos apresentam dificuldades em admitir que números possam ser representados por símbolos. Para Lannin (2009), o foco dos alunos em encontrar uma fórmula para um caso específico, em vez de considerar uma relação geral, muitas vezes limita seu sucesso.

Uma dessas resoluções é mencionada pelo grupo G6 e apresentada na Figura 21.

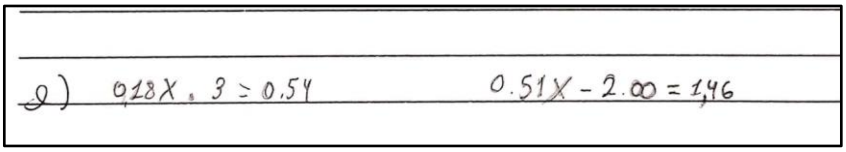


Figura 21 - Resolução apresentada pelo grupo G6 para o item e) da atividade 2
Fonte: Dados da pesquisa

As outras quatro expressões algébricas desenvolvidas pelos sujeitos não estavam previstas em nossa análise *a priori* e não tinham relação com a expressão algébrica esperada. Além disso, três (03) grupos não apresentaram estratégias de resolução, deixando o item em branco. O Quadro 44 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item e) da atividade 2, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 44: Estratégias de resolução apresentadas no item e) da atividade 2

Estratégia da resolução corretas	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Baseado nos casos particulares apresentados nos itens anteriores, desenvolve a seguinte expressão algébrica: $$T = 2{,}00 - 0{,}18x$$	G8	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Baseado nos cálculos realizados nos itens anteriores da atividade e na generalização por meio da língua natural, apresenta duas expressões algébricas, uma para representar o valor gasto e outra para representar o troco: $$0{,}18.x = y$$ $$2{,}00 - y$$	G5, G6, G9	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Estratégia das resoluções incorretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Baseados na quantidade máxima possível de pães a serem comprados, escolhe uma quantidade específica (11 pães) para representar qualquer quantidade e faz os cálculos para determinar o troco para essa quantidade específica de pães comprados.	G4, G13	TAF1: Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.
Com a intenção de dividir o valor disponível pelo valor unitário do pão, apresenta a seguinte expressão: $$y = \frac{2 - x}{0{,}18}$$	G7	TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Não apresenta estratégia e a resolução é incorreta	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
$2x^2 + 5x - 3$	G11, G12	Não identificado
$2xy$	G3	Não identificado
Em branco	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1, G2, G10	Não identificado

Diante do exposto, pudemos notar que a atividade 2 foi bem interpretada pelos sujeitos, pois a maioria dos grupos apresentou estratégias coerentes para os três primeiros itens da atividade. No entanto, fica aparente a dificuldade na mobilização da generalização com duas operações matemáticas, tanto na linguagem natural (forma predicativa do conhecimento) quanto na linguagem algébrica (forma operatória do conhecimento), mesmo quando compreendem o contexto da situação.

Discussão sobre as atividades 1 e 2

Depois de recolhidas as resoluções das atividades 1 e 2, foi necessário realizar uma conversa com a turma com a intenção de esclarecer o significado de uma quantidade *qualquer* de pães. Nesse momento, discutiu-se com os sujeitos a respeito das resoluções apresentadas por eles, fossem elas corretas ou não. A pesquisadora apresentou uma breve explicação em relação ao termo *expressão algébrica* solicitado nas atividades, deixando clara a necessidade de utilizar uma letra para representar qualquer valor para a variável independente na expressão algébrica. A seguir é apresentado um trecho dessa conversa.

Diálogo entre pesquisadora e a turma - fragmento

- Pessoal, o que significa comprar uma quantidade qualquer de pães? – pesquisadora faz o questionamento para a turma.
A turma permanece em silêncio
- A expressão que nós vamos determinar tem que servir para a compra de 1 pão, de 5 pães, de 8 pães, de 3 pães, de 7 pães e assim por diante. Então nós não podemos escolher uma quantidade específica de pães. Quando dizemos que a expressão é para qualquer quantidade, significa que aquela expressão tem que servir pra qualquer número de pães que eu escolher. O que vocês colocaram no item c) da atividade 1? – pesquisadora.
- X vezes 0,18 – aluno A.
- Ok. Então vamos colocar assim.. V de valor a ser pago = $x \cdot 0{,}18$*. Mas o que significa então essa expressão?* – pesquisadora.
- O que eu tenho que pagar – turma.
- E dá certo para a situação que a gente quer? – pesquisadora.
- Sim – turma.
- 0,18 representa o quê? – pesquisadora.
- O preço do pão – turma.
- E o x? – pesquisadora.
- A quantidade – turma.

- Isso, a quantidade de pães que eu comprar. Então se eu comprar 3 pães, como no item a), eu colocaria o x valendo 3, e ficaria $3 \cdot 0{,}18$ *e para 7 pães ficaria* $7 \cdot 0{,}18$. *Significa que essa expressão serve para qualquer quantidade de pães que eu comprar, por isso tenho que utilizar uma letra para representar essa quantidade de pães comprados que eu não sei qual é. Então o valor a ser pago é o preço do pão multiplicado pela quantidade de pães comprados* – pesquisadora.

Com a análise das respostas dos alunos para as atividades 1 e 2, percebemos que, nos itens que exigem apenas cálculos numéricos, houve um bom desempenho dos alunos, pois a maioria dos grupos apresentou estratégias corretas. No entanto, embora tenham compreendido a contextualização das atividades 1 e 2, os alunos mostraram dificuldades na generalização para essas situações.

5.2 Atividade 3

Apresentamos, a seguir, a atividade 3, que compõe a sequência didática desta pesquisa, seguida das análises *a posteriori* e da descrição dos momentos de discussão da atividade com a turma.

Atividade 3

A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas, o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Análise a posteriori

A aplicação da atividade 3 ocorreu no dia 02 de agosto de 2019, teve duração de 1 hora/aula e contou com a participação de 28 alunos divididos em 14 duplas.

O item a) da atividade 3 requer que os sujeitos determinem o valor gasto para a situação de uma pessoa que realizou a matrícula, mas não cursou nenhuma língua. A maioria dos grupos (9 grupos) apresentou uma estratégia de resolução correta, afirmando que será gasto apenas o valor da matrícula (R$ 150), já que o valor de cada mensalidade é multiplicado por 0 (quantidade de meses).

A Figura 22 apresenta a resolução desenvolvida por um desses grupos (G12).

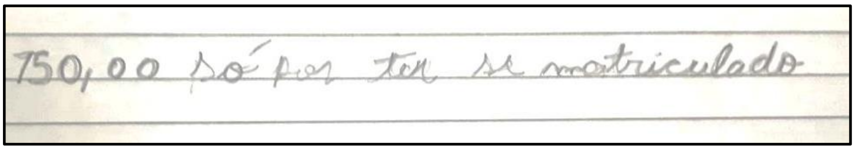


Figura 22 - Resolução apresentada pelo grupo G12 para o item a) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Um trecho do diálogo desenvolvido pelo grupo G12 em uma situação de validação é transcrito a seguir. Os alunos buscam tentativas de apresentar uma resolução adequada para a situação e depois validam a situação.

Fragmento do diálogo entre integrantes do grupo 12 (G12)

O grupo lê a atividade
- *Tem quantos cursos?* – aluno A.
- *Tem três cursos. Mas ele fez a matrícula e não compareceu em nenhum curso.* – aluno B.
- *Então dá 450 reais. É 150 vezes 3* – aluno A.
- *Mas por quê? Ele não pagou a mensalidade, ele não fez o curso. Então só pagou a taxa de matricula* – aluno B.
- *Mas está falando "ele não fez nenhum dos cursos", então quer dizer que ele se matriculou nos três cursos, mas não fez nenhum. Ele pagou a matrícula dos três cursos* – aluno A.
- *Mas olha aqui, ele pagou uma taxa, só uma. É 150 reais* – aluno B.
- *Huuuuum. Então tá* – aluno A.

Leem novamente a atividade
- *Então coloca aí 150 reais* – aluno A.

É possível notar, por meio do fragmento apresentado, que o enunciado da atividade pode ter causado conflito na interpretação do contexto para um dos sujeitos. O trecho *“Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?”* permitiu que o sujeito interpretasse que foram feitas três matrículas, uma para cada curso. Entretanto, essa interpretação só apareceu no diálogo do grupo G12.

Para o item a) da atividade 3, em termos matemáticos, ao denominar por f a função real que associa a quantidade de meses e o valor gasto com o curso, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismo das relações de proporcionalidade, nesse caso, $f(kx)+c=k\times f(x)+c$, para c e k números reais. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV4, manifestado na atividade 2. No entanto, na presente situação, k, que representa a quantidade de meses, vale 0 e $f(x)=f(1)$, pois representa o valor de uma mensalidade. A constante c representa o valor gasto com a matrícula, ou seja, $R\$\ 150{,}00$. Sendo assim:

$$f(kx)+c=k\times f(x)+c\Rightarrow 0\times f(1)+150=0\times 90+150=150$$

Nessa estratégia de resolução desenvolvida para o item a) da atividade 3, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois o valor gasto é determinado pelos sujeitos por meio de uma correspondência e uma dependência com a variável *quantidade de meses*. Além disso, a ideia de regularidade para a determinação do valor gasto conforme a quantidade de meses também está presente.

Ainda para esse item, observamos duas estratégias de resolução incorretas, das quais, quatro (04) grupos apresentaram o cálculo $150+90=240$, considerando o valor da matrícula e o valor de uma mensalidade.

A Figura 23 apresenta a resolução desenvolvida pelo grupo G5.

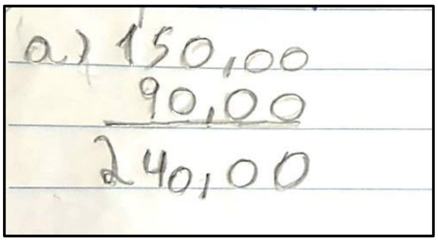


Figura 23 - Resolução incorreta do grupo G5 para o item a) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Nesses casso, os alunos não multiplicaram o valor da mensalidade pela quantidade de meses (0×90) e consideraram o valor de uma mensalidade. Sendo assim, é possível associar um teorema em ação falso às respostas apresentadas pelos alunos, pois consideraram que $f(kx) + c = f(x) + c$, para k e c números reais. Logo:

TAF2: $f(kx) + c = f(x) + c,\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$

Além dessa resolução incorreta, um (01) grupo afirmou que não foi necessário pagar nada, desconsiderando o valor da matrícula. Essa resolução desenvolvida pelo grupo G11 é apresentada na Figura 24.

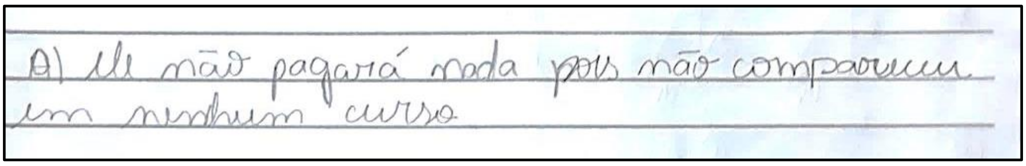


Figura 24 - Resolução apresentada pelo grupo G11 para o item a) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Na estratégia desenvolvida pelo grupo G11, podemos notar que os integrantes desse grupo consideram que, como a quantidade de meses é zero, então não se gastou com a mensalidade, mas não atentam ao valor fixo (valor da matrícula). Sendo assim, é possível associar um teorema em ação falso, manifestado também em outros momentos dessa sequência diática, associado às respostas dos alunos, pois consideraram que $f(kx) + c = k \times f(x)$ para k e c números reais. Logo:

TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x),\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$

O Quadro 45 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa no item a) da atividade 3, assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 45: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item a) da atividade 3

Estratégia da resolução correta	**Quantidade (9)**	**Teoremas em ação**
Observa os dados contidos no enunciado e afirma que o valor gasto será de $R\$\ 150{,}00$.	G1, G2, G4, G6, G7, G8, G9,	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$

	G12 e G13	
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Considera o valor da matrícula e de uma mensalidade e, assim, apresenta o cálculo $150+\ 90$ afirmando que o valor gasto será de $R\$\ 240{,}00$.	G3, G5, G10 e G14	TAF2: $f(kx)+c=f(x)+c$
Não considera o valor gasto com a matrícula e afirma que o aluno não pagará nada, pois não compareceu em nenhum curso.	G11	TAF3: $f(kx)+c=k\times f(x)$

O item b) propõe que os alunos calculem o valor gasto por uma pessoa que realizou por 4 meses o curso de inglês. Para esse item, dez (10) grupos apresentaram a mesma estratégia correta. Nesses casos, os sujeitos multiplicaram o valor da mensalidade por 4 e, por fim, somaram o valor da matrícula ao resultado obtido. Acreditamos que o TAV4 foi mobilizado novamente e, nesse caso, $k=4$, pois k representa a quantidade de meses, $x=1$, pois representa o valor de uma mensalidade, e $c=150$, pois representa o valor fixo da matrícula. Sendo assim:

$$f(kx)+c=k\times f(x)+c\Rightarrow 4\times f(1)+150=4\times 90+150=510$$

A Figura 25 apresenta essa estratégia desenvolvida pelo grupo G9.

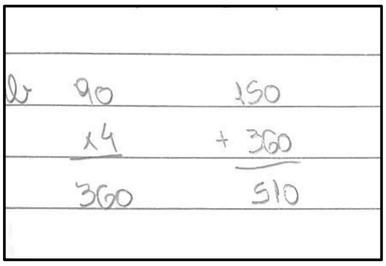


Figura 25 - Resolução apresentada pelo grupo G9 para o item b) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa estratégia de resolução desenvolvida para o item b) da atividade 3, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois o valor gasto é determinado pelos sujeitos por meio de uma correspondência e de uma dependência com a variável *quantidade de meses*. Além disso, a ideia de regularidade para a determinação do valor gasto conforme a quantidade de meses também está manifestada.

Ainda para esse item, quatro (04) grupos apresentaram uma estratégia incorreta, que foi considerar apenas o valor das mensalidades, desconsiderando o valor gasto com a matrícula. Sendo assim, esses sujeitos multiplicaram o valor da mensalidade pela quantidade de meses, ou seja, $k = 4$, e, então, mobilizaram o TAF3 mencionado no item anterior, pois consideram que $f(kx) + c = k \times f(x)$.

A Figura 26 apresenta essa resolução desenvolvida pelo grupo G11.

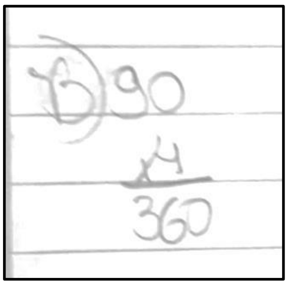


Figura 26 - Resolução apresentada pelo grupo G11 para o item b) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Para essa estratégia de resolução, consideramos que também foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois, mesmo de maneira equivocada, esses sujeitos relacionaram as variáveis *quantidade de meses* e *valor gasto* estabelecendo as propriedades dessas ideias bases.

Todas as estratégias apresentadas pelos sujeitos no item b) da atividade 3 estavam previstas em nossa análise *a priori*. Apresentamos a seguir o Quadro 46 com as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos desta pesquisa no item b), assim como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 46: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da atividade 3

Estratégia da resolução correta	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**
Considera o valor da matrícula e de 4 mensalidades, concluindo que o valor gasto será de $R\$\ 510{,}00$. Apresenta os cálculos: $90\ X\ 4 = 360$ $360 + 150 = R\$\ 510{,}00$	G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G12 e G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Considera apenas o valor da mensalidade e apresenta o cálculo $90\ X\ 4 = R\$\ 360{,}00$.	G2, G10 e G11 e G14	TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x)$

No item c) da atividade, é necessário que os alunos calculem a variável dependente na situação a partir de um valor dado para a variável independente.

Nesse caso, é dada a informação de uma pessoa que gastou $R\$\,1230{,}00$ com o curso de inglês e é perguntada a quantidade de meses que essa pessoa cursou.

Para esse item, houve apenas uma resposta incorreta, na qual o grupo apresentou a seguinte resposta: *“fez o curso por 1 ano e 1 mês”.* Embora não tenha deixado clara a sua estratégia de resolução, acreditamos que foi considerado apenas o valor da mensalidade (R$ 90), realizando o cálculo $1230 \div 90 = 13{,}66$ e concluindo que o curso foi realizado por 13 meses. Nesse caso, os alunos mobilizaram o TAF3 mencionado no item a) da atividade, pois, ao desconsiderarem o valor da matrícula, consideraram que $f(kx) + c = k \times f(x)$. Mesmo desenvolvendo uma estratégia incorreta, o grupo mobilizou as ideias base de dependência, correspondência e regularidade.

Outros quatro (04) grupos, embora tenham apresentado a resposta correta, não demonstraram sua estratégia de resolução, expondo apenas o resultado final. Dos grupos que apresentaram suas estratégias corretas, quatro (04) realizaram os cálculos $1230 - 150 = 1080$ e $1080 \div 90 = 12$, concluindo que o valor para a variável independente é 12. Nesses casos, o TAV4 foi mobilizado novamente, pois esses sujeitos consideraram que $f(kx) + c = k \times f(x) + c,$ no entanto, para esse item, o valor desconhecido é representado pela letra k (quantidade de meses), x vale 1, pois representa uma mensalidade, e a constante c, que representa o valor da matrícula, vale 150. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow k \times f(1) + 150 = k \times 90 + 150 = 1230$$

A Figura 27 apresenta esse tipo de resolução desenvolvida pelo grupo G9.

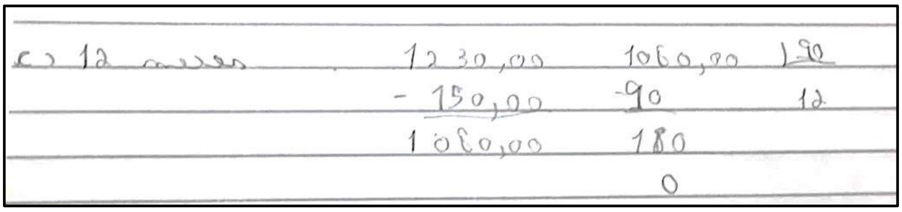


Figura 27 - Resolução apresentada pelo grupo G9 para o item c) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Outros cinco (05) grupos apresentaram os cálculos $90 \cdot 12 = 1080$ e $1080 + 150 = 1230$ demonstrando que o curso foi realizado por 12 meses. Esses grupos também mobilizaram o TAV4, atribuindo os seguintes valores: $k = 12$, $x = 1$ e $c = 150$. Desse modo:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 12 \times f(1) + 150 = 12 \times 90 + 150 = 1230.$$

A Figura 28 apresenta esse tipo de resolução desenvolvida pelo grupo G1.

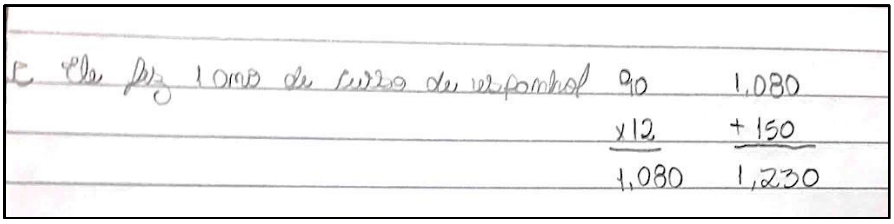


Figura 28 - Resolução apresentada pelo grupo G1 para o item c) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos, ainda, um trecho do diálogo do grupo G1 que deixa claro que os alunos atribuíram valores para a variável independente até chegarem à resposta correta, ou seja, a estratégia utilizada foi por tentativa e erro. Acreditamos que esses alunos estejam em situação de formulação.

Diálogo entre integrantes do grupo 1 (G1) - fragmento

O grupo lê a letra c)
- *Como será que faz?* – aluno A.
- *Tem que ver quantos meses a pessoa fez o curso. Vamos chutar o valor, fala aí um valor pra colocar nos meses.* – aluno B.
- *Coloca 6 meses* – aluno A.
- *Tem que testar pra 6 meses então. Faz aí* 6×90 *e depois soma 150* – aluno B.
- *Dá 690, não dá certo* – aluno A.
- *Faz pra 10 meses* – aluno B.
- *Dá 1050. É mais ainda* – aluno A.
- *Mas está perto. Faz pra 12 meses* – aluno B.
- *Dá certo, dá 1230* – aluno A.
- *Então a reposta é 12 meses. Coloca essa conta* – aluno B.

Nesses casos, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois esses sujeitos estabeleceram o valor a ser pago por meio da correspondência e dependência com a variável quantidade de meses. Além disso, é percebida uma regularidade entre essas variáveis.

A seguir apresentamos o Quadro 47 com as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa no item c) da atividade 3, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 47: Estratégias de resolução desenvolvidas no item c) da atividade 3

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (9)**	**Teoremas em ação**
Observa a regularidade desenvolvida nos itens anteriores e subtrai o valor da matrícula do gasto total, depois divide o resultado por 90. Conclui que o curso foi realizado por 12 meses. Apresenta os seguintes cálculos: $1230 - 150 = 1080{,}00$ $1080 \div 90 = 12$	G7, G8, G9 e G11	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Observa a regularidade desenvolvida nos itens anteriores e por meio de tentativas conclui que o curso foi realizado por 12 meses, apresentando os seguintes cálculos: $90 \times 12 = 1080{,}00$ $1080 + 150 = 1230{,}00$	G1, G4, G10, G13 e G14	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Não apresenta estratégia, e o resultado é correto	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Apenas afirma que o aluno terá feito 12 meses de curso.	G3, G5, G6 e G12	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Não apresenta estratégia, e o resultado é incorreto	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Afirma que o aluno terá feito 1 ano e 1 mês de curso.	G2	TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x)$

No item d) da atividade 3, solicita-se que o aluno determine a expressão algébrica que representa o valor a ser pago para qualquer quantidade de meses cursados. A partir da regularidade observada nos itens anteriores, é possível observar um padrão válido para mais casos e desenvolver a generalização.

Nesse caso, oito (08) grupos desenvolveram estratégias corretas, variando entre as expressões $V = 150 + 90x$ e $V = 90x + 150$, que são idênticas do ponto de vista matemático devido à comutatividade da operação de adição, mobilizando as cinco ideias base do conceito de função. Apresentamos a seguir a resolução desenvolvida pelo grupo G8 (Figura 29).

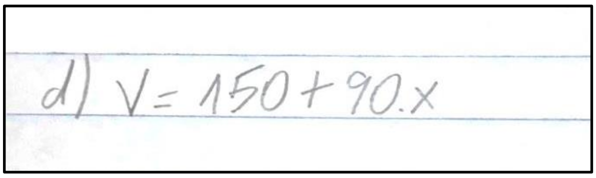


Figura 29 - Resolução apresentada pelo grupo G8 para o item d) da atividade 3
Fonte: Dados da pesquisa

O diálogo transcrito a seguir apresenta as discussões desenvolvidas pelo grupo G8 ao desenvolver a generalização algébrica. É possível notar que um dos alunos está em situação de validação e tenta convencer o amigo.

Fragmento do diálogo entre integrantes do grupo 8 (G8)

O grupo lê o item d)
- *Pra quantos meses é pra fazer?* – aluno A.
- *Qualquer. Tem que colocar x* – aluno B.
- *Huuuum, vai ficar x o quê?* – aluno A.
- *X ponto 90....* – aluno B.

Lê novamente o item d)
- *Tem que colocar o 150 da matrícula* – aluno B.
- *Mas daí vai fazer mais 90?* – aluno A.
- *Você tem que colocar vezes 90 e o 150 só paga uma vez* – aluno B.
- *Qualquer quantidade de meses, não precisa colocar 90, só o x que é pra qualquer quantidade de mês* – aluno A.
- *Mas tem que colocar o 90, porque o 90 é pra cada mês* – aluno B.
- *Como assim?* – aluno A.
- *Olha só, ele só vai pagar o 150 uma vez. Digamos que ele faz 3 meses de curso, ele vai pagar 3 vezes 90 reais. Então V que é o valor pago é igual a X vezes 90* – aluno B.
- *E o 150?* – aluno A.
- *X vezes 90 mais 150* – aluno B.
- *Pode ser – aluno B.*

Pode-se notar que esses sujeitos desenvolveram uma expressão do tipo $k \times f(x) + c$ correspondente ao valor a ser pago, ou seja, mobilizaram o TAV4 que modela a situação proposta na atividade 3. Além desse teorema em ação, por meio do diálogo apresentado pelos sujeitos, notamos que o TAV3 também foi mobilizado, pois esses sujeitos utilizaram uma letra para representar qualquer quantidade.

Além da estratégia apresentada, embora a maioria dos grupos tenha desenvolvido corretamente os itens anteriores da atividade, seis (06) grupos apresentaram estratégias incorretas para a generalização. Três (03) grupos desenvolveram a expressão algébrica $V = 90x$, ou seja, desconsideraram o valor fixo da matrícula (constante c) e mobilizam o TAF3 ao considerarem que $f(kx) + c = k \times f(x)$

Um (01) grupo apresentou a expressão $240 + 90x$, ou seja, por meio de uma interpretação inadequada e consideraram duas vezes a parte variável ($90 + 150 = 240$). Notamos que esse grupo apresentou resposta correta para o item anterior, calculando o valor gasto para 12 meses de curso, no entanto, ao formular a generalização, realizou operações equivocadas.

Dois (02) grupos desenvolveram a expressão algébrica $240x$, nesse caso, somando a parte fixa à parte variável. Os alunos já haviam desenvolvido resoluções inadequadas no item a) da atividade, utilizando estratégias semelhantes. Sendo assim, consideramos que esses alunos manifestaram a possibilidade de teorema em ação falso em suas resoluções, ao somar o valor da mensalidade (90) com o valor da matrícula (150) e multiplicar pela variável da situação (quantidade de meses), ou seja, consideram que $f(kx) + c = (k + c)x$ para k e c números reais. Logo:

TAF4: $f(kx) + c = (k + c)x$, $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$

Para os casos mencionados, consideramos que as ideias base de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização foram mobilizadas, pois, ao estabeleceram uma expressão algébrica que relaciona as variáveis *quantidade de meses* e *valor a ser pago*, os sujeitos estabelecem uma relação de correspondência e dependência entre essas variáveis a partir de uma regularidade observada. Além disso, chamamos a atenção para o fato de que novamente os sujeitos da pesquisa utilizaram somente a letra x para representar a variável independente (quantidade de meses).

A seguir apresentamos o Quadro 48 com as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa no item d) da atividade 3, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 48: Estratégias de resolução desenvolvidas no item d) da atividade 3

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (8)**	**Teoremas em ação**
Observa a regularidade nos itens anteriores da atividade e apresenta a expressão algébrica $V = 150 + 90x$	G1, G3, G4, G7, G8, G9, G11 e G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Estratégia das resoluções incorretas	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
Não compreende a regularidade presente na situação e desconsidera o valor da matrícula, apresentando a expressão algébrica $V = 90x$	G2, G6 e G12	TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x)$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Não observa a regularidade presente na situação e apresenta a expressão algébrica $240 + 90x$	G10	TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Não observa a regularidade presente na situação e apresenta a expressão algébrica $240x$	G5 e G14	TAF4: $f(kx) + c = (k + c)x$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.

Diante das resoluções e dos diálogos analisados, podemos notar que os estudantes se envolveram com o contexto da atividade e que ela foi bem interpretada por eles, uma vez que, em todos os itens, a maioria dos grupos apresentou estratégias corretas. No entanto, mais uma vez, percebemos a dificuldade dos sujeitos da pesquisa em desenvolver a generalização na forma de expressão algébrica, pois seis (06) dos quatorzes (14) grupos apresentaram expressões incorretas.

Discussão da atividade 3

Depois de recolhidas as resoluções da atividade 3, para que os alunos novamente não fizessem alterações em suas resoluções de modo a não interferir nos dados a serem analisados, foi necessário conversar com a turma com a intenção de institucionalizar as ideias envolvidas na atividade, principalmente a generalização na forma de expressão algébrica. Nesse momento, foram discutidas as resoluções apresentadas por eles, corretas ou não. A seguir apresentamos um trecho dessa conversa a respeito do item d) da atividade.

Diálogo entre a pesquisadora e a turma - fragmento

Pesquisadora lê a letra d)

- *Então, gente, essa expressão algébrica que nós vamos determinar tem que dar certo para qualquer quantidade de meses que uma pessoa permanecer no curso. Como vocês fizeram?* – pesquisadora.

A turma permanece em silêncio.

- *Se a pessoa fez o curso por 1 mês, como vamos determinar o valor gasto?* – pesquisadora.
- *Faz 150 mais 90* – aluno A.
- *E por dois meses?* – pesquisadora.
- *90 vezes 2 e depois mais 150* – aluno A.
- *E por três meses?* – pesquisadora.
- *90 vezes 3 e depois soma 150* – turma.
- *Ou seja, o que estamos fazendo para determinar o valor gasto?* – pesquisadora.
- *90 vezes os meses, mais 150?* – aluno A.
- *É isso mesmo, pessoal?* – pesquisadora.
- *Sim* – turma.
- *Então vamos escrever isso na forma de uma expressão algébrica. Como podemos fazer isso?* – pesquisadora.
- *Faz 90 vezes x* – aluno B.
- *Por que vamos usar o x?* – pesquisadora.
- *Porque é pra qualquer mês?* - aluno B
- *Isso. X representa a quantidade de meses, que pode ser qualquer valor. E depois?* – pesquisadora.
- *Depois mais 150* – aluno C.
- *E o que representa o 150?* – pesquisadora.
- *O valor da matrícula* – aluno C.

- Então nossa expressão vai ficar $90 \cdot x + 150$. *Pessoal, mas vamos lembrar que nós podemos escolher qualquer letra para representar a variável, não precisa ser necessariamente o x. Pode ser a, b, m ou qualquer outra letra* – pesquisadora.

No desenvolvimento da atividade 3, a maioria dos grupos apresentou estratégias corretas, uma vez que sete (07) dos onze (11) grupos desenvolveram estratégias corretas em todos os itens da atividade e dois (02) grupos erraram somente o item d). Podemos notar que esses últimos grupos, embora tenham indicado compreensão da regularidade por meio dos demais itens da atividade, apresentaram dificuldades na mobilização da generalização na linguagem algébrica, que diz respeito à abstração, e, para que haja abstração, segundo Tinoco (2011), é preciso ir além dos casos particulares.

5.3 Atividade 4

Apresentamos a seguir a atividade 4 da sequência didática desta pesquisa seguida das análises *a posteriori* e da descrição dos momentos de discussão da atividade com a turma.

Atividade 4

(Adaptada de Tinoco (2002)) D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar no varal da seguinte maneira:

- as camisas são colocadas lado a lado;
- cada camisa é ligada à seguinte por apenas um pregador;

b) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.
b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.
c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessário para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

Análise a posteriori

A aplicação da atividade 4 ocorreu no dia 05 de agosto de 2019, teve duração de 2 horas/aulas e contou com a participação de 27 alunos distribuídos em 12 duplas e 1 trio. Conforme já mencionado, a atividade foi entregue para os sujeitos impressa em papel colorido.

No item a) da atividade, é questionado ao aluno se duas cartelas de 12 pregadores cada uma é suficiente para prender 22 camisas dispostas da maneira descrita no enunciado. Para esse item, seis (06) grupos desenvolveram estratégias corretas, dos quais, quatro (04) grupos afirmaram que é possível prender as 22 camisas, justificando que a cada 2 camisas são necessários 3 pregadores.

A Figura 30 mostra a resolução apresentada por um desses grupos .

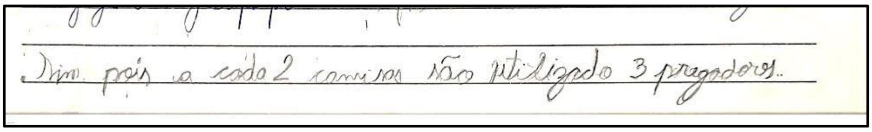


Figura 30 - Resolução apresentada pelo grupo G13 para o item a) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Outros dois (02) grupos afirmaram que é possível prender as camisas, pois, *"para prender 22 camisas, são necessários apenas 23 pregadores"*. Um desses grupos (G5) fez uma representação das camisas penduradas na forma de desenho. Essa estratégia, prevista em nossas análises *a priori,* ajudou-os a compreender a situação e a desenvolver uma resposta correta.

A seguir apresentamos um trecho do diálogo do grupo e o desenho apresentado pelos seus integrantes (Figura 31). No diálogo, é possível perceber que os alunos formulam e validam em conjunto a resolução para a situação.

Fragmento do diálogo entre integrantes do grupo 5 (G5)

O grupo lê o enunciado e o item a)
- Uma camiseta precisa de 2 pregadores. Eu fiz 22 vezes 2 deu 44, aqui só tem 24 pregadores – aluno A*.*

- *Huuuun, não sei não. Porque se você faz duas camisas juntas, você economiza 1 pregador, olha aqui* – aluno B.
Faz o desenho das camisas penduradas e conta os pregadores.
- *Precisa de 23 pregadores* – aluno B.
- *Verdade. Usa só 1 prendedor a mais* – aluno A.
- *Que é o prendedor do começo. Escreve isso* – aluno B.

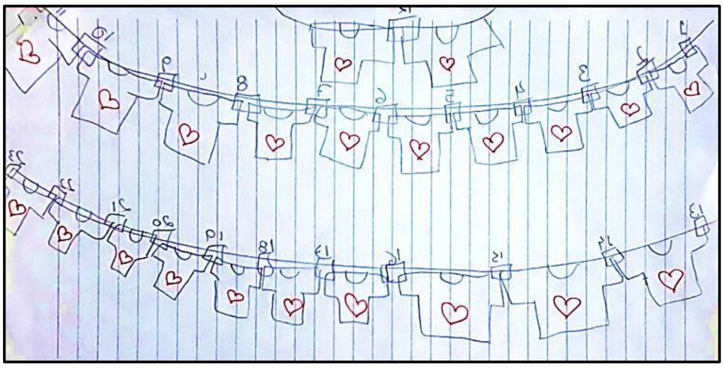


Figura 31 - Representação das camisas penduradas para o item a) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que o fato de os sujeitos terem recorrido à representação na forma de desenho os auxiliou na interpretação da atividade e, consequentemente, a desenvolverem uma resposta correta.

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa o número de camisas com a quantidade necessária de pregadores, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismo das relações de proporcionalidade, nesse caso, $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV4, manifestado na atividade 2. No entanto, na presente situação, k representa a quantidade de camisas a ser pendurada, logo, para o item a), $k = 22$. A constante c representa o pregador a ser colocado no início, ou seja, $c = 1$. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 22 \times f(1) + 1 = 22 \times 1 + 1 = 23$$

Outros dois (02) grupos afirmaram apenas que é possível prender as camisas, no entanto, não apresentaram suas estratégias de resolução. Além disso, três (03) grupos apresentaram uma estratégia incorreta e prevista na análise *a priori*, pois, embora a pesquisadora lançasse questionamentos para a turma buscando que eles refletissem a respeito de suas respostas, esses grupos afirmaram que não é possível prender as camisetas, justificando que cada camisa utiliza dois pregadores, Assim, para prender as 22 camisas, seriam necessários 44 pregadores. A seguir apresentamos um trecho do diálogo de um desses grupos (G10) e a resolução apresentada por eles (Figura 32).

Diálogo entre integrantes do grupo 10 (G10) - fragmento

O grupo lê o enunciado e a letra a)
- *Olha só, cada camisa usa 2 prendedores, então para as 22 camisas, 24 pregadores é pouco* - aluno A.
- *Huuuun, será?* - aluno B.
- *É sim, para as 22 camisas ia usar 44 prendedores* - aluno A.
- *Verdade, não vai dar certo. Vou responder isso* - aluno B.

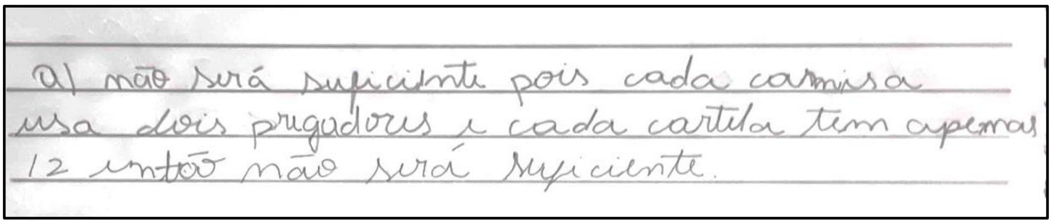

a) não será suficiente pois cada camisa usa dois pregadores e cada cartela tem apenas 12 então não será suficiente.

Figura 32 - Resolução apresentada pelo grupo G13 para o item a) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Nesses casos, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade, pois os sujeitos determinaram a quantidade necessária de pregadores para prender 22 camisas, por meio de uma correspondência e dependência com essa quantidade de camisas. Além disso, é percebida uma regularidade entre essas variáveis.

Ainda para esse item, dois (02) grupos não apresentaram resolução. A seguir apresentamos o Quadro 49 com as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item a) da atividade 4, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 49: Estratégias de resolução desenvolvidas no item a) da atividade 4

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
Faz uma representação das 22 camisas penduradas em forma de desenho e conclui que serão necessários apenas 23 pregadores.	G5	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Observa a regularidade presente na situação e afirma que é possível, pois, para prender 22 camisas, é	G6	TAV4: $f(kx) + c =$

necessário apenas um pregador a mais para o começo.		$k \times f(x) + c$
Observa, por meio da regularidade, que, para 2 camisas, são necessários 3 pregadores e, assim, afirma que é possível prender as 22 camisas.	G4, G7, G9 e G13	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Não apresenta estratégia, e o resultado é correto	**Quantidade (2)**	**Teoremas em ação**
Apenas afirma que 24 pregadores são suficientes para prender as 22 camisas.	G3 e G11	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégia das resoluções incorretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Considera que cada camisa utiliza dois pregadores e afirma que 24 pregadores não serão suficientes para prender as 22 camisas.	G10, G12 e G14	Não identificado
Em branco	**Quantidade (2)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1 e G2	Não identificado

Para o item b) da atividade 4, é necessário que os sujeitos desenvolvam a generalização por meio da língua natural (forma predicativa do conhecimento), descrevendo os passos para se determinar a quantidade de pregadores necessários para pendurar uma número qualquer de camisas. Nesse item, apenas três (03) dos treze (13) grupos apresentaram estratégias corretas, afirmando que o número de pregadores é uma unidade a *mais* que o número de camisas.

A seguir apresentamos um trecho do diálogo entre um desses grupos e a pesquisadora. Nesse trecho é possível perceber que, embora os sujeitos tivessem compreendido a situação, apresentavam dificuldades na representação da generalização por meio da língua natural. Com o auxílio da pesquisadora, foi possível representar essa generalização.

Diálogo entre pesquisadora e o grupo 5 (G5) - fragmento

O grupo lê o item b) da atividade
- Vamos fazer que 22 camisas precisam de 23 pregadores - aluno A.
- Mas um número qualquer você não pode escolher um número - aluno B.
O grupo chama a pesquisadora.
- O que vocês fizeram pra determinar a quantidade de pregadores na letra a)? Que conta vocês fizeram? – pesquisadora.
- Ah, a gente desenhou e contou os pregadores - aluno B.
- Então agora escolham algumas quantidades de camisas e determinem a quantidade de pregadores - pesquisadora.
...
- Se fossem 15 camisas, quantos pregadores seriam necessários? - pesquisadora
- 16 pregadores - aluno B.
- Se fossem 5 camisetas? – pesquisadora.
- 6 - aluno B.
- O que você está fazendo para determinar o número de pregadores?- pesquisadora.

- 1 a mais - aluno B.
- Então, agora vocês precisam escrever como estão determinando o número de pregadores – pesquisadores*.*
- Ah tá! Escreve aí que coloca um a mais que as camisetas - aluno B*.*

No diálogo apresentado também foi possível perceber que o TAF1, que se refere a uma quantidade qualquer a ser identificada como uma quantidade específica, embora tenha sido citado por um integrante do grupo, foi indicada uma possível desestabilização pelo outro integrante, ao afirmar que, para representar qualquer quantidade, não é correto considerar uma quantidade específica. Segundo Vergnaud (2009), a desestabilização de conhecimentos equivocados proporciona a compreensão de um conceito no decorrer da escolarização.

Na Figura 33, é possível observar a resolução apresentada pelo grupo G5.

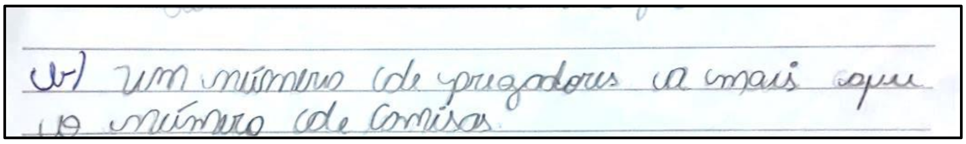


Figura 33 - Resolução correta apresentada pelo grupo G5 para o item b) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução apresentada é possível notar que os alunos mobilizaram o TAV4 na linguagem natural. Outros seis (06) grupos apresentaram estratégias de resolução incorretas, dos quais, um (01) grupo (G3) afirmou que o número de pregadores é uma unidade a *menos* que o número de camisas.

A Figura 34 apresenta a resolução do grupo (G3).

Figura 34 - Resolução incorreta apresentada pelo grupo G3 para o item b) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução apresentada também é possível perceber a intenção dos sujeitos em representar qualquer quantidade por uma letra, mobilizando o TAV3. No entanto, chamamos a atenção para o fato de terem usado novamente somente a letra x.

Dois (02) grupos afirmaram que, para determinar a quantidade de pregadores, é necessário fazer o cálculo 22×12, ou seja, multiplicaram a quantidade de camisas do item a) pela quantidade de pregadores em uma cartela. Ainda, um (01) grupo considerou que é necessário fazer a quantidade de camisas *dividido* pela quantidade de pregadores. Fica claro, portanto, que esses últimos grupos não compreenderam a situação proposta na atividade. As estratégias das resoluções incorretas apresentadas até o momento não foram previstas em nossas análises *a priori.*

No entanto, a outra estratégia de resolução incorreta apresentada por dois (02) grupos estava prevista. Esses grupos afirmaram que o número de pregadores é o dobro do número de camisas. Apresentamos a seguir um trecho do diálogo de um desses grupos (G7) com o auxilio da pesquisadora.

Diálogo entre a pesquisadora e o grupo 7 (G7)- fragmento

O grupo lê o item b) da atividade
- Coloca assim, se tiver n camisetas precisam de n pregadores - aluno A.
- Já sei. O número de camisas vezes 2 - aluno B.
- Faz assim, se eu tenho x camisetas eu tenho que utilizar x pregadores. Coloca c porque é camiseta - aluno A.
- Mas não era o dobro de pregadores? - aluno B.
- Não. Coloca, se eu tenho c camisetas eu tenho que utilizar x pregadores - aluno A.
- Mas se eu não sei o número de camisetas, como vou saber o número de pregadores? - aluno B.
- Será que seria x ao quadrado de pregadores? - aluno A.
O grupo chama a pesquisadora.
- Está certo, professora? - aluno A.
- Vamos ver se vai funcionar se substituirmos valores? Coloca x valendo 4, eu tenho 4 camisetas, então eu teria 4 ao quadrado de pregadores. Quanto é 4 ao quadrado? – pesquisadora.
- Acho que dá 16 - aluno A.
- Então pra 4 camisetas eu utilizo 16 pregadores? – pesquisadora.
- Huuuum, não dá certo não. Daria 4 pregadores para cada camisetas. Não está certo - aluno A.
- Então, vamos pensar mais um pouco. É importante vocês testarem valores para saber se a expressão algébrica de vocês está correta – pesquisadora.
A pesquisadora se afasta do grupo
.....
- Coloca aí aqui que precisa do dobro do número de camisetas para saber os pregadores - aluno A.
- Mas é 3 pregadores a cada 2 camisetas - aluno B.
- Ah, deixa assim mesmo - aluno A.

No diálogo apresentado, é possível notar que os integrantes estavam em situação de formulação, mas não conseguem validar suas respostas. A frase *"Ah, deixa assim mesmo"* mostra que eles não estão convencidos, mas, como não sabem fazer diferente, apresentam a resolução desenvolvida mesmo tendo consciência de que não está correta.

A Figura 35 apresenta a resolução desenvolvida pelo grupo G7.

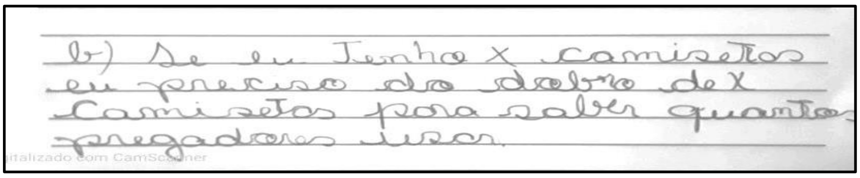

b) Se eu Tenho x camisetas eu preciso do dobro de x Camisetas para saber quantos pregadores usar.

Figura 35 - Resolução incorreta apresentada pelo grupo G7 para o item b) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Os dois (02) grupos que desenvolveram esta última estratégia de resolução determinaram a quantidade necessária de pregadores para pendurar uma camisa e consideraram uma relação de proporção direta para qualquer quantidade de camisas. Acreditavam que, se uma camisa utiliza dois pregadores, então, para qualquer quantidade de camisas, o número de pregadores será sempre o dobro do número de camisas.

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa número de camisas com a quantidade de pregadores necessários, podemos utilizar uma notação algébrica das relações de proporcionalidade, nesse caso, $f(n) = n \times f(1)$, para n real. Indicamos essa associação como um teorema em ação falso implícito nas respostas dos alunos, pois, embora essa relação matemática possa ser verdadeira nas relações que apresentam a proporcionalidade direta, não pode ser aplicada no contexto da atividade 4, em que a quantidade de pregadores para pendurar um número qualquer de camisas não é proporcional à quantidade necessária de pregadores para pendurar uma camisa. Assim, considerando o contexto da atividade 4, indicamos o TAF5:

$$\boxed{\text{TAF5:} f(n) = n \times f(1), n \in \mathbb{N}}$$

A seguir apresentamos o Quadro 50 com as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item b) da atividade 4, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 50: Estratégias de resolução desenvolvidas no item b) da atividade 4

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Observa a regularidade presente na situação e afirma que o número de pregadores é uma unidade a mais que o número de camisas.	G2, G5 e G6	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
Não compreende a regularidade e considera que é necessário um pregador a menos que o número de camisas.	G3	Não identificado
Considera que cada camisa utiliza dois pregadores diferentes e, com isso, afirma que o número de pregadores é o dobro do número de camisas.	G7 e G13	TAF5: $f(n) = n \times f(1),$
Afirma que, para determinar a quantidade de pregadores, é necessário fazer 22x12.	G12 e G14	Não identificado
Afirma que é necessário dividir o número de camisas pela quantidade de pregadores.	G9	Não identificado
Em branco	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1, G4, G10 e G11	Não identificado

O item c) da atividade 4 solicita que os sujeitos desenvolvam a expressão algébrica, representando o número de pregadores necessário para pendurar um número qualquer de camisas. Dos treze (13) grupos que participaram da atividade, apenas três (03) desenvolveram estratégias corretas, apresentando a seguinte expressão algébrica: $Y = x + 1$, variando apenas a letra que representa a variável dependente.

A Figura 36 apresenta a expressão algébrica desenvolvida pelo grupo G6.

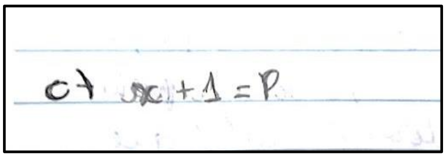


Figura 36 - Resolução incorreta apresentada pelo grupo G6 para o item c) da atividade 4
Fonte: Dados da pesquisa

Ao desenvolverem essas expressões algébricas, notamos que os sujeitos mobilizaram mais uma vez o TAV4, que modela a situação proposta por meio da expressão algébrica. Além desse teorema, notamos que o TAV3 foi mobilizado ao utilizarem uma letra para representar uma quantidade qualquer de pregadores.

Para os casos mencionados, consideramos que as ideias base de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização foram mobilizadas, pois, ao estabeleceram uma expressão algébrica que relaciona as variáveis *quantidade de pregadores* e *número de camisas*, os sujeitos estabelecem uma relação de correspondência e dependência entre essas variáveis a partir de uma regularidade observada.

Outros seis (06) grupos apresentaram estratégias incorretas, dos quais, três (03) grupos apresentaram a expressão $12x$, utilizando inadequadamente uma informação do item a) da atividade. Dois (02) desses grupos, no item anterior da atividade, afirmaram que, para se determinar a quantidade de pregadores, é necessário calcular 12×22, ou seja, continuaram apresentando o mesmo erro ao considerarem que o número de pregadores é 12 vezes o número de camisas. Além disso, um (01) grupo apresentou a expressão $y \div x$, que também corroborou a resposta do grupo no item anterior. Outros dois (02) grupos variaram entre as expressões $2x = 24x$ e $V = x + 2x - 1$, que não apresentam relação nem com a expressão correta nem com as repostas que esses grupos apresentaram no item anterior da atividade.

Apresentamos a seguir um trecho do diálogo do grupo 7, que respondeu ao item c) com a expressão $V = x + 2x - 1$.

Diálogo entre integrantes do grupo 7 (G7) - fragmento

O grupo lê o item c*)*
- Eu acho que é o dobro, o número de pregadores. Se eu tenho 3 camisetas, vou precisar de 6 pregadores - aluno A.
- Então seria x.2x, que é o dobro - aluno B*.*
- Não seria 2x ao quadrado? - aluno A*.*
- Não. Eu acho que é x+2x-1 - aluno A*.*

Podemos notar, por meio do diálogo apresentado, que esses sujeitos, além de não compreenderem a situação proposta, apresentaram dificuldades em utilizar a linguagem algébrica. Ainda para esse item, quatro (04) grupos não apresentaram estratégias de resolução deixando o item em branco.

O Quadro 40 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item c) da atividade 4, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 51: Estratégias de resolução apresentadas no item c) da atividade 4

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Observa a regularidade presente na situação por meio dos itens anteriores da atividade e apresenta uma das seguintes expressões algébricas: $P = x + 1$	G2, G5 e G6	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$ TAV3: Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Não apresenta estratégia, e a resolução é incorreta	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
$y \div x$	G9	Não identificado
$V = x + 2x - 1$	G7	Não identificado
$12x$	G11, G12 e G14	Não identificado
$2x = 24x$	G13	Não identificado
Em branco	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1, G4, G10 e G13	Não identificado

Mediante as resoluções apresentadas e os diálogos entre os alunos, podemos notar que os sujeitos demonstraram interesse em desenvolver a atividade, porém apresentaram mais dificuldades que nas atividades anteriores, comprometendo a mobilização da generalização. Dos treze (13) grupos que participaram da atividade, três (03) desenvolveram estratégias corretas para a generalização por meio da língua natural e da expressão algébrica, ou seja, mobilizaram corretamente a linguagem algébrica e a linguagem natural, o, segundo Vergnaud (2007), dá sinais de que ocorreu a aprendizagem.

Discussão sobre a atividade 4

Depois de recolhidas as resoluções da atividade 4, foi necessário realizar uma conversa com a turma com a intenção de institucionalizar as ideias presentes na atividade. Concordamos com Mateus (2013) quando o autor defende a generalização como uma capacidade construída coletivamente, resultante de um debate com a turma, no qual os alunos têm um papel ativo, explorando padrões, identificando relações e formulando generalizações.

Para esse momento, a pesquisadora utilizou imagens, projetadas em data *show*, de camisas penduradas de diferentes maneiras, a fim de que os alunos identificassem qual situação estava coincidindo com a proposta da atividade, e assim foi feito. Ao serem questionados pela pesquisadora a respeito das estratégias desenvolvidas para o item a), dois (02) grupos responderam que fizeram o desenho das 22 camisas penduradas e contaram a quantidade de pregadores necessários. Com isso, a pesquisadora propôs que todos fizessem o desenho de algumas camisas penduradas a fim de determinar a quantidade de pregadores necessários. A seguir apresentamos um trecho dessa conversa.

Diálogo entre a pesquisadora e a turma -fragmento

A pesquisadora desenha no quadro 1 camisa pendurara e determina, junto com a turma, a quantidade de pregadores necessários. Faz o mesmo para o caso de 2 camisas, 3 camisas, 4 camisas e 5 camisas penduradas, associando cada uma delas com a quantidade de pregadores.
- Pessoal, então o que está acontecendo com o número de camisas e o número de pregadores? – pesquisadora.
A turma não responde
- Gente, vamos observar as camisas penduradas e os pregadores necessários. Vamos tentar relacionar o número de pregadores com o número de camisas – pesquisadora.
- Aumenta um por vez - aluno A.
- Cada camisa aumenta 1 pregador - aluno B.
- Então, quando eu tenho um número de camisas, como eu faço para determinar o numero de pregadores? – pesquisadora.
- É sempre 1 a mais – turma.
- Isso! Isso quer dizer que, se eu tenho o número de camisas, eu preciso de uma unidade a mais pra chegar ao número de pregadores – pesquisadora.

Depois dessa discussão, a pesquisadora institucionalizou, em conjunto com a turma, todos os itens da atividade, com o intuito de colaborar para a compreensão dos alunos pela generalização por meio da língua natural e da expressão algébrica.

Nessa atividade, pudemos perceber que os sujeitos apresentaram dificuldades em apreender a regularidade presente na situação e, consequentemente, a generalização, pois “[...] a generalização é entendida como um processo dinâmico de identificação de semelhanças e de descoberta de extensões que os alunos percebem como gerais [...]" (p. 20). Entre outras coisas, atribuímos esse acontecimento ao fato de a situação ser apresentada em um contexto menos prático para os sujeitos. Além disso, a atividade apresenta menos itens que as demais atividades dessa sequência didática, o que, de certa forma, pode não ter auxiliado na preparação dos estudantes para a generalização.

5.4 Atividade 5

Apresentamos a seguir a atividade 5 da sequência didática desta pesquisa seguida das análises *a posteriori* e da descrição dos momentos de discussão da atividade com a turma.

A atividade

Paulo é mecânico e, quando possível, realiza atendimento em domicílio. Sendo assim, a expressão algébrica que melhor representa o valor a ser pago pelos clientes de Paulo é: $v = 45h + 35$, em que h representa o número de horas trabalhadas de Paulo e v representa o valor a ser pago pelos clientes que o contratam.
Com base nas informações apresentadas, faça uma representação gráfica da situação e responda os itens a seguir.

e) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação?
f) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente que firmou o contrato, no entanto, no dia seguinte, desistiu do serviço, antes que Paulo começasse seu trabalho. Nesse caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo?
g) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa desse cliente?
h) Escreva os passos para determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

Análise a posteriori

A aplicação da atividade 5 ocorreu no dia 08 de agosto de 2019, teve duração de 2 horas/aulas e contou com a participação de 27 alunos distribuídos em 6 duplas e 5 trios.

No enunciado da atividade 5, é solicitado aos alunos que desenvolvam uma representação gráfica a partir da expressão algébrica apresentada na atividade, relacionando *horas trabalhadas* com o *valor a ser pago*. Assim como no teste diagnóstico, os alunos apresentaram dificuldades para desenvolver a representação gráfica, pois, mesmo depois de passados 20 minutos da distribuição da atividade, nenhum grupo havia desenvolvido uma representação. Nesse momento, a pesquisadora considerou a necessidade de um momento didático com a turma, para gerar discussões e explicações acerca do gráfico solicitado. A pesquisadora leu a atividade juntamente com os alunos, construiu um plano cartesiano na lousa e representou nele um ponto P(5, 260) obtido a partir da expressão algébrica. Com essa discussão, os alunos foram direcionados a darem continuidade à atividade.

Ainda assim, apenas um (01) grupo desenvolveu uma representação gráfica correta e dois (02) grupos uma representação parcialmente correta. O grupo que desenvolveu a representação corretamente - (G10) escolheu valores para a variável independente e calculou, por meio da expressão algébrica dada, o valor correspondente à variável dependente. Por fim, esse grupo localizou esses pontos no gráfico cartesiano e traçou a reta da função. A seguir apresentamos um trecho do diálogo entre os integrantes do grupo 10 e a representação gráfica desenvolvida por eles (Figura 37).

Diálogo entre os integrantes do grupo 10 (G10) - fragmento

- *Vamos escolher alguns valores para o x* - aluno A.
- *Tipo qual valor?* - aluno B.
- *Faz a conta 45 vezes 4 mais 35....Dá 215. Agora, no lugar do 4 você coloca qualquer outra hora. Depois, no gráfico, você coloca o 4 e o 215.* - aluno A
- *Com o 5 dá 260 - aluno B.*
- *Então liga o 5 com o 260 no gráfico* - aluno A.

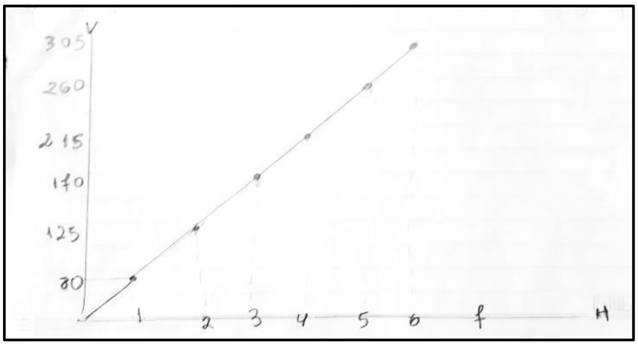


Figura 37 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G10 para a atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

É possível notar, por meio do diálogo apresentado, que a representação gráfica foi construída substituindo valores para a variável *horas trabalhadas* e determinando os valores correspondentes para a variável *valor a ser pago*. Ao desenvolver a estratégia de resolução mencionada, o grupo posiciona no gráfico as coordenadas dos pontos e os une por uma linha reta. Sendo assim, consideramos que o grupo G10 mobiliza um teorema em ação mencionado na pesquisa de Figueroa (2012) e relacionado à representação gráfica da função afim, identificado nesta pesquisa como o TAV5. Desta forma:

TAV5: É possível desenhar os pontos no gráfico e uni-los usando uma linha reta.

Consideramos que o grupo G10, ao desenvolver a representação gráfica, mobilizou as cinco ideias base do conceito de função: variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização.

Os dois (02) grupos que desenvolveram estratégias parcialmente corretas representaram alguns pontos no plano cartesiano corretamente, porém não traçaram a reta que representa a função, ou seja, não consideraram o TAV5 mencionado anteriormente. Para esses grupos, consideramos que a ideia base de generalização não foi mobilizada.

A Figura 38, a seguir, apresenta a representação gráfica desenvolvida por um desses grupos.

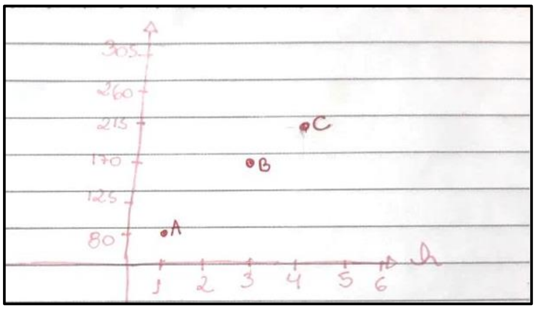


Figura 38 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G5 para a atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

Dos quatro (04) grupos que apresentaram estratégias incorretas, dois (02) localizaram pontos no plano cartesiano considerando a expressão $V = 45x$, ou seja, desconsideraram o valor fixo de 35 reais. Ainda entre as estratégias incorretas, um (01) grupo, o (G2), calculou valores inteiros de -3 até 3 para a variável independente, isto é, considerou valores negativos para a variável *horas trabalhadas*. Além disso, esse grupo localizou os pontos calculados de forma incorreta no plano cartesiano.

A Figura 39, a seguir, contém a representação gráfica desenvolvida pelo grupo G2.

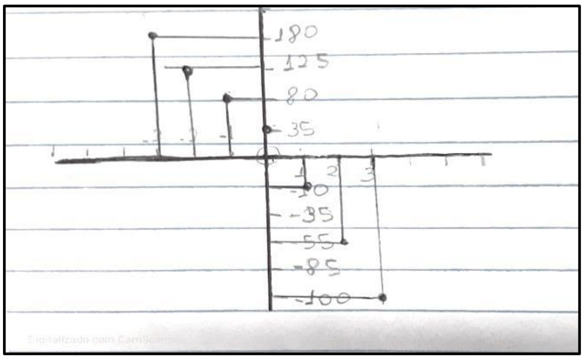


Figura 39 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G2 para a atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

Outros cinco (05) grupos não apresentaram estratégias de resolução e deixaram o item em branco. O Quadro 52, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos na representação gráfica da atividade 5, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 52: Estratégias de resolução apresentadas para representação gráfica da atividade 5

Estratégia da resolução correta	Quantidade (1)	Teoremas em ação
Constrói uma representação gráfica relacionando as horas trabalhadas com o valor a ser pago pelo serviço,	G10	TAV5: É possível desenhar os pontos

traçando a reta correspondente.		no gráfico e uni-los usando uma linha reta.
Estratégias das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (2)**	**Ideias base**
Atribui valores na expressão algébrica e constrói uma representação gráfica apenas com pontos, não traça a reta representada pelos pontos.	G5 e G6	Não identificado
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Constrói uma representação gráfica localizando pontos no plano cartesiano utilizando a expressão $V = 45h$, desconsiderando o valor fixo.	G7 e G8	Não identificado
Constrói uma representação gráfica considerando valores negativos para a variável independente, além disso, posiciona os pontos calculados no quadrante errado do gráfico.	G2	Não identificado
Em branco	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1, G3, G4, G9 e G11	Não identificado

Em comparação com os resultados obtidos na representação gráfica do teste diagnóstico desta pesquisa, notamos que os alunos não mais confundiram gráfico de colunas com gráfico cartesiano, já que, no teste diagnóstico, sete (07) alunos apresentaram aquele tipo de gráfico e na atividade 5 isso não ocorreu. Também diminuiu a quantidade de alunos que deixaram o item em branco. Dessa forma, notamos uma possível evolução no desenvolvimento da representação gráfica dos sujeitos em relação aos resultados obtidos no teste diagnóstico.

No item a) da atividade 5, que questiona as variáveis envolvidas na situação, os sujeitos apresentaram dificuldades alegando que nunca haviam resolvido esse tipo de questionamento. No entanto, consideramos importante identificar as variáveis, pois, muitas vezes, os alunos as manipulam de forma automática e não sabem especificá-las. Tinoco (2011) cita que a ideia de variável é uma das noções de maior obstáculo na compreensão do conceito de função pelos estudantes, e tal fato estaria ligado à própria noção de variável, pois uma letra é denominada como uma variável quando representa um número qualquer, não especificado.

Diante da dificuldade apresentada pela turma, por meio de um momento didático, a pesquisadora chamou a atenção dos alunos para a atividade anterior (atividade 4), buscando identificar as variáveis envolvidas, e, a partir de então, os alunos desenvolveram o item a) da atividade 5. Não houve respostas incorretas nesse caso, apenas um (01) grupo apresentou uma estratégia parcialmente correta, pois afirmou que apenas a variável *horas trabalhadas* estava envolvida na situação. Os demais grupos apresentaram estratégias corretas e concluíram que também estava envolvida na situação a variável *valor a ser pago*. Consideramos que, nesses casos, os sujeitos da pesquisa mobilizaram a ideia base de variável.

O Quadro 53 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item a) da atividade 5, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia.

Quadro 53: Estratégias de resoluções apresentadas para o item a) da atividade 5

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**
Afirma que as variáveis envolvidas na situação são *horas trabalhadas* e *valor a ser pago*	G1, G2, G3, G4. G5. G6, G8, G9, G10 e G11	Não identificado
Estratégia da resolução parcialmente correta	**Quantidade (1)**	**Ideias base**
Afirma que a variável envolvida na situação é *horas trabalhadas*.	G7	Não identificado

No item b) da atividade 5, é proposta uma situação em que o mecânico realizou a visita, fez o orçamento, porém não foi contratado para realizar o serviço. Nesse caso, é necessário considerar o valor da visita, ou seja, a parte fixa da situação. Apenas dois (02) dos onze (11) grupos apresentaram estratégias corretas afirmando que deveriam ser pagos $R\$\ 35{,}00$ pela visita realizada ao cliente, mobilizando as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

A Figura 40 apresenta a resolução de um desses grupos – (G2).

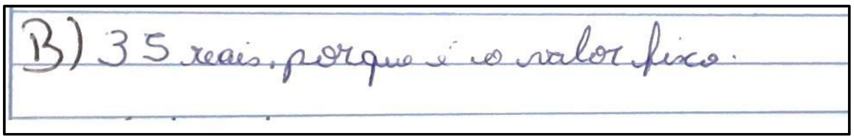


Figura 40 - Resolução apresentada pelo grupo G2 para o item b) da atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

Nesses casos, em termos matemáticos, ao denominar por f a função real que associa o número de *horas trabalhadas* e o *valor gasto*, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismo das relações de proporcionalidade, neste caso, $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV4, manifestado nas atividades 2, 3 e 4. No entanto, na presente situação, k, que representa o número de horas trabalhadas, vale 0 e $f(x) = f(1)$, pois representa o valor da hora trabalhada. A constante c representa o valor cobrado pela visita, ou seja, $R\$\ 35{,}00$. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 0 \times f(1) + 35 = 0 \times 45 + 35 = 35$$

Os demais grupos apresentaram estratégias incorretas. Oito (08) grupos afirmaram que o cliente não pagará nada, pois o serviço não foi realizado, ou seja, não consideraram o valor fixo da visita. Esses alunos multiplicaram o número de horas trabalhadas pelo valor cobrado pela hora, para esse item da atividade, $k = 0$. Dessa forma, esses grupos mobilizaram o TAF3 mencionado na atividade 3, pois consideraram que $f(kx) + c = k \times f(x)$. Para esses casos, consideramos que as ideias base de correspondência, dependência e regularidade foram mobilizadas.

Além da estratégia incorreta mencionada, um (01) grupo afirmou que o valor gasto é de $R\$\ 260{,}00$, isto é, consideraram o valor pago por 5 horas de trabalho. A seguir o Quadro 54 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos para o item b) da atividade 5, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 54: Estratégias de resoluções apresentadas para o item b) da atividade 5

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (2)**	**Teoremas em ação**
Afirma que o valor a ser pago será de $R\$\ 35{,}00$	G2 e G7	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (8)**	**Teoremas em ação**
Afirma que o cliente não pagará nada, pois não foi realizado o serviço.	G1, G4. G5. G6, G8, G9, G10 e G11	TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x)$
Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	**Quantidade (1)**	**Ideias base**
Afirma que o valor a ser pago é de $R\$\ 260{,}00$	G3	Não identificada

No item c) da atividade 5, é apresentada a situação de um cliente que pagou $R\$\ 215{,}00$ pelos serviços de Paulo e, nesse caso, questiona-se quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando, ou seja, a partir de um valor para a variável dependente, é solicitado o valor correspondente para a variável independente. Para esse item, sete (07) grupos apresentaram respostas corretas, porém apenas quatro (04) desses grupos especificaram suas estratégias de resolução, as quais variaram entre realizar tentativas atribuindo valores para a variável independente até chegar ao valor correspondente da variável dependente, e realizar os cálculos utilizando as operações inversas. Esta última estratégia foi utilizada apenas pelo grupo G8.
A seguir apresentamos um trecho do diálogo e a resolução do referido grupo (Figura 41).

Fragmento do diálogo entre integrantes do grupo 8 (G8)

- *Como vamos fazer essa?* - aluno A.
- *Pega o valor total e tira 35 que é o valor fixo, depois você divide por 45 para saber quantas horas ele trabalhou. O valor por hora é 45 reais* - aluno B.
- *As contas deu 4* - aluno A.
- *Então, quantas horas ele trabalhou?* - aluno B.
- *4 horas. UAU!* - aluno A.

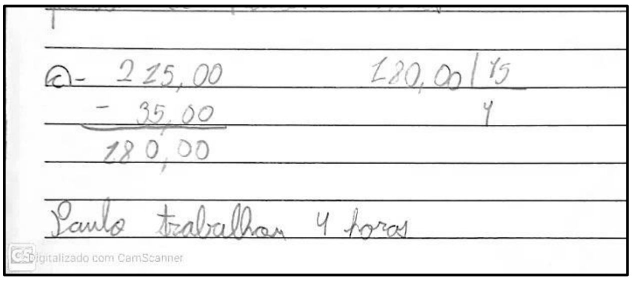


Figura 41 - Resolução apresentada pelo grupo G8 para o item c) da atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

A partir do diálogo produzido pelo grupo G8, é possível notar a presença da dialética de validação para a situação proposta. Consideramos que, no desenvolvimento das estratégias mencionadas, foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

Nesses casos, em termos matemáticos, ao denominar por f a função real que associa o número de *horas trabalhadas* e o *valor gasto*, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismo das relações de proporcionalidade, já apresentada no item a) dessa atividade: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Essa associação foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV4. Na presente situação, k, que representa o número de horas trabalhadas, vale 4 e $f(x) = f(1)$, pois representa o valor da hora trabalhada. A constante c representa o valor cobrado pela visita, ou seja, $R\$\ 35{,}00$. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 4 \times f(1) + 35 = 4 \times 45 + 35 = 215$$

Ainda nesse item, foram apresentadas duas (02) resoluções incorretas, mas não foi possível identificar as estratégias utilizadas. Os sujeitos afirmaram apenas que o mecânico trabalhou por 17 e 25 horas, respectivamente.

O Quadro 55, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item c) da atividade 5, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 55: Estratégias de resoluções apresentadas para o item c) da atividade 5

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Observam a regularidade presente na situação e realizam tentativas atribuindo valores para a variável independente (horas trabalhadas) até concluírem que, quando o valor a ser pago é $R\$215{,}00$, o serviço foi realizado por 4 horas.	G1, G2 e G6	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Identifica a regularidade presente na situação e realiza as seguintes operações: $215 - 35 = 180$ e $180 \div 45 = 4$. Assim, conclui que o serviço foi realizado em 4 horas.	G8	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Não apresenta estratégia e o resultado é correto	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Apenas afirmam que o serviço foi realizado em 4 horas.	G5, G7 e G11	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Apenas afirmam que o serviço foi realizado em 25 horas.	G4, G9 e G10	Não identificado
Apenas afirma que o serviço foi realizado em 17 horas.	G3	Não identificado

No item d) da atividade 5, é necessário que o aluno descreva os passos a serem seguidos para determinar o valor a ser pago para qualquer quantidade de horas trabalhadas, ou seja, desenvolver a generalização por meio da língua natural.

Para esse item, apenas três (03) dos treze (13) grupos desenvolveram estratégias corretas, afirmando que o valor a ser pago é determinado calculando 45 vezes a quantidade de horas trabalhadas mais 35, mobilizando o TAV4 por meio da forma predicativa do conhecimento.

A Figura 42, a seguir, apresenta a resolução de um desses grupos (G5).

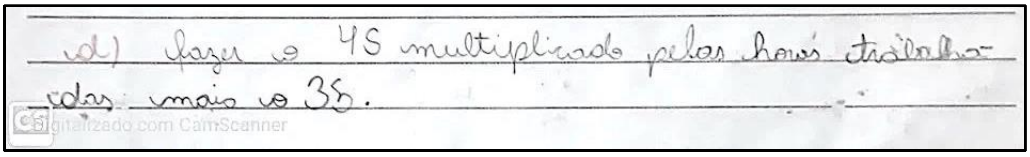


Figura 42 - Resolução apresentada pelos G5 para o item d) da atividade 5
Fonte: Dados da pesquisa

Para os casos apresentados, consideramos que as ideias base de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização foram desenvolvidas. Os demais grupos (8 grupos) apresentaram estratégias incorretas para esse item, variando entre apenas apresentar a expressão algébrica dada no enunciado da atividade e afirmar que o valor a ser pago é determinado calculando a quantidade de horas trabalhadas vezes o valor a ser pago por hora, ou seja, não consideraram a parte fixa da situação. Para este último caso, é possível associar o teorema em ação falso, relativo às respostas dos alunos e já manifestado na atividade 3 desta pesquisa, o TAF3, pois esses alunos consideram que $f(kx) + c = k \times f(x)$.

O Quadro 56 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item d) da atividade 5, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 56: Estratégias de resoluções apresentadas para o item d) da atividade 5

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que o valor a ser pago é determinado calculando 45 vezes a quantidade de horas trabalhadas e depois somam 35.	G5, G7 e G8	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (8)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que o valor a ser pago é determinado calculando a quantidade de horas trabalhadas vezes o valor pago por hora.	G4, G6, G9 e G10	TAF3: $f(kx) + c = k \times f(x)$
Apresentam como resposta a expressão algébrica dada no enunciado.	G1, G2, G3 e G11	Não identificado

De forma geral, consideramos que, no desenvolvimento da atividade 5, os alunos realizaram discussões pertinentes a respeito da utilização da expressão algébrica, uma vez que, por meio da expressão dada no enunciado, desenvolveram uma representação gráfica, atribuíram valores à variável independente e à variável dependente e, ainda, desenvolveram a generalização por meio da linguagem natural.

Mediante as resoluções apresentadas e os áudios produzidos pelos grupos, pôde-se notar que a maioria dos participantes da pesquisa ainda apresentaram dificuldades na generalização por meio da linguagem natural, pois, dos onze (11) grupos que desenvolveram a atividade, apenas três (03) apresentaram estratégias corretas. No entanto, também notamos que, no desenvolvimento da atividade 5, não foi mobilizado o TAF1, ou seja, nenhum dos grupos utilizou uma quantidade específica para representar qualquer valor, o que consideramos, nesse caso, como sinais de desestabilização desse conhecimento equivocado.

Discussão da atividade 5

Depois de recolhidas as resoluções da atividade 5, foi necessário realizar uma conversa com a turma com a intenção de discutir as ideias presentes na atividade. A pesquisadora corrigiu cada item com os alunos, abordando as estratégias apresentadas por eles e possíveis estratégias que não haviam sido abordadas. A seguir apresentamos um trecho dessa conversa em relação ao item b) da atividade.

Diálogo entre a pesquisadora e a turma - fragmento

- Para quantas horas de trabalho nós estamos querendo calcular? – pesquisadora.
- Nenhuma, 0 hora - aluno A.
- Isso, 0 hora. Isso quer dizer que ele fez o orçamento, mas não realizou o trabalho. Nós já falamos que quando queremos determinar o valor a ser pago, precisamos substituir a quantidade de horas trabalhadas na variável h. Para este caso, quanto vale o h? – pesquisadora.
- Vale 0 – turma.
- Então vamos substituir 0 no h da expressão algébrica – pesquisadora.
Pesquisadora resolve a expressão algébrica no quadro para h valendo 0.
- Então, quanto ele terá que pagar neste caso? – pesquisadora.
- 35 reais – turma.
- Esse valor é referente à visita que o mecânico vai fazer na casa do cliente para realizar o orçamento. Depois ele ainda vai cobrar 45 reais por hora trabalhada, no entanto, neste caso ele não trabalhou – pesquisadora.

A estratégia de resolução apresentada no diálogo acima não havia sido desenvolvida pelos sujeitos durante suas resoluções, porém foi discutida no momento didático de correção da atividade junto aos alunos, pois consideramos importante apresentar e discutir diferentes estratégias de resoluções. Isso foi feito com o item c) da atividade, no qual pretendíamos determinar o valor da variável independente a partir de um valor dado para a variável dependente, como podemos observar no diálogo a seguir.

Diálogo entre a pesquisadora e a turma - fragmento

- E se nós quisermos utilizar a expressão algébrica dada no enunciado? Nós sabemos que o valor a ser pago é 215 reais, então em qual variável podemos substituir o 215?- pesquisadora.
- No h? - aluno A.
- Mas o que representa a variável h? – pesquisadora.
- Horas trabalhadas - aluno A.
- Então se o 215 não representa uma quantidade horas, será que podemos substitui-lo no h? – pesquisadora.
- Não – turma.

- *Pessoal, mas o que representa o 215?* – pesquisadora.
- *Valor a ser pago – turma.*
- *Então onde vou substituir o 215 na expressão algébrica* – pesquisadora.
- *A gente não sabe professora - aluno A.*
- *Pessoal, mas o que presenta o V na expressão? – pesquisadora.*
- *Valor a ser pago* – turma.
- *E o h?* – pesquisadora.
- *Horas trabalhadas* – turma.
- *Então em qual variável vou substituir o 215?* – pesquisadora.
- *No V – turma.*
- *Isso gente. Se o 215 representa o valor a ser pago, então temos que substituí-lo na variável V, que representa isso* – pesquisadora.
- *Professora, mas a gente nunca viu isso. Pensei que não podia substituir ali* (aponta para o V na expressão) - aluno B.
- *Nós podemos substituir nas duas variáveis, só precisamos saber o que cada variável representa. Neste caso, vamos substituir 215 no V da nossa expressão* – pesquisadora.

Pesquisadora faz os cálculos com a turma no quadro e determina que h vale 4 horas.

Podemos notar por meio do diálogo apresentado que os alunos não eram acostumados a substituir valores na variável dependente em uma expressão algébrica. Portanto, consideramos que foi pertinente propor esse tipo de atividade aos alunos.

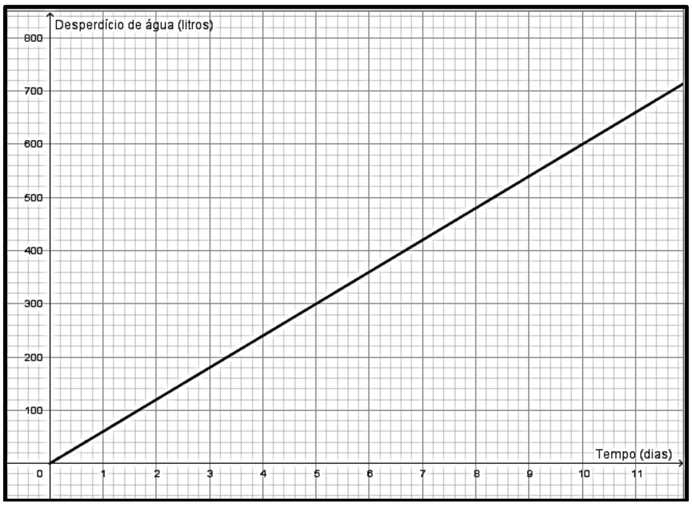
De modo geral, consideramos que, com o desenvolvimento da atividade 5, foram realizadas discussões relevantes a respeito da generalização por meio da língua natural e da expressão algébrica, contribuindo para a aprendizagem dos sujeitos e para o desenvolvimento das atividades posteriores dessa sequência didática.

5.5 Atividade 6

Apresentamos, a seguir, a atividade 6 da sequência didática desta pesquisa seguida das análises *a posteriori* e da descrição dos momentos de discussão da atividade com a turma.

A atividade

(Adaptado ENEM (2010)) – Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira. Sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, observe o gráfico a seguir e responda as questões seguintes.



g) De quanto será o desperdício se a torneira permanecer por 5 dias gotejando?
h) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?
i) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?
j) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.
k) Utilizando a expressão do item anterior determine de quantos litros será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?
l) Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

Análise a posteriori

A aplicação da atividade 6 ocorreu nos dias 09 e 12 de agosto de 2019, teve duração de 2 horas/aulas e contou com a participação de 26 alunos distribuídos em 7 duplas e 4 trios.

No enunciado da atividade, há uma representação gráfica que relaciona o tempo (em dias) de uma torneira gotejando com o desperdício de água (em litros) que ela produzirá. O item a) solicita que o aluno determine o desperdício de água caso a torneira permaneça gotejando por 5 dias. Conforme previsto em análises *a priori,* todos os grupos apresentaram resoluções corretas para o item a) e afirmaram que o desperdício de água em 5 dias será de 300L, mobilizando as ideias base correspondência, dependência e regularidade.

Em termos matemáticos, o número de dias em que a torneira permanecer gotejando e o desperdício de água podem ser associados a uma função real linear f que satisfaz $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$, para qualquer número n real. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV1, mobilizado na atividade 1. Assim, podemos indicar o TAV1 manifestado nas respostas dos alunos, no entanto, na presente situação, n representa a quantidade de dias em que a torneira permanece gotejando e $f(1) = 60$, pois é o desperdício de água produzido em um dia. Dessa forma, temos:

$$f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1) \Rightarrow f(5) = f(5 \times 1) = 5 \times f(1) = 5 \times 60 = 300$$

Ainda em relação ao item a) da atividade, ao desenvolverem suas estratégias, os sujeitos da pesquisa relacionaram um valor dado para a variável independente (05) com o valor correspondente da variável dependente (300L) explícito na representação gráfica. Nesses casos, consideramos que o os sujeitos da pesquisa mobilizaram um teorema em ação relacionado à representação gráfica, identificado nesta pesquisa como o TAV6. Desta forma:

TAV6: A representação gráfica da função afim associa cada grandeza do eixo x a uma única grandeza do eixo y.

O Quadro 57 apresenta a estratégia desenvolvida pelos sujeitos no item a) da atividade 6.

Quadro 57: Estratégia de resolução apresentada para o item a) da atividade 6

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (11)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que o desperdício de água será de 300 litros.	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10 e G11	TAV6: A representação gráfica associa as grandezas do eixo x e do eixo y.

O item b) questiona o desperdício de água se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Para esse caso, o valor do desperdício não está explícito na escala do gráfico. Ainda assim, oito (08) dos onze (11) grupos apresentaram estratégias corretas e afirmaram que o desperdício será de 420 litros, mobilizando as ideias base correspondência, dependência e regularidade.

Apresentamos, a seguir, o diálogo que um desses grupos (G2) produziu em situação de validação de sua estratégia de resolução. É possível observar que o grupo preocupou-se em descobrir o desperdício diário para que pudessem determinar o desperdício para um valor não explícito no eixo do gráfico.

Diálogo produzido pelos integrantes do grupo 2 (G2) - fragmento

- *É 400 e alguma coisa, porque eu não sei quanto vale cada quadradinho* – aluno A.
- *Faz 100 dividido por 5. Dá 20? Então a resposta é 420* – aluno B.
- *420 mesmo – aluno A.*
- *Cada quadradinho vale 20* – aluno B.

Por meio das resoluções apresentadas pelos alunos e dos diálogos produzidos no desenvolvimento dessas estratégias, é possível notar que, no item b) da tarefa, os alunos também mobilizaram os teoremas do item anterior, o TAV1 e o TAV56.

Em relação às três (03) estratégias incorretas, dois (02) grupos afirmaram que o desperdício será de 400 litros, ou seja, consideraram o último valor explícito na escala do gráfico, e um (01) grupo afirmou que o desperdício será de 700 litros.

O Quadro 58, a seguir, apresenta a estratégia desenvolvida pelos sujeitos no item b) da atividade 6, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 58: Estratégias de resoluções apresentadas par o item b) da atividade 6

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (9)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que o desperdício de água será de 420 litros.	G1, G2, G4, G5, G7, G8, G9 e G11	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Consideram o último valor explícito no eixo y e afirmam que o desperdício de água será de 400 litros.	G6 e G10	Não identificado
Afirma que o desperdício será de 700 litros	G3	Não identificado

Para responder ao item c) da atividade, é necessário interpretar a representação gráfica e determinar quantos dias a torneira permaneceu gotejando quando produziu desperdício de 840 litros de água. Sendo assim, precisa-se determinar a variável independente da situação para um valor que não está explícito no gráfico. Nesse item, os sujeitos apresentaram mais dificuldades e apenas um (01) grupo - (G5) desenvolveu uma estratégia correta, na qual foi determinado que, em um dia, o desperdício é de 60 litros e, assim, um desperdício de 840 litros foi produzido em 14 dias. Nesse caso, consideramos que as ideias base de correspondência, dependência e regularidade foram mobilizadas.

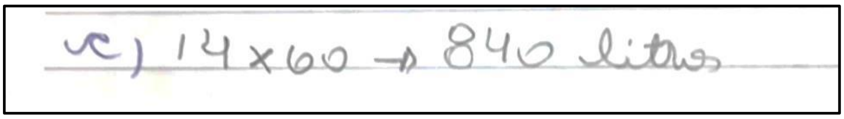


Figura 43 - Resolução apresentada pelo grupo G5 para o item c) da atividade 6
Fonte: Dados da pesquisa

Ao desenvolverem a estratégia mencionada, os integrantes do grupo G5 mobilizam o TAV1. No entanto, para o caso do item c), o valor desconhecido é representado pelo n e é determinado sabendo-se que $f(1) = 60$ e $f(n) = 840$. Sendo assim, temos:

$$f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1) \Rightarrow f(n) = n \times f(1) = n \times 60 = 840 \Rightarrow n = 14$$

Os 10 grupos que apresentaram respostas incorretas utilizaram como estratégias a aproximação com valores explícitos no gráfico, no entanto, fizeram isso de forma equivocada e afirmaram que o desperdício será de 12 dias, 12 dias e meio ou 13 dias. Acreditamos que esses grupos não conseguiram determinar o desperdício diário e, consequentemente, não foi possível determinar o desperdício para valores implícitos no gráfico.

O Quadro 59, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item c) da atividade 6, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 59: Estratégias de resoluções apresentadas para o item c) da atividade 6

Estratégia da resolução correta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Identifica o desperdício diário por meio da representação gráfica e determina que o desperdício que 840 litros foi produzido em 14 dias.	G5	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**
Fazem uma aproximação com os valores explícitos no gráfico e afirmam que a torneira ficou gotejando por 13 dias.	G1, G8 e G9	Não identificado
Consideram o próximo valor implícito no gráfico e afirmam que a torneira ficou gotejando por 12 dias.	G2, G6. G7, G10 e G11	Não identificado
Fazem uma aproximação e consideram que a torneira ficou gotejando por 12 dias e meio.	G3 e G4	Não identificado

No item d) da atividade 6, é necessário que os alunos desenvolvam a expressão algébrica que representa o desperdício de água em litros para qualquer quantidade de dias em que a torneira ficou gotejando. Para esse item, cinco (05) grupos desenvolveram estratégias corretas e apresentaram a expressão $D = 60x$.

Apresentamos, a seguir, um trecho do diálogo desenvolvido por um desses grupos (G3) em situação de formulação e validação. Em seguida apresentamos a expressão algébrica desenvolvida por eles (Figura 44).

Diálogo produzido entre a pesquisadora e o grupo 3 - fragmento

- Professora, está certo a nossa expressão? – apresenta a expressão $\mathrm{D} = 60 \div \mathrm{x}$ – aluno A.
- Vamos testar valores para ver se a expressão está correta. Com a sua expressão qual será o desperdício em 5 dias? – pesquisadora.
- Hiiii não dá certo - aluno B.
- Acho que vezes 60 vai dar certo - aluno B.

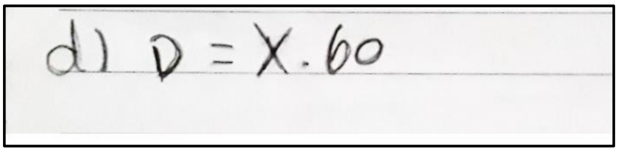

d) D = X.60

Figura 44 - Resolução apresentada pelo grupo G3 para o item d) da atividade 6
Fonte: Dados da pesquisa

Notamos, por meio do diálogo apresentado, que o grupo inicialmente desenvolveu uma expressão incorreta, no entanto, com o auxílio da pesquisadora, testaram a expressão desenvolvida e perceberam o equívoco. Assim como citado por Mateus (2013), devemos incentivar os alunos a justificarem raciocínios e a testar as regras que encontram, pois, na maioria das vezes, eles não sentem a necessidade em testar suas conjecturas.

É possível notar que esses alunos manifestaram implicitamente uma expressão do tipo $f(n) = n \times f(1)$, ou seja, mobilizaram o TAV1 que modela a situação proposta na atividade 6. Além desse teorema em ação, acreditamos que esses alunos mobilizaram o TAV3, pois utilizaram uma letra, no caso $\boldsymbol{x}$, para representar qualquer quantidade. Nesses casos, acreditamos que as cinco ideias base consideradas para o conceito de função foram mobilizadas.

Os demais grupos (6 grupos) apresentaram a mesma estratégia incorreta, considerando a expressão algébrica $V = xy$, inferimos que esses grupos não conseguiram representar o desperdício diário e, assim, apresentaram uma expressão algébrica sem relação com a expressão correta. Para esse item, notamos que o TAF1 não foi mobilizado. Acreditamos que o desenvolvimento e as discussões das atividades anteriores permitiram que tal teorema fosse desestabilizado, pois nenhum grupo escolheu uma quantidade específica para representar qualquer quantidade. As estratégias desenvolvidas na generalização das atividades 3 e 4 já haviam dado indicativos de desestabilização desse teorema.

O Quadro 60, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item d) da atividade 6, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 60: Estratégias de resoluções apresentadas para o item d) da atividade 6

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Identificam o desperdício diário por meio da representação gráfica e apresentam a expressão $D = 60x$	G1, G3, G5, G7 e G8	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Estratégia das resoluções incorretas	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
$V = xy$	G2, G4, G6, G9, G10 e G11	Não identificado

No item e) da atividade 6, é solicitado que, com a expressão algébrica estabelecida no item anterior, os alunos determinem o desperdício de água se a torneira permanecer gotejando por 7 dias. Nesse caso, a nossa intenção é que os sujeitos validem a expressão algébrica desenvolvida, pois concordamos com Hermman *et al* (2019) quando defendem que a leitura e a interpretação das situações e das soluções encontradas na resolução das situações são ações que devem ser privilegiadas nas aulas, de modo que o professor conduza o estudante a analisar se há coerência no que ele está fazendo para solucionar as questões propostas e, ao encontrar a solução, é fundamental que o aluno consiga interpretá-la de acordo com o contexto, atribuindo sentido ao resultado que obteve.

Os cinco (05) grupos que determinaram a expressão algébrica correta no item anterior desenvolveram adequadamente o item e), pois utilizaram a expressão desenvolvida e atribuíram o número 7 à variável *dias* concluindo que o desperdício será de 420 litros. No entanto, não se atentaram em especificar que o desperdício de água determinado utilizando a expressão algébrica e utilizando a representação gráfica será o mesmo. Consideramos, nos casos apresentados, que foram mobilizadas as ideias base variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização.

A Figura 45, a seguir, apresenta essa estratégia de resolução desenvolvida pelo grupo G5.

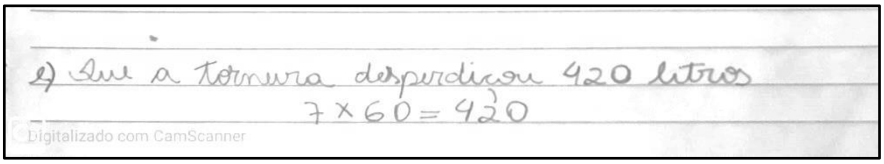


Figura 45 - Resolução apresentada pelo grupo G5 para i item e) da atividade 6
Fonte: Dados da pesquisa

Ao desenvolverem a estratégia mencionada, os alunos mobilizam o TAV1, mencionado nos itens anteriores da atividade. No entanto, para o caso do item e), $n = 7$ e $f(1) = 60$. Sendo assim, temos:

$$f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1) \Rightarrow f(7) = 7 \times f(1) = 7 \times 60 = 420$$

Os outros 7 grupos apresentaram estratégias incorretas para o item e). Esses grupos não desenvolveram corretamente a expressão algébrica no item anterior da atividade e não conseguiram validar suas expressões. Seis (06) desses grupos apresentaram a expressão $V = 7 \times 420$, ou seja, multiplicaram a quantidade de dias dada no enunciado (sete) pelo desperdício produzido em 7 dias. Além dessa estratégia incorreta, um (01) grupo afirmou apenas que o desperdício será de 420 litros, porém não apresentou estratégia de resolução. Consideramos que o fato de esses grupos não terem desenvolvido corretamente a expressão algébrica comprometeu o desenvolvimento do item e) da atividade, pois não conseguiram atribuir valores às variáveis da expressão desenvolvida e, então, *forçaram* uma estratégia para concluir que o desperdício foi de 420 litros. Apresentamos a seguir um fragmento do diálogo produzido pelos integrantes do grupo G11.

Diálogo produzido por integrantes do grupo G11 - fragmento

- Por 7 dias teria que dar 420 litros, né? – aluno A.
- Verdade. Na letra b), colocamos 420 – aluno B.
- Vou colocar aqui que o desperdício é o mesmo – aluno A.

É possível notar, por meio do diálogo apresentado, que, embora esses sujeitos não tenham atribuído valores à expressão algébrica corretamente, eles compreenderam que o desperdício será o mesmo daquele determinado utilizando a representação gráfica e, portanto, desenvolveram uma resolução, mesmo que incorreta, para afirmar que o desperdício de água será de 420 litros.

O Quadro 61, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item e) da atividade 6, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 61: Estratégias de resoluções desenvolvidas para o item e) da atividade 6

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Atribuem o valor 7 para a variável *dias* na expressão determinada no item anterior e concluem que o desperdício de água será de 420 litros.	G1, G3, G5, G7 e G8	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Estratégia das resoluções incorretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Não desenvolvem a expressão algébrica correta no item anterior e multiplicam a quantidade de dias (7) pelo desperdício total (420).	G2, G6, G9, G10 e G11	Não identificado
Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Afirma apenas que o desperdício será de 420 litros.	G4	Não identificado

No item f) da atividade, é necessário utilizar a expressão algébrica estabelecida no item d) e determinar por quanto tempo a torneira permaneceu gotejando se o desperdício foi de 840 litros, além disso, é solicitado que os alunos comparem o resultado obtido com aquele determinado por meio da representação gráfica. Novamente nossa intenção era que os alunos validassem suas expressões.

Para esse item, cinco (05) grupos apresentaram uma estratégia correta ao realizarem o cálculo $840 \div 60$, ou seja, dividiram o desperdício total pelo desperdício diário e concluíram que a torneira permaneceu gotejando por 14 dias. Consideramos que esses grupos mobilizaram as cinco ideias base relacionadas ao conceito de função.

A Figura 18 apresenta a resolução de um desses grupos (G1).

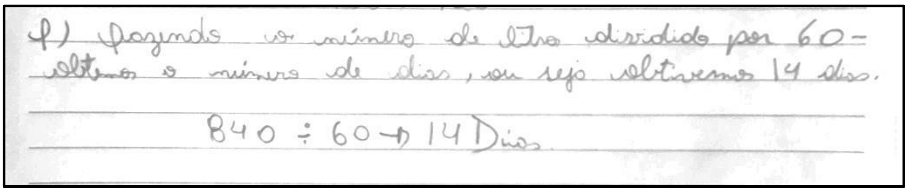

f) fazendo o número de litro dividido por 60 obtemos o número de dias, ou seja obtivemos 14 dias.
840 ÷ 60 → 14 Dias.

Figura 46 - Resolução apresentada pelo grupo G1 para o item f) da atividade 6
Fonte: Dados da pesquisa

Ao desenvolverem a estratégia mencionada, os alunos mobilizaram o TAV1, mencionado nos itens anteriores da atividade. No entanto, para o caso do item f), o valor desconhecido é representado pelo n e é determinado sabendo-se que $f(1) = 60$ e $f(n) = 840.$ Sendo assim, temos:

$$f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1) \Rightarrow f(n) = n \times f(1) = n \times 60 = 840 \Rightarrow n = 14$$

Outros 2 grupos apresentaram o resultado correto (14 dias), porém não desenvolveram estratégia de resolução. Acreditamos que esses grupos tiveram dificuldades em utilizar as expressões desenvolvidas, mas concluíram que o desperdício teria de ser o mesmo daquele determinado por meio da representação gráfica. Além disso, quatro (04) grupos apenas afirmaram que a torneira ficou gotejando por 13 dias.

O Quadro 62, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos sujeitos no item f) da atividade 6, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 62 - Estratégias de resolução desenvolvidas para o item f) da atividade 6

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (5)**	**Teoremas em ação**
Baseando-se na expressão algébrica determinada, realizam o cálculo $840 \div 60$ e concluem que a torneira ficou gotejando por 14 dias.	G1, G2, G3, G5 e G7	TAV1: $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1)$
Não apresenta estratégia e a resultado é correto	**Quantidade (2)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que a torneira ficou gotejando por 14 dias.	G4 e G11	Não identificado
Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Afirmam que a torneira ficou gotejando por 13 dias.	G6, G8, G9 e G10	Não identificado

Consideramos que, no desenvolvimento da atividade 6, foram realizadas discussões pertinentes a respeito da utilização da representação gráfica e da expressão algébrica. Os alunos interpretaram o gráfico e desenvolveram a expressão algébrica, além disso, foi necessário validar as expressões desenvolvidas, o que ainda não havia sido abordado na sequência didática. Nesse sentido, notamos que os grupos que desenvolveram corretamente a expressão algébrica (5 grupos) conseguiram validar suas expressões, concluindo que os valores determinados por meio da expressão são os mesmos daqueles determinados por meio da representação gráfica.

Aqueles grupos que não desenvolveram estratégias corretas para a representação algébrica (6 grupos) não conseguiram atribuir valores para as variáveis da expressão determinada e, mesmo assim, não desenvolveram outras estratégias para a generalização.

Discussão da atividade 6

Depois de recolhidas as resoluções da atividade 6, foi necessário realizar um momento didático com a turma, na intenção de discutir as ideias presentes na atividade. Nesse momento, foi abordada a importância de testarem suas conjecturas, atribuindo valores a suas expressões algébricas e comparando-os com aqueles obtidos por meio da representação gráfica.

A pesquisadora discutiu com a turma cada item da atividade, determinou o desperdício diário por meio da representação gráfica e da expressão algébrica. A seguir são apresentados alguns trechos dessa conversa.

Diálogo entre pesquisadora e a turma - fragmento

- Pessoal, é importante a gente atribuir valores nas variáveis da nossa expressão algébrica para validar essa expressão. É um jeito de testarmos se a expressão está correta ou não, por isso, nos itens d) e e), nós vamos atribuir valores na expressão e comparar com os valores obtidos por meio da representação gráfica. Mas e se fizermos isso e esses valores não forem iguais? – pesquisadora.
- Significa que a fórmula está errada – aluno A.
- Significa que a nossa expressão não está correta ou que não interpretamos corretamente o gráfico. Por isso precisamos voltar ao gráfico e à expressão pra identificar o erro – pesquisadora.
- Professora, é que a gente nem sabia fazer isso – aluno B.

Notamos, com o desenvolvimento da atividade 6, que os sujeitos não eram acostumados a validar e/ou interpretar suas expressões algébricas, ou seja, não testavam suas conjecturas. Consideramos essa uma ação importante para a aprendizagem dos alunos, no que concerne à ideia de generalização, e que precisa ser abordada em sala de aula no decorrer do processo escolar.

5.6 Atividade 7

Apresentamos, a seguir, a atividade 7 da sequência didática desta pesquisa seguida das análises *a posteriori* e da descrição dos momentos de discussão da atividade com a turma.

A atividade

(Adaptada Martins, Rezende e Hermann (2019)) – Uma das maneiras de reduzir o consumo de energia elétrica foi a criação da tecnologia LED (sigla em inglês para diodo emissor de luz) que já está substituindo as lâmpadas fluorescentes. As lâmpadas LED são mais eficientes que as fluorescentes, produzem a mesma luminosidade com menor consumo de energia. No quadro abaixo relacionamos os preços e os consumos de duas lâmpadas equivalentes.

Lâmpada	**Potência**	**Preço da lâmpada**	**Gasto mensal de energia**
LED	11 Watts	R$ 12,00	R$ 1,10
FLUORESCENTE	22 Watts	R$ 8,00	R$ 2,20

Sabendo que Paula possui na sala de sua casa os dois tipos de lâmpadas e que elas são sempre ligadas ao mesmo tempo, responda as questões que seguem.

f) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?
g) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?
h) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.
i) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).
j) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.

Análise a posteriori

A aplicação da atividade 7 ocorreu no dia 15 de agosto de 2019, teve duração de 2 horas/aulas e contou com a participação de 27 alunos distribuídos em 9 duplas e 3 trios.

No enunciado da atividade, os dados são apresentados em uma tabela, contendo informações sobre dois tipos de lâmpadas, incluindo o valor gasto com a compra da lâmpada e o gasto mensal que cada uma delas produz. No item a), é proposta a situação de uma pessoa que usa as duas lâmpadas por dois meses, sendo necessário determinar qual lâmpada produzirá o menor gasto em dinheiro. Para esse item, dos doze (12) grupos que desenvolveram a atividade, onze (11) apresentaram estratégias corretas e apenas um (01) grupo apresentou uma estratégia incorreta.

Dentre os grupos que apresentaram estratégias corretas, sete (07) deles apresentaram os cálculos $1{,}10 + 1{,}10 = 2{,}20$ e $12{,}00 + 2{,}20 = 14{,}20$ para a lâmpada de LED e os cálculos $2{,}20 + 2{,}20 = 4{,}40$ e $8{,}00 + 4{,}40 = 12{,}40$ para o caso da lâmpada fluorescente. Esses grupos concluíram que a lâmpada fluorescente produzirá um menor gasto para o caso de dois meses de uso.

A Figura 47 traz a resolução apresentada por um desses grupos (G12).

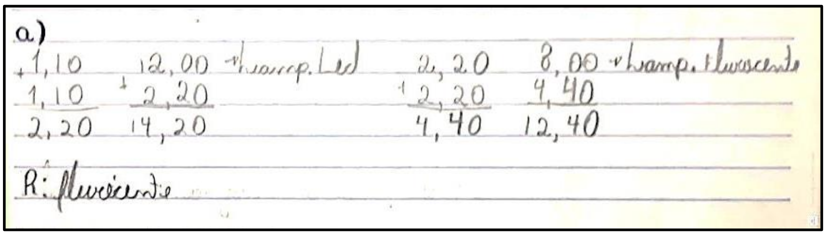


Figura 47 - Resolução apresentada pelo grupo G12 para o item a) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa a quantidade de meses de uso de cada lampada e o valor gasto, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfirmos das relações de proporcionalidade, e neste caso, $f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) + c$, para c e k números reais. Identificamos essa associação como um teorema em ação verdadeiro implícito nas respostas dos alunos. Indicamos, a seguir, pela sigla TAV7, o teorema em ação verdadeiro mencionado:

$$\boxed{\text{TAV7: } f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) + c \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } c \in \mathbb{R}}$$

Para o caso do item a) da atividade, tomando $x = 1$, temos $f(x) = f(1)$ que representa o valor gasto para um mês de uso de cada lâmpada, e a constante c representa o valor gasto com a compra de cada lâmpada. Assim, acreditamos que os alunos mobilizaram o TAV7 quando realizaram os seguintes cálculos:

$$f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + c \Rightarrow f(1) + f(1) + c = 1{,}10 + 1{,}10 + 12{,}00 = 14{,}20$$

e

$$f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + c \Rightarrow f(1) + f(1) + c = 2{,}20 + 2{,}20 + 8{,}00 = 12{,}40$$

Ainda em relação às estratégias corretas, três (03) grupos realizaram multiplicações para determinar o gasto mensal de cada lâmpada, apresentando os seguintes cálculos: $2{,}20 \times 2 = 4{,}40$ e $8{,}00 + 4{,}40 = 12{,}40$, para o caso da lâmpada fluorescente, e $1{,}10 \times 2 = 2{,}20$ e $12{,}00 + 2{,}20 = 14{,}20$, para a lâmpada de LED. Esses grupos também concluíram que, para dois meses de uso, a lâmpada fluorescente produzirá o menor gasto em relação à lâmpada de LED. Apresentamos na Figura 48 a seguir, a resolução de um dos grupos (G1) que desenvolveu essa estratégia.

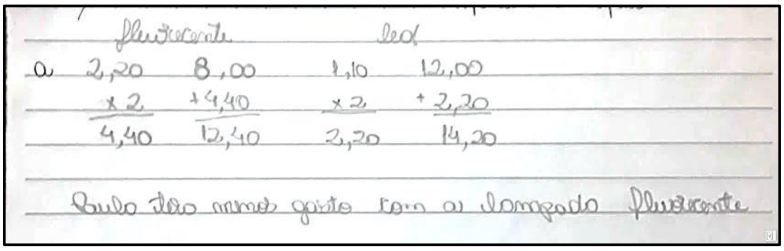


Figura 48 - Resolução apresentada pelo grupo G1 para o item a) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa a quantidade de meses de uso de cada lampada e o valor total gasto, podemos utilizar uma notação algébrica para o isomorfismos das relações de proporcionalidade, e neste caso $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação verdadeiro, o TAV4, manifestado nas atividades 2, 3, 4 e 5. No entanto, na presente situação, k, que representa a quantidade de meses, vale 2 e $x = 1,$ ou seja, $f(x) = f(1)$, pois representa o valor gasto por mês com o uso de cada lâmpada . A constante c representa o valor gasto com a compra de cada lâmpada. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 2 \times f(1) + 12{,}00 = 2 \times 1{,}10 + 12{,}00 = 14{,}20$$

e

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 2 \times f(1) + 8{,}00 = 2 \times 2{,}20 + 8{,}00 = 12{,}40$$

A estratégia incorreta, desenvolvida pelo grupo G5, afirma que, com a lâmpada de LED, o gasto será de R$13,10 e, com a lâmpada fluorescente, o gasto será de R$10,20, ou seja, considera apenas o gasto produzido com um mês de uso para cada lâmpada. Neste caso, os alunos não multiplicaram o valor gasto mensal pela quantidade de meses de uso da lâmpada e consideraram apenas o valor gasto com um mês de uso.

Sendo assim, é possível associar um teorema em ação falso à resposta apresenta pelo grupo G5, pois consideraram que $f(kx) + c = f(x) + c$, para k e c números reais. Essa associação já foi apresentada nesta pesquisa como um teorema em ação falso, o TAF2, manifestado na atividade 3. No entanto, na presente situação, k, que representa a quantidade de meses, vale 2 e $f(x) = f(1)$ representa o valor gasto por mês com o uso de cada lâmpada. A constante c representa o valor gasto com a compra de cada lâmpada. Sendo assim:

$$f(kx) + c = f(x) + c \Rightarrow f(1) + 12{,}00 = 1{,}10 + 12{,}00 = 13{,}10$$

e

$$f(kx) + c = f(x) + c \Rightarrow f(1) + 8{,}00 = 2{,}20 + 8{,}00 = 11{,}20$$

Nos casos apresentados, consideramos que os alunos mobilizaram as ideias base de correspondência, dependência e regularidade. O Quadro 63, a seguir, apresenta as estratégias desenvolvidas pelos alunos no item a) da atividade 7, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 63: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item a) da atividade 7

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**

Determina o gasto com a energia em dois meses multiplicando o gasto mensal por 2, depois soma a esse resultado o valor gasto com a compra de cada lâmpada e conclui que com a lâmpada fluorescente o gasto será menor.	G8, G11 e G12	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Determina o gasto com a energia em dois meses somando o gasto mensal duas vezes, depois soma a esse resultado o valor gasto com a compra de cada lâmpada concluindo que a lâmpada fluorescente terá o menor gasto.	G1, G2, G3, G4, G6, G7, G9 e G10	TAV7: $f(kx) + c = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) + c$
Estratégia da resolução incorreta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Soma o valor gasto na compra de cada lâmpada com o gasto para um mês de uso e conclui que com a lâmpada fluorescente terá o menor gasto.	G5	TAF2: $f(kx) + c = f(x) + c$

No item b) da atividade 7 é necessário que os alunos determinem qual lâmpada terá o menor gasto para 5 meses de uso. Neste caso, dez (10) grupos apresentaram respostas corretas. Esses grupos multiplicaram a quantidade de meses pelo gasto mensal de cada lâmpada e, depois, somaram o valor gasto na compra da lâmpada, concluindo, então, que, para 5 meses, a lâmpada de LED terá o menor gasto. Nesses casos, consideramos que as ideias base de correspondência, dependência e regularidade foram mobilizadas. Apresentamos, a seguir, um trecho do diálogo desenvolvido por um desses grupos (G3).

Diálogo entre integrantes do grupo 3 (G3) - fragmento

O grupo lê o item b)
- *Agora tem que fazer com o 5* – aluno A.
- *Com certeza vai continuar sendo a fluorescente, mas nós vamos fazer a conta só pra mostrar pra professora. Coloca 12,40 vezes 3. Dá 37, 20* – aluno B.
- *Por quê?* - aluno A
- *Porque aqui já foi 2 meses, faltam 3 porque é 5 meses* – aluno B.
- *Mas o valor pago pela lâmpada você só vai usar 1 vez* – aluno A.
- *Ah é* – aluno B.
- *Então 2,20 vezes 5 e depois soma 12* – aluno A
- *Dá 23* – aluno B.
- *Agora 1,10 vezes 5 e depois mais 12* – aluno A.
- *Dá 17,50. Caraca! Fica mais barato* – aluno B.
- *E você falou que ia ser a fluorescente* – aluno A.
- *Mas dá a de Led. Apesar de que eu preferiria gastar 19 reais do que 17, porque a Fluorescente é melhor* – aluno B.

Notamos, por meio do diálogo apresentado, que, antes de desenvolverem os cálculos necessários, o grupo pressupôs que a lâmpada fluorescente produziria o menor gasto para cinco meses de uso. Acreditamos que, ao fazer essa suposição, os alunos levaram em conta apenas o valor gasto com a compra da lâmpada, sem dar a devida atenção ao valor gasto mensalmente com o uso dessas lâmpadas. No entanto, depois de realizarem os cálculos necessários, esses alunos apresentaram a resposta correta. Outro fato que nos chamou atenção nesse diálogo foi que um dos alunos estava considerando o valor gasto com a compra da lâmpada todos os meses, no entanto, este fato também foi corrigido por outro integrante do grupo. Ou seja, o grupo manifestou uma situação de formulação e validação da estratégia desenvolvida, além da devolução pela atividade.

Em termos matemáticos, ao considerarmos f uma função real que associa a quantidade de meses de uso de cada lampada e o valor total gasto, podemos utilizar a notação algébrica $f(kx) + c = k \times f(x) + c$, para c e k números reais. Essa associação já foi apresentada no item anterior desta atividade como o TAV4. No entanto, na presente situação, k, que representa a quantidade de meses, vale 5. Sendo assim:

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 5 \times f(1) + 12{,}00 = 5 \times 1{,}10 + 12{,}00 = 17{,}50$$

e

$$f(kx) + c = k \times f(x) + c \Rightarrow 5 \times f(1) + 8{,}00 = 5 \times 2{,}10 + 8{,}00 = 19{,}00$$

Ainda para o item b), dois (02) grupos não apresentaram estratégias de resolução e apenas afirmaram que, com a lâmpada fluorescente, o gasto será menor. Acreditamos que esses alunos observaram apenas o valor gasto com a compra da lâmpada e não consideraram o gasto mensal de cada uma delas.

O Quadro 64 a seguir apresenta as estratégias desenvolvidas pelos alunos no item b) da atividade 7, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 64: Estratégias de resolução desenvolvidas para o item b) da atividade 7

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**
Determina o gasto com a energia em cindo meses multiplicando o gasto mensal por 5, depois soma a esse resultado o valor gasto com a compra de cada lâmpada concluindo que a lâmpada de LED produzirá menor gasto.	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G12	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$

Não apresenta estratégia e o resultado é incorreto	Quantidade (2)	Teoremas em ação
Apenas afirma que com a lâmpada fluorescente o gasto será menor.	G10 e G11	Não identificado

No item c) da atividade, é considerada uma situação em que uma das lâmpadas foi usada por cinco meses e produziu um gasto de R$17,50, Assim, os alunos precisavam determinar qual das duas lâmpadas foi utilizada e se esta seria a melhor opção. Para este item, oito (08) grupos apresentaram estratégias corretas, afirmando que a lâmpada escolhida foi a lâmpada de LED e que esta foi a melhor opção, pois a lâmpada de LED produzirá o menor gasto para 5 meses de uso, mobilizando novamente o TAV4.

A seguir apresentamos a resolução do grupo 12 (G12) que desenvolveu essa estratégia.

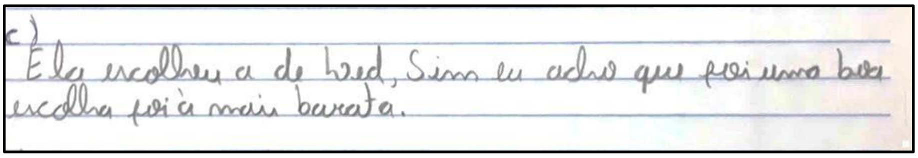

c) Ela escolheu a de Led, Sim eu acho que foi uma boa escolha foi a mais barata.

Figura 49 - Resolução apresentada pelo grupo G12 para o item c) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

Ainda para este item, quatro (04) grupos apresentaram estratégias incorretas afirmando que foi escolhida a lâmpada fluorescente e que esta é a opção em que o gasto será menor. Acreditamos que esses grupos consideraram apenas o valor gasto com a compra da lâmpada e não desconsideraram o gasto mensal. Nos casos apresentados, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de correspondência, dependência e regularidade.

O Quadro 65 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos alunos no item c) da atividade 7, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 65: Estratégias de resolução apresentadas para o item c) da atividade 7

Estratégia das resoluções corretas	Quantidade (8)	Teoremas em ação
Afirma que foi escolhida a lâmpada de LED e concorda que esta foi a melhor opção, pois com a lâmpada de LED o gasto será menor.	G1, G2, G4, G5, G6, G8, G9 e G12	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (3)**	**Teoremas em ação**
Afirma que foi escolhida a lâmpada fluorescente e que esta é a opção em que o gasto será menor.	G3, G7, G10 e G11	Não identificado

No item d) da atividade 7, é necessário desenvolver uma expressão algébrica que determine o gasto mensal com a lâmpada de LED. Dez (10) grupos desenvolveram estratégias corretas e apresentaram a expressão: $V = 12{,}00 + 1{,}10x$ Nesses casos, consideramos que foram mobilizadas as cinco ideias base relacionadas ao conceito de função: variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização.

A Figura 50, a seguir, apresenta essa resolução desenvolvida pelo grupo G12.

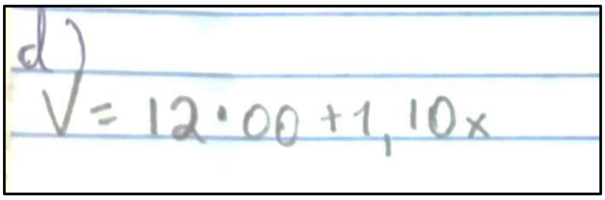


Figura 50 - Resolução apresentada pelo grupo G12 para o item d) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

É possível notar que esses alunos desenvolveram uma expressão do tipo $k \times f(x) + c$, correspondente ao valor a ser gasto com a lâmpada, ou seja, mobilizaram o TAV4 que modela a situação proposta na atividade 7. Além desse teorema em ação, notamos que o TAV3 também foi mobilizado, pois esses alunos utilizaram uma letra para representar qualquer quantidade.

Ainda para este item, um (01) grupo apresentou a expressão $1{,}10x$, ou seja, não considerou o valor gasto na compra da lâmpada (constante c) e mobilizou o TAF3 ao considerar que $f(kx) + c = k \times f(x)$. Além disso, um (01) grupo não apresentou estratégia de resolução, deixando o item em branco.

O Quadro 66 apresenta as estratégias desenvolvidas pelos alunos no item d) da atividade 7, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia e os teoremas em ação possivelmente manifestados nessas estratégias.

Quadro 66: Estratégias de resolução apresentadas para o item d) da atividade 7

Estratégia das resoluções corretas	**Quantidade (10)**	**Teoremas em ação**
Considera o valor gasto com a compra da lâmpada e o gasto mensal, apresentando a expressão $V = 12{,}00 + 1{,}10x$	G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G11 e G12	TAV4: $f(kx) + c = k \times f(x) + c$
Estratégia da resolução incorreta	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Considera apenas o gasto mensal da lâmpada e	G10	TAF3: $f(kx) + c =$

apresenta a expressão $1{,}10x$		$k \times f(x)$
Em branco	**Quantidade (1)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução	G3	Não identificado

Para o item e) da atividade 7, é necessário desenvolver uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, para os valores gastos com cada uma das lâmpadas dependendo do seu tempo de uso. Uma representação semelhante a esta já havia sido proposta aos alunos no teste diagnóstico desta pesquisa. Naquele momento, nenhum aluno desenvolveu estratégias corretas.

Para o caso da atividade 7, novamente nenhum grupo desenvolveu estratégias corretas. Dois (02) grupos, porém, apresentaram uma estratégia parcialmente correta, pois, embora tenham calculado os valores corretamente para as variáveis em cada uma das situações, não posicionaram esses valores adequadamente no plano cartesiano, o que fez com que o gráfico apresentasse curvas. Nestes casos, consideramos que foram mobilizadas as ideias base de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização.

A Figura 51, a seguir, apresenta a representação gráfica desenvolvida por um desses grupos (G12).

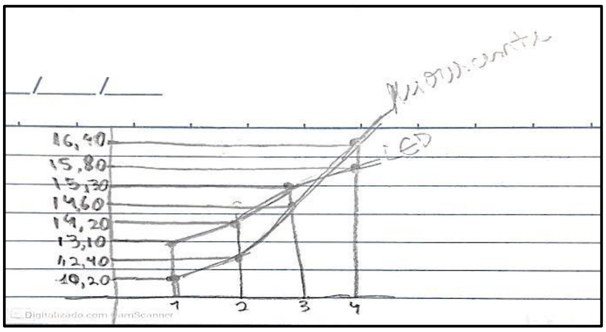


Figura 51 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G12 para o item e) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

Ainda em relação à representação gráfica, quatro (04) grupos apresentaram estratégias incorretas. Dentre esses, dois (02) grupos desenvolveram duas representações gráficas, uma para cada lâmpada, o que já estava previsto em nossa análise *a priori*. Além disso, esses grupos erraram na escala dos eixos cartesianos, o que fez com que as retas apresentadas não fossem desenvolvidas corretamente.

A Figura 52, a seguir, apresenta a representação gráfica desenvolvida por um desses grupos (G12).

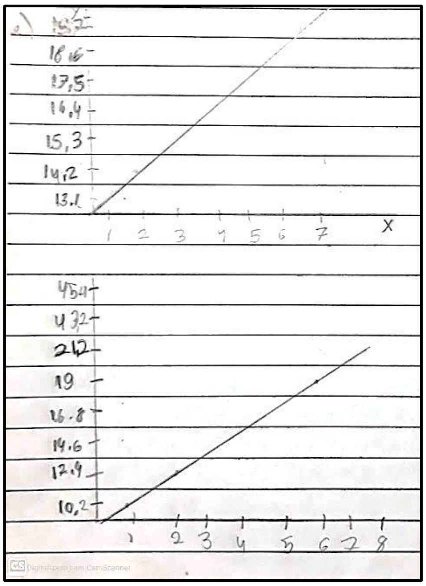


Figura 52 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G7 para o item e) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

Outras duas (02) estratégias incorretas foram desenvolvidas. Em uma delas os alunos, além de manifestarem erros na escala do gráfico, não traçaram a reta e representaram apenas os pontos no plano cartesiano. Na última estratégia incorreta, os alunos representaram alguns valores nos eixos cartesianos de maneira equivocada e, além disso, traçaram uma reta qualquer sem considerar os pontos no plano cartesiano. A Figura 53, a seguir, apresenta esta última representação gráfica desenvolvida pelo grupo G4.

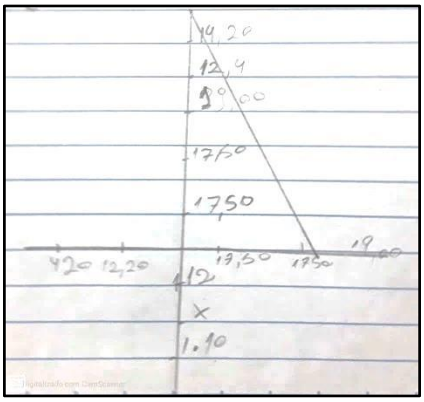


Figura 53 - Representação gráfica apresentada pelo grupo G4 para o item e) da atividade 7
Fonte: Dados da pesquisa

É possível notar, com o desenvolvimento deste item da atividade, que os alunos ainda apresentam dificuldades para desenvolver a representação gráfica, pois nenhum dos grupos apresentou estratégias corretas para este item. No entanto, os alunos não mais desenvolveram gráficos de colunas ao invés de gráfico cartesiano, o que ocorreu no teste diagnóstico desta pesquisa.

As dificuldades, de estudantes da Educação Básica, no desenvolvimento da representação gráfica também ficou aparente na pesquisa de Ceolim *et al* (2019). Na investigação apresentada por esses autores, uma situação problema, envolvendo função afim, foi desenvolvida por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, distribuídos em 29 grupos. Em relação à representação gráfica, os sujeitos da referida pesquisa apresentaram três (03) gráficos de pontos, onze (11) gráficos de colunas e quinze (15) gráficos de retas. No entanto, dentre os gráficos de retas desenvolvidos, apenas um (01) foi considerado, pelos autores da pesquisa, próximo do esperado para a resolução da tarefa.

O Quadro 67 a seguir apresenta as estratégias desenvolvidas pelos alunos no item e) da atividade 7, bem como a quantidade de grupos que utilizou cada estratégia.

Quadro 67: Estratégias de resolução apresentadas para o item e) da atividade 7

Estratégia das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (2)**	**Teoremas em ação**
Faz a representação gráfica das duas situações no mesmo plano cartesiano, porém erra na escala do gráfico, fazendo as situações ser representadas por curvas. Além disso, considera valores para a variável dependente apenas maiores ou igual a 1.	G9 e G12	Não identificado
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (4)**	**Teoremas em ação**
Desenvolve duas representações gráficas, uma para os valores gastos com a lâmpada de LED e outra para os valores gastos com a lâmpada fluorescente. No entanto, apresenta erros na escala dos gráficos.	G7 e G8	Não identificado
Posiciona alguns valores das variáveis *tempo de uso* e *valor gasto* para cada uma das lâmpadas nos eixos cartesianos, porém apresenta equívocos na escala do gráfico. Além disso, estabelece apenas alguns pontos no plano cartesiano e não traça as retas correspondentes.	G5	Não identificado
Posiciona alguns valores gastos com as duas lâmpadas nos eixos cartesianos de maneira equivocada e traça uma reta qualquer.	G4	Não identificado
Em branco	**Quantidade (6)**	**Teoremas em ação**
Não apresenta estratégia de resolução.	G1, G2, G3, G6, G10 e G11	Não identificado

Consideramos que, no desenvolvimento da atividade 7, foram realizadas discussões pertinentes. Os dados foram apresentados em forma de tabela, o que não havia acontecido nas atividades anteriores da sequência didática. Foi desenvolvida também a representação gráfica de duas situações em um mesmo plano cartesiano.

A expressão algébrica solicitada nesta atividade foi bem desenvolvida pelos alunos, uma vez que, dos doze (12) grupos que participaram da atividade, dez (10) grupos apresentaram expressões algébricas corretas.

Discussão da atividade 7

Depois de recolhidas as resoluções da atividade 7, foi necessário realizar um momento didático com a turma com a intenção de discutir as ideias presentes na atividade. Neste momento, foram discutidos com os alunos a intepretação dos dados contidos na atividade, o desenvolvimento da expressão algébrica e a representação gráfica das situações. A seguir apresentamos um trecho dessa conversa em relação ao item e) da atividade.

Diálogo entre pesquisadora e a turma - fragmento

- Pessoal, para fazermos a representação gráfica, vamos pensar na situação de cada lâmpada. Nós já determinamos as expressões algébricas para representar o valor gasto com cada lâmpada, agora vamos usar essas expressões para fazer o gráfico – pesquisadora*.*
A pesquisadora faz a representação do plano cartesiano no quadro e posiciona, junto com os alunos, três pontos para cada situação e, com isso, representa no gráfico as duas retas correspondentes.
- Pessoal, neste item pede para a gente determinar para quais meses o valor gasto com cada lâmpada é menor. O que vocês acham? Como podemos determinar? – pesquisadora.
- Professora, eu acho que é ali onde as retas se encontram – aluno A*.*
- O que significa esse ponto em que as retas se encontram? – pesquisadora*.*
- Que elas têem o mesmo valor aí – aluno A*.*
- Isso. Então quer dizer que, entre três e quatro meses, as duas lâmpadas têm o mesmo gasto. Mas o que acontece antes disso? Até os três meses? – pesquisadora
- Aaaaaah, aí a lâmpada de fluorescente está mais pra baixo e depois a de LED que fica pra baixo – aluno B*.*
- Isso mesmo. Então isso quer dizer que até três meses a lâmpada fluorescente fica mais barato, depois disso, a lâmpada de LED fica mais barato que a fluorescente.

Acreditamos que as reflexões realizadas durante essa discussão foi alcançada com a observação da representação gráfica, no entanto, os alunos não desenvolveram corretamente esse tipo de representação, o que pode ter comprometido maiores reflexões no momento de desenvolvimento da atividade.

Com a atividade 7, foram encerradas as intervenções da pesquisadora com a turma investigada. De modo geral, consideramos que foram realizadas discussões pertinentes a respeito da generalização, pois além da identificação de teoremas em ação, verdadeiros e falsos, em relação a essa ideia base, os alunos participantes da pesquisa demonstraram um avanço em relação à mobilização da generalização.

A seguir apresentamos as considerações finais desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar este texto, buscamos responder à questão que contribuiu para o desenvolvimento da investigação: *Quais teoremas em ação relacionados à generalização podem ser mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações envolvendo função afim?* Igualmente, são contempladas nestas considerações finais as contribuições da fundamentação teórica e da metodologia adotadas para a presente investigação.

Esta pesquisa teve como opção metodológica aspectos da Engenharia Didática, mais especificamente, as quatro etapas da Engenharia Didática (*análise preliminar, análise a priori, experimentação* e *análise a posterior*i), além de considerar as variáveis didáticas para a elaboração das atividades que compuseram a sequência didática, desenvolvida em sala de aula com os estudantes colaboradores deste trabalho. A sequência didática elaborada consistiu em situações de caráter adidático, que foram consideradas pertinentes ao propósito da investigação, pois permitiram aos sujeitos a *devolução,* pelas situações propostas, a interação entre os sujeitos participantes da pesquisa e, quando necessário, entre estudantes e pesquisadora, além de possibilitara a esta última o acompanhamento do desempenho dos alunos em todos os momentos de experimentação. Foi possível incentivar o diálogo entre os estudantes e indagar a respeito das estratégias desenvolvidas por eles durante a resolução da sequência didática, permitindo que possíveis conhecimentos implícitos nas respostas dos alunos pudessem ser revelados.

A Teoria dos Campos Conceituais foi, certamente, oportuna para esta investigação, favorecendo a estruturação do instrumento de pesquisa e respaldando teoricamente as análises realizadas. Para Vergnaud (1996; 2009), um conceito é compreendido pelo sujeito a partir de uma diversidade de situações vivenciadas por ele no decorrer do processor escolar, o que nos leva a considerar que o campo conceitual das funções está em constante evolução durante o processo escolar. Dessa forma, as atividades propostas aos participantes revelaram-se como novas situações para os alunos, fato observado nas análises das resoluções escritas e dos diálogos entre os sujeitos, contribuindo para a aprendizagem do conceito de função afim pelos participantes, especialmente a ideia de generalização.

No que se refere às análises, a Teoria dos Campos Conceituais ofereceu subsídios para compreender o desempenho dos estudantes, oportunizando revelar possíveis conhecimentos implícitos nas respostas dos alunos, por meio dos *teoremas em ação,* que, de acordo com Vergnaud (1993), são categorias de conhecimento na forma de proposição e podem ser verdadeiros ou falsos, do ponto de vista científico. Foi possível, portanto, apontar conhecimentos relacionados à generalização, mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem situações envolvendo função afim.

Uma síntese desses conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos da pesquisa, modelados na forma de teoremas em ação e associados à generalização, é apresentada nos Quadros 68 e 69 a seguir. Na primeira coluna de cada quadro, descrevemos a ação do aluno, apresentada em sua estratégia de resolução e que nos levou a indicar um teorema em ação. Na segunda coluna, estão os teoremas em ação identificados e modelados na forma de proposição.

O Quadro 68 contém sete teoremas em ação verdadeiros, manifestados implicitamente nas estratégias de resolução dos participantes da pesquisa.

Quadro 68: Teoremas em ação verdadeiros identificados na pesquisa

Indícios do TAV	Teoremas em ação verdadeiros
Para situações na quais as variáveis são diretamente proporcionais, ao calcular $f(n)$, para qualquer número n natural, determina $f(1)$ e multiplica por n.	**TAV1:** $f(n) = f(n \times 1) = n \times f(1),\ n \in \mathbb{N}$.
Para situações na quais as variáveis são diretamente proporcionais, ao calcular $f(x)$, para qualquer x natural, realiza sucessivas somas de $f(1)$.	**TAV2:** $f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x),\ x \in \mathbb{N}$.
Utiliza uma letra para representar qualquer quantidade.	**TAV3:** Uma quantidade qualquer é representada por uma letra.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx) + c$, para qualquer k natural, multiplica k por $f(x)$ e soma a constante c.	**TAV4:** $f(kx) + c = k \times f(x) + c,\ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Ao desenvolver a representação gráfica da função afim, localiza pontos no plano cartesiano e traça uma reta unindo esses pontos.	**TAV5:** É possível desenhar os pontos no gráfico e uni-los usando uma linha reta.
Utiliza a representação gráfica da função afim para determinar as coordenadas de pontos que pertencem ao gráfico.	**TAV6:** A representação gráfica da função afim associa cada grandeza do eixo x a uma única grandeza do eixo y.

Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx)+c$, para qualquer k natural, soma k parcelas de $f(1)$ e a constante c.	**TAV7:** $f(kx)+c=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)+c$ $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$

Em relação aos conhecimentos equivocados, cinco teoremas em ação falsos foram identificados nas estratégias de resolução dos alunos. O Quadro 69 apresenta cada um desses conhecimentos implícitos, juntamente com os indicativos de teoremas em ação manifestados nas estratégias dos sujeitos colaboradores.

Quadro 69: Teoremas em ação falsos identificados na pesquisa

Indícios do TAF	Teoremas em ação falsos
Escolhe uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	**TAF1:** Uma quantidade qualquer é identificada como uma quantidade específica.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx)+c$, para qualquer k natural, soma $f(x)$ com a constante c.	**TAF2:** $f(kx)+c=f(x)+c,\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx)+c$, para qualquer k natural, multiplica k por $f(x)$.	**TAF3:** $f(kx)+c=k\times f(x),\ \ k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para situações que matematicamente são representadas por $f(kx)+c$, para qualquer k natural, realiza a soma de k com a constante c e multiplica por x.	**TAF4:** $f(kx)+c=(k+c)x$, $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Para a situação na qual as variáveis não são diretamente proporcionais, ao calcular $f(n)$, para qualquer n natural, determina $f(1)$ e multiplica por n.	**TAF5:**$f(n)=n\times f(1), n \in \mathbb{N}$.

A identificação dos teoremas em ação relacionados à generalização, mobilizados pelos sujeitos desta pesquisa, contribui para o mapeamento do Campo Conceitual das funções (ainda em construção), que vem sendo investigado especialmente pelos membros do grupo GEPeDiMa.

Dentre os conhecimentos manifestados pelos alunos no decorrer da resolução da sequência didática, atribuiu-se atenção especial aos teoremas em ação falsos relacionados especificamente à generalização. São eles: TAF1, TAF3 e TAF4. Os demais teoremas em ação falsos, TAF2 e TAF5, dizem respeito a casos particulares das situações, etapa necessária para se chegar ao processo de generalização. De acordo com Vergnaud (2009), é a desestabilização de conhecimentos equivocados que proporciona a compreensão de um conceito no decorrer da escolarização. Portanto, sugere-se que pesquisas futuras elaborem situações que levem os alunos ao reconhecimento de seus próprios erros e possibilitem a desestabilização dos conhecimentos equivocados identificados nesta pesquisa. Do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, isso proporcionaria a compreensão do conceito em questão – função afim, especialmente a ideia de generalização.

Com o decorrer da aplicação da sequência didática desta pesquisa, inferimos que o TAF1, relativo à utilização de uma quantidade específica representando uma quantidade qualquer na expressão algébrica da generalização, constatado na atividade 2, possa ter sido desestabilizado pelos alunos. No desenvolvimento dessa atividade, em vez de uma letra, dois (02) grupos utilizaram valores específicos para representar qualquer quantidade na generalização. Com a identificação desse conhecimento equivocado nas resoluções dos alunos, ocorreu um momento didático sobre expressões algébricas. Na discussão entre pesquisadora e a turma, foi possível abordar que se deve utilizar, nas expressões algébricas, uma letra qualquer para representar todos os valores possíveis de serem assumidos pela variável independente. Durante a sequência didática, esse teorema em ação falso não foi mais mobilizado pelos alunos, o que nos leva ao indicativo de desestabilização desse conhecimento equivocado.

Outro fato que nos chamou a atenção, no desenvolvimento da generalização, foi a recorrência dos estudantes em utilizar, nas resoluções, somente a letra x para representar uma quantidade qualquer durante a resolução de toda a sequência didática. Esse fato revela que os sujeitos, possivelmente, atrelam uma variável somente à letra x. Acreditamos que, durante as aulas de matemática, a professora regente tenha utilizado apenas essa letra (ou, pelo menos, tenha utilizado com predominância) para representar variáveis (e/ou incógnitas). Além disso, a predominância da letra x também pôde ser observada no livro didático de Andrini e Vasconcellos (2015) utilizado pela turma, na unidade 4, que trata de funções.

As dificuldades dos sujeitos da pesquisa em relação à representação gráfica também merece atenção. Tanto no teste diagnóstico, quanto na atividade 7, nenhum estudante desenvolveu corretamente esse tipo de representação. Esse fato também foi observado na investigação de Ceolim *et al* (2019), com a implementação de situações envolvendo função afim para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e

1º ano do Ensino Médio. Isso chama a atenção para a necessidade de pesquisas que abordem situações que possam contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos dos estudantes nesse tipo de representação.

Em relação à sequência didática apresentada nesta pesquisa, de modo geral, os alunos se mostraram interessados em desenvolver as atividades, o que caracterizou que houve a *devolução* por partes dos sujeitos perante as situações que lhes foram propostas.

Um dos objetivos específicos estabelecidos na pesquisa foi investigar, nas estratégias de resolução apresentadas pelos sujeitos, a mobilização das ideias base consideradas essenciais para a construção do conceito de função (variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização). Segundo a BNCC (BRASIL, 2017), a aprendizagem de algumas dessas ideias para a construção desse conceito, como regularidade, descrição de padrões e propriedades de igualdade, inicia-se ainda nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Tais ideias devem ser aprofundadas no decorrer da escolarização, de modo que, no último ano do Ensino Fundamental, o aluno estude o conceito de função, compreendendo-a como uma relação de dependência unívoca entre duas variáveis e reconhecendo suas representações numérica, algébrica e gráfica.

Considerando que os sujeitos desta pesquisa cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental, possivelmente eles já haviam tido contato com as ideias base do conceito de função. Nesse sentido, notamos que houve bom desempenho por parte dos sujeitos colaboradores da pesquisa. As ideias de correspondência, dependência e regularidade foram mobilizadas juntas nas estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, ao estabelecerem relações de correspondência e dependência entre as variáveis envolvidas em cada situação no desenvolvimento de casos particulares. A ideia base de variável foi manifestada, na maioria das vezes, no desenvolvimento das generalizações algébricas.

Quanto aos conhecimentos e ao desempenho dos sujeitos da pesquisa em relação à generalização da função afim, houve um avanço no decorrer da sequência didática, principalmente em comparação com os resultados obtidos no teste diagnóstico. Naquele momento, nenhum aluno mobilizou corretamente a ideia de generalização. No decorrer da sequência didática, porém, em todas as atividades nas quais foi solicitada a generalização algébrica, foram desenvolvidas expressões corretas na maioria dos grupos.

Acreditamos que o fato de os alunos estarem dispostos em grupos no momento da resolução da sequência didática possibilitou a troca de conhecimento entre os sujeitos e favoreceu a aprendizagem, o que não ocorreu no desenvolvimento do teste diagnóstico. Além disso, ao fim de cada atividade, foi realizada uma conversa entre a pesquisadora e a turma com a intenção de possibilitar reflexões e aprendizagens após cada atividade.

Na atividade 1, generalizada pela expressão $V = 0{,}18x$, nove grupos apresentaram expressões corretas. Na atividade 2, generalizada pela expressão algébrica $T = 2 - 0{,}18x$, quatro grupos apresentaram expressões corretas. Para a atividade 3, generalizada com expressão algébrica $V = 90x + 150$, oito grupos apresentaram expressões corretas. A generalização da atividade 4, com a expressão $P = c + 1$, foi desenvolvida corretamente por 3 grupos. Na atividade 6, que pode ser generalizada pela expressão $D = 60t$, cinco grupos desenvolveram expressões corretas. Entretanto, na última atividade, a atividade 7, generalizada pela expressão $V = 12 + 1{,}10x$, dez grupos apresentaram expressões corretas.

Esses quantitativos, relacionados à generalização, mostram que, em todas as atividades, pelo menos três (03) grupos apresentaram expressões corretas e que, dependendo dos valores assumidos pelos coeficientes na expressão algébrica, as dificuldades com a generalização podem se apresentar em maior ou menor grau. Os dados também mostram, com o decorrer das atividades, especialmente considerando que elas foram elaboradas do nível mais elementar para o mais complexo, houve um avanço no conhecimento dos alunos, uma vez que, na última atividade, dos onze grupos investigados, dez apresentaram resposta correta relativa à generalização.

Dessa forma, a sequência didática aqui apresentada é uma sugestão de trabalho em sala de aula para o ensino de função afim, com foco na generalização. Além disso, os sete TAV e os cinco TAF identificados na pesquisa possibilitam que professores vão mais bem preparados para a sala de aula em relação às possibilidades de equívocos e de acertos que os alunos podem manifestar durante as aulas de função afim. A partir desta pesquisa, outras pesquisas podem ser desenvolvidas buscando a desestabilização dos conhecimentos equivocados aqui identificados.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. 2ª reimpressão. Curitiba: Ed. UFPR, 2014.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, São Paulo, SP, 2008.

ARTIGUE, Michèle. In: BRUN, Jean (Org). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

BERNARDINO, Fabricia *et al*; In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.51-70.

BITTAR, Marilena. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, Rosinalda; MONTEIRO, Carlos; BORBA, Rute. (Org.) **Investigações em Didática da Matemática.** Recife: UFPE, 2017. p.100-131.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAMPITELI, Heliana Cioccina; CAMPITELI, Vicente Coney; **Funções**. Ponta Grossa: UEPG, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa, 1963.

CARVALHO, Edmo Fernandes. **Integração de noções didáticas nas praxeologias matemáticas no estudo da função quadrática.** 163f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

CASTRO, Karina de Oliveira. **Ideias e conceitos básicos de função no 7º ano do Ensino Fundamental:** possibilidades e desafios. 177f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

CEOLIM, Amauro Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington. **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019.

CEOLIM, Amauri Jersi. *et al*. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.85-105.

CIANI, Andréia Buttner; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; BERNS, Mauricio. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a**

Educação Básica e a Universidade: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.29-50.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIGUEROA, Diana Patricia Sureda. **Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos**. 317f. Tesis doctoral (Doctorado em enseñanza de las Ciencias Mencion Matemática) - UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES, Tandil, 2012.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. In: MACHADO, Silvia Dias Ancântara (Org.) **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. Brasil: Educ, 2007. p. 77-111.

GITIRANA, Verônica *et al*. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GRINGS, Edi Teresinha de Oliveira; CABALLERO, Concesa; MOREIRA, Marco Antonio. Uma proposta didática para abordar o conceito de temperatura a partir de situações, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud**. R. B. E. C. T.**, v.1, jan./abr. 2008.

LANNIN, John K. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activies. **Mathematical Thinking and Learning.** nov.2009.

LIMA, Elon Lajes.. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 250 p. v. 1.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara *et al*. **Educação Matemática:** uma introdução. 1 ed. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.

MARTINS, Giselli Mocelin; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Wellington. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.15-27.

MATEUS, Andreia Margarida Guerreiro. **A capacidade de generalização no estudo das funções no 8º ano**. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

MOREIRA, Marco Antonio. O Iceberg da Conceitualização. In: GROSSI, Esther Pillar. (Org.) **Coleção Campos Conceituais.** Porto Alegre: CIP, 2017. p. 61-113.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Construindo o conceito de funções. In: Ramos, A. S.; Rejani, F. C. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, 2014.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius *et al*. Ideias base de função afim mobilizadas por estudantes da educação básica durante a conversão entre diferentes registros. In: Anais **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Cuiabá. 2019.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; REZENDE, Veridiana; CALADO Tamires Vieira. Função Afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria.** (no prelo).

OTERO, Maria Rita. In: OTERO, Maria Rita *et al,* (Org); **La Teoria de los Campos Conceptuales y la conceptualización en el aula de Matemática y Física**. Buenos Aires: Editorial Dunken, 2014. p. 33-46.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica Matemática.** Curitiba, 2008.

PARANÁ. Projeto Político Pedagógico – Colégio Estadual Estadual de Campo Mourão EFMPN. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná.** Seed: Campo Mourão, 2019. Disponível em: http://www.colegioestadual.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/27/1470/14/arquivos/File/PPP/PPP2019.pdf.

PINTO, Carolina Freire. **Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012:** questões para formação de professores e para pesquisa. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

PIRES, Rogério Fernandes. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. In: Anais do **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, SP. Anais. São Paulo: SP, 2016.

PONTE, João Pedro Mendes da. **Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs.** 229f. Tese (Doctor of education) – University of Lisbon, Georgia, 1984.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução problemas: compreensão de licenciandos em Matemática. **EMP Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo –SP, v.21, n.3, pp. 419-437, 2019.

QUEIROZ, Paulo César Galvão. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

QUEIROZ, Páblo Carcheski. **Uma proposta para o ensino de funções articulando as linguagens algébrica e geométrica.** 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2014.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SANTOS, Amanda Pinheiro de Bonfim dos. *et al*. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.71-84.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Construindo o conceito de Função***.* 5º ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Álgebra:** pensar, calcular, comunicar....2º ed. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, 2011.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos campos conceituais.** In NASSER, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26. 1993.

VERGNAUD, Gérard. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. In. **GEEMPA**, p. 11-19,1996.

VERGNAUD, Gérard. A gênese dos campos conceituais. In. GROSSI, Esther Pillar (Org.) **Por que ainda há quem não aprende?** 2ª edição. Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, Gérard. Forma operatoria y forma predicaiva del conocimiento. In: Anais do I **Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática.** Tandil: Argentina, Unicen, 2007.

VERGNAUD, Gérard. Entrevista concedida à **Revista Nova Escola**. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica. Acesso em: 20 de jul 2020.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In. BITTAR, Marilena. MUNIZ, C. A (Org) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: CRV, 2009.

ANEXOS

Anexo I: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Aprovado na

CONEP em 04/08/2000

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Título do Projeto: INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

Pesquisadora responsável: **Tamires Vieira Calado**

Pesquisadora colaboradora: **Dra. Veridiana Rezende**

Convidamos seu filho ou filha a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **proporcionar a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a aprendizagem do conceito de Função Afim por meio de diferentes situações envolvendo algumas propriedades desse conceito**, para isso será realizado um trabalho em sala de aula que consiste em propor aos alunos atividades em diferentes contextos, sendo que a pesquisadora coletará os dados para esta pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e áudios de possíveis entrevistas durante as suas resoluções.

Durante a execução do projeto a professora e pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, mas a partir de atividades que explorem o conceito de Função em diferentes situações. Existe o risco de os estudantes não apresentarem resoluções para as atividades propostas, mas, caso isso ocorra, ressaltamos que esse fato não trará prejuízo algum nem para a pesquisa nem para o estudante. Além disso, todo o apoio necessário por parte da professora/pesquisadora será dado ao estudante, assim como a proposta de outras tarefas matemáticas para que ele possa acompanhar o conteúdo sobre Função Afim a ser trabalhado em sala de aula.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para você, estudante. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, você se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes dos participantes estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes dos participantes constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo de diferentes metodologias na sala de aula. Por isso, frisamos a importância da participação do estudante nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Este documento será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com o responsável do estudante e a outra deverá ser entregue para a professora/pesquisadora. Destacamos que o estudante não pagará nem receberá para participar deste estudo, bem como será mantido a confidencialidade do estudante e os dados serão utilizados só para fins científicos.

Para algum questionamento, dúvida ou relato de algum acontecimento os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento durante a pesquisa. Também, poderá contactar o comitê de ética da Universidade Estadual do Oeste do Paraná pelo telefone 3220-3272.

Declaro estar ciente do exposto e **autorizo .... (nome do estudante)** a participar desta pesquisa.

Nome do responsável:____

Assinatura do responsável:____

Eu, **Tamires Vieira Calado**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

______________________________, ____ de _________________ de 2019.

Anexo II: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Aprovado na CONEP em 04/08/2000 Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

TERMO DE ASSENTIMENTO – TA (Crianças ≥ 07 anos de idade)

Título do Projeto: INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À GENERALIZAÇÃO: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim

Pesquisadora responsável: **Tamires Vieira Calado**

Pesquisadora colaboradora: **Dra. Veridiana Rezende**

Convidamos você a participar de nossa pesquisa que tem o objetivo de **proporcionar a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a aprendizagem do conceito de Função Afim por meio de diferentes situações envolvendo algumas propriedades desse conceito,** para isso será realizado um trabalho em sala de aula que consiste em propor aos alunos atividades em diferentes contextos, sendo que a pesquisadora coletará os dados para esta pesquisa por meio das resoluções escritas apresentadas pelos alunos e áudios de possíveis entrevistas durante as suas resoluções.

Para participar deste estudo, o seu responsável legal deverá autorizar a sua participação mediante a assinatura de um Termo de Consentimento. A não autorização do seu responsável legal invalidará este Termo de Assentimento e você não poderá participar do estudo.

Durante a execução do projeto a professora e pesquisadora responsável irá ministrar aulas de Matemática normalmente, mas a partir de atividades que explorem o conceito de Função em diferentes situações. Existe o risco de os estudantes não apresentarem resoluções para as atividades propostas, mas, caso isso ocorra, ressaltamos que esse fato não trará prejuízo algum nem para a pesquisa nem para o estudante. Além disso, todo o apoio necessário por parte da professora/pesquisadora será dado ao estudante, assim como a proposta de outras tarefas matemáticas para que ele possa acompanhar o conteúdo sobre Função Afim a ser trabalhado em sala de aula.

Esta pesquisa traz riscos mínimos para você, estudante. Salientamos que se em algum momento durante a aplicação das atividades, você se sentir desconfortável poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa. Lembramos também que os nomes dos participantes estarão sempre em absoluto sigilo. Todas as informações obtidas na pesquisa serão utilizadas apenas para análise científica dos dados e em caso algum, os nomes dos participantes constarão em eventuais publicações. Reiteramos que a professora/pesquisadora assumirá toda e qualquer responsabilidade, provendo a assistência necessária por qualquer intercorrência derivada durante a pesquisa.

Salientamos que pesquisas acadêmicas apontam para o uso positivo de diferentes metodologias na sala de aula. Por isso, frisamos a importância da participação do estudante nesta pesquisa, sem prejuízos na sua aprendizagem e avaliações.

Para questionamentos, dúvidas ou relatos de acontecimentos os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento pelo telefone.

Declaro estar ciente do exposto e **desejo participar do projeto Função Afim: ideias base e habilidades mobilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**.

Nome do estudante:____

Nome do responsável:____

Assinatura do responsável:____

Eu, **Tamires Vieira Calado**, declaro que forneci todas as informações do projeto ao participante e/ou responsável.

______________________________, _____ de ________________ de 2019.

APÊNDICES

Apêndice I - Apresentação da sequência didática

ATIVIDADE 1: Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$\ 0{,}18$ cada um.

a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães?
b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães?
c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

ATIVIDADE 2: *(Adaptada Tinoco (2002))* – No último sábado, Ana foi à padaria com apenas $R\$\ 2{,}00$ para comprar seus pães preferidos que custam R$ 0,18 cada um.

a) Se ela comprar 3 pães, quanto receberá de troco?
b) Se ela comprar 7 pães, qual será o seu troco?
c) Na situação apresentada, qual a quantidade máxima de pães que Ana consegue comprar?
d) Considerando que Ana comprou uma quantidade qualquer de pães, descreva com as suas palavras os passos para determinar o troco de Ana.
e) Escreva uma expressão algébrica que representa o troco que Ana receberá se comprar uma quantidade qualquer de pães.

ATIVIDADE 3: A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00 para qualquer um dos cursos escolhido.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

ATIVIDADE 4: *(Adaptada de Tinoco (2002))* D. Lurdes lavou as camisas do time de futebol do seu filho e vai colocá-las para secar da seguinte maneira:

- cada camisa é presa por dois pregadores;
- cada camisa é ligada à seguinte por um pregador;

a) D. Lurdes comprou duas cartelas de 12 pregadores cada uma. Esse número de pregadores é suficiente para prender as camisas dos 22 jogadores? Justifique a sua resposta.

b) Escreva com suas palavras o que D. Lurdes precisa fazer para saber quantos pregadores são necessários para pendurar um número qualquer de camisas.

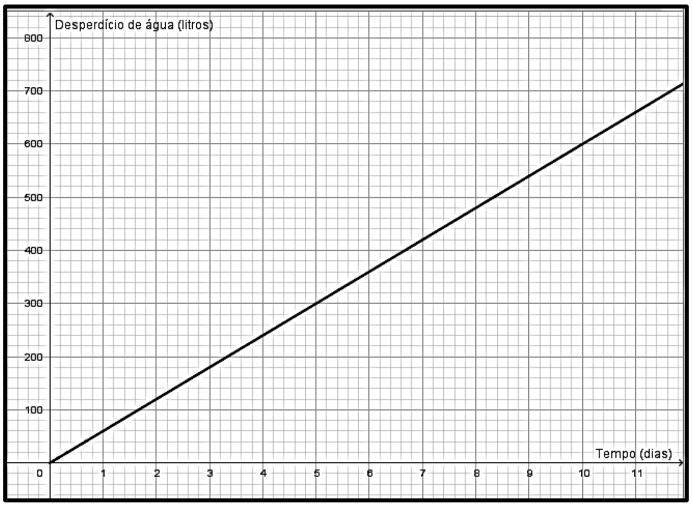
c) Escreva uma expressão algébrica que represente o número de pregadores necessários para D. Lurdes pendurar um número qualquer de camisas.

ATIVIDADE 5: Paulo é mecânico, e quando possível, realiza atendimento em domicílio. Sendo assim, a expressão algébrica que melhor representa o valor a ser pago pelos clientes de Paulo é: $v = 45h + 35$, em que h representa o número de horas trabalhadas de Paulo e v representa o valor a ser pago pelos clientes que o contratam.

Com base nas informações apresentadas faça uma representação gráfica da situação e responda os itens a seguir.

a) Qual(is) a(s) variável(is) envolvida(s) na situação?
b) Suponha que Paulo tenha feito uma visita a um cliente, no entanto, depois de receber o orçamento, este cliente desistiu de encomendar o serviço. Neste caso, quanto o cliente terá que pagar para Paulo?
c) Considere agora que outro cliente tenha pagado o valor de R$ 215,00. Por quanto tempo Paulo permaneceu trabalhando na casa deste cliente?
d) Escreva os passos para se determinar o valor a ser pago por um cliente quando Paulo permanece uma quantidade qualquer de horas realizando um atendimento em domicílio.

ATIVIDADE 6: *(Adaptada ENEM (2010))* – Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira. Sabendo que y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, observe o gráfico a seguir e respondas as questões seguintes.



a) De quanto será o desperdício que a torneira permanecer por 5 dias gotejando?
b) Se a torneira ficar por 7 dias gotejando, qual será o desperdício?
c) Sabendo que houve um desperdício de 840 litros, por quantos dias a torneira ficou gotejando?
d) Escreva uma expressão algébrica que representa o desperdício de água para qualquer quantidade de dias da torneira gotejando.
e) Utilizando a expressão do item anterior determine de quanto será o desperdício se a torneira ficar gotejando por 7 dias. Compare o valor obtido com o resultado no item b. O que você pode concluir?
f) Utilizando a expressão do item d, determine por quantos dias a torneira ficou gotejando se houve um desperdício de 840 litros. Agora, compare o valor obtido com o resultado do item c. O que você pode concluir?

ATIVIDADE 7: *(Adaptada Martins, Rezende e Hermann (2019))* – Uma das maneiras de reduzir o consumo de energia elétrica foi a criação da tecnologia LED (sigla em inglês para diodo emissor de luz) que já está substituindo as lâmpadas fluorescentes. As lâmpadas LED são mais eficientes que as fluorescentes, produzem a mesma luminosidade com menor consumo de energia. No quadro abaixo relacionamos os preços e os consumos de duas lâmpadas equivalentes.

Lâmpada	**Potência**	**Preço da lâmpada**	**Gasto mensal de energia**
LED	11 Watts	R$ 12,00	R$ 1,10
FLUORESCENTE	22 Watts	R$ 8,00	R$ 2,20

Sabendo que Paula possui na sala de sua casa os dois tipos de lâmpadas e que elas são sempre ligadas ao mesmo tempo, responda as questões que seguem.

a) Ao final de dois meses, qual terá sido o valor gasto por Paula com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia)? Neste caso, para qual tipo lâmpadas Paula terá o menor gasto?
b) Para o caso de cinco meses de uso, para qual tipo de lâmpada o gasto de Paula será menor?
c) A vizinha de Paula comprou um determinado tipo de lâmpada e depois de cinco meses de uso gastou R$ 17,50 (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia). Neste caso, qual das lâmpadas foi a escolhida pela vizinha de Paula? Você considera que esta foi a melhor opção? Justifique sua resposta.
d) Suponha agora o caso de uma pessoa que utiliza a lâmpada de LED por uma quantidade qualquer de meses, escreva uma expressão algébrica que determina o gasto total com a lâmpada (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia).
e) Faça uma representação gráfica, no mesmo plano cartesiano, dos valores gastos com cada uma das lâmpadas (considerando o valor pago pela lâmpada e o gasto mensal de energia) dependendo do seu tempo de uso. A partir da representação gráfica, determine para quais meses o valor a ser gasto com cada lâmpada é menor.