Unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
CAMPUS DE CASCAVEL - PARANÁ

PPGECEM
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

CLARICE DE ALMEIDA MIRANDA

SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

CASCAVEL
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

CLARICE DE ALMEIDA MIRANDA

CASCAVEL – PR
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

CLARICE DE ALMEIDA MIRANDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Veridiana Rezende
Coorientadora: Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira

CASCAVEL – PR
2019

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Miranda, Clarice de Almeida
Situações-problema que envolvem o conceito de função afim : uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Clarice de Almeida Miranda; orientador(a), Veridiana Rezende; coorientador(a), Clélia Maria Ignatius Nogueira, 2019.
160 f.

Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, 2019.

1. Função Afim. 2. Problemas Mistos. 3. Teoria dos Campos Conceituais. 4. Campo Conceitual das Funções . I. Rezende, Veridiana. II. Nogueira, Clélia Maria Ignatius. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS / CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

NÍVEL DE MESTRADO E DOUTORADO / PPGECEM
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CLARICE DE ALMEIDA MIRANDA

SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Esta dissertação foi aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências e Educação Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – Nível de Mestrado e Doutorado, área de Concentração em Educação em Ciências e Educação Matemática, linha de pesquisa Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE.

Veridiana Rezende
Professora Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
(UNIOESTE/UNESPAR) Orientadora

Andreia Büttner Ciani
Professora Dra. Andreia Bütner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Membro Efetivo da Instituição

Rosinalda Aurora de Melo Teles
Professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Membro convidado

Professora Dra. Claudete Cargnin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Membro convidado

Cascavel, 6 de setembro de 2019

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Pedro e Rosária que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me dar a oportunidade de conquistar esse objetivo, com disposição e saúde, na presença de bons amigos.

À minha família, meu carinho. Aos meus pais, Pedro Cândido de Miranda e Maria do Rosário de Almeida Miranda, que sempre me educaram com amor, carinho e dedicação, que nunca mediram esforços para a realização de meus estudos e que sempre incentivaram. Ao meu irmão José, que sempre acreditou em mim. Sou abençoada por ter vocês.

Ao meu querido namorado, e mais recentemente noivo, Vinícius Aparecido Salatta, pelo carinho, paciência e incentivo, sempre nas horas certas. Os momentos de desabafo, reflexão e descontração com você foram muito importantes para mim.

À minha orientadora, Professora Doutora Veridiana Rezende, e à minha coorientadora, Professora Doutora Clélia Maria Ignatius Nogueira que, mais do que orientar um trabalho, proporcionaram muitos momentos de reflexão ou de críticas construtivas, os quais se revelaram essenciais nos caminhos percorridos por esta investigação. Em especial, à professora Veridiana, por ter me acolhido como primeira orientanda de mestrado, o meu muito obrigada.

Às professoras Doutoras Andréia Büttner Ciani, Claudete Cargnin e Rosinalda Aurora de Melo Teles, pelas correções e sugestões competentes, dadas por ocasião do Exame de Qualificação, contribuindo para o crescimento desta pesquisa.

Aos membros do GEPEDiMa, pelos ricos momentos de discussões teóricas, que ajudaram intensamente nas atividades de pesquisa.

A todos os professores, coordenadores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - PPGECEM, pelo convívio, discussões e incentivo.

Aos colegas Elisângela, Fabrícia e Marlon, que me proporcionaram momentos de troca de saberes, diálogos, aprendizagem e a conquista de grandes amizades em nossas viagens de Campo Mourão à Cascavel. Não teria sido o mesmo sem vocês.

Aos meus colegas de trabalho na UNESPAR, campus de Campo Mourão, lugar onde cursei a graduação em Matemática – licenciatura, por ter me oportunizado momentos de crescimento acadêmico, profissional e pessoal. Obrigada por todos que me incentivaram a ingressar no mestrado, vocês são minha inspiração.

E a todos que, direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim:** uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2019.

RESUMO

Temos por principal objetivo nesta pesquisa categorizar situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, à luz da teoria dos Campos Conceituais. Para determinar uma tipologia para as situações, tomamos como base os critérios estabelecidos por Gérard Vergnaud para a classificação de situações presentes nas estruturas aditivas e multiplicativas. Fazem parte desses critérios os tipos de relações - binárias, ternárias e quaternárias - estabelecidas entre os elementos presentes nos problemas e os tipos de situações das estruturas aditivas e multiplicativas. As situações-problema que envolvem o conceito de função afim foram classificadas como puramente aditivas, puramente multiplicativas ou mistas, sendo este último tipo as que apresentam, ao menos, uma relação da estrutura aditiva e, ao menos, uma da estrutura multiplicativa. Como fonte de dados para a análise das situações-problema consideradas para esta pesquisa, foram adotados quatro (04) livros didáticos de Matemática, sendo dois do 9º ano do Ensino Fundamental e dois do 1º ano do Ensino Médio, os quais foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD – de 2017 e 2018. Considerando as situações-problema mapeadas nesta pesquisa, identificamos nove (09) categorias de situações, sendo que duas (02) destas não pertenciam às categorias previamente estabelecidas. As categorias identificadas resultaram em um total de quinze (15) subclasses de situações, considerando os tipos de relações estabelecidas entre os elementos presentes em seus enunciados. Outros fatores identificados como modificadores do nível de dificuldade e, consequentemente, da variação do tipo de situação, foram: apresentação de dados em gráfico ou tabela; apresentação de dados em figura relacionada ao enunciado; interpretação de escalas; conversão de medidas; ausências de taxas de forma explícita no enunciado - como a ausência da taxa de proporção e ausência do valor fixo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Estruturas Aditivas; Estruturas Multiplicativas; Problemas Mistos; Função afim.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Problem situations involving the concept of affine function**: an analysis in the light of the theory of conceptual fields. 2019. 160 sheets. Master's Dissertation in Science Education and Mathematics Education, State University of Western Paraná -– UNIOESTE, Cascavel, 2019.

ABSTRACT

Our main objective in this research is to categorize problem situations related to the concept of affine function, in the light of the theory of conceptual fields. To determine a typology for situations, we use the criteria established by Gérard Vergnaud for the classification of situations in the additive and multiplicative structures. These criteria include the types of relations - binary, ternary and quaternary - established between the elements present in the problems and the types of situations of the additive and multiplicative structures. Problem situations involving the concept of affine function have been classified as purely additive, purely multiplicative or mixed, the latter being those that present at least one relation from the additive structure and at least one from the multiplicative structure. As a data source for the analysis of problem situations considered for this research, four (04) Mathematics textbooks were adopted, two from the 9th grade of Elementary School and two from the 1st grade of High School, which were approved by the Programa Nacional do Livro Didático (National Textbook Program) - PNLD - 2017 and 2018. Considering the problem situations mapped in this research, we identified nine (09) categories of situations, and two (02) of these did not belong to the previously established categories. The identified categories resulted in a total of fifteen (15) subclasses of situations, considering the types of relations established between the elements present in their statements. Other factors identified as modifiers of the difficulty level and, consequently, the variation of the type of situation were: presentation of data in graph or table; presentation of data in figure related to the statement; scale interpretation; measurement conversion; absence of explicit rates in the statement - such as the absence of the ratio rate and the absence of the fixed value.

Keywords: Mathematics Education; Additive Structures; Multiplicative Structures; Mixed Problems; Affine Function.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

FNED – Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação

GEPEDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática

GEPEMCAM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão

MEC – Ministério da Educação e Cultura

NRE – Núcleo Regional de Educação

PISA – Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes)

PNBE – Programa Nacional Biblioteca da Escola

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PPGECEM – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná

UNIOESTE – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, tivemos como foco o estudo de diferentes situações-problema, relacionadas ao conceito de função afim. O interesse por este tema, durante o mestrado, iniciou-se a partir de trabalhos realizados com professores da Educação Básica em um projeto junto ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão – GEPEMCAM, na Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campus de Campo Mourão, coordenado pela orientadora deste trabalho[1], no qual participaram alunos e professores do Colegiado de Matemática da UNESPAR/Campo Mourão, e docentes da Educação Básica. Durante os dois anos de realização do projeto, os membros do GEPEMCAM dedicaram seus estudos especificamente ao conceito de função, com o olhar voltado para as ideias base deste conceito, tais como variável, dependência, regularidade, correspondência e generalização. Durante os encontros, foram discutidas, elaboradas coletivamente e implementadas em sala de aula, pelos membros do grupo, situações-problema voltadas para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

As ideias que se relacionam com conceito de função estão presentes em situações apresentadas às crianças desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como, por exemplo, em situações relacionadas ao reconhecimento de um padrão (ou regularidade), envolvendo elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (BRASIL, 2016).

De acordo com Nogueira (2014) e Tinoco (2002), as ideias relacionadas ao conceito de função e que devem estar contempladas no ensino são: variável, dependência, regularidade e generalização. Campiteli e Campiteli (2006) consideram as ideias de: proporcionalidade, dependência, continuidade, descontinuidade, relação, variável, regularidade, correspondência e generalização, como importantes para a constituição do conceito de função.

De acordo com Caraça (1963), historicamente a interdependência (dependência) e a fluência (variação) de fenômenos serviram de motivação ao desenvolvimento de estudos relacionados às relações funcionais.

---

[1] O projeto intitulado “Diálogos entre Escola e Universidade acerca do ensino de Matemática”, coordenado pela professora Doutora Veridiana Rezende. Durante o ano de 2017 a autora desta pesquisa participou de algumas reuniões.

O conceito de função se relaciona a diferentes áreas do conhecimento, como a física, a biologia, a química, a geografia, a economia, no que se refere a problemas que buscam interpretar o comportamento de dependência entre grandezas, quantificações, variação, regularidade, entre outras ideias, permitindo sua aplicação a essas diferentes áreas, como também a conteúdos próprios da matemática, na interpretação de fenômenos sociais e da natureza (QUEIROZ, 2014).

Segundo Campiteli e Campiteli (2006), tradicionalmente o ensino de função privilegia o aspecto algébrico, buscando uma ampla generalidade, em alguns casos de forma prematura e imprópria, cujo objetivo é apresentar técnicas e algoritmos. Contudo, algumas pesquisas, como Oliveira (1997) e Queiroz (2014), se preocupam em caracterizar o conceito de função não somente a partir da definição formal apresentada em Livros Didáticos, mas sim a partir de um conjunto de situações que dão significado ao conceito e de um conjunto de diferentes representações.

Vergnaud (2009b, 2017) define um conceito com base na terna (S, I, R), sendo S um conjunto de situações, I um conjunto de invariantes operatórios, que são os conceitos em ação e teoremas em ação presentes nos esquemas usados pelo sujeito em situação, e R um conjunto de representações simbólicas.

Com o intuito de estudar o conceito de função na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, uma vez que compartilhamos com Vergnaud a ideia que um conceito não se reduz a sua definição formal (VERGNAUD, 1990; 2009a; 2009b; 2017), realizamos buscas por pesquisas sobre a temática em questão. Nesse intuito, encontramos as pesquisas de Oliveira (1997) e de Queiroz (2014).

Oliveira (1997) e Queiroz (2014) se apropriam da ideia de campo conceitual, em conformidade com Vergnaud, com intuito de tratar de aspectos que consideram pertinentes ao campo conceitual das funções por meio de sequências didáticas, como, por exemplo, algumas ideias (proporcionalidade, regularidade, variável, dependência e generalização) e diferentes formas de representações, que podem se relacionar à terna: situações, invariantes operatórios e representações (S, I, R).

Oliveira (1997) propõe, para o ensino e aprendizagem do conceito de função, uma sequência didática para alunos voluntários de uma turma do 1º ano do curso de Engenharia composta por situações a-didáticas que favoreçam o “jogo de quadros” e a mudança de registro de representação, para que estes compreendam noções de correspondência, dependência e variação relacionadas ao conceito de função. A pesquisa tem como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas de Brosseau, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e o “Jogo de quadros” proposto por Douady. Verificou-se que os alunos confundem algumas ideias e conceitos relacionados ao conceito de função, como o fato de trocar função constante por função contínua; definir função como uma equação; não compreender funções definidas por parte, representada por meio de mais de uma expressão. De acordo com a autora, a sequência didática provocou um avanço em relação à compreensão do conceito de função por parte dos alunos à medida que estes foram compreendendo que há situações da realidade que podem ser descritas por meio de uma expressão funcional, relacionando o conceito em questão às ideias de variação, dependência e correspondência e aos registros de representação tabela, gráfico ou fórmula (nos quadros numérico, geométrico e algébrico).

Em sua dissertação, Queiroz (2014) propõe uma sequência didática nos moldes da Engenharia Didática voltada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com articulações entre a álgebra e a geometria analítica, para a compreensão do conceito de função, utilizando como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Constatou-se a sequência didática elaborada contribuiu para a compreensão da relação entre grandezas variáveis, proporcionando o surgimento de diferentes estratégias de resolução, assim como contribuiu para a mobilização e construção de conceitos.

Ambas as pesquisas se preocupam em diversificar as situações propostas, de forma que sejam mobilizados diferentes conhecimentos durante a resolução e diferentes formas de representações, pois compreendem que “[...] na TCC [Teoria dos Campos Conceituais] o foco é a importância da variedade de situações por meio das quais o conceito adquire significado” (QUEIROZ, 2014, p. 37). Porém, o objetivo destas pesquisas não foi criar categorias de situações sobre o conceito de função como foi estabelecido por Vergnaud para o Campo Conceitual Aditivo e Multiplicativo, mas sim explorar aspectos sobre o conceito de função por meio das situções propostas, articuladas à teoria dos Registros de Representação Semiótica (caso da pesquisa de Oliveira (1997)) e à teoria de Jogo de Quadros (caso da pesquisa de Queiroz (2014)). Portanto, em nossas buscas por pesquisas relacionadas ao Campo Conceitual das funções, não identificamos pesquisas com objetivo de classificar um conjunto de situações relativas ao conceito de função com base na teoria dos Campos Conceituais.

Diante do exposto, motivados em estudar sobre as diferentes situações-problema do conceito de função, os primeiros questionamentos que surgiram no início da presente pesquisa foram: Quais aspectos, conceitos e ideias base estão relacionados ao conceito de função? Quais os diferentes tipos de situações que podem dar sentido ao conceito de função? Considerando que cada tipo de função (função afim, quadrática, exponencial, logarítmica etc) está relacionado a diferentes tipos de problemas, diferentes estruturas, como é possível estabelecer um conjunto de situações que dá sentido para cada tipo de função?

Tais questionamentos iniciais nos conduziram a algumas hipóteses para a construção do problema central da pesquisa. Ao analisarmos as ideias base do conceito de função sugeridas por Campiteli e Campiteli (2006), entendemos que algumas delas se aplicam a determinados tipos de funções e a outros não. Por exemplo, no caso da ideia de proporcionalidade, ela está relacionada a funções do tipo $y = ax$, ou seja, identificamos que cada função possui suas próprias ideias base, que dão sentido ao conceito. Além disso, o conceito de função descreve diferentes fenômenos com certas especificidades, como o crescimento exponencial de uma cultura de bactérias e a receita de um produto com custo fixo. Sendo assim, entendemos que para compreender o Campo Conceitual das Funções é preciso compreender/estabelecer o Campo Conceitual de cada tipo de função.

Considerando que a primeira função a ser formalizada no 1º ano do Ensino Médio é a função afim, para esta pesquisa optamos por investigar situações-problema que se referem a este caso específico de função. A fonte estabelecida para o levantamento de situações-problema é o livro didático matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático -PNLD. A escolha deste material se deu pela familiaridade da pesquisadora com análise de livro didático como participante de iniciação científica durante a sua graduação, no período de agosto de 2014 a julho de 2015, sob o direcionamento da orientadora deste trabalho e por entendermos que o livro didático de matemática é uma fonte de situações-problema pertinente para a pesquisa, pois se trata de uma fonte de consulta de acesso a professores e alunos, consistente com as Diretrizes Curriculares vigentes e fonte de investigações de pesquisas.

Portanto, para a presente pesquisa, propomos realizar uma busca documental por situações-problema que envolvem esse conceito, sendo nossa fonte primária os Livros Didáticos de Matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2017 e PNLD 2018.

As análises da pesquisa foram baseadas na teoria dos Campos Conceituais, considerando como pressuposto a existência de imbricações [2] entre campos conceituais, bem como a continuidade entre o campo conceitual aditivo e o multiplicativo, e as rupturas necessárias para se compreender as relações presentes nas estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009b) e as imbricações entre as situações do campo conceitual multiplicativo e o conceito de função linear.

A imbricação de campos conceituais também é indicada pelas pesquisas relacionadas ao conceito de função de Pavan, Nogueira e Kato (2009) e Magina e Porto (2018), que estudaram a relação entre os problemas das estruturas aditivas e multiplicativas e ideias base do conceito de função (PAVAN; NOGUEIRA; KATO, 2009; PAVAN, 2010), e indícios do pensamento funcional na resolução de problemas de proporção simples (MAGINA; PORTO, 2018).

Assim, estabelecemos como hipótese que situações-problema relacionadas ao conceito de função afim podem ser classificadas de acordo com as relações que se estabelecem entre os elementos presentes nos enunciados destas na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, sendo estas relações analisadas com base nas relações definidas pelos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Tal hipótese foi se confirmando no decorrer do estudo piloto.

Com base nos estudos que realizamos sobre a teoria dos Campos Conceituais, interesses de pesquisa mencionados anteriormente e considerando, particularmente, o conceito de função afim, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: *Como se caracterizam as situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, à luz da teoria dos Campos Conceituais, presentes em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio?*

Para responder à pergunta de pesquisa apresentada estabelecemos como principal objetivo de pesquisa: *Categorizar situações-problema relacionadas ao conceito de função afim à luz da teoria dos Campos Conceituais.*

---

[2] "[...] o termo 'imbricações' caracteriza um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir desta 'interconexão dinâmica' são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco" (TELES, 2010, p.129).

O texto da dissertação que segue está organizado em quatro capítulos.

No capítulo 1, descrevemos as considerações realizadas para a delimitação do tema, objetivo e problema de pesquisa. Neste capítulo, apresentamos elementos que levaram a refletir sobre a constituição do Campo Conceitual das Funções, bem como formas de se analisar as situações-problema que envolvem o conceito de função afim na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais.

No capítulo 2, explicitamos elementos da teoria dos Campos Conceituais no que se refere à constituição de um Campo Conceitual. Neste capítulo também apresentamos as classes de situações pertencentes aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, alguns exemplos, análises e esquemas relacionais de cada tipo de situação. Por fim, trazemos um exemplo de análise de um problema misto proposto por Vergnaud (2009b), que direciona parte das análises desta pesquisa.

No capítulo 3, descrevemos o percurso metodológico da pesquisa no que se refere à escolha dos livros didáticos utilizados como fonte de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, aprovados pelo PNLD 2017 e 2018, à identificação de situações-problema que envolvem o conceito de função afim e aos critérios de análise para a categorização de situações-problema que envolvem o conceito de função afim à luz da teoria dos Campos Conceituais. Neste capítulo apresentamos um estudo piloto o qual, além de confirmar nossas hipóteses, direcionou as análises deste estudo.

No capítulo 4 trazemos as análises das categorias de situações-problema relacionadas à função afim, identificadas nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. A verificação dos resultados está organizada de forma que cada uma das categorias de problemas identificadas, segundo os critérios de análise previamente construídos, discute as características dos problemas em questão com a apresentação de exemplos de situações que caracterizem tal categoria, as análises necessárias e os esquemas relacionais envolvidos. Para cada categoria de situações-problema identificamos elementos que possam, ou não, modificar o nível de dificuldade da situação entre as situações-problema identificadas na categoria em questão.

Finalizando a dissertação, apresentamos as considerações finais, retomando o objetivo da pesquisa e enfatizando os resultados, no que se refere à categorização de situações-problema que envolvem o conceito de função afim e à diversificação de situações no estudo do conceito de função afim, utilizando como fonte de situações-problema os livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. E, por fim, apresentamos ainda algumas contribuições e possíveis desdobramentos desta pesquisa.

CAPÍTULO 1

O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Diante da premissa de que nenhum conceito se desenvolve isoladamente (VERGNAUD, 2009a; 2009b)[3], do estabelecimento do objetivo da pesquisa, a saber, a caracterização de situações-problema que envolvem o conceito de função afim (as justificativas deste recorte são apresentadas posteriormente, neste capítulo) e a pergunta de pesquisa: Quais categorias correspondem às situações-problema que atribuem significado a este tipo de função? – o primeiro passo para o desenvolvimento desta investigação foi compreender os principais aspectos do conceito função, especialmente do conceito de função afim.

A constituição do Campo Conceitual das Funções é uma das metas estabelecidas pelo GEPEDiMa – Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática[4], vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – PPGECEM/UNIOESTE e, do qual, a autora dessa dissertação é integrante.

Portanto, para a contextualização de elementos que possam pertencer ao Campo Conceitual das Funções, assim como, para a delimitação do tema e análise, buscamos bibliografias que destacam aspectos como definições formais, ideias, representações, propriedades do conceito de função, uma vez que entendemos que esses elementos são pertinentes ao Campo Conceitual das Funções, especialmente da função afim.

Ressaltamos que, neste capítulo, não tivemos a intenção de esgotar as ideias, conceitos e outros aspectos relacionados ao conceito de função e função afim, mas de apresentar um estudo inicial dos principais elementos interligados ao Campo Conceitual das Funções.

De acordo com Vergnaud (1990, 2009b), um conceito não pode ser examinado isoladamente. O pesquisador defende que a compreensão de um conceito se dá

---

[3] Aspectos relacionados à teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud é aprofundada neste trabalho no próximo capítulo.
[4] https://prpgem.wixsite.com/gepedima

mediante o seu *Campo Conceitual*, o qual se refere a outros conceitos, situações, representações, propriedades relacionadas ao conceito em questão.

Para Vergnaud (2009b), “[...] a matemática forma um conjunto de noções, de relações, de sistemas relacionais que se apoiam uns sobre os outros” (2009b, p. 16). Complementando esta ideia, o pesquisador afirma que a forma com que a criança adquire as noções matemáticas é diferente da ordem de complexidade crescente que o matemático as concebe, uma vez que a ordem das noções adquiridas pela criança “[...] é uma ordem parcial ou com vários ramos, pois as noções A e B podem muito bem serem adquiridas indiferentemente numa ordem ou noutra, ou simultaneamente [...]” (VERGNAUD, 2009b, p.16).

Assim, a forma como o tema funções está abordado neste capítulo é uma visão parcial do conceito de função e função afim estudados a partir da bibliografia estudada, pondendo ser estabelecidas relações com outros conceitos, ideias e representações além das apresentadas no texto que segue.

Neste capítulo, temos por objetivo apresentar considerações sobre a temática função e função afim, como indicativos iniciais para o estabelecimento do Campo Conceitual das Funções.

1.1 A delimitação do tema: o conceito de função

Como discutido anteriormente, a teoria que adotamos nesta investigação nos levou a estudar o conceito de função com a ideia de estabelecer um conjunto de elementos que colaborem para estabelecermos o Campo Conceitual das Funções.

Segundo Caraça (1963), o estudo e desenvolvimento do conceito de função se relacionam com situações sobre fenômenos que apresentam interdependência (relação de dependência) e fluência (variação). Para ilustrar, o autor usa a variação quantitativa do espaço e tempo no fenômeno da queda de corpos no vácuo, medindo-a em intervalos de tempo iguais, conforme informações disponibilizadas na Tabela 1.

Tabela 1: Correspondência relacionada ao fenômeno de corpos em queda no vácuo

Tempo (em segundos)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Espaço (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5

Fonte: Caraça (1963, p. 126)

Na tabela, temos a representação de elementos de dois conjuntos quantitativos, colocados em correspondência, que possuem uma relação de dependência entre si.

Neste caso, uma variação no tempo acarreta uma variação no espaço percorrido pelo corpo em queda. Ou seja, cada variação do espaço percorrido pelo corpo depende da variação do tempo que o corpo permaneceu em queda no vácuo.

Neste sentido, Roque (2012) destaca que é comum afirmarmos que as tabelas de correspondências numéricas babilônicas e egípcias são referências quando falamos sobre o surgimento da noção de função, mas que somente essa associação de elementos de dois conjuntos distintos não são suficientes para falarmos das ideias relacionadas à noção de função.

De acordo com a autora, há um elemento crucial no desenvolvimento da noção de função: a ideia de variável, pois “[...] uma função pode ser vista justamente como uma relação entre duas grandezas que variam” (ROQUE, 2012, p. 371). Por isso, considera uma das principais motivações para a introdução ao conceito de função a noção de “trajetória”, como, por exemplo, a situação apresentada por Caraça (1963) mencionada anteriormente.

No estudo de variação de quantidades dependentes entre si é possível buscar uma regularidade do fenômeno, que pode ser interpretada por uma lei quantitativa que consiste em “um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos” (CARAÇA, 1963, p. 127) e que pode ser representada com auxílio de uma representação para conjuntos. Caso contrário, permaneceríamos investigando tabelas de resultados particulares sem alcançar uma generalização necessária (CARAÇA, 1963).

O desenvolvimento de representações para conjuntos contribuiu para o estudo das funções e de suas propriedades e, segundo Caraça (1963), para exprimir a lei quantitativa, que estabelece a correspondência entre dois conjuntos, foi necessário o desenvolvimento dessas representações, principalmente para expressar a ideia de variável[5].

Assim, estabelecer a correspondência e dependência entre dois conjuntos com auxilio das representações para variáveis é expressar a lei quantitativa, pois “[...] uma equação em x e y é uma forma de representar uma dependência entre duas

[5] De acordo com Roque (2012, p. 371) “[...] a noção de variável só foi introduzida formalmente no século XIX. Um passo fundamental para se chegar a esse conceito foi o nascimento da física matemática e a representação simbólica de uma quantidade desconhecida proposta inicialmente por Viète mas desenvolvida no século XVII”.

quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra” (ROQUE, 2012, p. 372).

O surgimento de definições formais de função nas formas analítica e geométrica, que consistem em expressar simbolicamente como se estabelece a correspondência entre os elementos de dois conjuntos, são resultados do desenvolvimento das representações simbólicas para conjuntos desenvolvidas historicamente (CARAÇA, 1963).

Quanto às definições formais, Tinoco (2002) menciona que há duas características desse processo de formalização que se destacam na concepção de função: a concepção de função como expressão analítica e como caso particular das relações possíveis do produto cartesiano de dois conjuntos. De acordo com a autora, “[...] a primeira reflete a tendência durante o processo de definição de função e a segunda o último estágio desse processo” (TINOCO, 2002, p. 1).

De acordo com Caraça (1963, p. 130), a definição de função, por meio de uma expressão analítica, consiste em atribuir um conjunto de operações “[...] de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y”.

Ainda de acordo com o autor, é necessário considerar que a expressão analítica da função constitui apenas uma das formas de se estabelecer a correspondência entre dois conjuntos variáveis, e alerta para que não confundamos a função com a sua expressão analítica. Desta forma, devemos ser cautelosos na escrita e evitar a forma simplificada, ou seja, é preferível a forma: seja a função $y(x)$, cuja definição analítica é $y = 4{,}9x^2$; do que simplesmente: seja a função $y = 4{,}9x^2$ (CARAÇA, 1963).

No que se refere à definição de função, Tinoco (2002) destaca que a definição formal desse conceito como um conjunto de pares ordenados e como um caso específico de uma relação “[...] não faz o menor sentido para o aluno no ensino fundamental e médio. A noção de relação também não tem nenhum valor em si, nem contribui para que o aluno desses níveis perceba o significado da função” (TINOCO, 2002, p. 49).

Conforme apontado pelos autores Tinoco (2002) e Campiteli e Campiteli (2006), consideramos que somente propriedades formais e a definição formal do conceito de função vêm a ser insuficientes, e podem até mesmo causar obstáculos para a compreensão do referido conceito. Porém, os aspectos formais não devem ser desconsiderados, uma vez que as ideias de variável e generalização – a forma analítica da função – são destacadas (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006) como noções base para a compreensão do conceito de função.

Caraça (1963) considera que o surgimento do conceito de função está relacionado à necessidade de se desenvolver um instrumento matemático necessário à análise de fenômenos de variação e considera, para além das definições formais desenvolvidas historicamente, as ideias de dependência, de variável, regularidade e generalização necessárias à compreensão do conceito.

Tinoco (2002) também destaca em seu texto que considera, essenciais para a compreensão de função, as noções de: variável, dependência, regularidade e generalização, com propostas de atividades que exploram essas noções e que, não necessariamente, se referem, explicitamente, ao termo função. Já Campiteli e Campiteli (2006), apresentam como ideias: proporcionalidade, dependência, continuidade, descontinuidade, relação, variável, regularidade, correspondência e generalização. Ao refletirmos sobre as ideias acrescentadas por Campiteli e Campiteli (2006) e às apresentadas por Tinoco (2002), particularmente a ideia base de proporcionalidade indica a delimitação do objeto desta pesquisa ao conceito de função afim, pois esta ideia está relacionada especificamente à forma $y = ax$, ou seja, a expressão analítica da função linear, que corresponde a um caso específico da função afim.

Entendemos que Campiteli e Campiteli (2006) fizeram referência à ideia base de proporcionalidade para função devido ao fato de que, de acordo com Tinoco (2002, p. 45), historicamente, "[...] o conceito de função foi identificado com o de proporção. Acreditava-se que sempre que uma grandeza varia dependendo de outra, a relação entre as grandezas era de proporcionalidade". Segundo a autora, essa crença existe também entre os alunos. Entretanto, a ideia de proporcionalidade não é comum a todos os tipos de função, de forma que neste trabalho não a consideramos como ideia base de função, mas restringimos esta noção a uma ideia base relacionada à função linear, um caso de função afim.

Desta forma, consideramos nesta investigação como ideias base para o estudo do conceito de função afim as noções de: variável, dependência, regularidade, correspondência e generalização e a ideia de proporcionalidade para o caso de função linear, que constituiriam alguns dos elementos do Campo Conceitual desta função. Considerando que, segundo Vergnaud (2009b), a porta de entrada de um campo conceitual são as diferentes situações que dão sentido a um conceito, tendo em vista o objetivo de contribuir com as investigações do GEPEDiMa, determinamos como foco deste trabalho estabelecer uma tipologia de situações que podem fazer parte do campo conceitual da função afim. Esta escolha foi realizada, inicialmente, em consequência da observação de que cada tipo específico de função pode estar, ou não, relacionada a um tipo de situação-problema, como, por exemplo, as situações de proporção entre dois conjuntos variáveis estão relacionadas às funções lineares (à forma analítica $y = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$), discutida anteriormente.

No entanto, observamos também outros aspectos que podem exprimir a particularidade de cada tipo de função: são, por exemplo, a caracterização de cada tipo de função em relação a sua forma algébrica geral, o comportamento gráfico, a quantidade de raízes, os intervalos de crescimento e decrescimento, propriedades, entre outros. Todos os tópicos citados anteriormente podem ser descritos para cada tipo específico de função, sendo que estas são classificadas diante de um conjunto de características em comum.

Cada tipo de função apresenta ideias base que são acrescentadas às estabelecidas por Tinoco (2002) que atribuem características diferentes as quais podem ser observadas nas diferentes formas de representação de uma função. Tinoco (2002, p. 6) estabelece três formas para se representar funções: as formas "verbal (em palavras, oralmente ou por escrito); gráfica (gráficos formais e informais, tabelas, ...); analítica (por expressões matemáticas)".

Notamos que, por meio das representações, conseguimos identificar o tipo de relação estabelecida entre os conjuntos variáveis e reconhecer o tipo de função ao qual esta se refere. Por exemplo, é possível verificar que se trata de uma função afim por meio da expressão $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e de uma função quadrática pela expressão $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo, é possível identificar que: se o gráfico de uma função é uma reta, sua expressão analítica é $y = ax + b$ ou se o gráfico é uma parábola, a expressão analítica da função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Além das situações que abordam a ideia de proporção estarem relacionadas ao conceito de função linear, temos, por exemplo, que as situações as quais é simulado o lançamento de um objeto que, depois de um determinado tempo, perde velocidade e começa a cair pelo efeito da força gravitacional estão relacionadas a funções do segundo grau, cuja representação gráfica possui concavidade voltada para baixo; situações de crescimento de bactérias pode estar relacionada a função exponencial; entre outras situações que, normalmente, se referem a um determinado tipo de função.

De acordo com Tinoco (2002, p. 49), "[...] além de trabalhar os aspectos específicos de cada uma das atividades, o professor deve explorar em todas elas a ideia central do conceito de função: o fato de que uma variável é perfeitamente determinada a partir do conhecimento de outra". Neste sentido, com o olhar voltado para o ensino, destacamos a importância de se considerar as características de cada situação sobre funções, sem perder de vista a ideia de dependência entre dois conjuntos variáveis.

Diante dessas considerações, evidenciamos a necessidade do recorte deste estudo para o conceito de função afim visto que ideias bases, propriedades, representações simbólicas, representações gráficas, contexto de problematização, entre outros, são elementos que variam de acordo com o tipo de função abordada e se mostram pertinente à classificação de situações sobre função.

Igualmente, destacamos a pertinência de se estudar aspectos específicos de cada situação que envolve o conceito de função afim, como o caso das situações de proporcionalidade se diferencia de situações que resultam na forma analítica $y = ax + b$, com $b \neq 0$, que serão estudados tomando como base os princípios da teoria dos Campos Conceituais para caracterizar diferentes tipos de situações relacionadas a esse conceito.

Apresentamos, na sequência, aspectos teóricos da função afim, a saber: diferentes formas de definição e de representação e suas propriedades.

1.2 Modelo matemático para o conceito da função afim

A definição de função afim comumente encontrada na literatura matemática é: "Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$" (LIMA *et al*, 2006, p. 87). A definição formal de função afim indica que ela é reconhecida por sua expressão analítica, na forma $y = ax + b$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$.

Além disso, existem alguns casos particulares de função afim, que dizem respeito a alguns valores específicos para os coeficientes a e b reais na expressão $y = ax + b$. De acordo com Lima *et al* (2006, p. 87), "a função identidade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as translações $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as lineares, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$".

Os coeficientes numéricos a e b são denominadas por, respectivamente, coeficiente angular e coeficiente linear. O coeficiente b é o valor que a função afim, $f(x) = ax + b$, assume quando $x = 0$. Assim, é comum que o valor $f(0) = b$ seja chamado de valor inicial da função f. O coeficiente a é conhecido como a taxa de variação da função e pode ser determinado a partir de dois pontos quaisquer distintos x_1 e x_2, os quais a função assume os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, respectivamente, por meio da ideia de taxa de variação média, conforme indicado na figura 1.

A taxa de variação média de uma função qualquer em um intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou seja, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. No caso da função afim, dados dois pontos quaisquer da função, a taxa de variação média é sempre a mesma, por isso é denominada somente de taxa de variação da função.

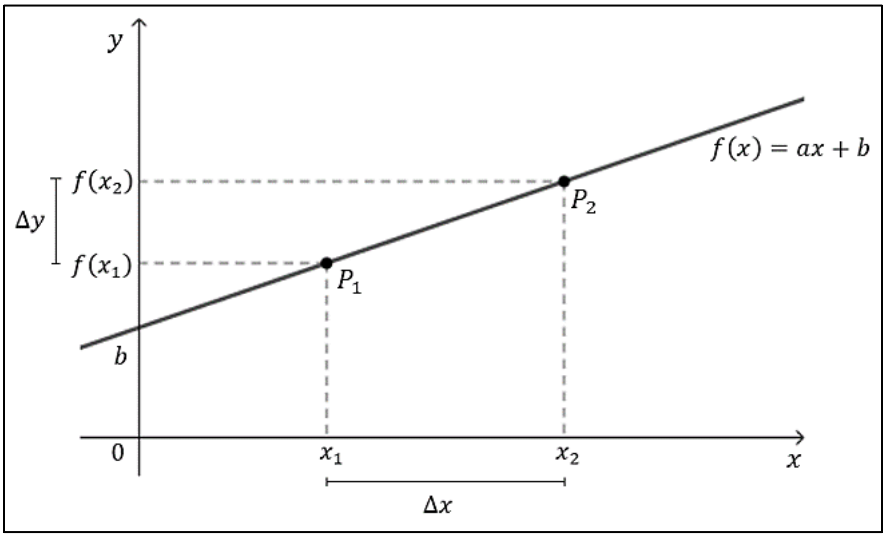


Figura 1: Gráfico de função afim – obtenção do coeficiente angular como taxa de variação
Fonte: a autora

De fato, se considerarmos dois pontos distintos de uma função afim f qualquer dados por $P_1\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $P_2(x_2, f(x_2))$, para os quais a ordenada seja expressa por

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

a taxa de variação da função será dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Logo, a taxa de variação da função afim f no intervalo $[x_1, x_2]$ é sempre constante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

A taxa de variação da função assume o significado da variação da variável y em relação a variável x. Graficamente, o que ocorre é que a cada uma unidade de variação em x temos uma variação de a unidades em y. Desta forma, se o coeficiente a for positivo ($a > 0$) uma variação no sentido positivo em x infere em uma variação positiva em y, ou seja, a função é crescente se $a > 0$; se o coeficiente a for um número real negativo ($a < 0$) a função é decrescente, pois a variação de cada unidade em x infere em uma variação negativa em y; e se $a = 0$ não há variação em y de acordo com as variações de x, logo se trata de uma função constante.

Além disso, o gráfico de uma função afim é uma reta, ou seja, quaisquer três pontos P_1, P_2 e P_3 que satisfazem a função de expressão $f(x) = ax + b$, com $x \in \mathbb{R}$ são colineares (FIGURA 2).

Lima *et al* (2006) propõe que no Ensino Médio a verificação para este caso pode ser realizada provando que “[...] é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2,\ P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual a soma dos outros dois” (LIMA *et al*, 2006, p. 89), sendo que $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ representam, respectivamente, as distâncias dos pontos de P_1 a P_2, de P_2 a P_3 e de P_1 a P_3, tal que $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$.

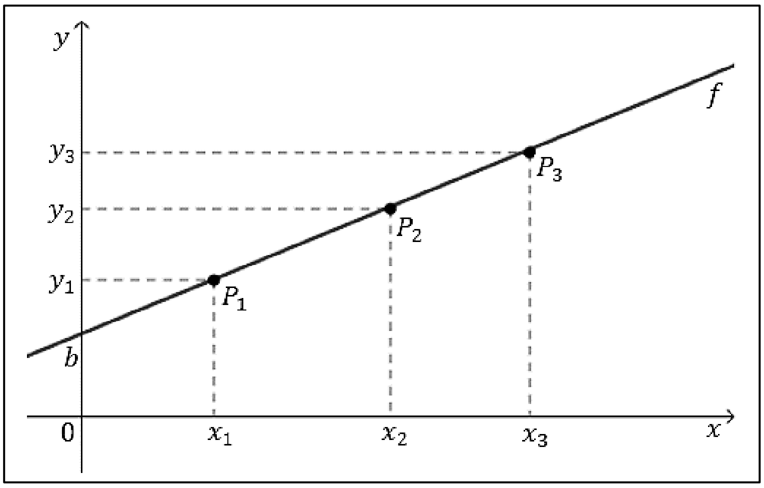


Figura 2: Colinearidade de três pontos quaisquer na função afim
Fonte: Baseado em Lima *et al* (2006, p. 89)

Desta forma, se considerarmos três pontos quaisquer distintos que pertençam ao gráfico de uma função afim, podemos expressá-los por

$$P_1 = (x_1 \,,\ \ ax_1 + b)$$
$$P_2 = (x_2 \,,\ \ ax_2 + b)$$
$$P_3 = (x_3 \,,\ \ ax_3 + b).$$

Suponhamos que o ponto P_2 está entre P_1 e P_3, ou seja, que $x_1 < x_2 < x_3$, temos

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot (1 + a^2)}$$
$$d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

de forma análoga temos que

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

Logo

$$d(P_1,\ P_2) + d(P_2,\ P_3) =$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \ + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$
$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$
$$= d(P_1,\, P_3)$$

Portanto,

$$d(P_1,\, P_2) + d(P_2,\, P_3) = d(P_1,\, P_3).$$

Assim, de acordo com a condição anunciada anteriormente temos que, de fato, dados quaisquer três pontos distintos pertencentes à função cuja expressão é $f(x) = ax + b$, estes pertencem à mesma reta, ou seja, são colineares.

O número a também é conhecido por coeficiente angular da reta que representa graficamente a função afim, pois a razão da variação de y pela variação de x coincide com a tangente trigonométrica desta reta em relação ao eixo horizontal Ox (FIGURA 3). Assim, se o coeficiente angular a for positivo, $a > 0$ o gráfico da função afim é uma reta ascendente; a função, neste caso, é crescente, como apresentado anteriormente, e se $a < 0$, o gráfico é uma reta descendente; logo, a função é decrescente (LIMA *et al*, 2006).

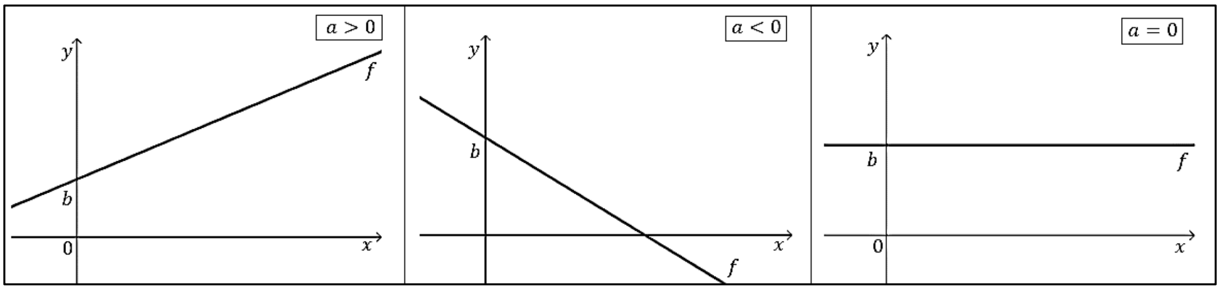


Figura 3: Inclinação da reta do gráfico de f de acordo com os valores assumidos pelo coeficiente angular a
Fonte: a autora

Vimos anteriormente que, dados dois pontos quaisquer de uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, podemos definir o coeficiente a, conhecido como taxa de variação da função ou coeficiente angular da reta e b pode ser determinado calculando-se $f(0)$.

Dados dois pontos distintos de uma função f, ou seja, $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(x_2, f(x_2)\big)$, podemos determinar os coeficientes a e b da função cuja expressão é $f(x) = ax + b$, por meio da resolução do sistema linear:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ , \qquad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

O coeficiente a é obtido calculando-se a taxa de variação. O coeficiente b pode ser determinado a partir do momento que se calculou o coeficiente a, isolando b em uma das equações anteriores, por exemplo, $b = y_1 - ax_1$.

Um caso específico de função afim que podemos nos atentar as suas especificidades, é o caso da função linear, representada pela expressão $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$, que, como já mencionado, se relaciona à ideia de proporcionalidade.

Uma determinada grandeza y é proporcional a uma determinada grandeza x se existir um número a, com $a \in \mathbb{R}$, denominado constante de proporcionalidade, tal que $y = ax$ para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ (LIMA *et al*, 2006; TINOCO, 2002).

Além disso, a função linear tem a característica de ter o coeficiente linear igual a zero, $b = 0$, então, considerando a expressão $f(x) = ax$ o gráfico da função sempre passa pela origem do plano cartesiano, pois assume o valor inicial $f(0) = 0$, coordenada $(0{,}0)$. O coeficiente angular a, ou taxa de variação, é equivalente à constante de proporcionalidade e pode ser obtido a partir de um ponto qualquer de f

$$a = \frac{y}{x}$$

De acordo com Lima *et al* (2006), em problemas relacionados a proporcionalidade é importante saber que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $\frac{y\prime}{x\prime} = \frac{y}{x}$ é constante e é igual a constante de proporcionalidade. Se conhecermos três destes quatro números (x, x', y e y') então, podemos encontrar o valor do número desconhecido. Esta técnica é conhecida como regra de três.

Resumindo as considerações teóricas realizadas nesta seção temos que: a taxa de variação média de uma função afim f, definida pela expressão analítica $y = f(x) = ax + b$, é uma constante que pode ser obtida a partir de dois pontos quaisquer, sendo denominada apenas de taxa de variação da função; a representação gráfica da função afim é uma reta e a taxa de variação, nesse caso, também é denominada por coeficiente angular ou tangente da inclinação da reta, que representa o gráfico da função, em relação ao eixo Ox. O coeficiente linear é conhecido como valor inicial da função afim, que pode ser determinado calculando $f(x)$ para $x = 0$ e definea intercepção do gráfico com o eixo y do plano cartesiano; é possível determinar a função afim a partir de dois pontos quaisquer.

Além disso, o caso particular de função afim, a função linear $y = f(x) = ax$ está diretamente relacionada à ideia de proporcionalidade. Neste caso, o coeficiente angular assume o significado de constante de proporcionalidade.

1.3. Considerações sobre função afim e o desenvolvimento desta pesquisa

O estudo realizado para composição desta seção nos orientou na delimitação da temática e do problema desta pesquisa, a saber: categorizar uma tipologia para situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais. Desta forma, a pergunta que consideramos neste momento foi: quais elementos podem ser abordados em situações-problema sobre função afim que fazem parte desse campo conceitual?

Tendo em mente esta questão, e considerando os estudos realizados e apresentados neste capítulo, destacamos alguns elementos, como conceitos, ideias e propriedades que se relacionam ao conceito de função afim, se constituindo em elementos que auxiliam na compreensão do conceito de função afim e fazem parte do campo conceitual da função afim: as ideias de dependência, relação, conjuntos, correspondência, variável, domínio, par ordenado, plano cartesiano, produto cartesiano, continuidade, descontinuidade, regularidade, generalização, proporcionalidade, taxa de variação, coeficiente angular, equação de reta, colinearidade de pontos, monotonicidade de funções, sistemas lineares, entre outros.

Estas ideias e conceitos que se relacionam ao conceito de função afim podem ser abordados em situações-problema voltadas ao ensino deste tipo de função, sendo já sugerida em outras pesquisas a caracterização ou classificação de situações de acordo com alguns destes elementos. Por exemplo, Tinoco (2002) sugere que o ensino de funções pode se iniciar muito antes dos anos finais do Ensino Fundamental e no Médio, por meio de situações que abordem as ideias de variável, dependência, regularidade e generalização e sugere um conjunto de problemas com base nesta classificação.

Desta forma, como destacamos anteriormente, vários elementos podem fazer e fazem parte deste campo conceitual e, portanto, delimitarmos um olhar para estas situações se mostrou essencial.

Entendemos que é possível atribuir diferentes enfoques para a caracterização de situações-problema que envolvam o conceito de função afim. Elas podem ser caracterizadas segundo ideias bases enfocadas; conceitos relacionados; propriedades envolvidas; tipo particular de função afim; a representação envolvida; dentre outros.

Contudo, para esta pesquisa, utilizamos como base os estudos realizados por Vergnaud quanto ao campo conceitual das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, para categorizar as situações-problema encontradas em livros didáticos de matemática que envolvam o conceito de função afim apresentadas na consolidação deste tópico. Esta opção será melhor justificada ao fim do próximo capítulo, onde relacionamos os problemas mistos abordados por Vergnaud com nosso estudo.

Considerando que a teoria de sustentação para esta investigação é a teoria dos Campos Conceituais, particularmente os campos conceituais das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas, estabelecidas por Gérard Vergnaud, apresentamos, a seguir, uma síntese dos estudos teóricos realizados para subsidiar nossas análises.

CAPÍTULO 2

ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Neste capítulo explicitamos elementos da teoria dos Campos Conceituais, destacando ideias que estão relacionadas a esta teoria, com foco nas classes de situações pertencentes aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, bem como uma introdução ao tratamento de problemas mistos.

A teoria dos Campos Conceituais, proposta pelo pesquisador Gérard Vergnaud, é uma teoria cognitivista que estuda o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas ao longo da experiência, cuja "[...] finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos" (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Segundo o pesquisador, a teoria se refere a uma perspectiva de desenvolvimento em que se defende que o sujeito adquire uma nova competência ou compreende um novo conceito por meio da experiência, ao longo de vários anos na escola. Esse processo de formação de um conceito novo percorre numerosas etapas, filiações e rupturas[6] (VERGNAUD, 2011).

A experiência está relacionada aos problemas práticos ou teóricos com os quais o sujeito se depara. Vergnaud (2009a) considera que conhecer é se adaptar, e que o sujeito se adapta às situações. Assim, Vergnaud (1993; 2017) adota uma concepção pragmática em sua teoria, e defende que "[...] é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança" (VERGNAUD, 1993, p.1).

Esta concepção está relacionada ao fato de que Vergnaud (1993; 2017) considera que não se deve reduzir um conceito à sua definição, principalmente se o objetivo é a aprendizagem deste conceito. Afinal, para o pesquisador, "[...] um conceito não remete apenas à sua definição explícita, mas, basicamente, à sua possibilidade de funcionar na resolução de problemas" (VERGNAUD, 2017, p. 18).

Por competência Vergnaud (2009a) entende o fazer e obter êxito, e afirma que

[6] Sendo filiações aquelas ideias que o sujeito dispõe e que podem ser complementadas na aprendizagem para a constituição de uma ideia nova, já as rupturas se referem às reformulações necessárias, as rupturas com conhecimentos locais, para a aprendizagem de um conhecimento novo.

- X é mais competente se ele se coloca de uma maneira melhor (mais rápida, mais confiável, mais compatível com a maneira de colocar de seus parceiros).
- X é mais competente se ele dispõe de fontes alternativas para tratar situações de certo tipo, mas suscetíveis, por seu caráter próprio, de tornar um método mais oportuno em um caso, menos oportuno em outro.
- X é mais competente se ele é menos desprovido diante de uma situação nova (VERGNAUD, 2009a, p.17).

Portanto, do ponto de vista de Vergnaud, aprender é se adaptar a situações e desenvolver competências necessárias para conseguir obter êxito em novas situações. Logo, sempre existirá um conjunto de situações para as quais o sujeito já possui as competências necessárias para lidar com elas, e um conjunto de situações às quais o sujeito não possui as competências necessárias para resolvê-las (VERGNAUD, 2009a).

Na tentativa de compreender e resolver com êxito uma situação nova o sujeito pode ser levado a fazer filiações, quando dispõe de competências que podem ser usadas como base para a compreensão de uma ideia nova, e rupturas, quando são necessárias reformulações de competências prévias para a formação de uma nova competência (VERGNAUD, 2011; 2017).

Vergnaud (2009b, p. 15), afirma que "[...] os conhecimentos que a criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, a criança, é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói".

Os conhecimentos pertinentes na ação, mobilizados pelo sujeito durante suas formulações, podem ser explícitos ou implícitos (teoremas em ação e conceitos em ação) e a organização invariante da atividade, ao resolver situações de uma determinada classe de problemas, é denominada, por Vergnaud (1993; 2009a; 2009b), esquema. O esquema é composto por objetivos, subobjetivos e antecipações; regras de ação; invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação; e inferências (VERGNAUD, 2009a).

Vergnaud (1993; 2009a; 2009b; 2011) compreende o conceito como algo que não se forma sozinho e isolado. Para o pesquisador, um determinado conceito se desenvolve por meio da terna (S, I, R), conjuntos considerados indissociáveis na teoria dos Campos Conceituais: S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito em questão (a referência); I é o conjunto de invariantes (propriedades e relações) utilizados na resolução das situações, na organização da atividade, nos esquemas (o significado); e R é o conjunto de representações simbólicas usados na representação do próprio conceito e de suas relações, ou ainda das situações e dos esquemas envolvidos (o significante) (VERGNAUD, 1993; 2009a; 2009b; 2011).

Vergnaud (1993) adota a ideia de situações como tarefas a serem realizadas pelo sujeito e as situações mais complexas podem ser entendidas como um conjunto de subtarefas a serem compreendidas e realizadas pelo sujeito. Sobre as situações, Vergnaud (1993) distingue duas ideias principais:

- A de variedade: existe uma variedade de situações num determinado campo conceitual e esta variedade nos permite fazer estudos sistemáticos para distinguir classes de situações.
- A de história: os conhecimentos são elaborados mediante as situações enfrentadas e dominadas progressivamente pelo sujeito.

Ao longo das pesquisas de Vergnaud, dois Campos Conceituais foram bem estruturados, relacionados às operações de adição/subtração e multiplicação/divisão, denominados de campo conceitual das estruturas aditivas e campo conceitual das estruturas multiplicativas, respectivamente, caracterizando classes de situações que dão sentido ao conceito em cada caso.

Nos estudos de problemas das estruturas aditivas que podem ser resolvidos com operações de adição ou subtração, ou uma combinação destas operações, as classes de situações estabelecidas por Vergnaud (1993, p. 13) são:

1. Composição de duas medidas em uma terceira.
2. Transformação de uma medida inicial em uma medida final.
3. Relação de comparação entre duas medidas.
4. Composição de duas transformações.
5. Transformação de uma relação.
6. Composição de duas relações.

Os tipos de situações de 4 a 6 se referem às combinações das classificações de 1 a 3.

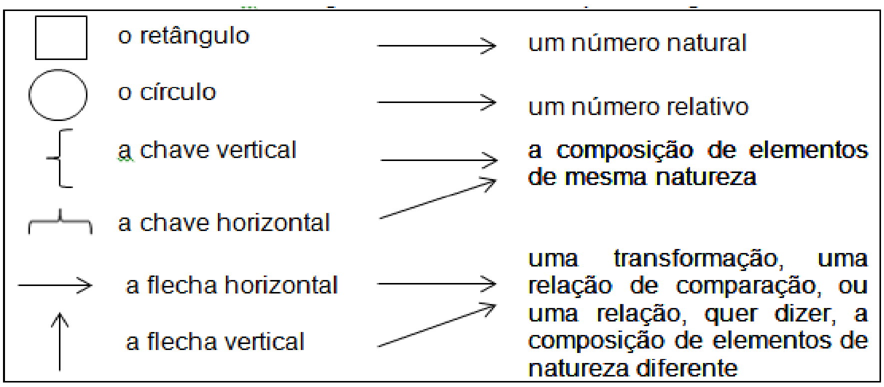
Para o campo conceitual multiplicativo Vergnaud estabelece cinco categorias de problemas, segundo Vergnaud (2009b) e Gitirana *et al* (2014):

1. Isomorfismo de medidas ou proporção simples.

2. Comparação multiplicativa; caso de um único espaço de medidas de mesma natureza.
3. Produto de medidas ou produto cartesiano.
4. Função bilinear ou proporção dupla.
5. Proporção múltipla.

Na análise de problemas dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Vergnaud (2009b) realizou estudos das relações[7] entre os elementos presentes nas situações, sendo estas relações binárias, relações ternárias e relações quaternárias, que estabelecem uma relação entre dois, três e quatro elementos, respectivamente. Essas relações são frequentemente representadas pelo pesquisador por um esquema sagital, ou esquema relacional (VERGNAUD, 2009b), que permite explicitar deduções importantes para cada tipo de situação.

Este esquema sagital, ou esquema relacional, permite representar as relações entre os elementos de um problema utilizando códigos (QUADRO 1).



Quadro 1: Código utilizado em um esquema sagital
Fonte: Construído a partir de Vergnaud[8] (2009b, p. 201)

Compreendemos a pertinência de, para a caracterização das situações-problema relacionadas ao conteúdo de função afim na perspectiva da Teoria dos

[7] A noção de relação aplicada na categorização dos problemas das Estruturas Aditivas e Estruturas Multiplicativas trata-se da relação estabelecida entre dois (binária), três (ternária) e quatro (quaternária) elementos na situação. Segundo Vergnaud (2009b), é possível escrever facilmente uma relação binária como uma ternária, como por exemplos considerarmos a transformação (em problemas de transformação das Estruturas Aditivas) como um elemento da relação. Já as relações quaternárias estão relacionadas às Estruturas Multiplicativas.

[8] Segundo Vergnaud (2009b, p. 198), "os números naturais são <u>números sem sinal</u>". O pesquisador justifica esta afirmação declarando que se nos limitarmos aos conjuntos de objetos isoláveis, a medida relacionada a este conjunto corresponde ao conjunto dos números naturais definido pelos matemáticos, mas se considerarmos as medidas de grandezas contínuas, estas medidas correspondem a números decimais positivos (VERGNAUD, 2009b).

Campos Conceituais, ao analisarmos as relações (relações binárias, ternárias e quaternárias) estabelecidas entre os elementos envolvidos em cada situação e identificarmos estas relações, pertencentes às Estruturas Aditivas e Multiplicativas, nas situações-problema que envolvem o conceito de função afim.

2.1 O campo conceitual das estruturas aditivas

O campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto de situações que requer uma ou várias adições e subtrações, ou uma combinação entre estas operações (VERGNAUD, 1993; 2009b). As relações aditivas são relações ternárias que podem estar relacionadas de diferentes maneiras e, assim, resultar em várias estruturas aditivas.

Como apresentado anteriormente, as categorias de situações das estruturas aditivas distinguidas por Vergnaud são seis, sendo três formas combinadas das categorias mais simples. Para diferenciar as categorias de situações, nos baseamos em estudos relacionados à classificação dos problemas de relações aditivas (VERGNAUD, 2009b; ZANELLA; BARROS, 2014), apresentando exemplos correspondentes a essas categorias, o esquema relacional proposto e as análises das equações numéricas equivalentes ao esquema proposto.

A *primeira categoria* de problemas das estruturas aditivas é aquela que conhecemos por *problemas de composição*. Nesta categoria de problemas estão presentes as tarefas que possuem duas medidas que se compõem e resultam em uma terceira.

O esquema relacional proposto por Vergnaud para estas classes de situações relaciona três medidas e a equação que representa a relação entre essas medidas é $a + b = c$.

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\[4pt]\boxed{b}\end{array}\right\}\ \boxed{c}$$

Nesta relação, os números a, b e c são números positivos e a variação de problemas que podemos ter nessa classe de situações está relacionada à medida que se quer descobrir, às medidas elementares ou à medida composta (QUADRO 2).

Composta desconhecida (c)	Medidas elementares desconhecidas $(a$ e $b)$
Situação1.1	Situação 1.2

Quadro 2: Subclasses de problemas de composição de medidas
Fonte: Baseado nas informações de Vergnaud (2009b) e Zanella e Barros (2014)

Situação 1.1: Conhecendo-se as partes podemos encontrar a composição das medidas. Podemos representar estas situações pelo esquema relacional a seguir que corresponde à relação da equação $a + b = x$.

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{array}\right\}\boxed{x}$$

Exemplo 1.1: “Hoje na minha sala de aula estão presentes 3 meninos e 5 meninas. Quantas pessoas vieram na aula hoje?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 27).

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{3}\\ \boxed{5}\end{array}\right\}\boxed{x}$$

A equação correspondente a esta situação é $x = 3 + 5 \Longrightarrow \ x = 8$.

Situação 1.2: Conhecendo-se uma das partes e a composição podemos encontrar a outra medida elementar. Podemos representar estas situações pelo esquema relacional a seguir que corresponde à relação representada pela equação $a + x = c$ ou $x = c - a$.

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{a}\\ \boxed{x}\end{array}\right\}\boxed{c}$$

Exemplo 1.2: “Ana tinha 8 lápis novos, dos quais 5 já foram usados. Quantos lápis novos Ana ainda tem para usar?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 31).

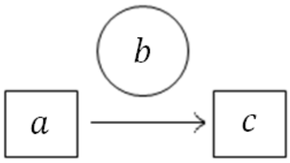
$$\left.\begin{array}{c}\boxed{5}\\ \boxed{x}\end{array}\right\}\boxed{8}$$

A equação correspondente a esta situação é $x = 8 - 5 \Longrightarrow \ x = 3$.

Podemos destacar que a subtração, neste caso, aparece como inversa operação de adição, pois “[...] a busca do complemento entre uma medida elementar e uma medida composta não tem sentido a menos que primeiramente se atribua um sentido à composição de duas medidas elementares” (VERGNAUD, 2009b, p. 216). Porém, de acordo com Vergnaud (2009b) não podemos considerar a subtração sempre como uma operação subordinada à adição.

A *segunda categoria* de problemas das estruturas aditivas são os *problemas de transformação*. São aqueles em que há uma transformação que opera sobre a medida inicial e resulta em uma medida final.

O esquema relacional proposto por Vergnaud para estas classes de situações relaciona três medidas. A equação que representa a relação entre essas medidas é $a + (b) = c$.



Os problemas que podemos ter nessa classe de situações estão relacionados à variação da pergunta sobre o termo desconhecido, podendo se referir ao estado inicial, ao estado final ou à transformação. E quanto à transformação, ela pode ser negativa ou positiva, diferenciando 6 subgrupos de problemas que indicaremos nos exemplos a seguir (QUADRO 3).

	Valor final desconhecido (c)	Transformação desconhecida (b)	Valor inicial desconhecido (a)
Transformação positiva $(b > 0)$	Situação 2.1	Situação 2.3	Situação 2.5
Transformação negativa $(b < 0)$	Situação 2.2	Situação 2.4	Situação 2.6

Quadro 3: Subclasses de problemas de transformação aditiva
Fonte: Baseado nas informações de Vergnaud (2009b, p. 207)

Situação 2.1: Conhecendo-se o valor inicial (a) e uma transformação positiva (b), obtemos um estado final (c).

Situação 2.2: Conhecendo-se o valor inicial (a) e o valor final (c), obtemos uma transformação positiva (b).

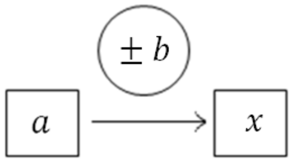
Situação 2.3: Conhecendo-se a transformação positiva (b) e o valor final (c), obtemos o valor inicial (a).

Situação 2.4: Conhecendo-se o valor inicial (a) e uma transformação negativa (b), obtemos um estado final (c).

Situação 2.5: Conhecendo-se o valor inicial (a) e o valor final (c), obtemos uma transformação negativa (b).

Situação 2.6: Conhecendo-se a transformação negativa (b) e o valor final (c), obtemos o valor inicial (a).

Se conhecermos o estado inicial e a transformação pode-se determinar o estado final, por meio de uma aplicação direta da transformação, correspondente à equação $a + (\pm b) = x$.



Na sequência apresentamos dois exemplos em que questionamos o estado final, sendo o primeiro com uma transformação positiva e o segundo uma transformação negativa.

Exemplo 2.1: "Havia 17 pessoas dentro de um ônibus, subiram 4. Quantas pessoas estão ali dentro, agora?" (VERGNAUD, 2009b, p. 207).

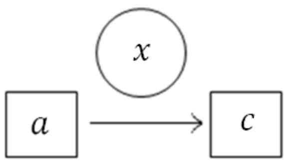
Este corresponde à equação $17 + 4 = x$.

Exemplo 2.2: "João tem 9 balas. Ele deu 4 para sua irmãzinha. Com quantas ele ficou?" (VERGNAUD, 2009b, p. 208).

O cálculo pode ser representado pela equação $9 + (-4) = x$.

Na ocorrência de uma transformação negativa, Vergnaud (2009b) considera que a subtração indicada não está subordinada à adição, tendo um significado próprio. Neste caso, a adição (símbolo +) é a lei de composição que corresponde à aplicação de uma transformação negativa (-b) sobre o estado inicial para resultar no estado final.

Se conhecermos o estado inicial e o estado final, podemos determinar a transformação. Esta transformação pode ser positiva se $c - a > 0$ ou negativa se $c - a < 0$, pois a equação correspondente ao cálculo neste caso é $a + x = c \implies x = c - a$.



Neste caso, segundo Vergnaud (2009b), é comum o aluno utilizar tanto o procedimento do complemento (o que devo somar ou subtrair ao estado inicial para obter o estado final) quanto o da diferença.

Na sequência, apresentamos dois exemplos em que questionamos sobre a transformação, sendo o primeiro com uma transformação positiva e o segundo com uma transformação negativa. Se $c > a$ percebemos que a transformação é positiva, pois haverá aumento do estado inicial para o estado final.

Exemplo 2.3: "Um paulistano viaja de carro em férias. Ao sair de São Paulo seu velocímetro marca $63.809\ km$; na volta marca $67.351\ km$. Quantos quilômetros ele percorreu durante as férias?" (VERGNAUD, 2009b, p. 208).

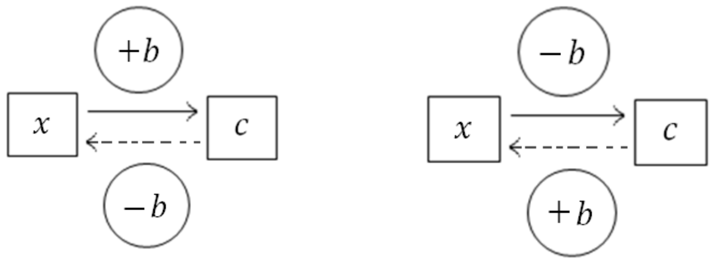
Corresponde à equação $63.809 + x = 67.351 \Longrightarrow\ x = 67.351 - 63.809$, com a transformação positiva.

Se $c < a$ percebemos que a transformação é negativa, pois haverá uma diminuição do estado inicial em relação o estado final.

Exemplo 2.4: "Paulo acabou agora um jogo de bolinhas de gude. Ele tinha 41 bolinhas antes de jogar. E agora ele tem 29. Quantas bolinhas ele perdeu?" (VERGNAUD, 2009b, p. 208).

Percebe-se, neste caso, a ocorrência de uma transformação negativa, pois a equação correspondente a este caso é $41 + x = 29 \Longrightarrow\ x = 29 - 41$.

Se conhecermos a transformação e o estado final podemos obter o estado inicial, por meio de uma aplicação direta da transformação, correspondente à equação $x + (\pm b) = c$. Segundo Vergnaud (2009b), o cálculo relacional destas classes são os mais complexos dos tipos de problemas de transformação, pois a solução implica na inversão da transformação direta, ou seja, o cálculo do estado inicial é realizado pela aplicação da transformação inversa no estado final.



Assim, podemos expressar a relação pela equação $x = c + (\mp b)$.

Na sequência, apresentamos dois exemplos nos quais questionamos sobre o estado inicial, sendo o primeiro com uma transformação positiva e o segundo uma transformação negativa.

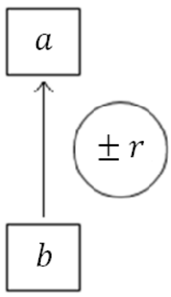
Exemplo 2.5: “Henrique acaba de achar $R\$\ 2{,}60$ na calçada. Ele os colocou no seu moedeiro. Ele tem agora, em tudo $R\$\ 3{,}90$. Quanto dinheiro ele tinha em seu moedeiro antes do achado?” (VERGNAUD, 2009b, p. 208).

Corresponde à equação $x = 3{,}90 - 2{,}60$.

Exemplo 2.6: “Bianca tem certa quantia de bonecas. Ela deu 8 bonecas para suas amigas brincarem e agora tem 6 bonecas. Quantas bonecas ela possuía?” (ZANELLA, BARROS, 2014, p. 34).

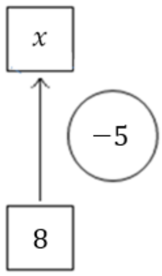
O cálculo relacionado a esta situação pode ser representado pela equação $x = 6 + 8$, na ocorrência de uma transformação negativa (deu 8 bonecas). Portanto, é possível observar, como destacado por Vergnaud (2009b) que, nestes casos, a dificuldade está relacionada à necessidade de se aplicar a operação inversa a indicada no enunciado.

A *terceira categoria* é aquela em que existe uma relação entre duas medidas. Uma relação de *comparação entre medidas*. Neste caso, usamos o valor de uma medida como referência (que é o referente), adicionamos ou subtraímos um valor (que é a relação entre duas medidas) para obter o valor de outra medida (o referido). A equação que representa as situações às quais nos referimos é $a + (\pm r) = b$. A situações desta classe são indicadas pelo esquema relacional abaixo, e são compostas pelo referido (b), pelo referente (a) e pela relação positiva ou negativa $(\pm r)$

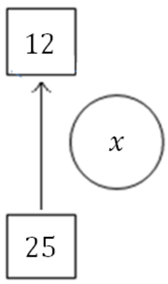


Nesta categoria de situações, temos uma comparação estática entre duas medidas dadas. Utilizaremos o problema a seguir para exemplificar essa categoria de situações, com uma relação negativa.

Exemplo 3.1: “Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 a menos que Paulo. Quantas bolinhas de gude tem Tiago?” (Adaptado de Vergnaud (2009b, p. 203)). Temos o referente 8, a relação -5 e busca-se o referido, correspondente à equação $8 - 5 = x$ e representada pelo esquema relacional a seguir:



Exemplo 3.2: “João tem 25 figurinhas e Maria tem 12. Quantas figurinhas Maria tem a menos do que João?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 37). Neste, temos as quantidades: referente igual a 25, e referido igual a 12, equivalente à equação $25 + x = 12 \implies x = 12 - 25$.



Neste caso, temos que referente é maior que o referido ($b > a$) então a relação é negativa. Aqui, como na categoria anterior, os problemas são de transformação das estruturas aditivas e diferenciamos 6 subclasses de problemas de acordo com a medida desconhecida (referente, referido ou relação) e a relação negativa ou positiva (QUADRO 4).

	Referido desconhecido (b)	Relação desconhecida (r)	Referente desconhecido (a)
Relação positiva ($r > 0$)	Situação 3.1	Situação 3.3	Situação 3.5
Relação negativa ($r < 0$)	Situação 3.2	Situação 3.4	Situação 3.6

Quadro 4: Subclasses de problemas de comparação entre medidas do campo aditivo
Fonte: a autora

Assim, teremos as seguintes variações de situações do tipo comparação de medidas:

Situação 3.1. Conhecendo uma das medidas (referente) e a relação positiva, podemos determinar outra medida (referido).

Situação 3.2. Conhecendo uma das medidas (referente) e uma relação negativa, podemos determinar a outra medida (referido).

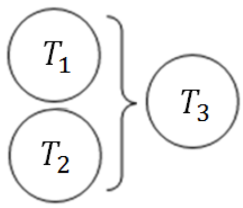
Situação 3.3. Conhecendo as duas medidas, referente e referido, podemos determinar a relação positiva.

Situação 3.4. Conhecendo as duas medidas, referente e referido, podemos determinar a relação negativa.

Situação 3.5. Conhecendo uma das medidas (referido) e a relação positiva, podemos determinar a outra medida (referente).

Situação 3.6. Conhecendo uma das medidas (referido) e a relação negativa, podemos determinar a outra medida (referente).

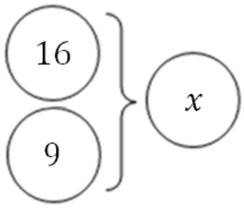
A *quarta categoria* é uma combinação de outras duas classes - a primeira e a segunda. É aquela em que compomos duas transformações, resultando em outra transformação. Neste caso, temos duas relações de transformação, em que a primeira transformação (T_1) leva para um estado intermediário e uma segunda transformação (T_2) para um estado final. A transformação (T_3) que leva do estado inicial para o estado final é a composição entre as transformações iniciais, representada a seguir, de forma simplificada, pelo esquema relacional:



Na composição de transformações podemos considerar, assim como na composição de medidas, duas grandes classes de situações formadas de acordo com a medida desconhecida: uma das transformações elementares (T_1 ou T_2) ou a transformação composta (T_3). Cada uma dessas classes possui variações de acordo com o fato de as transformações serem são positivas ou negativas (tanto as transformações elementares quanto a composta) formando, cada uma, oito variações, ou subclasses de situações.

A primeira classe de situações relacionada a esta categoria é caracterizada como aquela em que conhecendo-se as duas, ou mais, transformações elementares (T_1 e T_2), pode-se obter a transformação composta (T_3), conforme o exemplo que segue.

Exemplo 4.1: “João jogou duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida ele ganhou 16 bolinhas. Na segunda partida ganhou 9. Ao final o que aconteceu?” (VERGNAUD, 2009b, p. 217). Esta situação pode ser representada pela equação $16 + 9 = x$ e se refere ao esquema relacional a seguir.



O quadro 4, a seguir, organiza as possíveis combinações entre as transformações elementares (T_1 ou T_2) e o resultado da composição (T_3), quando $|T_1| > |T_2|$ e $|T_1| < |T_2|$, que geram oito subclasses.

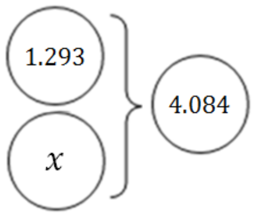
A equação correspondente à composição de transformação é $T_1 + T_2 = T_3$. Assim, temos que se $|T_1| > |T_2|$, considerando as variações de sinal para as transformações elementares, teremos as variações da *situação 4.1* à *situação 4.4.* Se $|T_1| < |T_2|$, teremos os casos da *situação 4.5* à *situação 4.8* (QUADRO 5).

	Transformação elementar 1 (conhecida)	Transformação elementar 2 (conhecida)	Transformação composta (desconhecida)	Nomenclatura
$\|T_1\| > \|T_2\|$	$T_1 > 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	Situação 4.1
	$T_1 < 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	Situação 4.2
	$T_1 > 0$	$T_2 < 0$	$T_3 > 0$	Situação 4.3
	$T_1 < 0$	$T_2 > 0$	$T_3 < 0$	Situação 4.4
$\|T_1\| < \|T_2\|$	$T_1 > 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	Situação 4.5
	$T_1 < 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	Situação 4.6
	$T_1 > 0$	$T_2 < 0$	$T_3 < 0$	Situação 4.7
	$T_1 < 0$	$T_2 > 0$	$T_3 > 0$	Situação 4.8

Quadro 5: Possíveis variações para problemas de composição de transformações com a transformação composta desconhecida
Fonte: Baseado em Vergnaud (2009b, p. 217) e Zanella e Barros (2014, p. 40)

A segunda classe de situações, relacionada à categoria de situações de composição de transformações, é aquela em que conhecendo-se uma das transformações elementares (T_1), e a transformação composta (T_3), é possível obter uma transformação elementar desconhecida (T_2). Um exemplo para esta classe de situações pode ser representado pelo exemplo a seguir.

Exemplo 4.2: “Em uma cidade, o excedente de nascimento em relação aos óbitos foi de 1.293 pessoas entre 1980 e 1990 e de 4.084 entre 1980 e 2000. O que aconteceu entre 1990 e 2000?" (VERGNAUD, 2009b, p. 219). A situação, que leva à transformação composta, pode ser expressa pela equação $1.293 + x = 4.084$, a qual leva à transformação elementar $x = 4.084 - 1.293$ e ao esquema relacional a seguir.



O quadro 6 a seguir organiza as possíveis combinações entre a transformação elementar (T_1) e a transformação composta (T_3), quando $|T_1| > |T_3|$ e $|T_1| < |T_3|$, com seus possíveis resultados para a transformação elementar T_2 resultando em oito subclasses de situações.

A equação correspondente à composição de transformação é $T_1 + T_2 = T_3 \Longrightarrow T_2 = T_3 - T_1$. Podemos considerar que se $|T_1| > |T_3|$, e levando em conta que as variações de sinal para a transformação elementar e a composta, teremos as variações da *situação 4.9* à *situação 4.12* e se $|T_1| < |T_3|$, teremos os casos da *situação 4.13* à *situação 4.16* (QUADRO 6).

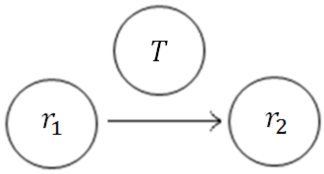
	Transformação elementar 1 (conhecida)	Transformação composta (conhecida)	Transformação elementar 2 (desconhecida)	Nomenclatura
$\|T_1\| > \|T_3\|$	$T_1 > 0$	$T_3 > 0$	$T_2 < 0$	Situação 4.9
	$T_1 < 0$	$T_3 < 0$	$T_2 > 0$	Situação 4.10
	$T_1 > 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	Situação 4.11
	$T_1 < 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	Situação 4.12
$\|T_1\| < \|T_3\|$	$T_1 > 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	Situação 4.13
	$T_1 < 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	Situação 4.14
	$T_1 > 0$	$T_3 < 0$	$T_2 < 0$	Situação 4.15
	$T_1 < 0$	$T_3 > 0$	$T_2 > 0$	Situação 4.16

Quadro 6: Possíveis variações para problemas de composição de transformações com uma das transformações elementares desconhecida
Fonte: Baseado em Vergnaud (2009b, p. 218) e Zanella e Barros (2014, p. 43)

A *quinta categoria* é aquela formada por situações em que uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar emoutro estado relativo. De acordo com Vergnaud (2009b, p. 222), nessa categoria "[...] serão reencontradas as classes estudadas no caso da segunda categoria (busca do estado final, da transformação e do estado inicial) com subclasses mais numerosas, levando em conta as várias possibilidades que existem para o sinal e o valor absoluto".

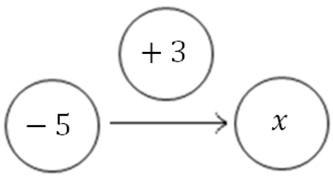
Na segunda categoria a transformação opera entre medidas (estado inicial e estado final) e na quinta categoria a transformação opera entre relações. As classes de situações envolvidas na quinta categoria estão relacionadas à medida desconhecida (a primeira relação, a transformação e a segunda relação), sendo que cada uma pode ter variações quanto ao sinal assumido pelas relações r_1e r_2 e a transformação T. Ou seja, neste caso, temos três grandes classes que dão origem a oito variações cada.

Podemos representar, de forma simplificada, esta relação pelo esquema relacional a seguir, correspondente à equação $r_1 + T = r_2$:

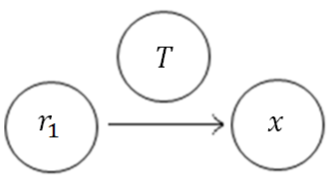


Os problemas relacionados a esta classe de situações são do tipo:

Exemplo 5.1: “No campeonato brasileiro de Voleibol, a seleção do Rio tinha 5 pontos a menos do que a seleção de Minas. Nessa última rodada a diferença entre as pontuações das equipes diminuiu 3 pontos. Quantos pontos a mais ou a menos tem a seleção do Rio em relação à de Minas?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 48). Esta situação corresponde à aplicação direta da transformação $(T = +3)$ à primeira relação $(r_1 = -5)$, ou seja, corresponde à equação $r_1 + T = r_2 \implies -5 + (+3) = x$ e ao esquema relacional:



A primeira classe de situações da quinta categoria são aquelas situações em que são conhecidas a primeira relação e a transformação e se pretende determinar a segunda relação. Se considerarmos a primeira comparação (relação) conhecida r_1, a transformação T e a comparação r_2 desconhecida, podemos representar a relação pelo seguinte esquema relacional:

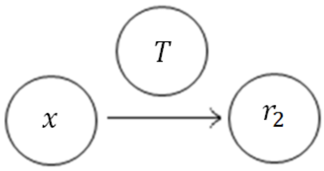


Assim, conhecidos r_1 e T temos as seguintes combinações para o cálculo relacional $r_1 + T = x$, com o estado relativo final r_2 desconhecido. Portanto, se $|r_1| > |T|$, obtemos os casos *Situação 5.1* à *Situação 5.4* e se $|r_1| < |T|$ temos os casos de *Situação 5.5* à *Situação 5.8,* representados no quadro 7 a seguir:

	Relação 1 (conhecida)	Transformação (conhecida)	Relação 2 (desconhecida)	Nomenclatura
$\|r_1\| > \|T\|$	$r_1 > 0$	$T > 0$	$r_2 > 0$	Situação 5.1
	$r_1 < 0$	$T < 0$	$r_2 < 0$	Situação 5.2
	$r_1 > 0$	$T < 0$	$r_2 > 0$	Situação 5.3
	$r_1 < 0$	$T > 0$	$r_2 < 0$	Situação 5.4
$\|r_1\| < \|T\|$	$r_1 > 0$	$T > 0$	$r_2 > 0$	Situação 5.5
	$r_1 < 0$	$T < 0$	$r_2 < 0$	Situação 5.6
	$r_1 > 0$	$T < 0$	$r_2 < 0$	Situação 5.7
	$r_1 < 0$	$T > 0$	$r_2 > 0$	Situação 5.8

Quadro 7: Possibilidade de situações para a quinta categoria de situações do campo aditivo com a segunda relação desconhecida
Fonte: Baseado em Zanella e Barros (2014, p. 52)

A segunda classe de situações da quinta categoria é aquela na qual, nas situações, são conhecidas a transformação e a segunda relação, e busca-se a primeira relação. Esta classe de situação pode ser representada pelo esquema relacional a seguir, equivalente à equação $x + T = r_2 \implies x = r_2 - T$.

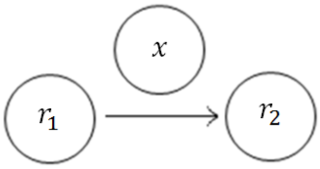


Percebe-se que basta aplicar a transformação inversa à relação r_2. Assim, temos as seguintes combinações de situações, considerando $|r_2| > |T|$, de *Situação 5.9* à *Situação 5.12,* e $|r_2| < |T|$, de *Situação 5.13* à *Situação 5.16,* representados no quadro 8 a seguir:

	Relação 2 (conhecida)	Transformação (conhecida)	Relação 1 (desconhecida)	Nomenclatura
$\|r_2\| > \|T\|$	$r_2 > 0$	$T > 0$	$r_1 > 0$	Situação 5.9
	$r_2 < 0$	$T < 0$	$r_1 < 0$	Situação 5.10
	$r_2 > 0$	$T < 0$	$r_1 > 0$	Situação 5.11
	$r_2 < 0$	$T > 0$	$r_1 < 0$	Situação 5.12
$\|r_2\| < \|T\|$	$r_2 > 0$	$T > 0$	$r_1 < 0$	Situação 5.13
	$r_2 < 0$	$T < 0$	$r_1 > 0$	Situação 5.14
	$r_2 > 0$	$T < 0$	$r_1 > 0$	Situação 5.15
	$r_2 < 0$	$T > 0$	$r_1 < 0$	Situação 5.16

Quadro 8: Possibilidade de situações para a quinta categoria de situações do campo aditivo com a primeira relação desconhecida
Fonte: Baseado em Zanella e Barros (2014, p. 50)

A terceira classe de situações da quinta categoria é aquela em que se conhece as relações inicial e final e queremos determinar a transformação. O esquema relacional correspondente a essa situação é:



O cálculo relacional equivalente a este tipo de relação é $r_1 + x = r_2 \implies x = r_2 - r_1$. Assim, para $|r_1| > |r_2|$, temos os casos *Situação 5.17* à *Situação 5.20,* e para $|r_1| < |r_2|$, temos as seguintes variações *Situação 5.21* à *Situação 2.24,* representados no quadro 9 a seguir:

	Relação 1 (conhecida)	Relação 2 (conhecida)	Transformação (desconhecida)	Nomenclatura
$\|r_1\| > \|r_2\|$	$r_1 > 0$	$r_2 > 0$	$T < 0$	Situação 5.17
	$r_1 < 0$	$r_2 < 0$	$T > 0$	Situação 5.18
	$r_1 > 0$	$r_2 < 0$	$T < 0$	Situação 5.19
	$r_1 < 0$	$r_2 > 0$	$T > 0$	Situação 5.20
$\|r_1\| < \|r_2\|$	$r_1 > 0$	$r_2 > 0$	$T > 0$	Situação 5.21
	$r_1 < 0$	$r_2 < 0$	$T < 0$	Situação 5.22
	$r_1 > 0$	$r_2 < 0$	$T < 0$	Situação 5.23
	$r_1 < 0$	$r_2 > 0$	$T > 0$	Situação 5.24

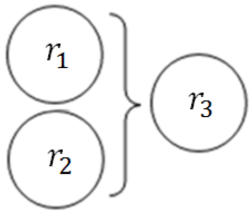
Quadro 9: Possibilidade de situações para a quinta categoria de situações do campo aditivo com a transformação desconhecida
Fonte: Baseado em Zanella e Barros (2014, p. 52)

Desta forma, percebemos que a quinta categoria, dividida em 3 classes (desconhecido o estado relativo inicial ou final ou a transformação), cada uma contendo 8 subclasses, formando um total de 24 subclasses (ZANELLA; BARROS, 2014).

A *sexta categoria* é aquela formada por situações em que dois estados relativos (relações, comparações) se compõem para resultar outro estado relativo.

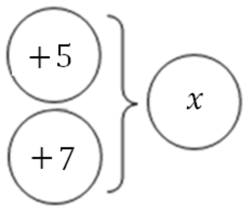
Nesta categoria voltamos a estudar as relações da primeira categoria em que se compõem medidas. Porém, no lugar de medidas, na sexta categoria, compomos relações e podemos obter subclasses. Além disso, a formação das subclasses de situações é feita de forma análoga às situações descritas na quarta categoria, pois temos relações no lugar de transformações (VERGNAUD, 2009b).

Representamos esta relação pelo seguinte esquema relacional, considerando os estados relativos elementar r_1e r_2 e um estado relativo composto r_3:

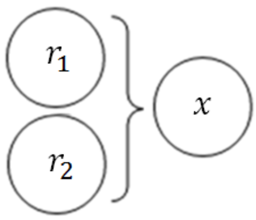


Os problemas relacionados a esta classe de situações são do tipo:

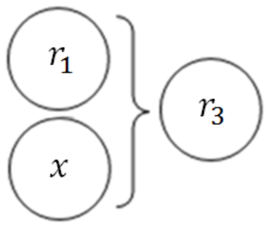
Exemplo 6.1: “Denise tem $R\$\ 5{,}00$ a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem $R\$\ 7{,}00$ a mais que Lilian. Quanto Denise tem a mais do que Lilian?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 55). Esta situação corresponde à composição das relações dadas para encontrar a relação composta equivalente à equação $5 + 7 = x$:



A primeira classe relacionada aos problemas de composição de relações é aquela em que se conhece a relação elementar (r_1) e a relação elementar (r_2), para obter a relação de composição desconhecida (r_3).



A segunda classe é aquela em que as situações de composição de relações em que se conhece a relação de composição (r_3) e uma relação elementar relação (r_1), de modo que a outra relação elementar é desconhecida (r_2).



Neste caso, ambas as classes apresentadas anteriormente produzem subclasses determinadas, da mesma forma que na quarta categoria, produzindo 16 subclasses de situações, substituindo nos quadros 4 e 5, T_1 por r_1, T_2 por r_2 e T_3 por r_3.

Portanto, concluímos que consideramos pertinentes para o estudo das relações presentes em situações-problema que envolvem o conceito de função afim as 6 categorias principais das estruturas aditivas, assim como as 70 subclasses resultantes, sendo que a categoria de situações de Composição de medida resulta em duas (02) subclasses, a transformação de medidas em seis (06) subclasses, a comparação de medidas em seis (06) subclasses, a composição de transformações em dezesseis (16) subclasses, a transformação de relações em 24 subclasses e a composição de relações em dezesseis (16) subclasses.

2.2 O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é composto por um conjunto de situações que requerem uma ou várias multiplicações ou divisões e um conjunto de conceitos, teoremas e representações que permitem dominar essas situações.

Segundo Vergnaud (1993) e Gitirana *et al* (2014), há diferentes conceitos que permitem analisar esses tipos de situações das estruturas multiplicativas, como por exemplo: proporção simples, proporção múltipla, fração, razão, razão escalar direta e inversa, função linear, bilinear, e não linear, número racional, taxa, produto cartesiano, área, volume, combinação, entre outros.

Segundo Gitirana *et al* (2014), é importante enfatizar a multiplicação como uma relação quaternária com uso das propriedades de proporcionalidade, multiplicação por um escalar (a razão). De acordo com as autoras,

> [...] a partir da análise dimensional fica ainda mais clara a descontinuidade entre a multiplicação e a adição. O ensino da multiplicação, como continuidade da adição, em geral traz dificuldades na aprendizagem da multiplicação quando ocorrem as rupturas necessárias entre as duas operações (GITIRANA *et al*, 2014, p. 31).

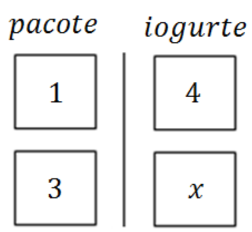
As autoras ilustram a necessidade da descontinuidade do estudo da multiplicação em relação à adição, pela própria propriedade de comutatividade da adição ao tratar a multiplicação como uma adição repetida, por meio do problema:

“Em cada pacote de figurinha vêm 3 figurinhas. Quantas figurinhas se obtêm com 4 pacotes?” (GITIRANA *et a*l, 2014, p. 25).

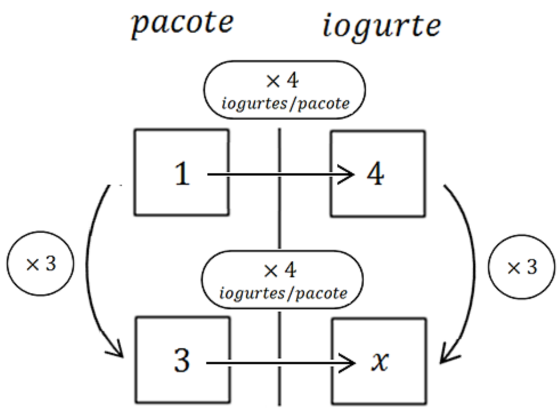
É possível, e correto, pensar este problema da forma: $3\,figurinhas + 3\,figurinhas + 3\,figurinhas + 3\,figurinha,$ ou seja, $4 \times 3\,figurinhas$. Que se torna um pensamento errôneo se pensarmos $4\,pacotes + 4\,pacotes + 4\,pacotes$ equivalente a $3 \times 4\,pacotes$, pois o resultado troca o significado do problema e, segundo Gitirana *et al* (2014), não tem sentido na matemática e, menos ainda, para o aluno.

A *primeira categoria* de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de *isomorfismo de medidas* ou *problemas de proporção simples*. É uma relação quaternária de proporcionalidade, sendo as medidas, duas a duas, de mesma natureza, como o exemplo anterior em que as medidas em questão eram pacotes e figurinhas. São quatro as classes de problemas que obtemos nesta categoria de problemas que variam de acordo com a medida desconhecida.

Segundo Vergnaud (2009b), essas situações formadas por relações quaternárias podem ser analisadas de duas formas, a análise vertical e a análise horizontal. Por exemplo, para a situação “Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?” (VERGNAUD, 2009b, p. 239) Vergnaud (2009b) propõe o seguinte esquema sagital e análise vertical e horizontal.



Neste exemplo, as medidas 1 e 3 representam a quantidade de pacotes e 4 e x a quantidade de iogurtes, portanto são duas a duas medidas de mesma natureza em uma relação de proporcionalidade. O esquema abaixo mostra a análise horizontal e vertical.



A análise vertical permite passar de uma linha para a outra, de uma medida, a outra de mesma natureza, por meio de um operador-escalar $\times 3$ (sem dimensão). A análise horizontal é centrada na ideia de função linear. O operador-função $\times 4$ ou taxa permite passar de uma medida a outra de natureza distinta em que o emprego da forma verbal expressa uma relação:

$$iogurte\ por\ pacote = \frac{iogurte}{pacote}$$

Portanto, segundo Vergnaud (2009b), existem duas formas de obter o valor de x, “[...] a primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão $\times 3$ à quantidade 4 iogurtes. A segunda, em aplicar a função $\times 4\ iogurte/pacote$ à quantidade 3 pacotes” (VERGNAUD, 2009b, p. 244).

Vergnaud (2009b) ainda considera duas formulações possíveis para esse tipo de relação quaternária: x iogurtes estão para 4 iogurtes, assim como 3 pacotes estão para 1 pacote ou x iogurtes estão para 3 pacotes, assim como 4 iogurtes estão para 1 pacote. Isso permite a análise conhecida em física por análise dimensional:

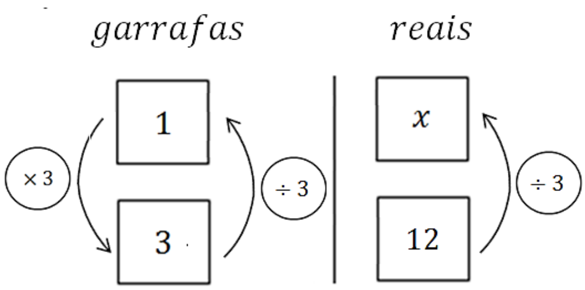
$$\frac{x\ iogurtes}{3\ pacotes} = \frac{4\ iogurtes}{1\ pacote}$$

$$x\ iogurtes = 3\ pacotes \times \frac{4\ iogurtes}{1\ pacote}$$

$$x\ iogurtes = \frac{3\ \cancel{pacotes} \times 4\ iogurtes}{1\ \cancel{pacote}}$$

$$x\ iorgutes = 3 \times 4\ iogurtes$$

Nestas situações também podemos tomar o operador inverso. Por exemplo, se considerarmos a situação: “Paguei $R\$\ 12{,}00$ por três garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?” (VERGNAUD, 2009b, p. 239) na relação quaternária representada a seguir podemos tomar o operador sem dimensão $\div 3$, operador inverso de $\times 3$ que expressa a passagem de 1 para 3 garrafas, para resolver a situação.



Segundo Vergnaud (1993) e Gitirana *et al* (2014), a categoria de problemas isomorfismo de medidas, ou proporção simples, permite a variação de quatro tipos de problemas elementares que resumimos no quadro 10 a seguir.

Classe de problema	Esquema relacional	Descrição
Multiplicação – um para muitos	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{b} & \boxed{x} \end{array}$	A medida que se relaciona à unidade é dada (a unidade 1) e se deseja saber o valor que corresponde à segunda medida de mesma espécie da unidade.
Divisão-partição ou Distribuição	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{x} \\ \boxed{b} & \boxed{c} \end{array}$	É dada a correspondência entre duas medidas dadas de natureza distintas e se deseja saber a medida que corresponde à unidade.
Divisão-cotação ou cota	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{x} & \boxed{c} \end{array}$	A medida que correspondente à unidade (medida igual a 1) é dada e se deseja saber a medida que corresponde a medida de mesma natureza da unidade dada, ou quantas cotas ou grupos, se pode obter com a medida dada.
Quarta proporcional	$\begin{array}{c\|c} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{x} \end{array}$	A relação de proporcionalidade em que a medida correspondente à unidade não é explicitada e nem mesmo solicitada. Podendo ser mais complexas caso as medidas dadas de mesma natureza não sejam múltiplas umas das outras.

Quadro 10: Problemas do tipo multiplicativo pertencentes à categoria de problemas isomorfismo de medidas

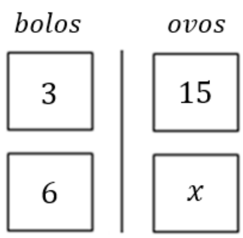
Fonte: Baseado nas informações de Vergnaud (1993) e Gitirana *et al* (2014)

No que se refere à formulação algébrica desses tipos de problemas de proporção simples, temos que o primeiro pode ser resolvido por meio de uma multiplicação $\frac{1}{b} = \frac{a}{x} \Longrightarrow x = a \cdot b$, enquanto que o segundo e o terceiro são resolvidos por uma divisão, $x = \frac{c}{b}$ e $x = \frac{a}{c}$, respectivamente.

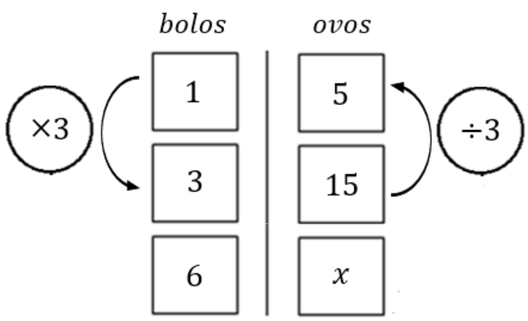
A classe do tipo proporção simples - *quarta proporcional* necessita de uma multiplicação e uma divisão para serem resolvidas, de acordo com a formulação proposta. Consideremos o seguinte exemplo da ocorrência deste tipo de proporção simples:

Exemplo 2.2.1: “Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos?” (GITIRANA *et al,* 2014, p. 66).

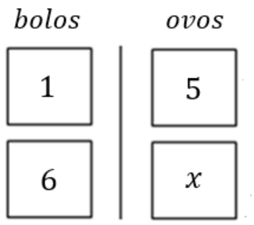
Neste caso, a relação de proporção em jogo $\frac{3}{6} = \frac{15}{x}$, não é feita com a medida que corresponde à unidade. Portanto, a formulação pode ser resolvida como $x = \frac{6 \cdot 15}{3}$, e representada pelo seguinte esquema relacional:



Outra resolução comum, neste caso, é “[...] primeiro, encontra o valor da unidade, como se resolvesse um problema de partição. Segundo, de posse do valor da unidade, resolve o problema como se fosse uma situação de um para muitos” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 67). Realizando uma etapa intermediária, de acordo com o seguinte esquema:



E em seguida resolvemos a proporção simples: $\frac{1}{6} = \frac{5}{x}$, representada pelo seguinte esquema relacional:



Segundo Gitirana *et al* (2014), na última classe de situações apresentada, *quarta proporcional*, pode ocorrer dois casos. Um, em que as medidas de mesma natureza conhecida são múltiplas, e aquele em que as medidas não são múltiplas. No segundo caso, é comum se adotar a “regra de três”, como regra a ser adotada aceitando que as grandezas sejam diretamente proporcionais.

O *Exemplo 2.2.1,* apresentado anteriormente, se refere ao caso em que as medidas conhecidas, de mesma natureza, são múltiplas uma da outra. O exemplo a seguir está relacionado ao caso em que essas medidas não são múltiplas:

Exemplo 2.2.2: “3 novelos de lã pesam 200 gramas. São necessários 8 para fazer um pulôver. Qual vai ser o peso do pulôver?” (VERGNAUD, 2009b, p. 240). Neste caso, 8 não é um múltiplo de 3, fato este que dificulta a análise vertical na situação de proporção simples. Contudo, Vergnaud (2009b) destaca que a análise anterior, considerada no *Exemplo 2.2.1* também pode ser feita para este tipo de situação.

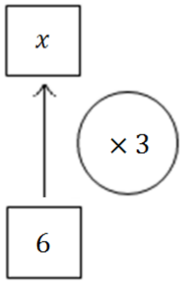
Portanto para a categoria de situações das estruturas multiplicativas *Proporção simples,* temos que considerar 4 variações possíveis, a saber: *Um para muitos, Distribuição, Cota e Quarta proporcional.*

Para o caso da *Quarta proporcional*, consideramos a de dois fatores que podem modificar o nível de dificuldade da situação: o caso em que as medidas de mesma natureza são múltiplas e o caso em que não são múltiplas destacados por Gitirana *et al* (2014).

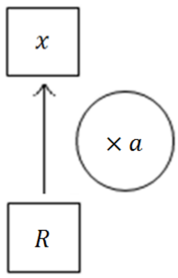
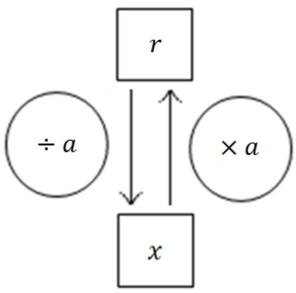
A *segunda categoria* de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de *comparação multiplicativa* ou *caso de espaço entre medidas de mesma natureza*. É uma relação ternária, sendo que queremos comparar medidas de mesma natureza.

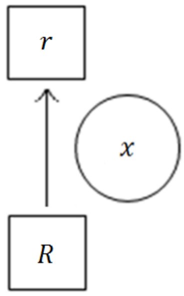
São três as classes de problemas que obtemos nesta categoria que variam de acordo com a medida desconhecida, pois “duas grandezas de mesma natureza são comparadas de forma multiplicativa por um escalar (uma razão ou relação) – sendo o referente (R) e outra o referido (r)” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 45).

Um exemplo de uma relação de comparação multiplicativa pode ser ilustrado pelo exemplo: “Uma loja do Shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa $R\$\ 6{,}00$ na lojinha da esquina. Quanto a mesma sandália custa na loja do Shopping?” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 46). Neste caso temos uma comparação multiplicativa – vezes mais, representado por $\times 3$, com o referido x desconhecido. O esquema relacional proposto neste caso é:



Considerando duas medidas de mesma grandeza, o referente (R), o referido (r) e o escalar de multiplicativo de comparação (a) temos as seguintes classes de problemas resumidas no quadro 11 a seguir:

Classe de problema de comparação multiplicativa (medida desconhecida)	Esquema relacional	Descrição
Comparação Multiplicativa - Referido desconhecido (r)		Neste caso considerando uma relação de comparação multiplicativa – vezes mais, o referido desconhecido pode ser obtido pela aplicação direta da comparação multiplicativa ao referente. $x = R \times a$
Comparação Multiplicativa - Referente desconhecido (R)		Considerando uma relação de comparação multiplicativa – vezes mais, o referente desconhecido pode ser obtido pela aplicação da relação inversa da comparação multiplicativa – vezes mais (que implica numa operação inversa) ao referido. $x = r \div a$

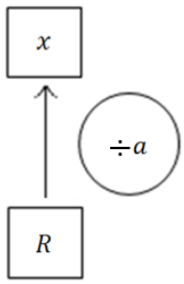
Comparação Multiplicativa - Relação desconhecida (a)		Neste caso, “[...] Como a razão de comparação (ou a relação) é desconhecida, busca-se descobrir a razão entre o referente e o referido. Ou seja, quantas vezes o referente cabe no referido, dado que a razão é multiplicativa” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 51). $$x = \frac{r}{R}$$

Quadro 11: Problemas do tipo multiplicativo pertencentes a categoria de problemas de comparação multiplicativa – *vezes mais*
Fonte: Baseado nas informações de Vergnaud (2009b, p. 263; 1993) e Gitirana *et al* (2014)

Nesta categoria de situações é possível considerar também as variações das classes indicadas anteriormente nos casos em que a relação de comparação seja *vezes menor* que a operação sobre o referente, ou seja, considerando a operação de divisão. Por exemplo, o caso em que temos o valor referente maior que o referido. “Por exemplo, quando se diz que o preço no shopping é 3 vezes menor que o da lojinha da esquina se obtém uma relação de $\div 3$, sendo o referido, agora, maior que o referente” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 53). Neste caso considerando uma relação de comparação multiplicativa – vezes menor, o referido desconhecido pode ser obtido pela aplicação direta de uma divisão ao referente que se refere à equação:

$$x = R \div a$$

correspondente ao esquema relacional:



Desta forma, na categoria de problemas *Comparação Multiplicativa* temos a ocorrência das seguintes variações (QUADRO 12):

	Referido desconhecido (r)	Referente desconhecido (R)	Relação desconhecida (a)
Vezes mais ($\times a$)	S.2.1	S.2.2	S.2.3
Vezes menos ($\div a$)	S.2.4	S.2.5	S.2.6

Quadro 12: Resumo da categoria *comparação multiplicativa*
Fonte: a autora

Neste caso, considerando as variações definidas no quadro 12, quanto ao termo desconhecido na relação de comparação multiplicativa e as variações da relação – *vezes mais* ou *vezes menos* – obtemos seis (06) subclasses de situações, sendo que de S.2.1. a S.2.3 estão relacionados a comparação – *vezes mais* $(\times a)$ e de S.2.4. a S.2.6 estão relacionados a comparação – *vezes menos* $(\div a)$.

A *terceira categoria* de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de *produto cartesiano* ou *produto de medidas*. Trata-se de uma relação ternária entre medidas, na qual uma delas é o resultado do produto de duas outras, sendo estas duas medidas iniciais independentes entre sim, como o caso da área, por exemplo, em que podemos alterar qualquer uma das dimensões sem que precise alterar a outra.

Gitirana *et al* (2014) distingue as situações da categoria produto cartesiano entre produto entre medidas contínuas, denominada pelas autoras por área, como o caso do cálculo da área e do volume, e entre medidas discretas, denominadas de combinação, pois a multiplicação de medidas discretas resulta em combinações a serem contadas.

De acordo com Gitirana *et al* (2014), a representação proposta por Vergnaud para esta categoria de situações é a tabela de dupla entrada. Além disso, para as situações que envolvem medidas discretas as autoras propõem a representação em diagrama de árvore.

Uma situação que ilustra essa categoria na questão de medidas contínuas pode ser: “A sala de aula da Escola Divertida tem um formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula?” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 73). Tal situação se trata da multiplicação de duas medidas contínuas de mesma natureza e é representada pela tabela de entrada dupla a seguir:

	1	5	*extensão*
1			
3		?	
largura			

Já o caso em que as medidas são discretas, além de representarmos por meio deste tipo de tabela, temos que o diagrama de árvore é eficiente na contagem das combinações. Por exemplo, dada a situação “Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinha ou copinho. Tem 4 sabores diferentes: menta, baunilha, chocolate, morango. Maria quer um sorvete de uma bola, quantas maneiras diferentes ela tem para escolher?” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 76), podemos representá-la pela figura 4 a seguir.

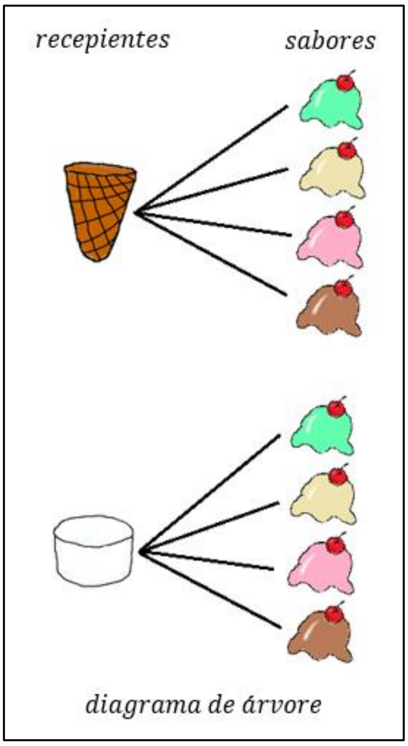


Figura 4: Diagrama de árvore da situação de combinação de sorvetes
Fonte: Baseado em Gitirana *et al* (2014, p. 77)

De acordo com Gitirana *et al* (2014) e Vergnaud (2009b), os problemas de área e de combinação podem ter variações. Uma delas é apresentar-se o total (medida-produto), o resultado da multiplicação de duas medidas, ou ter como elemento desconhecido uma das partes (medida elementar). Por exemplo: “Um retângulo tem uma superfície de 18,66 metros quadrados e uma largura de 3,23 metros. Qual o seu comprimento?” (VERGNAUD, 2009b, p. 264).

Desta forma, se considerarmos as variações de problemas do tipo área, podemos obter o caso em que a medida-produto é desconhecida (S.3.1) e o caso no qual uma medida elementar é desconhecida (S.3.2). Assim como, se considerarmos problemas do tipo combinação, podemos obter o caso em que a medida-produto é desconhecida (S.3.3) e o caso em que uma medida elementar é desconhecida (S.3.4), de acordo com o quadro 13 a seguir.

	Medida-produto desconhecida	Medida elementar desconhecida
Área	S.3.1	S.3.2
Combinação	S.3.3	S.3.4

Quadro 13: Resumo da categoria *produto de medidas*
Fonte: a autora.

Portanto, temos 4 variações de situações do campo multiplicativo *Comparação multiplicativa*, considerando a combinação dos tipos *área* e *combinação* e do valor desconhecido possível.

A *quarta categoria* de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de *função bilinear* ou *proporção dupla*. Segundo Gitirana *et al* (2014), esses tipos de problema são abordados no estudo dos problemas de regra de três composta.

Esses problemas "envolvem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), em que uma delas é proporcional a duas outras, separadamente" (GITIRANA *et al*, 2014, p. 81). Segundo Vergnaud (1993) esses problemas ligam as medidas duas a duas: por exemplo, x proporcional a y, y proporcional a z.

Uma situação que ilustra essa categoria é: "Um parque de diversão cobra $R\$\ 4{,}00$ para cada criança brincar em qualquer brinquedo durante 1 hora. Dona Lulu levou seus 3 filhos para brincar no parque durante 2 horas. Quanto ela pagou?" (GITIRANA *et al*, 2014, p. 81). Que pode ser presentada pela figura 5:

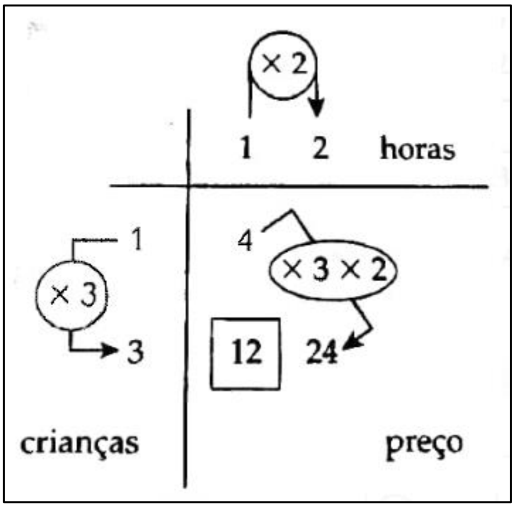


Figura 5: Esquema relacional de um problema do tipo função bilinear
Fonte: Gitirana *et al* (2014, p. 84)

Souza e Magina (2017) consideram duas variações (as quais denominam por eixos) possíveis para os problemas que apresentam relação quaternária, do tipo proporção dupla (ou função bilinear): o caso um para muitos e o caso muitos para muitos. O primeiro pode ser ilustrado pelo exemplo anterior (FIGURA 5), pois há relações estabelecidas com a unidade (uma criança, uma hora). O segundo caso, podemos exemplificar pelo seguinte problema: “Um grupo de 5 pessoas consomem, em média, 20 litros de água em 2 dias. Considerando a mesma média, qual o consumo de 15 pessoas em 4 dias?” (SOUZA; MAGINA, 2017, p. 801), pois não há a unidade envolvida.

Desta forma, temos duas possibilidades de variação de problemas do campo multiplicativo *função bilinear* ou *proporção dupla: um para muitos e muitos para muitos.*

A *quinta categoria* de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de *proporcionalidade múltipla*. Neste caso temos que uma medida z é proporcional a x e a y, porém x e y são independentes entre si (VERGNAUD, 1993).

Segundo Gitirana *et al* (2014), esta última categoria de situações que dá significado à multiplicação trata-se de uma composição de duas proporções simples. Por exemplo: “A receita da massa de pastel do ‘seu’ Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite quantas xícaras de farinha ele vai precisar?” (GITIRANA *et al*, 2014, p. 86).

Neste caso a proposta de representação para a questão é o seguinte diagrama:

Copos de leite	Ovos	Copos de farinha
	1	2
1	3	
2		?

Na representação acima podemos perceber que a questão pode ser analisada por meio de duas proporções simples. Podemos determinar primeiro quantos copos de farinha são usados no caso de usarmos 3 ovos, através das colunas “Ovos” e “Copos de farinha” e em seguida determinar a quantidade de copos de farinha quando se utiliza 2 copos de leite, através da proporção simples com as colunas “Copos de leite” e “Copos de farinha”, da seguinte forma (FIGURA 6):

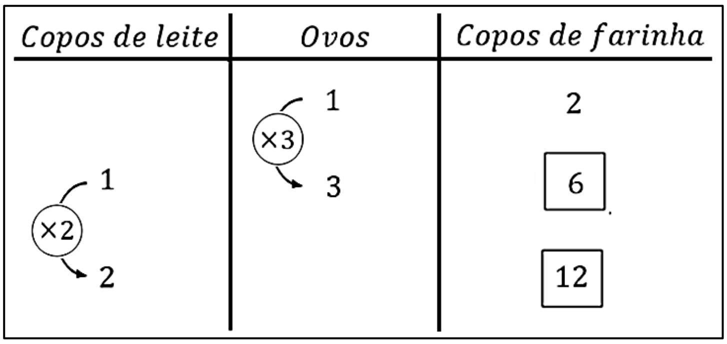


Figura 6: Esquema relacional de um problema do tipo proporcionalidade dupla
Fonte: Gitirana *et al* (2014, p. 88)

Neste caso, Vergnaud (2009b) menciona que esses tipos de problemas permitem que sejam elaboradas perguntas intermediárias. Por exemplo, na situação anterior poderíamos primeiro questionar quantos ovos utilizaríamos para dois copos de leite.

Quanto à classe de situações das estruturas multiplicativas pertencente à categoria *proporção múltipla*, Souza e Magina (2017) e Magina, Merlini e Santos (2014) consideram duas variações: *um para muitos* e *muitos para muitos.*

Um exemplo do caso *um para muitos* é o problema representado pelo esquema na figura 6; um exemplo para o caso *muitos para muitos,* na categoria de problemas proporção múltipla, pode ser representado pelo exemplo: "Um grupo de 50 pessoas vai passar 28 dias de férias no campo. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Eles sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 4 Kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?" (MAGINA; MERLINI; SANTOS, 2014, p. 523), pois não há uma relação com a unidade.

Em relação ao Campo Conceitual Multiplicativo, nossos estudos mostraram que existe um total de cinco classes de situações, e dezoito (18) subclasses de situações, sendo quatro (04) pertencentes à classe proporção simples, seis (06) à comparação multiplicativa, quatro (04) à classe produto de medidas, duas (02) à função bilinear ou proporção dupla e duas (02) à proporção múltipla. Além disso, constatamos que as duas últimas classes de situações apresentadas são formadas por mais de uma proporção, em que as relações de proporção são estabelecidas de formas diferentes, em cada uma.

2.3. Problemas Mistos (Campos Aditivo e Multiplicativo)

Vergnaud (2009b) denomina por problemas mistos aquelas situações que exigem operações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, ou seja, problemas que envolvem pelo menos uma adição ou subtração e, ao mesmo tempo, envolvem pelo menos uma multiplicação ou divisão.

Os problemas mistos são, para Vergnaud (2009b), problemas complexos, que apresentam várias relações e questões em jogo. Ainda, considera que o estudo das relações elementares definidas nas seções anteriores é "[...] insuficiente para dar uma imagem completa das questões que existem na solução de problemas de aritmética" (VERGNAUD, 2009b, p. 269).

Desta forma, o pesquisador (VERGNAUD, 2009b) considera problemas complexos que comportam somente relações aditivas, somente relações multiplicativas e mistas, propondo uma forma de representar os problemas e suas soluções no ensino elementar.

Nesta seção apresentamos a análise de um problema misto proposto por Vergnaud (2009b), no qual nos baseamos para a análise dos problemas de função afim, foco da presente investigação.

Um exemplo que ilustra esse tipo de problema é o que segue no quadro 14.

Um comerciante de camisas compra 3 dúzias de camisas a $R\$\ 360{,}00$ a dúzia e revende-as a $R\$\ 40{,}00$ a peça. Colocar as informações em uma tabela de correspondência fazendo a previsão de uma coluna para os lucros. Encontrar todas as perguntas que cabem nessa tabela e todos os caminhos que permitam encontrar apenas o lucro total do comerciante de camisas.

Quadro 14: Exemplo de problema misto
Fonte: Vergnaud (2009b, p. 288)

Vergnaud (2009b, p. 189) justifica a importância deste tipo de situação por se tratar de um problema misto, uma vez que

> [...] coloca em jogo relações de tipo multiplicativo (correspondência entre quantidade de natureza diferente) e relações de tipo aditivo (lucro = preço de venda – preço de compra). Sua própria simplicidade vai nos permitir ir um pouco mais longe na algebrização dos diferentes caminhos possíveis (VERGNAUD, 2009b, p. 189).

A representação sugerida por Vergnaud (2009b), figura 7, permite notar de forma relativamente rápida as perguntas possíveis de se levantar de acordo com as medidas apresentadas no enunciado. Desta forma temos as seguintes correspondências:

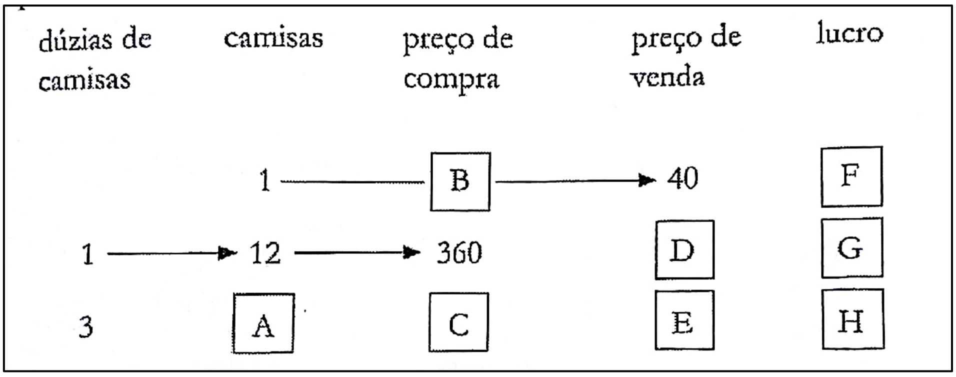


Figura 7: Esquema relacional de um problema misto
Fonte: Vergnaud (2009b, p. 289)

As perguntas relacionadas a cada letra em caixa alta na figura 7 anterior são:

A → Número total de camisas

B → Preço de compra de uma camisa

C → Preço de compra de três dúzias de camisas

D → Preço de venda de 12 camisas.

E → Preço de vende de 3 dúzias de camisas

F → Lucro em 1 camisa

G → Lucro em 12 camisas

H → Lucro em 3 dúzias de camisas.

Segundo Vergnaud (2009b), um dos princípios são indispensáveis para a análise profunda das relações e transformações em jogo nesses problemas, pois esta se dá pelo desenvolvimento da prática de formular perguntas intermediárias, sem que estas tenham relação direta com o enunciado, e o elo entre diferentes representações (um enunciado verbal, tabela de operadores, equações algébricas).

Uma vez considerada a representação proposta na figura 7, de acordo com Vegnaud (2009b), é fácil identificar possíveis caminhos para determinar a solução da situação, como por exemplo os 8 processos de resolução descritos a seguir:

BFGH: cálculo do preço da compra (B) → cálculo do lucro de 1 camisa (F) → cálculo do lucro para 12 camisas (G) → cálculo do lucro para três dúzias (H).

BFAH: cálculo do preço da compra (B) → cálculo do lucro de 1 camisa (F) → cálculo do número total de camisetas (A) → cálculo do lucro para três dúzias (H).

ABFH: análogo ao caminho BAFH.

DGH: cálculo do preço de venda de 12 camisas (D) → cálculo do lucro de 12 camisas (G) → cálculo do lucro para três dúzias (H).

DECH: cálculo do preço de venda de 1 dúzia de camisas (D) → cálculo do preço de venda de 3 dúzias de camisas (E) → cálculo do preço de compra de 3 dúzias de camisas (C) → cálculo do lucro para três dúzias (H).

CDEH: análogo ao caminho DCEH.

ACEH: cálculo do número total de camisas (A) → cálculo do preço de compra de 3 dúzias (C) → cálculo do preço de venda de 3 dúzias de camisas (E) → cálculo do lucro para três dúzias (H).

AECH: análogo ao caminho CAEH.

De acordo com Vergnaud (2009b), é importante proporcionar às crianças o estudo destes diferentes caminhos, de se obter a resposta, e refletir sobre a equivalência entre eles.

Para ilustrar a análise da equivalência entre os caminhos, o autor (VERGNAUD, 2009b, p. 290-292) considera como exemplo a análise algébrica de dois caminhos: DECH e DGH.

Neste caso, temos dados suficientes para calcular o valor numérico de D (preço de venda de 12 camisetas), portanto para a análise algébrica da situação temos que desconsiderar a obtenção de D. Desta forma, do caminho DGH, consideremos o cálculo de G e H:

O lucro em 12 camisas (G) é dado pela diferença do preço de venda de 12 camisas (D) pelo preço de compra de 12 camisas (360), ou seja, $G = D - 360$ e que o lucro em 3 dúzias de camisas (H) é 3 vezes o valor do lucro obtido de 1 dúzia (G), ou seja, $H = G \cdot 3$. Portanto temos que:

$$G = D - 360\,; \;\; H = G \cdot 3$$

e por meio da regra de substituição, podemos escrever:

$$H = (D - 360) \cdot 3$$

Igualmente, em relação ao caminho DECH consideremos o cálculo de E, C e H:

O preço de venda de 3 dúzias de camisas (E) é 3 vezes o preço de venda de 1 dúzia (D), ou seja, $E = D \cdot 3$; o preço de compra de 3 dúzias de camisas (C), é 3 vezes o preço de compra de 1 dúzia de camisas (360), ou seja, $C = 360 \cdot 3$; e, por fim, o lucro obtido por 3 dúzias de camisas (H) é igual a diferença do preço de venda de 3 dúzias de camisas (E) pelo preço de compra de 3 dúzias de camisas (C), ou seja, $H = E - C$.

Substituindo a primeira e a segunda na terceira, temos:

$$H = (D \cdot 3) - (360 \cdot 3)$$

Assim, considerando a igualdade e a anterior $(H = (D - 360) \cdot 3)$, obtemos $(D - 360) \cdot 3 = (D \cdot 3) - (360 \cdot 3)$, que se refere à distributividade da multiplicação em relação à subtração. Tal verificação pode ser significativa para o aluno em relação a esta propriedade, apesar de não se tratar de uma demonstração (VERGNAUD, 2009b).

A interpretação algébrica deste tipo de problema se aproxima da interpretação que desejamos fazer para os problemas que envolvem conceito de função afim. Assim, de acordo com o indicado por Vergnaud (2009b), para a análise de problemas mistos, na presente pesquisa, propomos a organização dos elementos presentes no enunciado para estudar as relações estabelecidas entre eles.

As relações presentes na situação dependem do contexto envolvido e da medida que se busca no problema. Assim, é possível também considerar as variações quanto à forma como se estabelecem essas relações em situações-problema que envolvem o conceito de função afim, considerando as variações indicadas como subclasses de problemas das estruturas aditiva e multiplicativa.

Vergnaud (2009b) não estabelece classe de situações para problemas complexos e, consequentemente, para problemas mistos, pois, de acordo com o pesquisador, "[...] não é possível elaborar uma classificação completa de problemas complexos porque o número de possibilidades aumenta de forma exponencial em relação ao número de relações elementares envolvidas" (VERGNAUD, 2009b, p. 269).

Assim, considerando a proposta de análise algébrica para problemas mistos apresentada por Vergnaud (2009b) e a análise das relações envolvidas em situações aritméticas complexas, de acordo com as relações elementares das estruturas aditiva e multiplicativa, questionamos sobre a forma como essas relações se estabelecem em situações-porblemas que envolvem o conceito de função afim.

Neste contexto, a presente pesquisa se refere a um conjunto de situações-problema de função afim identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, as quais, por meio do estudo das relações presentes na situação, estabeleceu-se categorias de problemas que envolvem o conceito de função afim.

No capítulo seguinte, apresentamos os procedimentos metodológicos trilhados no decorrer desta pesquisa.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o objetivo de categorizar situações-problema que envolvem o conceito função afim, as análises desta pesquisa foram realizadas com base na Teoria dos Campos Conceituais - particularmente, na classificação proposta por Vergnaud de situações de Estruturas Aditivas e Multiplicativas - e na proposta de análise de problemas mistos estabelecidos por Vergnaud (2009b). Nesta seção, apresentamos o percurso metodológico da pesquisa, no que diz respeito à coleta e análises das situações-problema.

Em nossos estudos, identificamos que Vergnaud (1993) aponta para a existência de interseções entre campos conceituais, principalmente quando aborda a continuidade – filiações – e rupturas entre os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, além de imbricações entre o campo conceitual das estruturas multiplicativas com a ideia de função linear, que destacamos em nossa fundamentação teórica. Esta ideia reforça um dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais que compreende que dado um conjunto de situações, ou ainda, uma única situação de um determinado campo conceitual, não pode ser analisada/estudada mediante um único conceito (VERGNAUD, 2017).

Nesse sentido, Vergnaud (2009b) afirma que problemas algébricos podem ser puramente aditivos, puramente multiplicativos ou mistos (aditivos e multiplicativos).

Diante do exposto, quanto a alguns problemas pertencentes ao campo conceitual multiplicativo corresponderem à ideia de proporção, estando estreitamente relacionado ao conceito de função linear e de nossa fundamentação na teoria dos Campos Conceituais buscamos interpretar os problemas que envolvem o conceito de função afim.

Portanto, com base nas análises das classes de situações do campo conceitual aditivo e multiplicativo, estabelecemos os seguintes objetivos para a pesquisa:

Objetivo geral:

Categorizar situações-problema relacionadas ao conceito de função afim à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

Objetivos específicos:

- Identificar diferentes tipos de situações-problema sobre função afim presentes nos Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.
- Analisar as relações estabelecidas entre os elementos envolvidos nas situações-problema em questão: relações binárias, ternárias e quaternárias[9].
- Identificar as relações estabelecidas entre as Estruturas Aditivas e Multiplicativas e as situações-problema de função afim.

Para tanto, realizamos a escolha dos livros didáticos de Matemática que apresentam em seu índice um capítulo voltado para o estudo do conceito de função afim, do qual escolheremos as situações-problema a serem classificadas na perspectiva da teoria de Vergnaud.

3.1 O Livro Didático de Matemática: uma fonte de dados para as situações-problema

Em nossa pesquisa, para a caracterização de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, consideramos o livro didático de matemática uma fonte de dados para a identificação e análise de tais elementos. Devido a familiaridade com análise de livros didáticos de matemática por parte da autora deste trabalho[10], e por entendermos que este tipo de obra se constitui de uma fonte de dados para os diferentes níveis de ensino, apreciamos este material como uma boa fonte de situações-problema que envolvem o conceito de função afim.

Pesquisas como as de Melo, Lopes e Oliveira (2017, p. 101) destacam o livro didático como uma "[...] ferramenta de orientação do trabalho pedagógico [que] estabelece um discurso direto com o professor, auxiliando em seu planejamento, com o aluno, como tutor pessoal, estando a disponibilidade de ambos na maior parte do tempo".

Quanto à escolha de livros didáticos de matemática consideramos os resultados da pesquisa de Melo, Lopes e Oliveira (2017), a qual, por meio de um questionário semiestruturado para quatro (04) professores de matemática do Ensino

[9] Trata-se da relação estabelecida entre dois (binária), três (ternária) e quatro (quaternária) elementos na situação.
[10] Como mencionado na introdução deste trabalho.

Fundamental, revelou que: a escassez de outros recursos para apoio à aprendizagem matemática coloca o livro didático como único instrumento auxiliador da prática docente; se constitui, em grande parte, a única fonte acessível a alunos da escola pública devido à vulnerabilidade, seja de ordem econômica, intelectual ou social; o planejamento das aulas é, em geral, apoiado no livro didático adotado pela escola. Porém, com menor frequência, as respostas dos professores também revelaram o uso de outros livros didáticos, internet, documentos de referências (Parâmetros Curriculares Nacionais, Bases Curriculares, entre outros); o uso do livro didático de matemática está frequentemente relacionado ao dia a dia das aulas.

Assim, compreendemos que o uso do livro didático como único auxílio em sala de aula não é a primeira opção do professor, mas está relacionado a um contexto social e econômico da escola e da comunidade, sendo a ferramenta de mais fácil acesso a professores e alunos.

A aquisição e distribuição de livros didáticos nas escolas públicas brasileiras são realizadas por intermédio do Programa Nacional do Livro e do material Didático – PNLD, vinculado ao Ministério da Educação e Cultura – MEC. Além dos livros didáticos para Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos, o programa busca garantir a chegada às escolas de obras literárias, dicionários, entre outros.

Em 2017, foram unificados o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE), que deu origem ao Programa Nacional do Livro e do Material Didático, mantendo-se a sigla PNLD. A unificação também contou com uma ampliação para além das obras didáticas e literárias, tendo a possibilidade de inserir novos materiais, como obras pedagógicas, *softwares* e jogos educacionais, correção de fluxo, materiais voltados à formação, materiais voltados à gestão escolar, entre outros[11].

A distribuição dos livros didáticos, de cada nível de ensino é realizada a cada três anos e cada obra passa por diferentes etapas de avaliação e escolha antes de chegar à sala de aula. De acordo com Santana (2016),

> [...] o percurso para que o LD [livro didático] chegue até à sala de aula, passa pela adesão das escolas que desejam participar do programa, divulgação de editais, inscrição das editoras, avaliação dos livros, confecção do guia do livro,

---

[11] Informações obtidas no site do MEC, disponível em http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld.

> escolha, pedido, aquisição, produção, análise da quantidade física, distribuição até chegar ao recebimento (SANTANA, 2016, p. 37-38).

A escolha do livro didático é realizada nas escolas após as obras serem aprovadas pelo PNLD. O corpo docente se reúne e faz a opção pela obra que melhor se aproxima do Projeto Político Pedagógico da escola ou a uma sequência elaborada pelas Secretarias de Educação (SALES *et al*, 2008).

De acordo com Sales *et al* (2008), fatores culturais também influenciam na opção feita pelos professores, como a preocupação com a transferência de alunos de uma escola para outra – que faz com que as escolhas de uma região aprovem a mesma coleção; a preocupação quanto a prestação de contas em relação ao programa da disciplina ministrada para a sociedade e família.

Melo, Lopes e Oliveira (2017) identificaram nas respostas dos professores dois principais critérios utilizados por eles na escolha dos livros didáticos, que estão relacionados aos conteúdos (incluindo disposição destes no decorrer dos capítulos e ao longo da obra) e às atividades (considerando-se a quantidade, o nível de dificuldade e a coerência com o conteúdo abordado).

Assim, percebe-se uma preocupação dos professores em escolher uma obra que apresente uma diversidade de atividades que estejam coerentes com o conteúdo e o nível de ensino e suas opções metodológicas.

Dante (1996) aponta que o livro pode oferecer ao professor problemas, atividades e exercícios e ajudá-lo na preparação de atividades extracurriculares, questões desafiadoras e elaboração de textos. Contudo, compreende que o livro didático deve ser um meio não um fim e, de acordo com o conhecimento do aluno e o contexto social em que a escola está inserida, o professor pode modificar, complementar e inserir novos problemas, atividades e exercícios àqueles do livro didático (DANTE, 1996).

Entendemos que o livro didático de matemática constitui um documento que assume o papel de guia didático no processo de ensino e aprendizagem, acatando as exigências do programa escolar, às Diretrizes oficiais dos órgãos de ensino e as tendências de ensino e aprendizagem; analisado e aprovado pelo PNLD junto ao MEC; escolhido pelo corpo docente de cada disciplina nas escolas, de acordo com contexto social e cultural das escolas, dos professores e alunos, o Projeto Político Pedagógico da escola, as crenças metodológicas dos professores, a linguagem adotada, as atividades propostas, entre outros aspectos.

Sendo assim, compreendemos que o livro didático constitui a principal fonte de referência para conteúdos, assuntos, pesquisas, conceitos, atividades e sequências didáticas para os professores em suas aulas. E, a partir dos livros didáticos, diversas pesquisas podem ser realizadas, tais como o processo de escolha do livro didático, a forma como os professores fazem uso destas obras em suas aulas, a análise da proposta metodológica adotada pelo autor, análise da abordagem de um conceito em uma determinada perspectiva, entre outras.

Para esta pesquisa não tivemos a intenção de analisar a obra como um todo, nem fazer julgamentos sobre se a obra é ou não pertinente, no que diz respeito às situações sobre função afim. Os livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio foram considerados como uma fonte de dados, para identificar as situações-problema presentes no capítulo específico sobre função afim, e categorizá-las, tomando como base as classes de situações das estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, propostas por Gérard Vergnaud.

3.2 A seleção dos livros didáticos

Como fonte de identificação de situações-problema que envolvem o conceito de função afim utilizamos livros didáticos de Matemática adotados por escolas estaduais de Ensino Fundamental e Médio, pertencentes ao Núcleo Regional de Educação – NRE de Campo Mourão – Paraná.

A escolha das obras analisadas se deu por meio de informações obtidas no *site* do Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação – FNDE[12], verificando quais as obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD nos anos de 2017 – anos finais do Ensino Fundamental, e 2018 – Ensino Médio foram adotadas na região do NRE de Campo Mourão por um período de três anos consecutivos.

Na impossibilidade de considerar todas as obras do Ensino Fundamental e Ensino Médio, aprovadas pelos PNLD 2017 e PNLD 2018, respectivamente, adotamos como critério considerar as coleções adotadas com maior frequência pelas escolas pertencentes aos municípios que integram o NRE de Campo Mourão. Essas informações foram resumidas no quadro abaixo (QUADRO 15), no qual apresentamos

[12] www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet/iniciarSistema.action

um quantitativo das escolas que adotam cada coleção de livro didático para o Ensino Fundamental e Ensino Médio no NRE de Campo Mourão.

	Coleção	Autor(es)	Editora	Quantidade de colégios que adotam
Ensino Fundamental	Convergências – Matemática	Chavante	SM	1
	Matemática – Bianchini	Bianchini	Moderna	1
	Matemática – compreensão e prática	Silveira	Moderna	7
	Praticando Matemática	Andrini, Vasconcellos	Editora do Brasil	15
	Projeto Araribá – Matemática	Garcia Gay	Moderna	4
	Projeto Teláris – Matemática	Dante	Ática	1
	Vontade de saber – Matemática	Souza, Pataro	FTD	21
Ensino Médio	Contato Matemática	Souza, Garcia	FTD	7
	Matemática – Contexto e Aplicações	Dante	Ática	6
	Matemática – Paiva	Paiva	Moderna	3
	Matemática: Ciência e Aplicações	Degenszajn, Iezzi, Almeida, Dolce, Périgo	Saraiva Educação	3
	Matemática para compreender o mundo	Smole, Diniz	Saraiva Educação	3
	Matemática: interação e tecnologia	Balestri	LEYA	17
	Quadrante Matemática	Prestes, Chavant	SM	3

Quadro 15: Quantidade de colégios que adotam coleções de livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD 2017 e pelo PNLD 2018
Fonte: A autora

De acordo com os dados apresentados no quadro 15, optamos por fazer a identificação de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim de quatro livros didáticos de matemática da Educação Básica, sendo dois do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio: *Vontade de Saber – Matemática* (SOUZA; PATARO, 2015) e *Praticando Matemática* (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015) do Ensino Fundamental; *Matemática: interação e tecnologia* (BALESTRI, 2016) e *Contato Matemática* (SOUZA; GARCIA, 2016) do Ensino Médio.

Por termos como foco situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, a análise das situações se restringiu ao capítulo específico das obras que apresentam esse conceito matemático. Assim, em cada coleção escolhida, buscamos pelo capítulo voltado à apresentação do conceito de função afim e verificamos o tratamento a este conceito está presente nos livros do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.

Desta forma, optamos por investigar as situações-problema apresentadas ao fim do capítulo voltado ao ensino de função afim destes livros, ou seja, os exercícios apresentados após a apresentação e formalização do conteúdo, propostas como tarefas para os alunos.

Além disso, consideramos para as nossas análises as tarefas que estamos denominando por situações-problema, a saber: situações que envolvem um contexto do cotidiano (VERGNAUD, 2009b), conforme os problemas considerados por Vergnaud na classificação dos problemas do campo aditivo e multiplicativo. Segundo Vergnaud (2009b), esses problemas possuem um conteúdo e um tipo de relação a ser compreendida entre as medidas apresentadas, sendo o conteúdo, por exemplo, quantidade de bolinhas de gude, valores de dinheiro, quilômetros percorridos, entre outros, e a relação, pode ser uma relação ternária de transformação – ganhar ou perder, por exemplo.

Vergnaud (2009b) considera, em suas análises de situações voltadas a estruturas aditivas e multiplicativas, situações do contexto do cotidiano da criança. Assim, para esta pesquisa estamos considerando situações cujo contexto é voltado a estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio relacionadas ao conceito de função afim, presentes nas obras analisadas.

Descrevemos a seguir um estudo piloto realizado que direcionou as análises do capítulo 4.

3.3 Um estudo piloto e o direcionamento para as análises da pesquisa

Nesta seção apresentamos um estudo inicial de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, constitui o embasamento para o estabelecimento das classes de situações descritas posteriormente.

A obra que escolhemos para a análise inicial das situações-problema foi o livro do primeiro ano do Ensino Médio da coleção *Matemática: interação e tecnologia*. Para este estudo piloto, investigamos exclusivamente as situações-problema propostas durante a introdução ao conceito de função afim, incluindo os exemplos resolvidos. Neste momento, não foram consideradas as situações propostas ao fim do capítulo, estas foram reservadas para as análises apresentadas no capítulo 4.

Assim, com base na proposta de Vergnaud (2009b) para a análise de problemas complexos[13] (que estabelece mais que um tipo de relação, ou apresenta várias medidas), como os problemas denominados por Vergnaud (2009b) de *problemas mistos*, organizamos os dados das situações em tabelas nas quais as colunas se referem à medidas de mesma natureza, podendo representar por setas as relações estabelecidas entre medidas e por letras elementos que faltam descobrir.

As representações dos esquemas relacionais foram elaboradas baseando-se nos códigos estabelecidos por Vergnaud, auxiliando na visualização do tipo de relação estabelecida entre as medidas. Por exemplo, utilizamos “flechas” para indicar a relação de transformação ou comparação entre dois elementos da situação e “chaves” para indicar composição de medidas.

As relações estabelecidas entre as medidas presentes no enunciado de cada situação-problema proposta foram identificadas e relacionadas a uma das cinco categorias de problemas do campo conceitual multiplicativo e/ou uma das seis categorias de problemas do campo conceitual aditivo. Por fim, classificamos os problemas em mistos ou não.

Ao fim das análises, almejamos criar categorias e nomenclaturas de tipos de problemas mistos que envolvem o conceito de função afim, encontrados em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio.

Apresentamos as análises prévias da pesquisa neste capítulo, utilizando informações quanto às classes de situações do campo conceitual aditivo e multiplicativo, pois, segundo Vergnaud (2009b), na análise de problemas algébricos podemos verificar desde problemas mais simples até mais complexos, sendo que estes podem ser puramente aditivos, puramente multiplicativos ou mistos (aditivos e multiplicativos).

[13] Vergnaud (2009b) denomina por problemas complexos aqueles que possuem mais de uma relação, sejam duas ou mais relações do campo conceitual aditivo ou multiplicativo, ou combinação de duas ou mais relações do campo aditivo e do campo multplicativo (problemas mistos).

Analisamos, a seguir, cinco situações identificando os elementos e as relações estabelecidas entre eles em cada situação-problema, com base em situações já categorizadas como pertencentes ao campo aditivo e multiplicativo e suas classificações[14].

A obra que adotamos para as análises utiliza o contexto de uma corrida de táxi para introduzir o conceito de função afim. Este contexto permite a escrita de uma função afim quando estabelecemos a relação entre os quilômetros percorridos e o valor em dinheiro a ser pago ao final desta e pode estar, ou não, diretamente relacionado com o cotidiano do aluno (Figura 8).

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO AFIM

Geralmente o valor cobrado pelas corridas de táxi é composto de uma parte fixa, conhecida como bandeirada, e de outra parte correspondente à quantidade de quilômetros percorridos. Supondo que em uma cidade a bandeirada custe R$ 5,00 e o quilômetro percorrido R$ 2,00, é possível escrever uma fórmula que permita calcular o valor a ser pago por uma corrida em função da quantidade de quilômetros percorridos. Para escrever essa fórmula, utilizaremos *y* (variável dependente) para representar o valor, em reais a ser pago pela corrida e *x* (variável independente) para representar a quantidade de quilômetros percorridos.

Figura 8: Problema introdutório de função afim
Fonte: Balestri (2016, p. 68)

Com base em Vergnaud (2009, p. 289), construímos a representação a seguir que permite uma análise detalhada das informações e perguntas pertinentes à situação e das relações estabelecidas entre os elementos presentes nas situações-problema.

Distância percorrida (Km)	Valor correspondente aos quilômetros percorridos	Valor da taxa fixa	Total a pagar
1 $\longrightarrow$	2		
$\boxed{X}$	$\boxed{V}$	5	$\boxed{Y}$

X Distância variável de quilômetros percorridos

[14] Os resultados desta análise foram publicados em artigo completo no Simpósio Nacional de Ensino e Aprendizagem - SEA (MIRANDA; REZENDE; NOGUEIRA, 2018) e como resultados parciais do projeto de pesquisa no XXII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - XXII EBRAPEM (MIRANDA, 2018).

V Valor correspondente a X quilômetros percorridos

Y Valor total a ser pago em uma corrida de táxi (Total = valor correspondente aos quilômetros percorridos + taxa fixa)

Nesta representação, optamos por utilizar da letra X para nos referirmos à distância de quilômetros percorridos e Y ao total a ser pago ao fim da corrida, para que a representação algébrica da relação solicitada pela situação proposta seja representada em termos de X e Y.

Analisando a representação acima, notamos que umas das perguntas que pode ser feita é "qual o total a ser pago ao percorrer $1\,Km$?". Esta pergunta pode ser resolvida realizando-se uma multiplicação ($2\,reais\ \times 1\,km$) e uma adição (Total = valor correspondente aos quilômetros percorridos + taxa fixa). Esta consideração não é suficiente quando o objetivo é representar a relação para $x\,Km$ percorridos em uma corrida de táxi, porém nos permite analisar o cálculo necessário para que se possa responder a referida pergunta.

Ainda considerando a organização proposta anteriormente, nas duas primeiras colunas, consideramos a existência de uma correspondência entre conjuntos de natureza distinta, ou seja, trata-se de uma relação quaternária, de um problema do campo multiplicativo.

Podemos escrever a relação:

Distância percorrida (Km)		Valor correspondente (R$)
1	$\longrightarrow$	2
X	$\longrightarrow$	V

De modo que uma formulação possível é que $1\,Km$ está para $X\,Km$, assim como $2\,reais$ está para $V\ reais$.

$$\frac{1}{X} = \frac{2}{V}$$

Esta representação algébrica permite uma análise dimensional:

$$\frac{1\,km}{X\,km} = \frac{2\,reais}{V\,reais}$$

Para determinar o total a ser pago por uma corrida de táxi precisamos determinar a primeira parcela de uma soma, o valor a ser pago que corresponde aos quilômetros percorridos (V). Assim, para determinar V, basta multiplicar ambos os lados da igualdade por V reais e por ($X\ km/\ 1\ Km$).

$$V\ reais = 2\ reais\ \times \frac{X\ km}{1\ km}$$

$$V\ reais = \frac{2reais\ \times X\ km}{1\ km}$$

$$V\ reais = 2X\ reais$$

A segunda e última relação que se deve considerar é a relação total a pagar, que se trata da composição de duas medidas de mesma natureza (reais), total a pagar = valor correspondente aos quilômetros percorridos + taxa fixa. Entendemos que se trata de um problema de composição de medidas do campo aditivo

$$\left.\begin{matrix}\boxed{2X}\\[1em]\boxed{5}\end{matrix}\right\}\boxed{Y}$$

que pode ser escrito por:

$$Y = 2X + 5$$

Assim, a situação-problema analisada se trata de um problema misto, pois há uma relação multiplicativa quando obtemos o valor a ser pago de acordo com os quilômetros percorridos. Neste caso, um problema de isomorfismo de medidas e uma relação aditiva, de composição, quando definimos o total a ser pago que é composto pelo valor que depende dos quilômetros percorridos mais a taxa fixa, sendo estes últimos valores em dinheiro a serem juntados.

Escrevendo esta relação na forma de uma relação funcional, temos $y = 2x + 5$ ou $f(x) = 2x + 5$, sendo que podemos identificar a relação de total pago e de dependência entre o total pago e a distância percorrida em Km.

O segundo exemplo resolvido da obra analisada, no capítulo voltado para o estudo de função afim, é dividido em duas partes, e o objetivo é trabalhar com funções crescente e decrescente. Consideremos a situação-problema apresentada abaixo (FIGURA 9) e como esta pode ser analisada.

Função crescente e função decrescente

Considere que em certa residência há uma cisterna subterrânea com capacidade para 6000 L. A água dessa cisterna é bombeada para uma caixa-d'água de 500 L a uma vazão constante de 100 L/min. Considerando a cisterna com água até sua capacidade máxima e a caixa-d'água vazia, vamos escrever duas funções:

- A função f que permite calcular a quantidade de água na caixa-d'água em função do tempo em que a bomba fica ligada.

Figura 9: Exemplo resolvido (parte 1)
Fonte: Balestri (2016, p. 75)

A função f solicitada no primeiro ponto se trata da relação quantidade de água em um tempo x. Esta relação também é uma relação quaternária, pois coloca em correspondência dois conjuntos distintos. A correspondência entre os conjuntos pode ser verificada pela chamada constante de vazão de $100\ L/min$, ou seja, podemos estabelecer a correspondência 100 litros de água em 1 minuto.

Quantidade de água (L)		Tempo (Min)
100	$\longrightarrow$	1
y	$\longrightarrow$	x

Logo podemos dizer que 100 está para y assim como 1 está para x, e escrevermos

$$\frac{100\ litros}{y\ litros} = \frac{1\ minuto}{x\ minutos}$$

$$y\ litros = \frac{100\ litros\ \times x\ minutos}{1\ minuto}$$

$$y\ litros = 100x\ litros$$

Assim, a relação correspondente à quantidade de água que entra na caixa de água é $y = 100x$. Também podemos interpretar a quantidade de água que entra na caixa d'água como a quantidade de água que sai da cisterna, pois há uma equivalência entre as relações "sair água da cisterna" e "entrar água na caixa", e utilizando esta interpretação podemos interpretar a segunda parte do problema da cisterna apresentado.

Na segunda parte deste exemplo (FIGURA 10) percebemos que a quantidade de água da cisterna sofre uma transformação, pois a água da cisterna está sendo retirada.

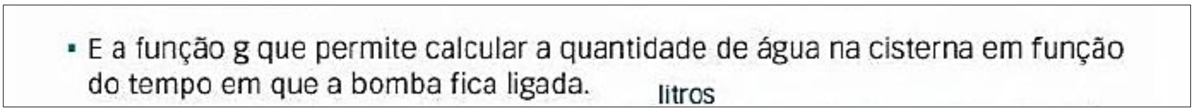
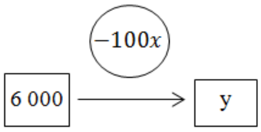

- E a função g que permite calcular a quantidade de água na cisterna em função do tempo em que a bomba fica ligada. litros

Figura 10: Exemplo resolvido (parte 2)
Fonte: Balestri (2016, p. 75)

Neste caso podemos colocar a relação na forma estado-inicial, transformação, estado-final. Sendo o estado-inicial a quantidade inicial de água na cisterna e o estado-final a quantidade de água restante na cisterna. Logo, a transformação se trata da quantidade de água que sai da cisterna (e esta última já foi calculada na primeira parte, sendo necessário considerar a relação como equivalente à água que entra na caixa).

Consideramos, neste caso, que a transformação é um número relativo negativo, pois a relação estabelecida é “a água sair da cisterna”. Assim, esta situação-problema se constitui, primeiramente, de um problema multiplicativo, para determinação da quantidade de água que sai da cisterna (ou que entra na caixa) - verificada na primeira parte da situação – e, em um segundo momento, um problema aditivo, do tipo transformação, que indicamos pelo esquema sagital que segue.



Escrevemos a equação $y = 6\,000 - 100x$, ou como solicitado pelo exercício, $g(x) = -100x + 6\,000$.

Nesta situação-problema também podemos identificar um problema misto, que pode ser tratado como uma relação aditiva em que há um estado-inicial, um estado-final e uma transformação negativa. Ou seja, uma situação de transformação. A transformação, neste caso, é resultado de uma relação multiplicativa que está relacionada à taxa de vazão da água, se tratando de um problema multiplicativo de isomorfismo de medida.

O terceiro exemplo analisado (figura 11) se refere a um reservatório.

Atividades resolvidas

Professor(a): Essa atividade resolvida aborda o conteúdo de função afim e o esboço de seu gráfico.

R4. Uma bomba-d'água retira água de um reservatório que contém 20 000 litros a uma vazão constante de 500 L/h.

a) Após uma hora, qual será o volume de água no reservatório? E após 5 horas?

b) Escreva a lei de formação da função afim que permite calcular o volume de água V no instante t.

c) Após quanto tempo o reservatório estará vazio?

d) Esboce o gráfico que representa essa situação.

Figura 11: Exemplo resolvido – Reservatório
Fonte: Balestri (2016, p.78)

A primeira pergunta diz respeito a um problema com medidas numéricas do campo multiplicativo, pois relaciona 4 elementos - dois a dois - colocados em correspondência. O segundo item solicita a escrita de uma relação para a passagem de t minutos. Este caso se assemelha ao problema resolvido anteriormente, até mesmo pelo contexto (água que sai de um lugar para outro). Este contexto é modificado pelo uso da palavra reservatório ao invés de cisterna. Assim, o aluno deve conhecer a equivalência entre as palavras para que possa tomar a situação-problema da mesma forma que a proposta anterior.

Podemos observar também que, como na situação-problema analisada anteriormente, ambas questionam o estado-final de uma transformação negativa, pois se interroga a quantidade de água ainda reservada após a saída de uma determinada quantidade de água. Portanto, podemos dizer que estas duas situações pertencem a uma mesma classe de problemas mistos. Ressaltamos que para Vergnaud é importante a diversidade de situações para a aprendizagem do estudante. No entanto, o autor da obra optou por apresentar duas situações semelhantes, do ponto de vista da teoria dos Campos Conceituais, uma seguida da outra.

A próxima situação-problema analisada (FIGURA 12) é um problema introdutório, do caso específico de função linear. Este é um problema puramente multiplicativo, sinalizado por Vergnaud (2009b) por ter relação, por exemplo, com os conceitos de função linear e proporcionalidade. O problema aborda uma relação quaternária e, portanto, da relação de quatro medidas, duas a duas, de mesma natureza.

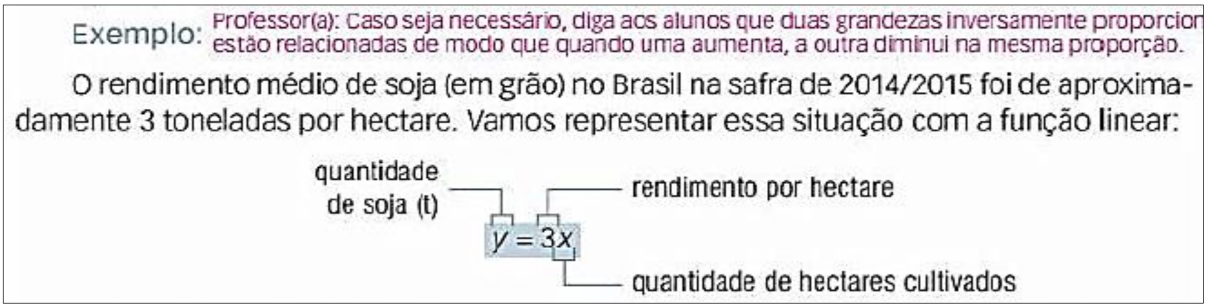


Figura 12: Problema introdutório de função linear
Fonte: Balestri (2016, p. 77)

A expressão "3 toneladas por hectare" coloca em relação os conjuntos toneladas e hectares. Assim, podemos dizer que 3 está para y assim como 1 está para x, como apresentado do esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \text{Toneladas} & & \text{Hectare} \\ 3 & \longrightarrow & 1 \\ y & \longrightarrow & x \end{array}$$

logo,

$$\frac{3\ toneladas}{y\ toneladas} = \frac{1\ hectares}{x\ hectares}$$

$$y\ toneladas = \frac{3\ toneladas\ \times x\ hectares}{1\ hectares}$$

$$y\ toneladas = 3x\ toneladas$$

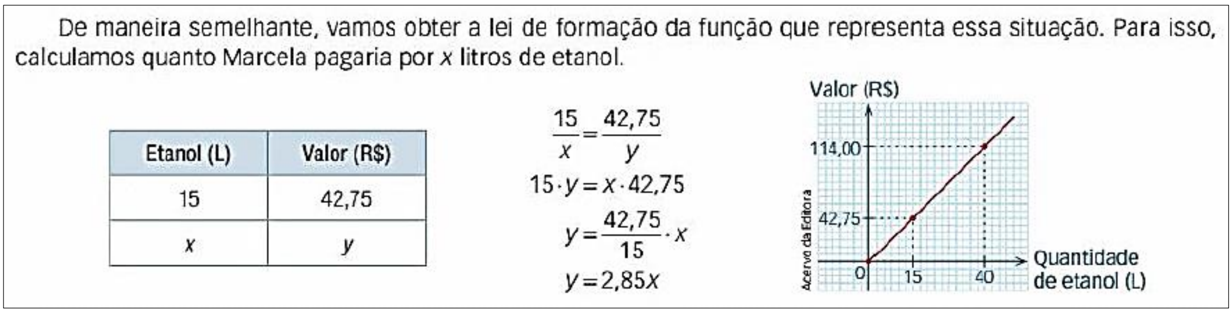
$$y = 3x$$

O último exemplo resolvido que o autor da obra apresenta está relacionado ao conceito de função linear. A situação-problema proposta é: "Marcela abasteceu seu veículo com $15\ l$ de etanol, e pagou R$ 42,75 por esse combustível. Quanto ela pagaria se tivesse abastecido com $40\ l$ de etanol?" (BALESTRI, 2016, p. 80). Esta situação é proposta como um problema somente multiplicativo.

Podemos identificar que na situação-problema é possível identificar uma relação quaternária, que coloca em relação quatro elementos, dois a dois, de mesma natureza (isomorfismo de medidas), litros de etanol e valor pago. Para esta situação podemos dizer que 15 litros de etanol estão para 40 litros de etanol, assim como 42,75 reais estão para x reais.

Segundo Vergnaud (2009b), este tipo de problema é considerado complexo, pois "[...] nenhuma das quatro quantidades é a unidade e [...] a regra de três a que se chega, nesse caso, é uma regra de três não deturpada (denominador diferente de 1)" (VERGANUD, 2009b, p. 246).

Em seguida, o autor do livro didático propõe como sequência do problema (Figura 13):


De maneira semelhante, vamos obter a lei de formação da função que representa essa situação. Para isso, calculamos quanto Marcela pagaria por x litros de etanol.

Etanol (L)	Valor (R$)
15	42,75
x	y

$$\frac{15}{x}=\frac{42,75}{y}$$
$$15\cdot y = x\cdot 42,75$$
$$y=\frac{42,75}{15}\cdot x$$
$$y=2,85x$$

Figura 13: Exemplo resolvido – Função linear
Fonte: Balestri (2016, p. 80)

Este problema pode ser resolvido de forma análoga ao problema introdutório à função linear (figura 12), e nos permite escrever o esquema sagital a seguir.

$$\begin{array}{ccc} \text{Etanol } (l) & & \text{Valor (R\$)} \\ 15 & \longrightarrow & 42,75 \\ x & \longrightarrow & y \end{array}$$

Assim como a igualdade:

$$\frac{15}{x}=\frac{42,75}{y}$$

Segundo Vergnaud (2009b), uma forma de analisar situações-problema do tipo multiplicativo em que não há correspondência com a unidade, é realizar uma análise vertical que permite passar de uma linha para outra, que se trata de multiplicar ou dividir por um operador-escalar (sem dimensão), para se obter a unidade.

Uma representação para este cálculo relacional pode ser dada por:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Etanol } (l) & & \text{Valor (R\$)} & & \\ \div 15 & \curvearrowleft & 1 & \longrightarrow & \text{v} & \curvearrowright & \div 15 \\ & & 15 & \longrightarrow & 42,75 & & \\ & & x & \longrightarrow & y & & \end{array}$$

Logo podemos afirmar que:

$$\begin{array}{ccc} \text{Etanol } (l) & & \text{Valor (R\$)} \\ 1 & \longrightarrow & 2,85 \\ 15 & \longrightarrow & 42,75 \\ x & \longrightarrow & y \end{array}$$

Considerando a representação acima e o conceito de proporcionalidade pode-se escrever

$$\frac{1}{2,85} = \frac{15}{42,75} = \frac{x}{y}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2,85} = \frac{x}{y}$$

Esta situação-problema é considerada mais complexa não somente por não apresentar a equivalência com a unidade, mas o fato de apresentar números decimais também modifica a dificuldade do sujeito em resolvê-la.

As análises das situações-problema foram realizadas com base na análise do problema misto proposto por Vergnaud (2009b), organizando as quantidades por meio de uma tabela com a intenção de identificar as relações estabelecidas entre as medidas dos problemas e identificando a categoria em que a(s) relação(ões) estabelecida(s) que coincide(am) dentre as categorias de situações relacionadas às Estruturas Aditivas e às Estruturas Multiplicativas.

Com base nesta análise inicial realizada para o estudo piloto, nos propusemos a identificar outras situações presentes nos Livros Didáticos de Matemática e criar categorias e nomenclaturas de tipos de problemas que envolvem o conceito de função afim, possíveis de serem encontrados em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

3.4 Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: considerações na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais

Com as análises do estudo piloto deste trabalho é possível delinear algumas considerações preliminares. Identificamos que as situações-problema relacionadas ao conceito de função afim são passíveis de serem analisadas segundo problemas mistos (aditivo e multiplicativo) e problemas estritamente multiplicativos.

Durante as análises prévias identificamos que aquelas situações-problema que se tratam de uma função linear, ou seja, os casos em que o coeficiente linear b (da função afim) é igual a 0, como os exemplos nas figuras 9, 12 e 13, são puramente do campo conceitual multiplicativo, sendo classificadas, segundo Vergnaud (2009a; 2009b), como uma situação do tipo isomorfismo de medidas.

As demais situações representadas nas figuras 8, 10 e 11 foram consideradas em nossa pesquisa como sendo problemas mistos, pois apresentam aspectos tanto do campo conceitual aditivo, quanto multiplicativo. Consideramos que estas situações-problema pertencem a classes de situações diferentes, pois um deles (figura 8) é composto por um isomorfismo de medidas (campo multiplicativo) e uma composição de medida (campo aditivo). Já os outros dois (figuras 10 e 11) são compostos por um isomorfismo de medida (campo multiplicativo) e uma transformação de medidas, uma relação estado-transformação-estado (campo aditivo).

Desta forma, consideramos pertinente o estudo das relações do campo aditivo, do campo multiplicativo e problemas mistos, no contexto de situações relacionadas ao conceito de função afim.

3.5 Considerações para as análises

Diante das análises realizadas no estudo piloto de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, idenficamos que estas apresentam relações entre as medidas classificadas por Vergnaud para as situações pertencentes ao campo conceitual aditivo e ao campo conceitual multiplicativo. Além disto, também podem possuir relações tanto do campo conceitual aditivo quanto do campo conceitual multiplicativo, se caracterizando como um problema misto.

Estabelecemos como hipótese que as situações-problema relacionadas ao conceito de função afim podem ser classificadas de acordo com as relações entre medidas estudadas na teoria dos Campos Conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Tal hipótese foi se confirmando no decorrer do estudo piloto.

No estudo piloto desta pesquisa identificou-se situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, cujas relações estabelecidas entre os elementos presentes no enunciado da situação estão relacionadas ao campo conceitual multiplicativo e outras que se apresentam como um problema misto, ou seja, possuem relações indentificadas tanto no campo aditivo quanto no campo multiplicativo.

As situações que apresentam uma relação do campo concetual multiplicativo, resultam em situações em que a expressão analítica se refere à função linear e, consequentemente, à função afim.

Desta forma, considerando a obtenção da função afim $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, podemos estabelecer a hipótese que as relações estabelecidas, em determinada situação-problema, podem ser somente do campo multiplicativo. Portanto, para as análises consideraremos a ocorrência de qualquer uma das relações pertencentes ao campo conceitual multiplicativo, no caso da ocorrência da função linear, de acordo com a variável a ser isolada (QUADRO 16).

Categorias referentes às estruturas multiplicativas
Isomorfismo de medidas ou proporção simples
Comparação multiplicativa
Produto de medidas ou produto cartesiano
Função bilinear
Proporção múltipla

Quadro 16: Categorias de problemas multiplicativos possíveis para o caso das situações- problemas que envolvem o conceito de função afim
Fonte: a autora

Consideramos que as relações estabelecidas do campo conceitual aditivo estejam relacionadas ao campo conceitual da função afim, uma vez que, em nosso estudo piloto, ao considerarmos os termos ax e b da expressão analítica da função afim a relação estabelecida, explicitada a seguir, pertence ao campo aditivo. Entendemos que, no decorrer desta pesquisa, podemos nos deparar com situações cujas relações presentes no enunciado estejam relacionadas estritamente ao campo conceitual aditivo, portanto estabelecemos as seguintes classes de situações-problema que envolvem o conceito de função afim (QUADRO 17):

Categorias referentes às estruturas aditivas
Composição de medidas
Transformação de medidas
Comparação aditiva
Composição de transformações
Transformação de relações
Composição de relações

Quadro 17: Categorias de problemas aditivos possíveis para o caso das situações- problemas que envolvem o conceito de função afim
Fonte: a autora

Ainda considerando a obtenção da forma analítica da função afim $ax + b$, o estudo piloto indicou a ocorrência de situações mistas, cujas relações estabelecidas entre os elementos no enunciado da situação consistem em possuir, pelo menos uma relação pertencente ao campo conceitual multiplicativo e, ao menos, uma ao campo conceitual aditivo.

Portanto, no que diz respeito às situações mistas, considerando todas as seis categorias de situações pertencentes ao campo aditivo e às cinco pertencentes ao campo conceitual multiplicativo, estabelecemos as categorias de situações para problemas mistos, do quadro 18, que utilizaremos como categorias prévias para a verificação de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim (QUADRO 18).

Para a composição destas categorias foram considerados os tipos de problemas das estruturas multiplicativas combinados com os tipos de problemas das estruturas aditivas. Por exemplo, podemos considerar uma categoria de problemas mistos formado por uma relação de proporção simples, do campo multiplicativo, e por uma relação de composição de medidas, do campo aditivo.

Campo Multiplicativo	Campo Aditivo
Isomorfismo de medidas ou proporção simples	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Comparação Multiplicativa	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Produto de medidas ou produto cartesiano	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações
Função bilinear	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações

Proporção multiplicativa	Composição de medidas
	Transformação de medidas
	Comparação de medidas
	Composição de transformações
	Transformação de relações
	Composição de relações

Quadro 18: Classe de problemas mistos possíveis para o caso das situações-problema que envolvem o conceito de função afim
Fonte: a autora

A combinação dos cinco tipos de situações do campo multiplicativo com cada um dos seis tipos relacionados ao campo aditivo resulta em um total de 30 (trinta) categorias de situações-problema mistos, que entendemos que possam, ou não, se apresentar em situações-problema relacionadas ao conceito de função afim presentes em livros didáticos de matemática.

No que diz respeito às categorias de problemas mistos, Vegnaud (2009b) não faz referência à classicação destes, podendo haver em uma mesma situação mais de uma relação aditiva e/ou mais de uma relação multiplicativa. Portanto, estamos nos baseando nos resultados referentes ao estudo piloto para a constituição de categorias prévias, podendo as situações-problema identificadas nos livros didáticos não se relacionarem a todas as possibilidades, assim como, podem extrapolar as categorias aqui indicadas.

Entendemos, assim, que para atingirmos o objetivo proposto de categorizar situações-problema que envolvem o conceito de função afim, na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, devemos, ao analisar os dados, as situações-problema propostas no livro didático, identificar pelo menos quatro aspectos:

1. Identificar as medidas e sua natureza, presentes no enunciado de situações-problema de função afim.
2. Identificar as relações (binária, ternária, quaternária) existentes entre as medidas do enunciado.
3. Identificar, se possível, a(s) relação(ões) estabelecida(s) entre as medidas de acordo com as categorias de situações das Estruturas Aditivas e/ou Estruturas Multiplicativas, conhecendo-se o esquema relacional que representa cada tipo de relação.
4. Identificar o tipo de problema, ou seja, um problema misto, puramente aditivo ou puramente multiplicativo.

Por intermédio destas considerações, identificamos a qual categoria de situações-problema, estabelecida anteriormente (QUADRO 18), sobre função afim cada situação-problema pertence, contabilizando-a em sua respectiva categoria.

Nesta etapa, identificamos as possíveis variações de situações-problema presentes nas situações constantes do livro didático, de acordo com as ideias estabelecidas por Vergnaud. Caso estas variações estejam relacionadas ao tipo de relação estabelecida (em uma relação de transformação aditiva, por exemplo, pode-se buscar pelo estado inicial, pelo estado final, ou ainda pela transformação), considerando as subclasses de situações que Vergnaud relaciona às estruturas aditivas e às estruturas multiplicativas; ou estejam elas relacionadas à forma como os dados são apresentados como, por exemplo, números na representação decimal ou números com muitos algarismos (VERGNAUD, 2009b).

Estamos considerando que, de acordo com Vergnaud (2009b), as principais categorias de situações elencadas, pertencentes às estruturas aditivas e multiplicativas, são baseadas nas relações estabelecidas entre as medidas apresentadas no enunciado da situação. Contudo, Vergnaud (2009b, p. 212) menciona que "[...] a diversidade e a dificuldade desigual dos problemas [das Estruturas Aditivas] não se devem apenas ao fato de pertencerem eles a uma ou a outra das seis classes [...] definidas. Outros fatores também ali intervêm". Sendo esses fatores: a maior ou menor facilidade do cálculo numérico necessário (presença de números inteiros, números decimais, números compostos por vários algarismos, etc.); a ordem e a apresentação das informações (ordem temporal, ordem inversa, em desordem, informações inúteis, ausência de informações necessárias); o tipo de conteúdo e de relação focalizada (VERGNAUD, 2009b).

Por fim, apresentamos as categorias de situações-problema, relacionadas ao conceito de função afim que identificamos em nossa pesquisa, utilizando como fonte os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Médio, analisadas na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais do teórico Vergnaud.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS PARA ESTA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos as análises no que se refere às categorias de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, identificadas em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, de acordo com as classes de problemas mistos pré-estabelecidas (QUADRO 18) com base nas estruturas aditivas e nas estruturas multiplicativas da teoria dos Campos Conceituais.

Conforme explicitado no capítulo anterior, as situações-problema identificadas são aquelas que possuem um contexto envolvido, e que, segundo a teoria adotada, são passíveis de serem analisadas de acordo com as relações estabelecidas entre os elementos (medidas) presentes na situação.

Desta forma, foram identificadas e analisadas um total de 89 situações-problema que envolvem o conceito de função afim, sendo que 40 são de livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e 49 são de livros didáticos de matemática do 1º ano do Ensino Médio.

Para cada situação-problema foram analisadas as relações estabelecidas entre as medidas presentes no enunciado, identificando-as de acordo com as relações do campo multiplicativo ou do campo aditivo e, a partir disto, classificou-se cada uma como um problema misto ou não. Por fim, para a classificação das situações-problema, cada situação foi identificada de acordo com as categorias estabelecidas, conforme pontuado no capítulo anterior.

Para cada uma das categorias identificadas envolvendo o conceito de função afim, apresentamos um exemplo de situação-problema que caracteriza a categoria em questão, discorrendo sobre a forma que as relações entre medidas são estabelecidas nessas situações. Também buscamos evidenciar as variações de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim de cada categoria, levando em consideração variações quanto às relações estabelecidas e à forma de apresentação das medidas presentes nas situações-problema dos livros didáticos que, de acordo com Vergnaud (2009b), estão relacionadas à diversidade e dificuldade das situações.

Este capítulo foi organizado de forma que a apresentação de cada categoria, juntamente com sua análise, seja seguida das possíveis variações identificadas na categoria apresentada de acordo com as situações-problema presentes nos livros didáticos de matemática. Por fim, propomos um quadro, com objetivo de resumir as categorias e suas variações identificadas de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, presentes nas obras analisadas.

4.1 Isomorfismo de medidas ou proporção simples

As situações-problema que classificamos como isomorfismo de medidas, ou proporção simples, consistem em 31 situações, sendo eue foram encontradas 14 nos livros do Ensino Fundamental e 17 nos livros do Ensino Médio. Estas situações estão relacionadas à função linear – caso específico da função afim – e se referem à forma analítica
$y = f(x) = a \cdot x$, mais especificamente, para esta classe de situações-problema, temos a forma $y = ax$ com a real e $a > 0$.

De acordo com a fundamentação teórica adotada para esta pesquisa, estas situações se referem a uma relação quaternária de proporcionalidade em que, duas a duas, as medidas são de mesma natureza, conforme exemplo da situação-problema a seguir (FIGURA 14):

5. O gafanhoto-do-deserto é um inseto capaz de comer cerca de 1,5 grama de folhas por dia, um número aparentemente pequeno, mas se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação alcança grandes proporções.

Fonte de pesquisa: ANIMAIS do deserto II. Enciclopédia da vida selvagem Larousse. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

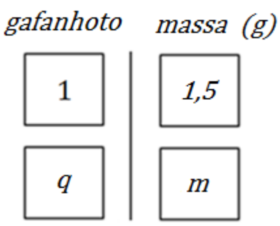
gafanhoto-do-deserto

a) Escreva uma função afim que relacione a quantidade *q* de gafanhotos com a massa *m*, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. m(q) = 1,5q

b) Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia? 75 t

Figura 14: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo proporção simples – um para muitos
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 77)

A situação solicita uma função afim que associe a massa (m) de folhas consumida por dia em relação à quantidade (q) de gafanhotos. Esta função denota uma relação de proporcionalidade, pois se dobrarmos a quantidade de gafanhotos, a quantidade de massa consumida por dia também dobrará. A situação-problema considerada neste exemplo pode ser representada e analisada por meio do seguinte esquema sagital:



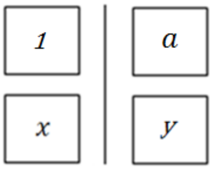
Esta estrutura, de acordo com a variável a ser isolada, é do tipo *Multiplicação - um para muitos,* de acordo com as subclasses de situações do tipo proporção simples estabelecidas na teoria dos Campos Conceituais. Ela evidencia a taxa de variação da função, pois a cada 1 unidade acrescentada na variável independente (q) acarreta, neste caso, um acréscimo de 1,5 unidades na variável dependente (m). De acordo com a situação analisada, é consumida uma massa de 1,5 gramas de folha por gafanhoto. Logo, a massa consumida por q gafanhotos é de $1{,}5 \cdot q$, ou seja, $m = 1{,}5 \cdot q$.

A expressão algébrica também pode ser obtida por meio da relação de proporcionalidade, representada pelo esquema relacional anterior, escrevendo-se:

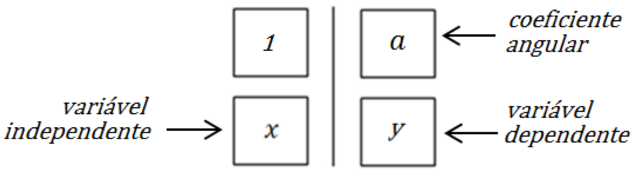
$$\frac{1}{q} = \frac{1{,}5}{m}$$

$$m = 1{,}5 \cdot q$$

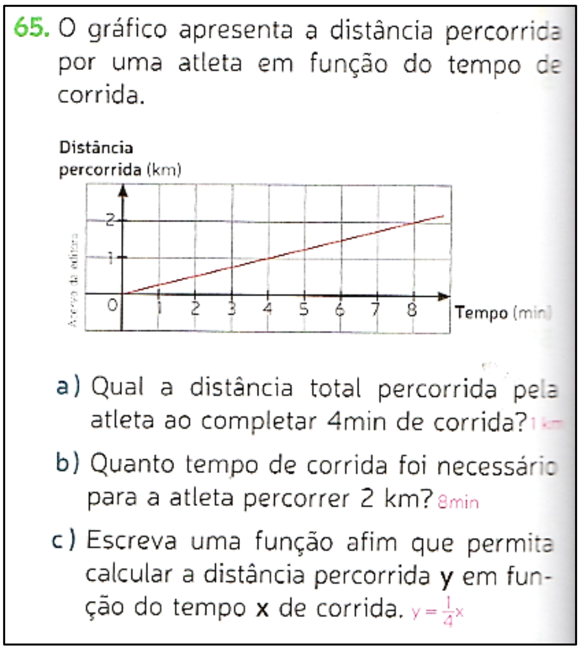
Nesta pesquisa, a categoria de problemas multiplicativos de proporção múltipla identificada, para a categoria de situações-problema de função afim, foi do tipo *multiplicação – um para muitos*, que podem ser interpretados pelo esquema relacional a seguir, se consideramos a relação quaternária das medidas: 1 está para a, assim como x está para y.



Algebricamente, escreve-se $\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$, ou ainda $y = a \cdot x$, sendo que a medida a assume a posição de coeficiente angular da função



Contudo, não necessariamente este tipo de relação quaternária é apresentado de forma que a variável independente assume o valor unitário (FIGURA 14 - anterior), ou seja, tem-se a correspondência $(1, a)$, o caso em que a proporção simples assume o tipo *um para muitos*. Neste caso, é dado um ponto qualquer, ou seja, a correspondência de dois valores que obedecem a uma relação de proporção, do tipo proporção simples – *quarta proporcional,* de acordo com a variável a ser isolada, como no exemplo a seguir (FIGURA 15):


65. O gráfico apresenta a distância percorrida por uma atleta em função do tempo de corrida.

a) Qual a distância total percorrida pela atleta ao completar 4min de corrida? 1 km

b) Quanto tempo de corrida foi necessário para a atleta percorrer 2 km? 8min

c) Escreva uma função afim que permita calcular a distância percorrida **y** em função do tempo **x** de corrida. $y = \frac{1}{4}x$

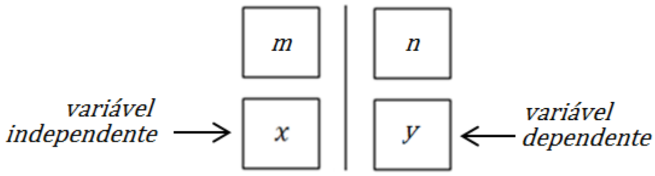
Figura 15: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo proporção simples – quarta proporcional
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 106)

No gráfico desta situação, dois pontos são destacados pela interseção da malha com o gráfico da função: $(4, 1)$ e $(8, 2)$ e percebe-se que a distância percorrida se manteve constante com o passar do tempo. Tem-se que a cada 4 minutos o atleta percorre $1\ km$, logo em um período x de tempo o atleta percorre y quilômetros.

$tempo$ (min)	$distância$ (km)
4	1
x	y

Algebricamente, tem-se $4 \cdot y = 1 \cdot x$, ou seja, $y = \frac{1}{4}x$ ou ainda, $y = 0{,}25 \cdot x$. Neste caso, a razão de proporção não é um número inteiro, o que pode ser um fator complicador para o estudante ao resolver o problema. Outra especificidade deste problema diz respeito à necessidade de interpretação gráfica, que também pode ser outro fator relacionado ao nível de dificuldade dos problemas, fato que será discutido no decorrer do texto.

As situações-problema classificadas como problemas de proporção simples do tipo *quarta proporcional* podem ser interpretadas pelo seguinte esquema relacional, atribuindo às medidas, a variável depende e independente, de acordo com as situações identificadas nos livros didáticos:



Neste caso, quando se escreve a relação isolando-se a variável y, temos a classe de situações multiplicativa de proporção simples, o caso da *quarta proporcional,* que na forma algébrica é representada por:

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y}$$

$$y \cdot m = n \cdot x$$

logo

$$y = \frac{n}{m} \cdot x$$

Neste caso, o coeficiente angular a da função é dado pela razão de proporção $a = \frac{n}{m}$, sendo m e n reais e maiores que zero.

Na classe de situações multiplicativas de proporção simples, de função afim, identificamos duas variações na forma em que as situações são apresentadas em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio: como o caso da *Multiplicação – um para muitos* e o caso *quarta proporcional* para funções afim do tipo $y = a \cdot x$, $a > 0$.

4.1.1 Diversidade dos problemas no caso da proporção simples

Além das dificuldades já apontadas por Vergnaud (2009b), relacionadas à natureza dos números e as suas operações (números naturais, números inteiros, números na representação decimal ou na representação fracionária) e da forma como se estabelecem as relações entre as medidas nas situações-problema, identificamos alguns fatores que podem intervir no fato das situações serem diferentes entre si.

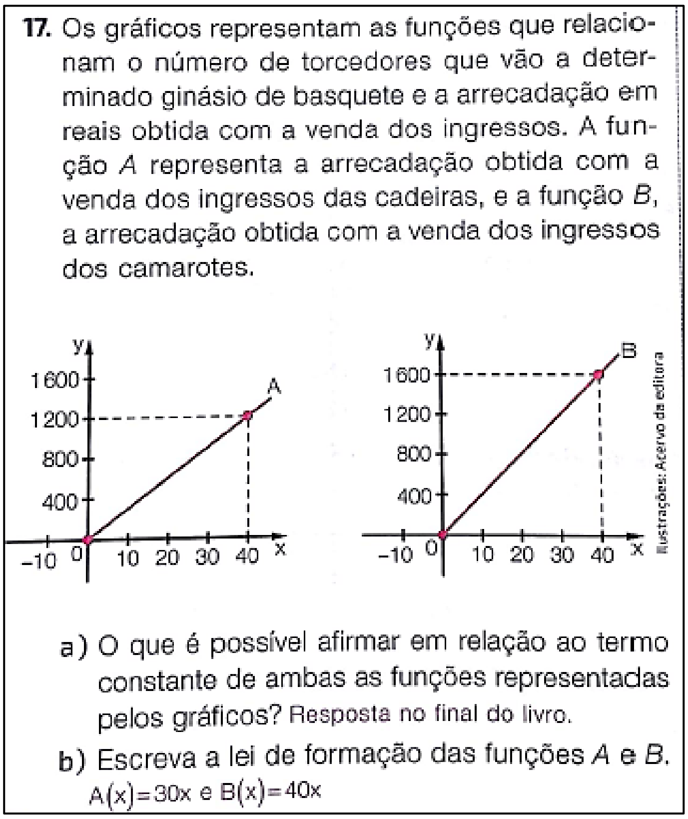
Estamos assumindo, decorrente das análises, que para esta classe de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, a relação de proporção simples estabelecida entre os elementos das situações identificadas, nos livros didáticos, é do tipo *multiplicação – um para muitos* e do tipo *quarta proporcional* (QUADRO 19).

Proporção Simples	
Proporção simples – *um para muitos*	Proporção simples – *quarta proporcional*
17	14

Quadro 19: Subclasses de problemas da categoria *proporção simples*
Fonte: a autora

Contudo, as medidas presentes nos enunciados das situações são apresentadas de diferentes formas, como por exemplo, por meio da representação gráfica.

Dentre as situações que classificamos como proporção simples, sete (07) apresentam em seu enunciado as informações dos elementos presentes da situação e a forma como se relacionam em um gráfico, o qual representa a situação a ser resolvida, como pode ser identificado na situação apresentada a seguir (FIGURA 16):



17. Os gráficos representam as funções que relacionam o número de torcedores que vão a determinado ginásio de basquete e a arrecadação em reais obtida com a venda dos ingressos. A função *A* representa a arrecadação obtida com a venda dos ingressos das cadeiras, e a função *B*, a arrecadação obtida com a venda dos ingressos dos camarotes.

a) O que é possível afirmar em relação ao termo constante de ambas as funções representadas pelos gráficos? Resposta no final do livro.

b) Escreva a lei de formação das funções *A* e *B*.
$A(x) = 30x$ e $B(x) = 40x$

Figura 16: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples – dados em gráfico
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 84)

Neste exemplo verificamos que as medidas referentes às situações estão apresentadas no gráfico. Assim, para resolver este tipo de situação, basta que a relação entre medidas seja reconhecida na representação gráfica.

Neste caso, as situações são caracterizadas como um caso de proporção simples – *quarta proporcional*, pois os pontos apresentados não possuem a abscissa igual a 1, ou seja, não apresentam o valor corresponde de y para $x = 1$.

Outra forma de apresentação dos dados que pode modificar o nível de dificuldade da situação-problema é a apresentação dos dados em uma tabela, como no exemplo apresentado na figura 17, seguinte:

12. Observe a tabela e responda.

Quantidade de refrigerantes	Preço a pagar (R$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
5	12,00
6	14,40

a) Qual é o preço a pagar numa compra de 3 refrigerantes? R$ 7,20

b) Quantos refrigerantes podem ser comprados com R$ 9,60? 4 refrigerantes

está em função

c) O preço a pagar depende do número de refrigerantes comprados? Sim.

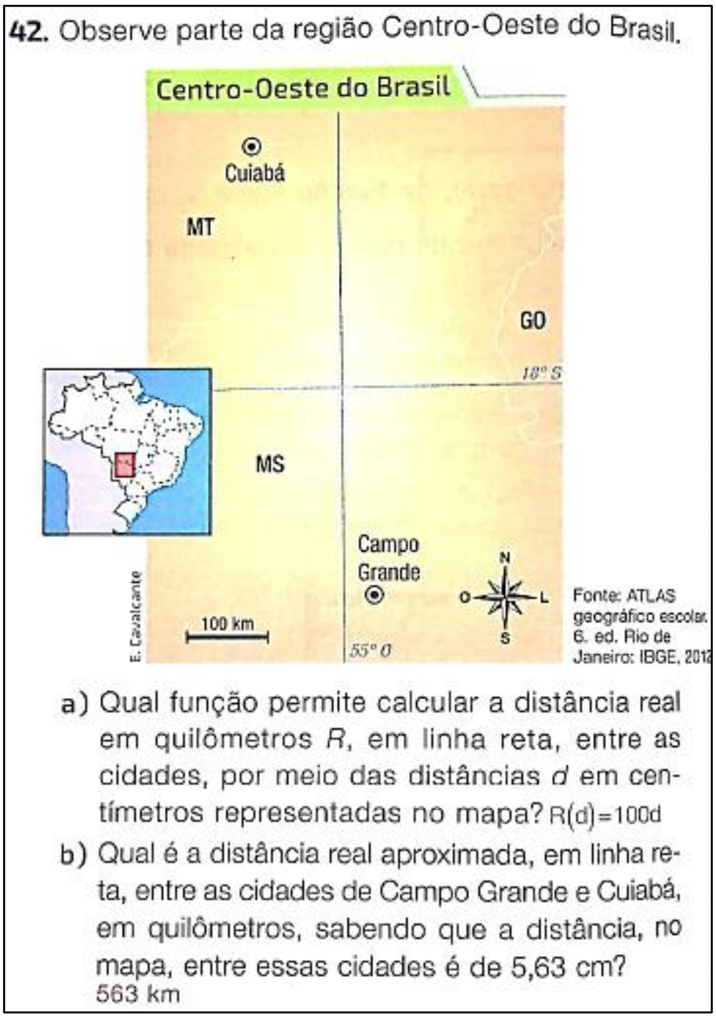
d) Qual é o preço y a pagar numa compra de x refrigerantes? $y = 2{,}40x$

Figura 17: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples – dados em tabela
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 106)

Neste exemplo, a leitura dos dados e a interpretação da situação ocorrem por meio da tabela, na qual é preciso reconhecer a grandeza das medidas, a correspondência entre as medidas e a relação entre elas e ao contexto relacionado, que, neste caso, se trata da compra de refrigerantes. Nas análises, foram identificadas cinco (05) situações-problema que apresentam dados em tabelas, com a presença de um texto introdutório ou não.

Neste caso, as situações identificadas foram do tipo *multiplicação – um para muitos* ou do tipo *quarta proporcional*, dependendo dos valores apresentados em tabela e ainda dos valores que podem ser considerados na situação, como, por exemplo, no caso da situação anterior (FIGURA 17). Nela, pode-se considerar a correspondência de 1 e $2{,}40$ ou, ainda, considerar a correspondência de 2 e $4{,}80$ para calcular a proporção e obter a razão de proporção.

Outro fator identificado em situações de proporção simples, diz respeito ao uso de escalas, em mapas ou em plantas de casa. Identificamos 4 situações nas quais a leitura de escalas é necessária para a interpretação da situação-problema (FIGURA 18).


42. Observe parte da região Centro-Oeste do Brasil.

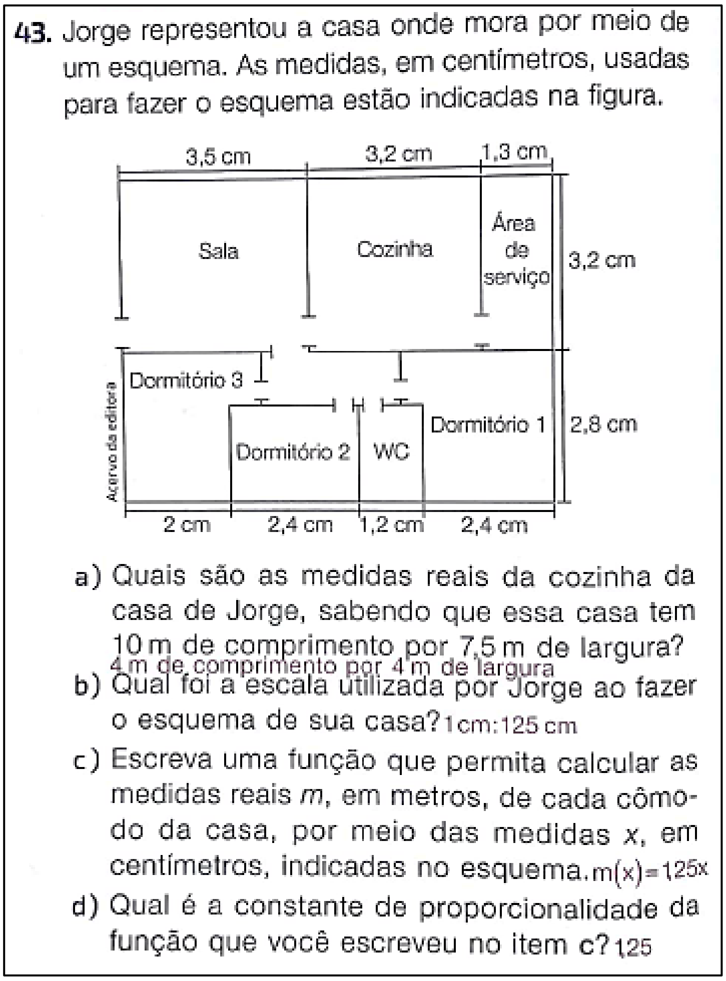
a) Qual função permite calcular a distância real em quilômetros R, em linha reta, entre as cidades, por meio das distâncias d em centímetros representadas no mapa? R(d) = 100d

b) Qual é a distância real aproximada, em linha reta, entre as cidades de Campo Grande e Cuiabá, em quilômetros, sabendo que a distância, no mapa, entre essas cidades é de 5,63 cm? 563 km

Figura 18: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples – escala
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 94)

Consideram-se que a presença do mapa na situação pode ser um fator modificador do nível de dificuldade, pois a interpretação da relação entre as medidas nem sempre é apresentada de forma explícita no texto. Como no exemplo destacado (FIGURA 18), é necessário compreender que a escala indica a relação que $1cm$ no mapa é equivalente a 100 km da distância real, exigindo um conhecimento acerca da leitura de escalas de mapas.

A relação de proporção simples, neste caso, pode ser do tipo *multiplicação – um para muitos* ou do tipo *quarta proporcional,* uma vez que, diferente do exemplo considerado (FIGURA 18) a situação pode apresentar, por exemplo, a informação que $8\ cm$ na figura é equivalente a $10\ m$ no real como na situação a seguir (FIGURA 19):



43. Jorge representou a casa onde mora por meio de um esquema. As medidas, em centímetros, usadas para fazer o esquema estão indicadas na figura.

a) Quais são as medidas reais da cozinha da casa de Jorge, sabendo que essa casa tem 10 m de comprimento por 7,5 m de largura? 4 m de comprimento por 4 m de largura

b) Qual foi a escala utilizada por Jorge ao fazer o esquema de sua casa? 1 cm:125 cm

c) Escreva uma função que permita calcular as medidas reais *m*, em metros, de cada cômodo da casa, por meio das medidas *x*, em centímetros, indicadas no esquema. m(x)=1,25x

d) Qual é a constante de proporcionalidade da função que você escreveu no item **c**? 1,25

Figura 19: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples – escala da casa
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 94)

Neste caso, a relação de proporção da escala é interpretada a partir do enunciado juntamente com os dados apresentados na figura 19. Desta forma, o comprimento da cozinha na figura pode ser obtido pela composição das medidas $3{,}5\ cm + 3{,}2\ cm + 1{,}3\ cm$ ou $2\ cm + 2{,}4\ cm + 1{,}2\ cm + 2{,}4\ cm$ que é igual a $8cm$ e, esta medida é associada a medida $10\ m$, que representa a medida real da casa.

Portanto, pode-se dizer que 8 está para 10 assim como x está para y, para obter a função que permite calcular as medidas reais da casa em função de uma medida x da figura. Considerando a representação algébrica, tem-se $\frac{8}{x} = \frac{10}{y}$, o que a caracteriza como proporção simples, do tipo *quarta proporcional,* de acordo com a variável a ser isolada.

Além das formas de apresentação dos dados, outro fator considerados modificador da dificuldade da situação, é a necessidade de conversão de medidas para que o problema seja resolvido com êxito de acordo com o solicitado no enunciado (FIGURA 20).

Em alguns restaurantes os clientes se servem à vontade e pagam pela quantidade de comida, em quilogramas, que está no prato. Supondo que em certo estabelecimento cada 100 g de comida custe R$ 2,20:

a) Escreva a lei de formação da função que determina o valor a ser pago (V), em reais, em função da quantidade de comida em quilogramas (c). $V(c)=22c$

b) Esboce um gráfico que representa essa situação. Professor(a): Veja a resposta deste item na Assessoria Pedagógica.

Figura 20: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples – conversão de medidas
Fonte: Balestri (2016, p.80)

O exemplo apresenta uma medida em 100 gramas que deve ser convertida em quilogramas. Foi identificado apenas um caso em que a conversão de medidas é necessária para resolução dos problemas de função afim, considerando o caso da relação de proporção simples.

De acordo com as análises, bem como os livros didáticos contemplados nesta investigação, além da classificação como um problema de proporção simples (*multiplicação – um para muitos* e *quarta proporcional*), os fatores que destacados como modificadores das situações de proporção simples são: i) a apresentação dos dados em gráficos; ii) apresentação dos dados em tabelas; iii) a interpretação de escalas; iv) conversão de medidas.

A seguir, apresenta-se a análise de problemas de produto de medidas.

4. 2 Produto de medidas

Uma situação-problema que classificada como produto de medidas ou produto cartesiano envolve o conceito de volume encontrada em um dos livros de Ensino Médio. Esta situação também está relacionada à função linear que possui a forma analítica $y = f(x) = a \cdot x$.

De acordo com a teoria dos Campos Conceituais, a categoria de situações caracterizada como produto de medidas é resultado de uma relação ternária em que a medida resultante é produto das outras duas e as duas medidas iniciais que são independentes entre si.

No exemplo a seguir (FIGURA 21), apesar de se tratar de uma situação de inequação, considera-se a necessidade de analisar a obtenção de uma representação que expresse o volume do paralelepípedo, uma vez que a situação se encontra no capítulo do livro voltado para o estudo de função afim.

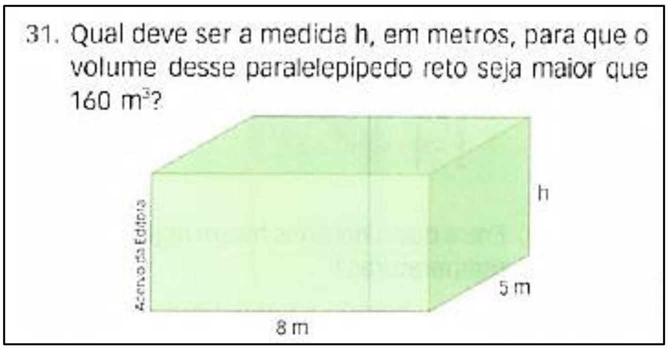

31. Qual deve ser a medida h, em metros, para que o volume desse paralelepípedo reto seja maior que 160 m³?

Figura 21: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo produto de medidas
Fonte: Balestri (2016, p. 84)

Neste caso, o produto entre medidas é usado duas vezes, uma entre os valores numéricos referente a área da base e outra entre o valor numérico resultante e a altura h do paralelepípedo. Ou seja, basta considerar que o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.

O esquema relacional proposto para este caso é a tabela de dupla entrada, apresentada a seguir:

	1	h	$altura$
1			
40		V	
$área\ da\ base$			

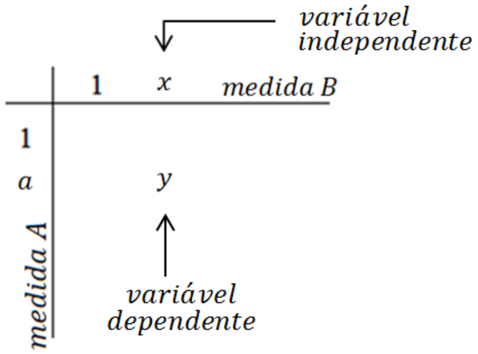
Na primeira linha e na primeira coluna temos as medidas independentes entre si, que ao serem multiplicadas, resulta em uma terceira medida: V. Assim, o volume de um paralelepípedo com a área da base igual a $40\ m^2$ e altura variável h é:

$$V = 40 \cdot h$$

Esta estrutura, de acordo com a variável a ser isolada e pelo fato de as medidas envolvidas serem contínuas, está na forma *produto de medidas – área,* de acordo com as subclasses de situações do tipo produto de medidas estabelecidas por Vergnaud.

Neste caso, tem-se que a medida de uma das partes é um número fixo e a outra parte é variável (variável independente), que, a cada variação desta parte, acarreta uma variação na medida procurada para o resultado (variável dependente).

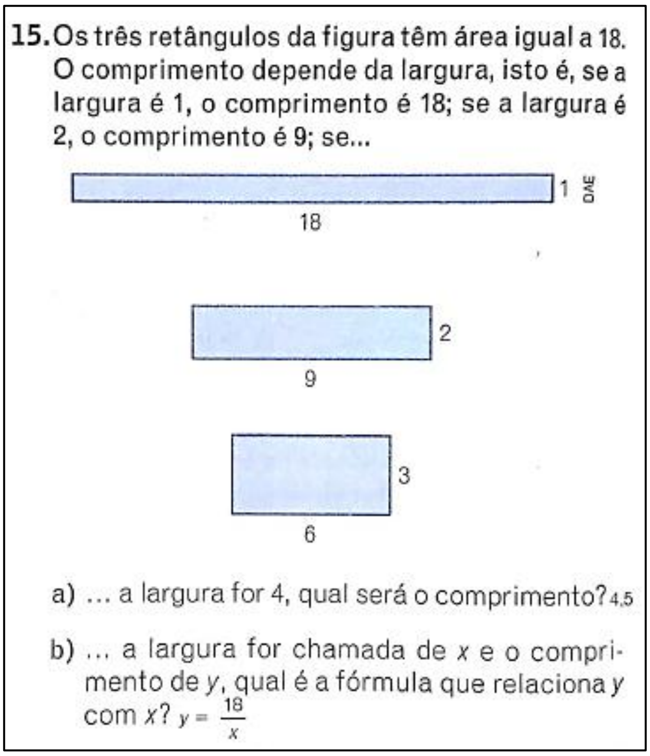
Assim, o caso de *produto de medidas* - *área* para funções afins pode ser interpretado pelo esquema relacional a seguir, considera-se a relação ternária das medidas: x e a (independentes) entre si e y como resultado da multiplicação das outras duas medidas (x e a).



Algebricamente escreve-se $a \cdot x = y$, ou conforme é de prática frequente, isolando a variável dependente à esquerda da igualdade temos $y = a \cdot x$, sendo a real e $a > 0$.

Cabe destacar que este modelo é válido para funções afins, apenas para os casos em que se possui uma das medidas como sendo um valor fixo, enquanto a outra medida e a *medida produto* (medida resultante do produto das duas anteriores) são variáveis. Caso a *medida produto* for a informada e as duas partes forem variáveis, a expressão resultante desta relação não será um caso de função afim, como pode ser visto a seguir.

Considera-se um contraexemplo de função afim que pode ser ilustrado pela seguinte situação-problema relacionada ao conceito de área (FIGURA 22):


15. Os três retângulos da figura têm área igual a 18. O comprimento depende da largura, isto é, se a largura é 1, o comprimento é 18; se a largura é 2, o comprimento é 9; se...

a) ... a largura for 4, qual será o comprimento? 4,5

b) ... a largura for chamada de x e o comprimento de y, qual é a fórmula que relaciona y com x? $y = \frac{18}{x}$

Figura 22: Exemplo de situação-problema do tipo produto de medidas – área que não resulta em uma função afim
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 106)

Nesta situação o produto entre as medidas variáveis deve ser igual a 18 unidades de área, e, algebricamente, escrevemos $x \cdot y = 18$. Ao escrever esta expressão de forma que a variável y fique em função da variável x, tem-se $y = \frac{18}{x}$, que representa uma curva hiperbólica. Portanto, não se trata de uma função afim.

Deste modo, nota-se que na classe de situações identificadas como *produto de medidas – área* há uma única variação possível para o tipo de relação, para que este se comporte como uma função linear na forma $y = a \cdot x$, com $a > 0$. Para que obter-se a expressão desejada ($y = ax$), necessariamente, a pergunta da situação-problema deve estar relacionada à medida resultante da multiplicação (a *medida produto*) em função das outras.

4.2.1 Diversidade dos problemas no caso produto de medidas

A situação-problema associada à classe de problemas produto de medidas está relacionada ao conceito de volume. Então, considera-se possíveis variações na situação, desde que esta seja do tipo *produto de medidas – área*, proposto por Gitirana *et al* (2014), que adotamos em nossa fundamentação teórica, pois não foram identificadas, nos livros didáticos de matemática, situações relacionadas ao conceito de função afim cujas relações estabelecidas são do tipo *produto de medidas - combinação*.

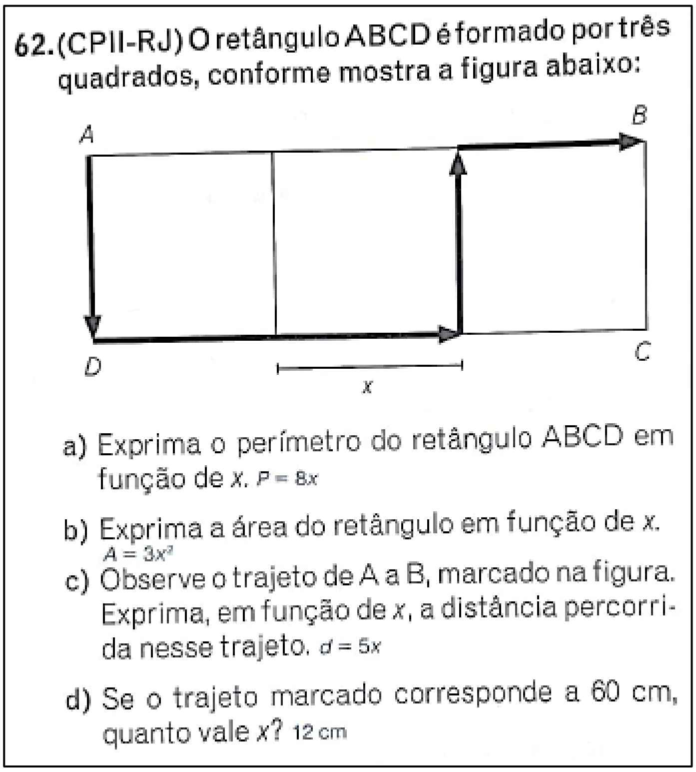
Além disso, considera-se somente a variação da categoria de problemas de função afim do tipo *produto de medidas – área* que o valor solicitado na situação-problema seja a medida produto, sendo que esta assume a variável dependente.

Os aspectos que modificam a dificuldade, ou não, da situação-problema identificados para os problemas de função afim foram: i) abordar o conceito de área (FIGURA 22); ii) abordar o conceito de volume; iii) apresentação das medidas envolvidas na situação na representação figural (FIGURA 21).

4.3 Composição de medidas

As situações-problema que classificadas como composição de medidas pertencem, restritamente, às estruturas aditivas, cujas medidas podem se repetir várias vezes, como é o caso das situações-problema identificadas nos livros. Foram identificadas 3 situações, nos livros didáticos, sendo as 3 do livro didático do Ensino Fundamental, e estas podem assumir tanto a forma $y = a \cdot x$, com $a > 0$, quanto à expressão $y = f(x) = \pm a \cdot x \pm b$, com $a > 0$ e $b > 0$, dependendo da expressão que as partes da composição de medidas assumem.

Para o caso da relação de composição de medidas, considera-se a situação-problema a seguir, pois uma das questões elenca a ideia de um trajeto percorrido indicado por setas (FIGURA 23):



62. (CPII-RJ) O retângulo ABCD é formado por três quadrados, conforme mostra a figura abaixo:

A B D C x

a) Exprima o perímetro do retângulo ABCD em função de x. $P = 8x$

b) Exprima a área do retângulo em função de x. $A = 3x^2$

c) Observe o trajeto de A a B, marcado na figura. Exprima, em função de x, a distância percorrida nesse trajeto. $d = 5x$

d) Se o trajeto marcado corresponde a 60 cm, quanto vale x? 12 cm

Figura 23: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo composição de medidas
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 131)

Neste caso, cada parte do trajeto mede x unidade de medida e será somada até que chegue à posição final do trajeto. Assim, a distância do ponto A até o ponto B por meio do trajeto indicado é a composição das medidas de cada parte do trajeto.

Desta forma, pode-se propor o seguinte esquema relacional para indicar as sucessivas composições de medidas:

$$\underbrace{\boxed{x}\quad\boxed{x}\quad\boxed{x}\quad\boxed{x}\quad\boxed{x}}_{\boxed{d}}$$

Logo, a distância do trajeto do ponto A ao ponto B é dada por $d = x + x + x + x + x$, ou seja, $d = 5 \cdot x$.

Assim, para resolver situações-problema de função afim do tipo composição de medidas, tem-se que realizar sucessivas composições de medidas até que todas as medidas sejam adicionadas. Dessa forma, pode-se sugerir o seguinte esquema relacional, considerando que a medida solicitada y (variável dependente) seja o resultado da composição:

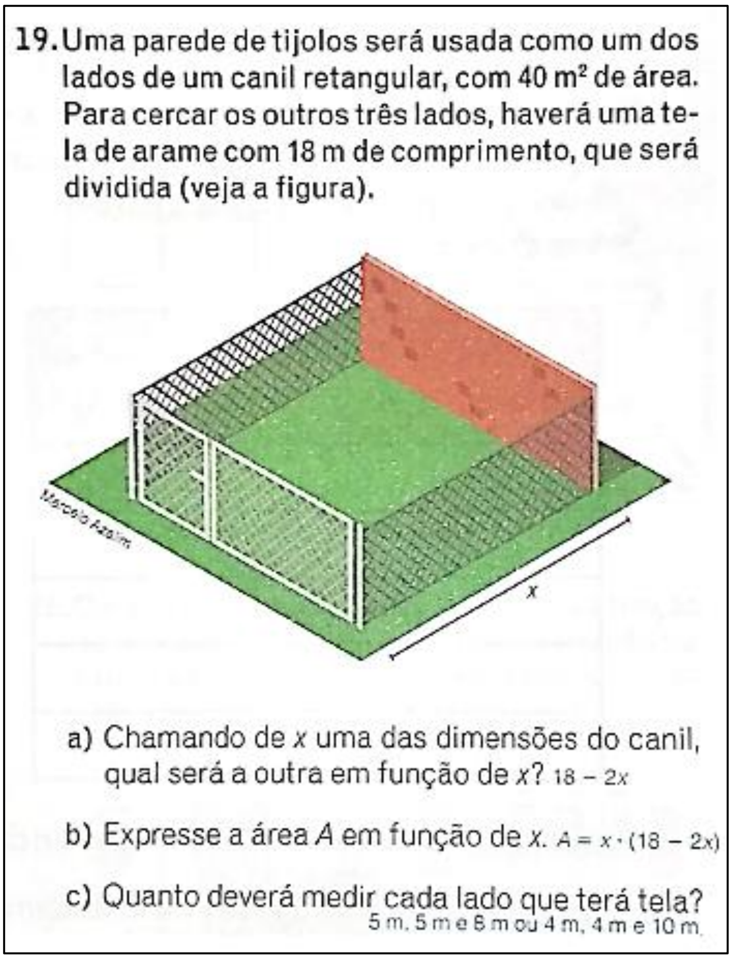
$$\underbrace{\boxed{a(x)}\ \boxed{b(x)}\ \boxed{c(x)}\ \cdots\ \boxed{z(x)}\ \boxed{w(x)}}_{\boxed{y}}$$

Logo, a soma pode assumir tanto a expressão $f(x) = y = a \cdot x$, quanto a expressão $f(x) = \ y = \pm ax \pm b$, sendo a e b reais não negativos.

4.3.1 Diversidade dos problemas no caso da composição de medidas

Sendo os problemas de composição de medidas pertencentes ao campo das estruturas aditivas considera-se que a diversidade dos problemas está relacionada à operação de adição em diferentes conjuntos numéricos.

Uma variação considerada foi identificada em uma situação (FIGURA 24), pois a composição das medidas é dada, e se questiona uma das partes, como apresentado a seguir:


19. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um canil retangular, com 40 m² de área. Para cercar os outros três lados, haverá uma tela de arame com 18 m de comprimento, que será dividida (veja a figura).

a) Chamando de x uma das dimensões do canil, qual será a outra em função de x? $18 - 2x$

b) Expresse a área A em função de x. $A = x \cdot (18 - 2x)$

c) Quanto deverá medir cada lado que terá tela? 5 m, 5 m e 8 m ou 4 m, 4 m e 10 m.

Figura 24: Situação-problema de função afim do tipo composição de medidas (parte desconhecida)
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 107)

Neste caso, tem-se que a soma das dimensões de um canil é igual a 18. Considerando os três lados do cercado, tem-se que dois deles têm medida igual a x; e se questiona, então, a terceira medida em função de x (chamemos esta última de y). Assim, podemos considerar o seguinte esquema relacional:

$$\underbrace{\boxed{x}\quad\boxed{x}\quad\boxed{y}}_{\boxed{18}}$$

A composição das medidas das laterais do canil tem soma igual a 18, logo $x + x + y = 18$. Isolando em função da variável desconhecida y, temos $y = 18 - 2x$.

Consta-se que as situações-problema de função afim do tipo composição de medidas podem assumir as formas $y = ax$ ou $y = \pm ax \pm b$, com $a > 0$ e $b > 0$, dependendo da expressão de cada parte envolvida.

Considerando as variações identificadas quanto à estrutura aditiva, tem-se uma (01) do tipo composição de medidas com a composição desconhecida e duas (02) apresentam uma composição de medidas com uma das partes desconhecida.

Os aspectos que modificam a dificuldade, ou não, das situações-problema identificadas para os problemas de função afim do tipo composição de medidas foram: i) composição de medidas com a composição desconhecida; ii) composição de medidas com uma das partes desconhecida; iii) abordar o conceito de perímetro (FIGURA 24); iv) apresentação de medidas envolvidas na situação na representação figural (FIGURA 23; FIGURA 24) .

4.4 Proporção simples e composição de medidas

As situações-problema classificadas como proporção simples e composição de medidas totalizam 32 situações identificadas nos livros didáticos, sendo 17 do Ensino Fundamental e 15 do Ensino Médio. Esta classe de situação se caracteriza como um tipo de problema misto, classificado, desse modo, por Vergnaud porque possui mais de um tipo de relação, sendo das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas. Nesta categoria de situações-problema é possível verificar que se estabelecem, entre as medidas dos enunciados, relações quaternárias das estruturas multiplicativas do tipo proporção simples e relações binárias das estruturas multiplicativas do tipo composição de medidas. As situações-problema desta categoria resultam na expressão da função afim $y = f(x) = a \cdot x \pm b$, com a e b reais e $a > 0$ e $b > 0$.

As situações-problema classificadas como um caso de problema misto do tipo proporção simples e composição de medidas tem a característica de solicitar uma medida resultante da composição de outras duas, sendo uma delas uma taxa fixa (uma constante) e uma medida variável resultado de uma relação quaternária de proporção simples, como no exemplo a seguir (FIGURA 25):

4. Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$ 2,00 mais R$ 0,80 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual será o valor da taxa se o local da entrega for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km? R$ 12,40; R$ 8,80

b) Escreva uma função que permita calcular o valor *t* da taxa de entrega, em reais, em função da distância *d* percorrida, em quilômetros. t(d) = 2 + 0,8d

Figura 25: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo misto – proporção simples e composição de medidas
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 77)

A situação-problema solicita a taxa do serviço de entrega (t), a qual é composta por duas partes, uma constante no valor de $R\$\ 2{,}00$ e uma variável, sendo $R\$\ 0{,}80$ o valor por cada quilômetro percorrido. Para analisar as relações entre as medidas desta situação foi organizada uma tabela relacionada às suas respectivas grandezas:

$quilômetros\ (Km)$	$valor\ correpondente\ aos\ Km\ (R\$)$	$taxa\ fixa\ (R\$)$	$valor\ do\ serviço$
1	0,80		
$\boxed{d}$	$\boxed{v}$	2	$\boxed{t}$

Cada coluna consiste de medidas para que sejam investigadas as relações que estão estabelecidas entre elas. De acordo com a situação, há um acréscimo de $R\$\ 0{,}80$ a cada quilômetro rodado para a realização da entrega. Logo, se a quilometragem percorrida triplicar, por exemplo, o valor a ser pago, também deve ser triplicado e, assim, temos uma relação de proporção simples entre as medidas das duas primeiras colunas. Diz-se que: 1 está para 0,80 assim como d está para v, e representamos pelo seguinte esquema relacional:

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{0{,}80} \\ \boxed{d} & \boxed{v} \end{array}$$

Quer-se descobrir qual o valor a ser pago por d quilômetros percorridos. Então, de acordo com a variável a ser isolada, temos um caso de proporção simples do tipo *multiplicação – um para muitos*. Algebricamente, escreve-se $\frac{1}{d} = \frac{0{,}80}{v}$, ou seja, $v = 0{,}80 \cdot d$ sendo v a variável que compõe a taxa do serviço de entrega. Logo, a taxa pelo serviço é composta da taxa que corresponde aos quilômetros percorridos mais a taxa fixa de 2 reais, que pode ser representado pelo seguinte esquema relacional:

$$\left.\begin{array}{c} \boxed{0{,}8d} \\ \boxed{2} \end{array}\right\} \boxed{t}$$

Algebricamente, pode ser expresso por: por $0{,}8 \cdot d + 2 = t$ ou $t = 0{,}8d + 2$.

A classe de problemas mistos de *proporção múltipla e composição de medidas*, identificada em nossas análises consiste de uma relação quaternária do campo multiplicativo e uma relação ternária do campo aditivo.

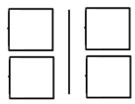
Destaca-se que em 22 destas situações a taxa de variação da função (correspondência com a unidade da variável independente, por exemplo, $R\$\ 0{,}8$ por cada km percorrido) e o valor fixo são evidenciados no enunciado, conforme o caso anterior (FIGURA 25). A taxa de variação é dada pela relação de proporção com a unidade, o caso de proporção múltipla do tipo *multiplicação – um para muitos*. Para estes casos, se propoe a seguinte organização para as medidas e representação das relações estabelecidas:

$$\begin{array}{c|ccc} \begin{matrix} medida \\ A \end{matrix} & \begin{matrix} medida \\ B \end{matrix} & \begin{matrix} medida \\ C \end{matrix} & \begin{matrix} medida \\ D \end{matrix} \\ \hline 1 & a & & \\ \boxed{x} & \underbrace{\boxed{v} \qquad b}_{\boxed{y}} & & \boxed{y} \end{array}$$

Neste caso, representa-se por a a taxa de proporção da parte variável enunciada na situação, ou seja, o valor numérico relacionado com o valor 1 variável independente, e representa-se por b o valor fixo que compõe a variável questionada no enunciado.

Assim, para estabelecer a expressão que descreve a relação entre x e y considera-se duas relações, a proporção simples entre os conjuntos da *medida A* e da *medida B* e uma relação binária de composição de uma medida em função da variável x e uma *medida C* (constante).

Para representar essas relações, adota-se, nesta pesquisa, o esquema sugerido por Vergnaud (1993, p. 14; 2009b) por uma barra vertical entre as quatro medidas que se relacionam por uma proporção simples:



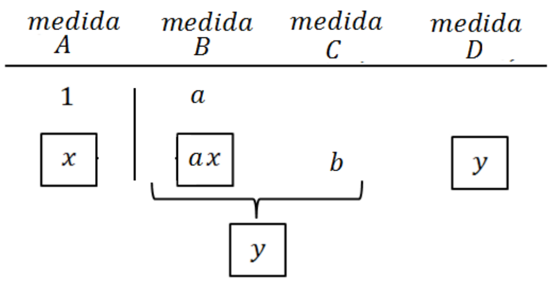
Utiliza-se as chaves para indicar a composição das medidas. O valor da medida v em relação à variável x é obtido considerando a relação de proporção simples:

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{v}$$

ou seja,

$$v = a \cdot x$$

Assim, é proposta a organização para as situações de proporção múltipla e composição de medidas, do seguinte modo:

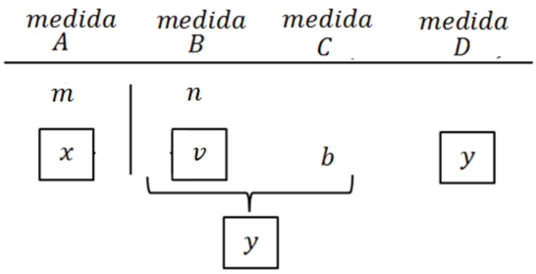


De modo que $a \cdot x + b = y$ ou $y = ax + b$.

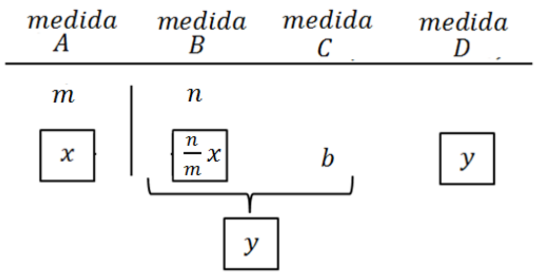
Caso considerar-se um caso menos específico, em que os valores da relação quaternária não estão relacionados com a unidade (valor 1) de uma medida, a relação de proporção simples é considerada do tipo *quarta proporcional,* de acordo com a variável isolada (conforme identificamos nos tipos de proporção simples). Foi identificado 4 situações em que o ponto informado (ponto representado em gráfico, que será discutido mais adiante) não se refere à correspondência com a medida unitária, ou seja, ao invés da relação de correspondência anteriormente discutida

$(1, a)$ temos uma relação de correspondência (m, n) qualquer, sendo m e n reais diferentes de zero e m diferente de 1.

Deste modo, a organização proposta para esta categoria assume a forma:

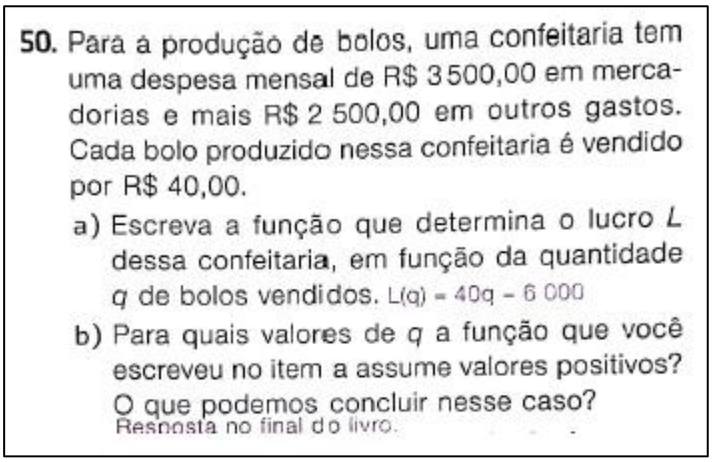


Da relação quaternária de proporção simples, segue que $\frac{m}{x} = \frac{n}{v}$, e $v = \frac{n}{m}x$. Logo,



Sendo $\frac{n}{m} \cdot x + b = y$, ou ainda $y = \frac{n}{m}x + b$.

Uma variação das situações-problema que foi classificada como proporção simples e composição de medidas ocorreu nas situações em que a composição de medidas (estruturas aditivas) é questionada sobre uma das partes, e não a medida da composição como nos exemplos anteriores. Foram identificadas 3 situações com esta relação, conforme o exemplo a seguir (FIGURA 26).



50. Para a produção de bolos, uma confeitaria tem uma despesa mensal de R$ 3 500,00 em mercadorias e mais R$ 2 500,00 em outros gastos. Cada bolo produzido nessa confeitaria é vendido por R$ 40,00.

a) Escreva a função que determina o lucro L dessa confeitaria, em função da quantidade q de bolos vendidos. L(q) = 40q − 6 000

b) Para quais valores de q a função que você escreveu no item a assume valores positivos? O que podemos concluir nesse caso?

Resposta no final do livro.

Figura 26: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples e composição de medidas (parte)

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 97)

Esta situação solicita o lucro das vendas. Como o lucro é a diferença entre a receita e o custo, entende-se que a receita (R) seja a composição das medidas custo (C) e lucro (L).

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{C}\\[1em]\boxed{L}\end{array}\right\}\boxed{R}$$

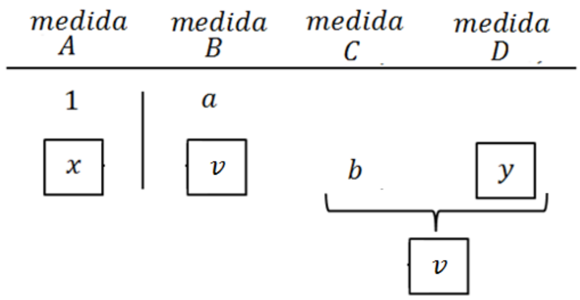
Considerando que deve-se compor as despesas para que se tenha o valor do custo, temos $C = 3\,500 + 2\,500$, então $C = 6\,000$. Logo, pode-se representar as relações entre as medidas da situação pelo esquema:

$$\begin{array}{cc|cc}
\textit{bolo} & \textit{receita} & \textit{despesas} & \textit{lucro}\\
(q) & (R) & (C) & (L)\\
\hline
1 & 40 & & \\
\boxed{q} & \boxed{R} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{6\,000 \qquad \boxed{L}}_{\boxed{R}}}
\end{array}$$

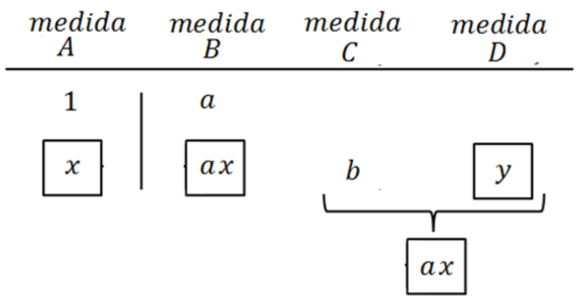
Neste caso, a *quarta proporcional* (R) é resultado da composição ($6\,000 + L$). O valor da receita é dado pela relação de proporção simples por $\frac{1}{q} = \frac{40}{R}$, ou seja, $R = 40 \cdot q$, e a relação de composição é dada por $6\,000 + L = R$. Logo, $6\,000 + L = 40 \cdot q$. Escrevendo o lucro em função da quantidade comercializada temos $L = 40q - 6\,000$.

Esta situação evidenciou a taxa de variação da função, pois apresenta o valor recebido: 40 reais por bolo. Então, pode-se representá-la por meio de uma relação de proporção simples do tipo *multiplicação - um para muitos.* Já a relação de composição pertence a subclasse de problemas aditivos em que se considera a composição com parte desconhecida (variável dependente).

Assim, propõe-se o seguinte esquema relacional para o caso em que, na relação de composição de medidas, se desconhece uma das partes. Ou ainda, pode-se dizer que o resultado da composição é a *quarta proporcional* da relação de proporção simples, e será representado por:



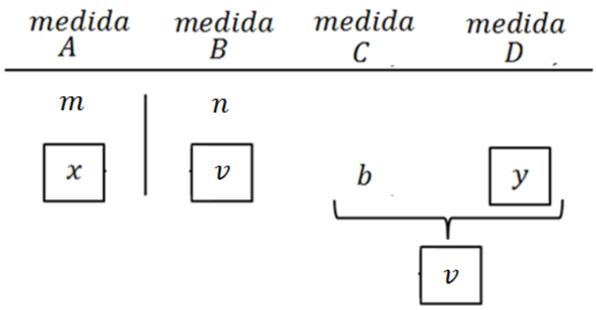
Da relação quaternária de proporção simples, tem-se $\frac{1}{x} = \frac{a}{v}$, e $v = ax$.



Logo temos $b + y = ax$, ou ainda $y = ax - b$.

Além deste caso, encontrado entre as situações-problema analisadas, pode-se considerar o caso mais geral em que a proporção simples é do tipo quarta proporcional, pois, neste caso, não há correspondência com a unidade.

Assim, pode-se verificar as relações para o caso:



No qual obtem-se $y = \frac{n}{m}x - b$.

Na classe de situações mistas de proporção simples e composição de medidas, foi identificado duas variações na forma em que as situações são apresentadas, o caso da proporção simples e composição de medidas (composição desconhecida – variável dependente), resultando em $y = ax + b$ ou $y = \frac{n}{m}x + b$ e o caso proporção simples e composição de medidas (parte desconhecida – variável dependente), resultando em formas $y = ax - b$ ou $y = \frac{n}{m}x - b$, sendo a, b, m e n números reais e maiores que zero.

4.4.1 Diversidade dos problemas no caso da proporção simples e composição de medidas.

Dentre as situações classificadas como proporção simples e composição de medidas, identificamos alguns fatores que podem intervir na diversidade da situação, além da forma como se estabelecem as relações entre os elementos do enunciado.

No que diz respeito às relações estabelecidas entre os elementos presente no enunciado das situações, as variações identificadas foram: relacionadas à proporção simples (proporção simples – um para muitos e proporção simples – quarta proporcional) e a composição de medidas (composição desconhecida e parte desconhecida) de acordo com o quadro a seguir (QUADRO 20):

	Composição de medidas (composição desconhecida)	Composição de medidas (parte desconhecida)
Proporção simples *um para muitos*	26	3
Proporção simples *quarta proporcional*	4	0

Quadro 20: Subclasses de problemas da categoria proporção simples e composição de medidas
Fonte: a autora

As situações identificadas com a variação da forma composição de medidas (parte desconhecida) estão relacionadas ao contexto do cálculo do lucro (FIGURA 26).

Um dos fatores identificados, e considerado modificador da dificuldade relacionada à situação, foi a ausência dos coeficientes angular (taxa de variação) e linear (constante – taxa fixa) de forma explícita no enunciado.

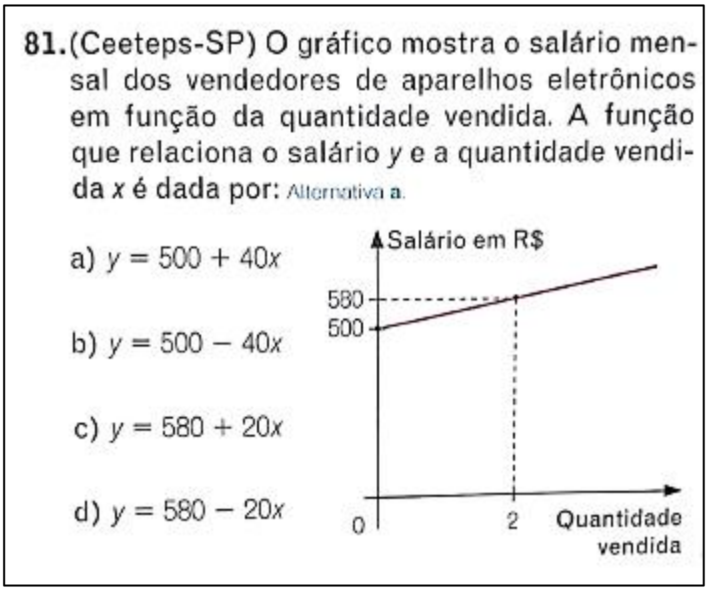
Como mencionado na análise, as situações-problema desta categoria apresentaram a composição entre uma medida variável e uma fixa. Nestes casos, a medida variável é resultante de uma relação de proporção simples (do tipo *multiplicação - um para muitos* ou *quarta proporcional*) a qual é possível analisar uma relação de proporção entre as medidas, ou seja, é possível obter a constante de proporção desta variação.

Então, será denominando situações-problema com a ausência do coeficiente angular, aquelas que se desconhece a proporção da parte variável da composição, pois não existe, explicitamente, no enunciado a correpondência entre duas medidas que indique esta proporção.

Identificou-se 4 situações que representam este caso e todas as quatro situações apresentam dados das situações em uma representação gráfica. A necessidade de interpretar as medidas e informações da situação em uma representação gráfica é um dos fatores que pode ser complicador para a sua resolução.

Para o caso em que se desconhece a taxa de variação da função – o coeficiente angular – as situações-problema apresentam a taxa fixa e um ponto qualquer da função, uma correspondência de um valor de y para um valor determinado de x.

A situação-problema apresentada a seguir (FIGURA 27) ilustra este caso:


81. (Ceeteps-SP) O gráfico mostra o salário mensal dos vendedores de aparelhos eletrônicos em função da quantidade vendida. A função que relaciona o salário y e a quantidade vendida x é dada por: Alternativa a.

a) $y = 500 + 40x$

b) $y = 500 - 40x$

c) $y = 580 + 20x$

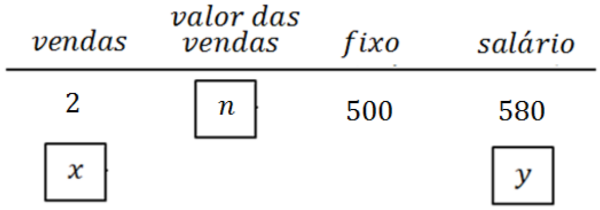
d) $y = 580 - 20x$

Figura 27: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples e composição de medidas com ausência da taxa de variação
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 135)

Percebe-se para esta situação que todos os dados são interpretados via representação gráfica e há a necessidade de reconhecer o valor inicial da função $f(0)$ que no contexto da situação se trata da parte fixa do salário do vendedor.

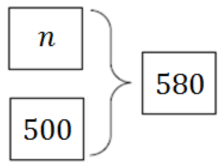
Neste caso, a ausência do valor pago ao vendedor por cada aparelho vendido, pode estar relacionada ao fato de que a taxa de variação da função pode ser calculada a partir do conhecimento de dois pontos quaisquer, reforçada nos livros pela representação gráfica. Uma vez que todas as 4 situações-problema identificadas, relacionadas a esta ideia, apresentam os dados do exercício por meio da representação gráfica, entende-se que estas possam ser indicadas com a intenção de utilizar da representação gráfica para obter a taxa de variação da função afim em questão.

Na situação-problema indicada anteriormente (FIGURA 27), nota-se que se o vendedor não vender aparelhos no mês, ele receberá o valor de $R\$ \ 500{,}00$. Mas se o vendendor comercializar 2 unidades de aparelhos receberá um total de $R\$ \ 580{,}00$. Assim, temos as seguintes informações em que cada coluna representa uma medida de natureza distinta:



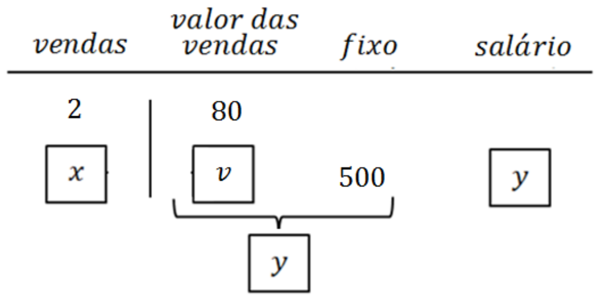
Durante a análise da situação-problema verifica-se que cada vendedor tem um salário composto por uma parte fixa de $R\$ \ 500,00$ e uma parte correspondente à quantidade de vendas realizadas no mês. Para se conhecer quanto o vendedor recebe pelas vendas, ao realizar x vendas por mês precisamos conhecer quanto ele recebe por venda, ou ainda, por duas vendas.

Considerando que no mês em que o vendedor realizou duas vendas recebeu $R\$ \ 580,00$ de salário. Logo, tem-se o seguinte esquema considerando a parte fixa do salário e o valor n recebido a mais pela venda de 2 peças:



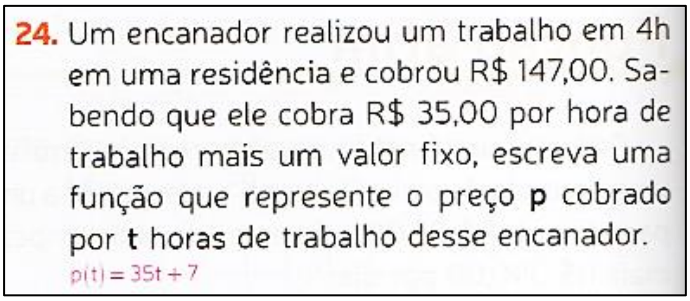
Que pode ser representado algebricamente por: $n + 500 = 580$ e $n = 80$.

Sabendo-se quanto o vendedor recebe em duas vendas, pode-se obter quanto ele receberá em x vendas. Logo, a situação pode ser analisada da mesma forma proposta anteriormente para o caso de proporção simples e composição de medidas (composição desconhecida), por meio do seguinte esquema:



A outra variação desta categoria de situações considerada foi o caso que se desconhece a taxa fixa da composição na situação – o coeficiente linear b. Foram identificadas 3 situações que apresentam a taxa de variação da função de forma explícita, pois expõe dados suficientes para conhecermos a taxa de proporção em que a parte variável da função está sujeita, mas não informa o valor fixo (constante).

A situação-problema apresentada a seguir (Figura 28) ilustra este caso:



24. Um encanador realizou um trabalho em 4h em uma residência e cobrou R$ 147,00. Sabendo que ele cobra R$ 35,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço **p** cobrado por **t** horas de trabalho desse encanador.

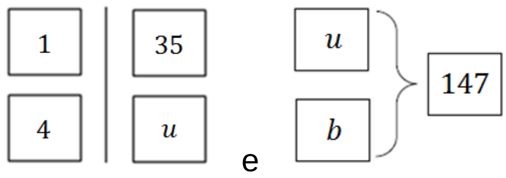
p(t) = 35t + 7

Figura 28: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples e composição de medidas com ausência da taxa fixa
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 94)

Para esta situação consideramos que em 4 horas de trabalho, o encanador recebeu $R\$\ 147,00$. Este valor é composto por uma parte fixa mais uma parte variável de acordo com as horas de trabalho, considerando que ele cobre $R\$\ 35,00$ por hora, tem-se:

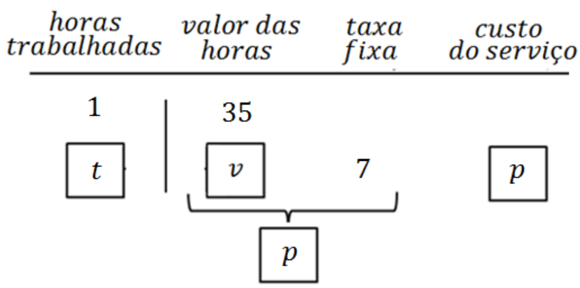
horas trabalhadas	*valor das horas*	*taxa fixa*	*custo do serviço*
1	35		
4	$\boxed{u}$	$\boxed{b}$	147
$\boxed{t}$	$\boxed{v}$		$\boxed{p}$

Na análise desta situação-problema verificamos que o custo do serviço é composto pelo valor que ele cobra por hora de trabalho mais uma taxa fixa. Assim, ao trabalhar 4 horas temos que ele recebeu um total de $R\$147,00$. Ou seja, se chama de u o valor cobrado por 4 horas de trabalho e de b a taxa fixa cobrada pela prestação de serviço, temos $u + b = 147$. O valor de u é equivalente ao valor recebido por quatro horas de trabalho que é proporcional a $R\$\ 35,00$ por hora trabalhada, desta forma tem-se os seguintes esquemas relacionais:



Logo pode-se obter o valor de u por meio da proporção: $\frac{1}{4} = \frac{35}{u} \Longrightarrow \quad u = 140$ e considerando que $u + b = 147$ temos $140 + b = 147 \Longrightarrow \quad b = 7$.

Sabendo quanto o trabalhador cobra uma taxa fixa de 7 reais, é possível obter quanto ele cobrará por t horas de trabalho. Logo, a situação pode ser analisada da mesma forma proposta, anteriormente, para o caso de proporção simples e composição de medidas (composição desconhecida), e pode ser representada pelo esquema:



Além da classificação como um problema de proporção simples e composição de medidas (com composição desconhecida) e de proporção simples e composição de medidas (com parte desconhecida) os fatores que destacamos como modificadores das situações de proporção simples e composição de medidas são: i) a apresentação dos dados em gráficos; ii) a ausência da taxa fixa (coeficiente linear); iii) ausência da taxa de proporção ou taxa de variação (coeficiente angular).

4.5 Proporção simples e transformação de medidas

As situações-problema classificadas como proporção simples e transformação de medidas totalizam 5, identificadas nos livros didáticos, sendo 2 nos livros didáticos do Ensino Fundamental e 3 do Ensino Médio. Este tipo de situação se refere a problemas e estabelecem relações quaternárias das estruturas multiplicativas. Neste caso, do tipo proporção simples, e relações ternárias das estruturas aditivas, sendo a relação de transformação de medidas para este caso assumem a forma analítica da função afim $y = f(x) = b \pm a \cdot x$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e $b > 0$.

As situações-problema classificadas como um caso de problema misto do tipo proporção simples e transformação de medidas têm a característica de possuir um estado inicial que é transformado em um estado final. Nos casos analisados, a transformação da relação aditiva mencionada anterior é a parte variável da função a qual é resultado de uma relação quaternária de proporção simples como no exemplo a seguir (FIGURA 29).

10. Sandra possuía R$ 100,00 e, para fazer uma viagem no final do ano, ela guardou, a partir de janeiro, R$ 60,00 em cada mês.

a) Quantos reais Sandra possuía ao final do 6º mês? R$ 460,00

b) Escreva uma função que relacione a quantia em reais q com o tempo t, em meses. $q(t) = 100 + 60t$

c) Sabendo que a viagem será feita no final do mês de novembro do mesmo ano e que Sandra conseguiu guardar exatamente a quantia necessária para pagá-la, qual o preço dessa viagem? R$ 760,00

Figura 29: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo proporção simples e transformação de medidas com transformação positiva
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 78)

A situação-problema solicita o montante acumulado durante um tempo t em meses, no qual é depositado mensalmente um valor de $R\$\ 60,00$, a partir de um depósito inicial de $R\$\ 100,00$. Para analisar as relações entre as medidas desta situação organizou-se as medidas por meio do seguinte esquema:

$mês(es)$	$valor$ $acumulado$	$valor$ $inicial$	$valor$ $final$
1	60		
$\boxed{t}$	$\boxed{v}$	100	$\boxed{q}$

Em cada coluna tem-se a disposição de medidas, as quais investigou-se as relações que estão estabelecidas entre elas. De acordo com a situação-problema, a cada mês é acrescentado 60 reais, a partir do valor inicial da conta, e pede-se o valor final se forem realizados t depósitos.

A transformação é o valor (v) depositado em t meses. Para calcular o valor de v basta que seja considerada a relação de proporção entre os meses passados e o valor acumulado dos depósitos, que pode ser representada por meio de uma proporção simples entre as medidas das duas primeiras colunas:

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{60} \\ \boxed{t} & \boxed{v} \end{array}$$

Para descobrir qual o valor acumulado de depósitos por t meses passados. Então, de acordo com a variável a ser isolada temos um caso de proporção simples do tipo *multiplicação – um para muitos.* Algebricamente, escreve-se $\frac{1}{t} = \frac{60}{v}$, ou seja, $v = 60 \cdot t$, sendo v a variável utilizada para indicar a transformação relativa ao valor inicial, levando a um estado final.

Assim, o valor final na conta ao passar de t meses, é resultado do valor adicionado de $60 \cdot t$ sobre o valor inicial de $R\$ \ 100{,}00$. Logo a transformação é positiva.

$$\boxed{100} \xrightarrow{+60t} \boxed{q}$$

E pode ser expressa algebricamente por $100 + 60t = q$ ou $q = 60t + 100$.

Uma variação identidicada para a classe de problemas mistos de proporção múltipla e transformação de medidas foi quando considerado uma transformação negativa (somente uma atividade do Ensino Fundamental apresenta a transformação negativa nesta categoria de situações), como o exemplo seguinte (FIGURA 30).

32. Para esvaziar um reservatório que está com 30 000 L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2 000 L de água por hora.

a) Escreva uma função que permita calcular a quantidade de água **q** no reservatório em função do tempo **t** de funcionamento da bomba. $q = 30\,000 - 2\,000t$

b) Após 5h de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão no reservatório? 20 000 L

c) Depois de quantas horas de funcionamento da bomba o reservatório estará com 6 000 L de água? 12h

d) Quantas horas serão necessárias para que o reservatório seja esvaziado? 15h

e) Construa o gráfico da função que você escreveu no item **a**. Resposta no final do livro.
Para construir o gráfico, peça aos alunos

Figura 30: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples e transformação de medidas com transformação negativa
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 97)

De acordo com o problema, a quantidade inicial de água no reservatório é de $6\,000$ litros e é retirada a uma taxa de $2\,000$ litros por hora. A saída de água do reservatório leva do estado inicial para um estado final após t horas passadas. Portanto, a transformação “retirar de” é negativa.

Considerando a transformação como resultado da relação quaternária de proporção simples, obtemos a transformação variável $v = 2000t$, pois:

$$\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \boxed{2000} \\ \boxed{t} & \boxed{v} \end{array}$$

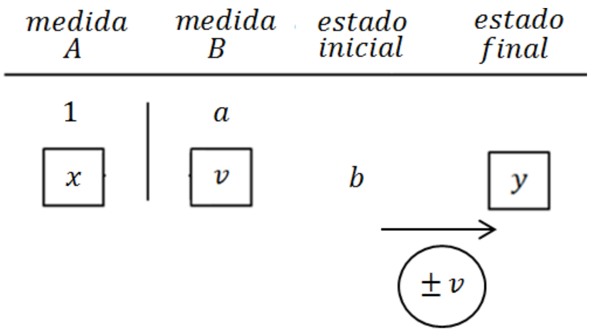
Algebricamente, escreve-se: $\frac{1}{t} = \frac{2000}{v}$, ou seja, $v = 2000 \cdot t$, e considerando a transformação negativa, tem-se:

$$\boxed{6000} \xrightarrow{-2000t} \boxed{q}$$

Desta forma, obtem-se a função $q = 6\,000 - 2\,000 \cdot t$.

Para a categoria de situações-problema de função afim identificadas nesta pesquisa como problemas mistos de proporção múltipla e transformação de medidas, são formadas por uma relação quaternária do campo multiplicativo de proporção múltipla e uma relação ternária do campo aditivo de transformação de medidas, com o estado final desconhecido (variável dependente). A transformação é resultado de uma proporção simples, podendo ser positiva ou negativa.

Para estes casos identificados, propõe-se a seguinte organização para as medidas das situações:



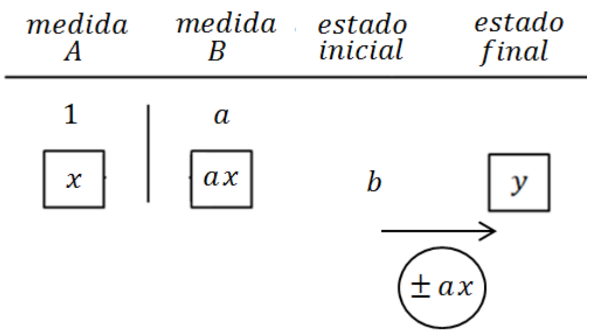
Como a transformação se trata de um número negativo, ela é indicada por um círculo, e sinalizada por uma seta. O valor da medida v em relação a variável x é obtida considerando a relação de proporção simples:

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{v}$$

ou seja,

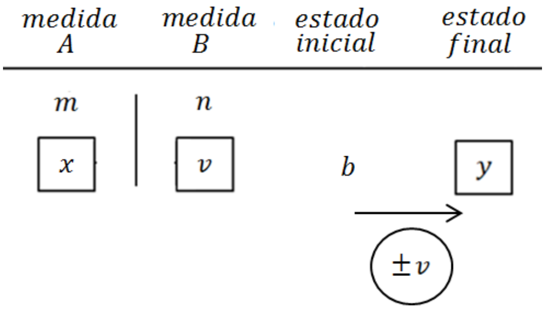
$$v = a \cdot x$$

Deste modo, propõe-se o esquema a seguir para a classe de situações envolvendo proporção simples e transformação de medidas:

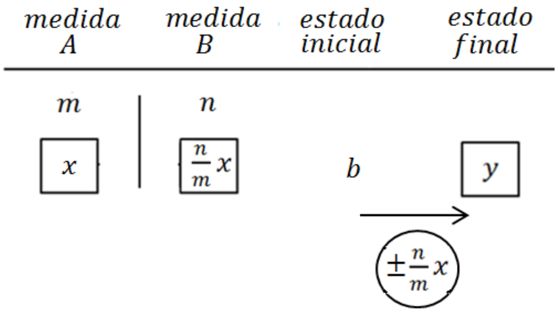


Que corresponde à expressão algébrica: $b \pm a \cdot x = y$ ou $y = \pm ax + b$, com a, $b \in \mathbb{R}$ $a > 0$ e $b > 0$.

Além disso, considera-se situações-problema sem a taxa de variação explícita - aquelas que não apresentam a correspondência com a unidade da variável independe - ou seja, situações que não apresentaram no enunciado o par ordenado $(1, a)$. Portanto, considerando o caso menos específico em que os valores da relação quaternária não necessariamente estabeleçam correspondência com o valor 1 para a variável independente, a organização anterior assume a forma:



Da relação quaternária de proporção simples, temos $\frac{m}{x} = \frac{n}{v}$, e $v = \frac{n}{m}x$.



Logo temos $b \pm \frac{n}{m} \cdot x = y$, ou ainda $y = \pm\frac{n}{m}x + b$, com m, n e b reais e $\frac{n}{m} > 0$ e $b > 0$.

4.5.1 Diversidade dos problemas para o caso de proporção simples e transformação de medidas

Dentre as 5 situações classificadas como proporção simples e transformação (estado final desconhecido – variável dependente), além da forma como se estabelecem as relações entre medidas na situação, foi identificado alguns fatores que podem sinalizar um diferencial na situação.

No que se refere à forma como se estabelecem as relações entre os elementos do enunciado, a variação identificada está relacionada ao caso da proporção simples (um para muitos ou quarta proporcional) e à transformação de medidas (transformação positiva e transformação negativa), como destacado no quadro a seguir (QUADRO 21):

	Transformação de medidas (transformação positiva)	Transformação de medidas (transformação negativa)
Proporção simples *um para muitos*	3	1
Proporção simples *quarta proporcional*	1	0

Quadro 21: Subclasses de problemas da categoria proporção simples e transformação de medidas
Fonte: a autora.

Um dos aspectos outros identificados é a apresentação dos dados em uma tabela (identificado em uma única situação desta categoria), como no exemplo (FIGURA 31):

20. Um automóvel movimenta-se com velocidade constante em uma estrada. Abaixo é possível observar sua posição em determinados instantes.

Tempo (h)	0	3	5	7
Posição (km)	20	290	470	650

a) Qual é a velocidade média do automóvel? 90 km/h

b) Escreva uma função que relacione a posição *S* com o tempo *t* em que o automóvel se movimenta. S(t)=20+90t

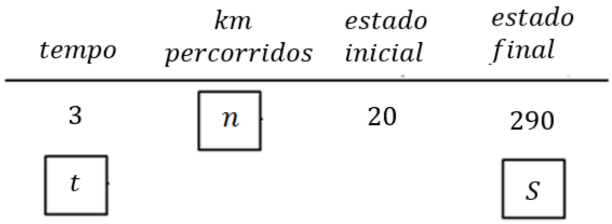
c) Após 10 h, qual é a posição ocupada pelo automóvel nessa estrada? quilômetro 920

d) Esboce um gráfico que relacione a posição do automóvel na estrada em função do tempo.

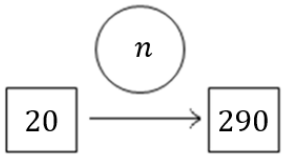
Figura 31: Situação-problema do tipo proporção simples e transformação de medidas com representação de dados e tabela
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 84)

A leitura dos dados e a interpretação das relações devem ser realizadas em conjunto com o contexto do enunciado e os dados da tabela. Além disso, no exemplo da figura 31, precisa reconhecer a grandeza das medidas, a posição inicial do veículo e descobrir a taxa de variação da função por meio de um ponto dado.

No caso deste exemplo (FIGURA 31) podemos considerar a ausência da taxa de proporção (taxa de variação) de forma explícita na situação. Este fato pode ser percebido ao se organizar as medidas de acordo com suas respectivas grandezas e analisarmos as relações entre elas, da seguinte forma:

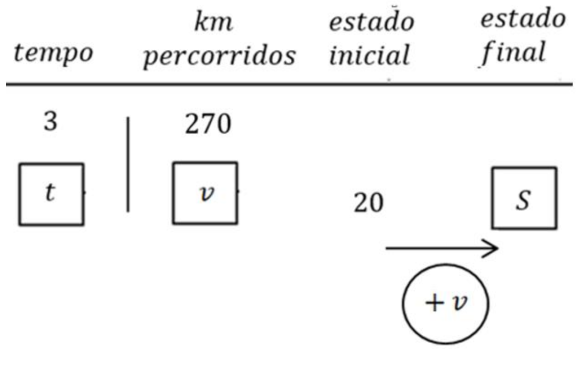


A transformação do estado inicial para o estado final é dada pelo deslocamento n ocorrido em 3 horas de viagem. Logo, para obter o deslocamento ocorrido deve-se considerar a relação de transformação de medidas com a transformação desconhecida, ou seja, se considerar o esquema sagital da relação temos:



E, algebricamente, pode-se escrever $20 + n = 290$, então $n = 290 - 20$ e portanto, temos um deslocamento de $n = 270$ no decorrer de $3\ horas$, ou seja, uma transformação positiva de $+270$.

Com este resultado é possível calcular a taxa de variação da função, ou ainda, pode-se encontrar a taxa de proporção da relação entre o tempo passado e o espaço percorrido pelo automóvel, considerando o seguinte esquema e as relações representadas:



Assim, temos uma relação de proporção simples do tipo *quarta proporcional* e uma relação de transformação de medidas (estado final desconhecido – variável dependente). Encontra-se a função que corresponde à resposta da situação da mesma forma, como proposto anteriormente, para o caso de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação de medidas.

Outro tipo de situação classificada como proporção simples e transformação de medidas e considerada uma variação quanto ao nível de dificuldade que a situação pode apresentar é aquela que não apresenta o valor inicial de forma explícita no enunciado. Este deve ser encontrado por alguma relação estabelecida na situação, como, por exemplo, na situação-problema apresentada a seguir (FIGURA 32).

27. Determinada caixa-d'água é abastecida por um sistema de bombeamento automático: sempre que o nível de água na caixa atinge 5% da capacidade total, um sensor liga o sistema, que eleva o nível para 95%, depois disso o sistema é desligado. A caixa tem capacidade total para 3 500 L, e a capacidade de bombeamento do sistema é de 1,5 m^3 por hora.

a) Escreva a lei de formação da função g que determina a quantidade de água na caixa, em litros, de acordo com o tempo *t*, em minutos, em que a água é bombeada.

b) Explicite o domínio da função g.

Figura 32: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo proporção simples e transformação de medidas – ausência do valor inicial explícito
Fonte: Balestri (2016, p. 83)

Além disso, esta situação também necessita da conversão de medidas para a resolução do problema.

Os fatores identificados nas situações presentes nos livros didáticos, que podem sinalizar uma situação ser diferente da outra, no que diz respeito às situações de proporção simples e transformação de medidas são: i) a necessidade de se considerar uma transformação positiva ou negativa; ii) a representação de dados em tabela; iii) a ausência da taxa de proporção de forma explícita; iv) a ausência do valor inicial – estado inicial; v) a necessidade de conversão de medidas.

4.6 Comparação multiplicativa e composição de medidas

As situações-problema classificadas como comparação multiplicativa e composição de medidas totalizaram 5 situações presentes nos livros didáticos analisados, sendo 1 do Ensino Fundamental e 4 do Ensino Médio. Estes problemas foram classificados como mistos, uma vez que é possível verificar que se estabelecem relações ternárias das estruturas multiplicativas. Neste caso, do tipo comparação multiplicativa, e relações ternárias das estruturas aditivas, sendo a relação de composição de medidas. Estas situações assumem a forma da função afim $y = f(x) = a \cdot x + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e $b > 0$.

No caso das situações do tipo comparação multiplicativa e composição de medidas, a composição é formada de uma parte fixa e outra variável, sendo que esta última é resultado de uma comparação multiplicativa. Ao se considerar a comparação multiplicativa nessas situações, verificou-se que estas são feitas de duas formas: por meio de uma fração ou de uma porcentagem, como razão de comparação entre duas medidas de mesma natureza. Entende-se que essas medidas da forma como foram contempladas nas situações-problema analisadas fazem menção a um referido e a um referente dado na situação, por exemplo, o caso a seguir (FIGURA 33):

9. Júlio trabalha como vendedor em uma loja e seu salário mensal é calculado da seguinte maneira: uma quantia fixa de R$ 1 200,00 mais 5% do valor das vendas que ele efetuar no mês.

a) Escreva uma função que permita calcular o salário *s* de Júlio em função do valor das vendas *v* efetuadas por ele. $s(v) = 1\,200 + 0{,}05v$

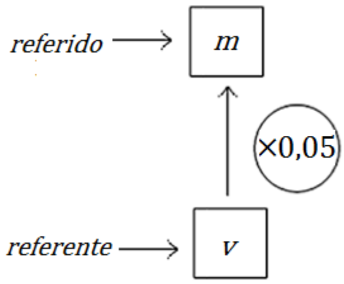
b) Se em determinado mês Júlio vender o equivalente a R$ 20 000,00 em produtos, qual será o valor de seu salário? R$ 2 200,00

c) Em certo mês, Júlio recebeu R$ 2 020,00 de salário. Quantos reais ele vendeu nesse mês? R$ 16 400,00

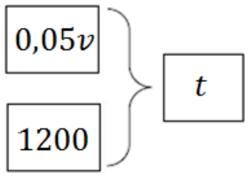
Figura 33: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo comparação multiplicativa e composição de medidas
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 78)

Nesta situação, constata-se que o salário mensal de Júlio é composto por uma taxa fixa mais uma parte (medida) que varia de acordo com as vendas. Contudo, o valor referente às vendas recebido é 5% do valor total da venda, que se trata de uma porção do valor das vendas. Desta forma, tratando a porcentagem como a relação de uma comparação multiplicativa, um escalar que separa duas medidas de mesma natureza, neste caso, o referido e o referente.

Considerando como referente o valor das vendas (v) realizadas no período, o referido é a quinta parte de cem do valor em questão, ou seja, $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$. Representa-se esta situação pelo esquema:

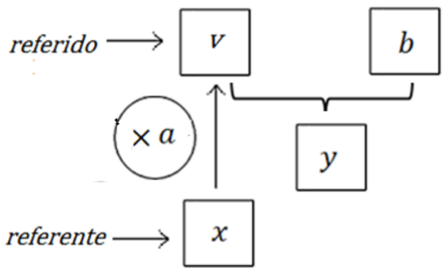


Pela relação considerada, tem-se $m = v \cdot 0{,}05$, e que o valor m recebido por v vendas no período é $0{,}05v$. Desse modo, o salário total pode ser representado por uma composição, conforme o esquema a seguir:



Que, algebricamente, representa: $0{,}05v + 1200 = t$ ou ainda, $t = 0{,}05t + 1200$.

A estrutura identificada nesta pesquisa como a classe de problemas mistos do tipo de comparação multiplicativa e composição de medidas é composta por uma relação ternária do campo multiplicativo e uma relação ternária do campo aditivo. Para estes casos, propõe-se a seguinte organização para as medidas das situações indicando as relações entre elas:



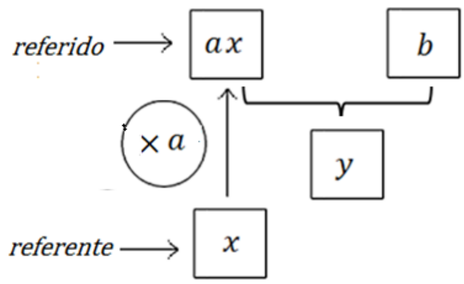
Utiliza-se uma seta para indicar a comparação multiplicativa, com a relação de comparação escrita dentro de um círculo. Já à composição de medidas, indicamos por uma chave. O valor da medida v em função da variável x é obtido considerando a relação de comparação multiplicativa:

$$x \cdot a = v$$

ou seja,

$$v = a \cdot x$$

Assim, propõe-se o seguinte esquema relacional para a classe de situações do tipo comparação multiplicativa e composição de medidas:



Logo, $a \cdot x + b = y$ ou $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$.

A categoria de situações em questão também se refere à ideia de composição de duas medidas, como a categoria de situações do tipo proporção múltipla e composição de medidas. Porém, neste caso, a parte variável da composição é resultado de uma relação de comparação multiplicativa das estruturas multiplicativas.

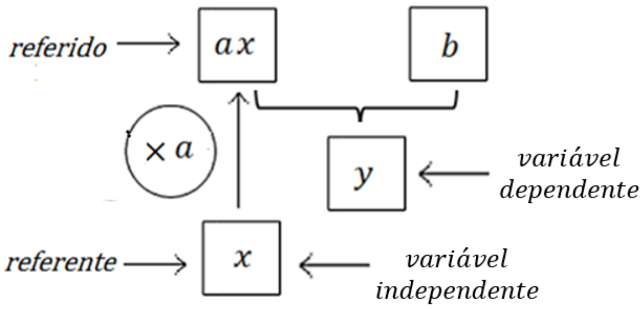
4.6.1 Diversidade dos problemas no caso da comparação multiplicativa e composição de medidas

Quanto à diversidade dos problemas, foi indicado como um possível fator a natureza do número que se estabeleceu as relações de comparação multiplicativa na situação, se são números naturais, números na representação decimal ou na representação fracionária.

Para esta categoria de situações-problema, não se identificou variações na estrutura dos enunciados, pois as relações estabelecidas foram feitas da mesma forma para todas as questões.

Tem-se que, em cada situação considerada, questiona-se uma medida cujo resultado é dado pela composição de outras duas. Então para relação de composição de medidas do campo aditivo a pergunta se refere necessariamente a medida resultante da composição (assumida pela variável dependente y). A composição é formada por uma parte fixa e uma variável, a qual, esta última é resultado da relação do campo multiplicativo de comparação multiplicativa.

Desta forma, tem-se que a parte variável da composição assume a posição de referido na relação multiplicativa, como pode-se perceber no esquema a seguir, enquanto a variável independente x assume a posição de referido.



Além disso, para os casos identificados nesta categoria a razão de comparação (ou relação) coincide com o coeficiente angular a da função e que para este tipo de problema pode assumir valores na representação de porcentagem, fracionária, decimal ou inteiro, de acordo com o contexto envolvido.

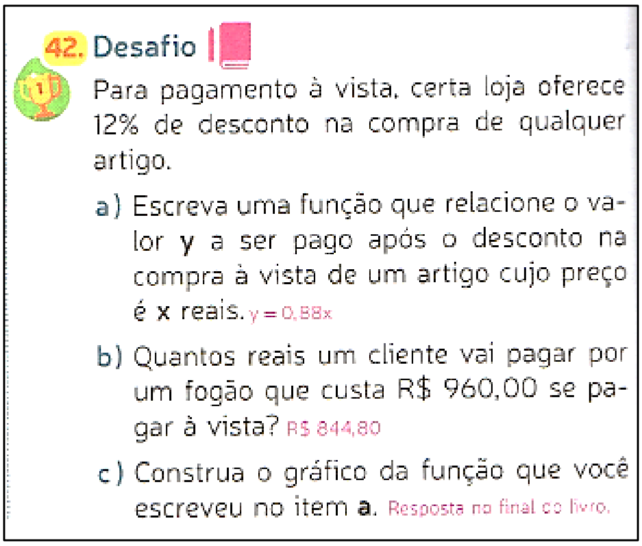
Dentre as situações-problema que foramassociadas à classe de problemas comparação multiplicativa e composição de medidas quatro (04) apresentaram a comparação multiplicativa por meio de uma porcentagem e apenas uma por meio de uma fração.

4.7 Comparação multiplicativa e transformação de medidas

Identificou 3 situações-problema nos livros didáticos de matemática classificadas como mista, do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas, sendo 1 do livro do Ensino Médio e 2 do Ensino Fundamental. Foram classificandas como problemas mistos, pois é possível verificar que se estabelecem relações ternárias das estruturas multiplicativas, do tipo comparação multiplicativa, e relações ternárias das estruturas aditivas, sendo a relação de transformação de medidas. Estas situações assumem a forma analítica da função afim $y = f(x) = a \cdot x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, ou seja, o caso da função linear.

As três situações identificadas para esta categoria abordam o contexto de desconto aplicado sobre o valor de um determinado produto. Sendo assim, tem-se uma situação em que uma medida passa de um estado inicial para um estado final por meio de uma transformação negativa (desconto).

Ainda considerando o desconto, este é obtido como resultado de uma comparação multiplicativa, ao considerar a porcentagem como uma razão de comparação (ou relação), em relação ao referente como valor integral de um produto. Considere o exemplo a seguir para analisar as relações envolvidas (FIGURA 34):



42. Desafio

Para pagamento à vista, certa loja oferece 12% de desconto na compra de qualquer artigo.

a) Escreva uma função que relacione o valor **y** a ser pago após o desconto na compra à vista de um artigo cujo preço é **x** reais. y = 0,88x

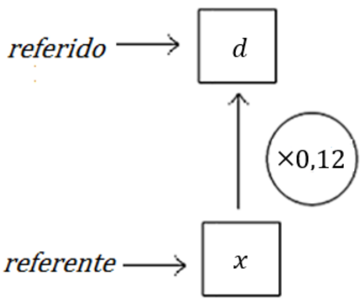
b) Quantos reais um cliente vai pagar por um fogão que custa R$ 960,00 se pagar à vista? R$ 844,80

c) Construa o gráfico da função que você escreveu no item **a**. Resposta no final do livro.

Figura 34: Exemplo de situação-problema de função afim do tipo comparação multiplicativa e transformação de medidas
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 100)

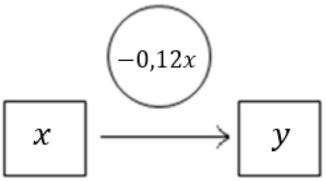
Nesta situação percebe-se que é proposto o cálculo do valor a ser pago à vista por um artigo qualquer em determinada loja, cujo desconto à vista está sendo de 12%. Então, tem-se que o valor do desconto em um artigo é 12% do valor integral do produto, que se trata de uma porção do valor do produto. Portanto, considerando a porcentagem como a relação (ou razão) de uma comparação multiplicativa, o desconto pode ser obtido como o referido desta relação.

Considerando x o valor integral do produto no momento da venda, ou seja, o referente, o desconto (referido) é a décima segunda parte de cem do valor em questão, ou seja, $12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$ de x. Representa-se esta relação pelo esquema:



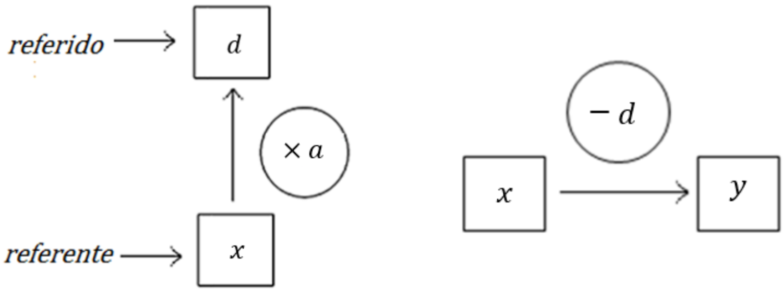
Considerando a relação de comparação multiplicativa indicada temos $d = x \cdot 0{,}12$, e que o valor d do desconto considerado é $0{,}12x$.

Desta forma, a situação de desconto em que o valor inicial (estado inicial) do produto é x e o desconto de $0{,}12x$, levando a um valor final (estado final) y a ser pago pelo produto, o valor do desconto é uma transformação negativa e o seguinte esquema representa a relação de transformação de medidas:



Pode-se expressar esta relação, algebricamente, por: $x - 0{,}12x = y$, ou ainda, $y = (1 - 0{,}12) \cdot x$ que calculando temos $y = 0{,}88x$.

A estrutura identificada nesta pesquisa como a classe de problemas mistos do tipo de comparação multiplicativa e transformação de medidas é formada por uma relação ternária do campo multiplicativo e uma relação ternária do campo aditivo. Para estes casos, propõe-se a seguinte organização para as medidas das situações indicando as relações entre elas:



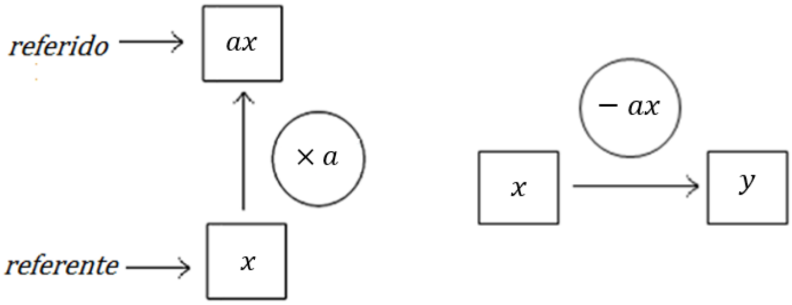
Utilizou-se uma seta vertical para indicar a comparação multiplicativa, com a razão de comparação escrita dentro de um círculo e a transformação de medidas por uma seta horizontal indo de um estado inicial para o estado final, considerando a transformação negativa. O valor da medida d em função da variável x é obtido considerando a relação de comparação multiplicativa:

$$x \cdot a = d$$

então,

$$d = a \cdot x$$

Portanto, pode-se representar a organização anterior por:



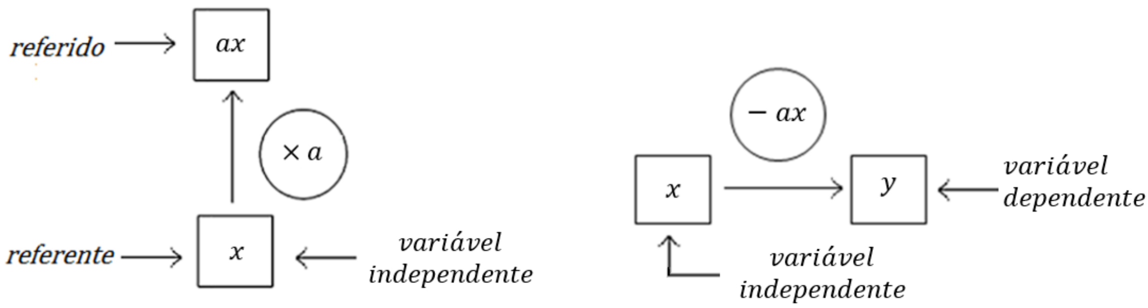
obtendo $x - ax = y$ ou $y = (1 - a)x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

4.7.1 Diversidade dos problemas no caso da comparação multiplicativa e transformação de medidas

Para esta categoria de situações-problema, não se identificou variações na estrutura dos problemas, pois as relações estabelecidas foram feitas da mesma forma para todas as 3 questões, já que todas estão relacionadas ao contexto de desconto.

Neste caso, se busca uma medida resultante de uma transformação aplicada sobre um valor inicial. Então, para a relação do campo aditivo a pergunta se refere, necessariamente, à medida relacionada ao estado final da transformação (assumida pela variável dependente y). A transformação é realizada sobre um valor inicial variável, que denotamos por x, sendo a transformação obtida por um uma relação de comparação multiplicativa.

A transformação assume a posição de referido na relação multiplicativa; a variável independente x assume a posição de referente na relação multiplicativa e a posição de estado inicial na relação aditiva, enquanto a variável dependente y assume o estado final na relação de transformação aditiva das estruturas aditivas.



Além disso, para os casos identificados nesta categoria o coeficiente angular da função pode ser obtido por meio da razão de comparação a calculando $(1 - a)$, sendo a dado na representação de porcentagem. Compreendemos que a pode ser representado também pela representação fracionária, decimal de acordo com o contexto de desconto.

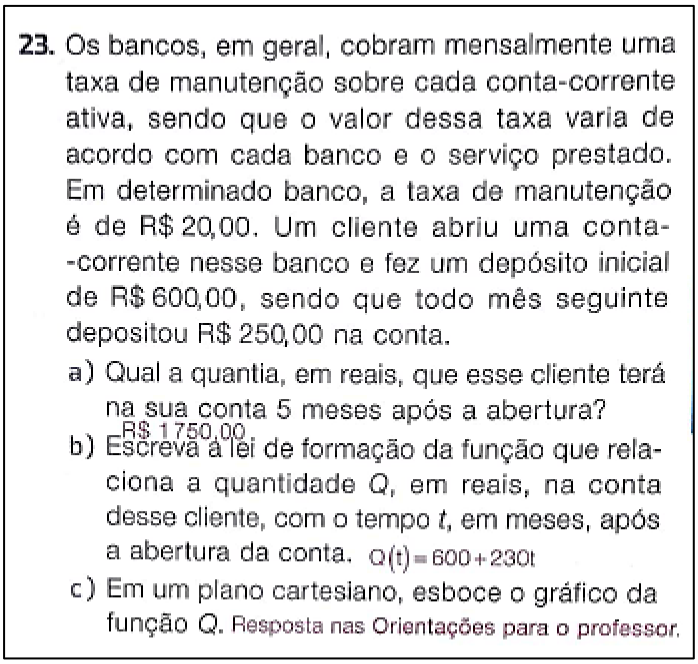
4.8 Outras situações-problema de função afim identificadas nos livros didáticos de matemática

Nesta seção, são apresentadas aquelas situações-problema cuja categoria não foi prevista após as análises prévias, no que se refere ao estudo piloto.

As situações-problema indicadas a seguir foram categorizadas de acordo com as relações estabelecidas entre medidas, pertencentes às estruturas aditivas e/ou às estruturas multiplicativas, que devem ser consideradas em sua resolução. Assim, foram identificadas: situações consideradas mistas, pois apresentam relações tanto do campo multiplicativo, quanto do campo aditivo; uma situação do campo multiplicativo, uma vez que esta apresenta mais de um tipo de relação pertencente às estruturas multiplicativas.

4.8.1 Proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas

Esta categoria de situações-problema possui características próximas à categoria de situações identificadas como proporção simples e transformação de medidas, pois a diferença é que, neste caso, a transformação a ser considerada é resultado de uma composição de transformações, como pode-se observar pelo exemplo a seguir (FIGURA 35).



23. Os bancos, em geral, cobram mensalmente uma taxa de manutenção sobre cada conta-corrente ativa, sendo que o valor dessa taxa varia de acordo com cada banco e o serviço prestado. Em determinado banco, a taxa de manutenção é de R$ 20,00. Um cliente abriu uma conta-corrente nesse banco e fez um depósito inicial de R$ 600,00, sendo que todo mês seguinte depositou R$ 250,00 na conta.

a) Qual a quantia, em reais, que esse cliente terá na sua conta 5 meses após a abertura? R$ 1750,00

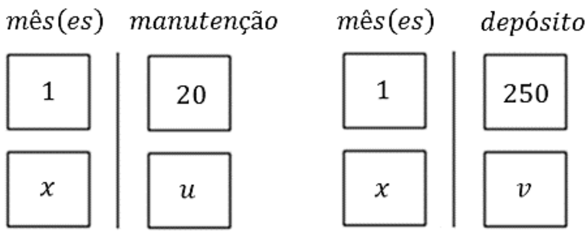
b) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade Q, em reais, na conta desse cliente, com o tempo t, em meses, após a abertura da conta. $Q(t) = 600 + 230t$

c) Em um plano cartesiano, esboce o gráfico da função Q. Resposta nas Orientações para o professor.

Figura 35: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 85)

Foram identificadas duas (02) situações-problema em que, para sua resolução, é necessário considerar duas transformações distintas, sendo uma transformação positiva, e outra, negativa, ambas encontradas em um livro de Ensino Médio.

As transformações são resultado de relações do campo multiplicativo de proporção simples. Na situação anterior (FIGURA 35), considerando a passagem de t meses temos duas situações de proporção simples a se atentar: o valor descontado de taxa de manutenção da conta e o valor depositado pelo cliente. Representou-se estas proporções por meio dos seguintes esquemas relacionais.



Considerando a relação de proporção simples tem-se que ao passar dos meses os valores da manutenção da conta e dos depósitos acumulam $u = 20x$ e $v = 250x$, respectivamente.

Os resultados das proporções simples foram considerados transformações que serão calculadas sobre o valor inicial na conta de 600 reais, sendo necessário considerar uma positiva e uma negativa ($-20x$), pois a situação de desconto da taxa de manutenção é uma transformação negativa e a de depósitos realizados é uma transformação positiva ($+250x$).

Já a transformação que age sobre valor inicial é resultado da composição das transformações consideradas anteriormente, de acordo com o seguinte esquema relacional:

$$\left.\begin{array}{c} -\ 20x \\ +250x \end{array}\right\} t$$

Considerando o esquema, temos que a composição de transformações pode ser escrita de forma algébrica por $-20x + (+250x) = t$, ou seja, a transformação composta é positiva e igual a $+230x$.

Finalmente, considerando a relação de transformação de medidas, sendo o estado inicial o valor inicial da conta de 600 reais, a transformação a ser considerada é de $+230x$ (resultado da composição de uma transformação positiva e uma negativa) e o estado final a medida questionada (y), como pode-se observar pelo esquema a seguir:

$$\boxed{600} \xrightarrow{+230x} \boxed{y}$$

A transformação de medidas nessa situação pode ser indicada, algebricamente, por $600 + (+230x) = y$, ou seja, $y = 600 + 230x$.

Uma variação para o tipo de situação-problema de função afim do tipo proporção de medidas, composição de transformações e transformação de medidas, dentre as duas situações identificadas nos livros didáticos, foi a ausência do estado inicial de forma explícita no enunciado, como no caso a seguir (FIGURA 36):

19. Uma bomba-d'água despeja 4 m^3 de água por hora em um reservatório com capacidade para 60 m^3, e outra bomba retira 2 m^3 de água por hora desse reservatório. Considerando inicialmente que o reservatório está vazio e que a bomba que retira água é ligada após duas horas de funcionamento da bomba que despeja água, responda.

a) Após quanto tempo de funcionamento simultâneo das bombas a quantidade de água no reservatório chega a 16 m^3? 4 h

b) Escreva a função que expressa a quantidade q de litros no reservatório em função do tempo t em que as bombas funcionam simultaneamente. $q(t) = 2t + 8$

c) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item b. Resposta nas Orientações para o professor.

Figura 36: Situação-problema de função afim do tipo proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas (Exemplo 2)
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 84)

Em ambas as situações consideradas nesta categoria, tem-se a ocorrência de uma transformação positiva e uma transformação negativa. A transformação composta é positiva para ambos os casos. Assim, a forma analítica da função obtida neste caso é $y = b + ax$, ou ainda, $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$.

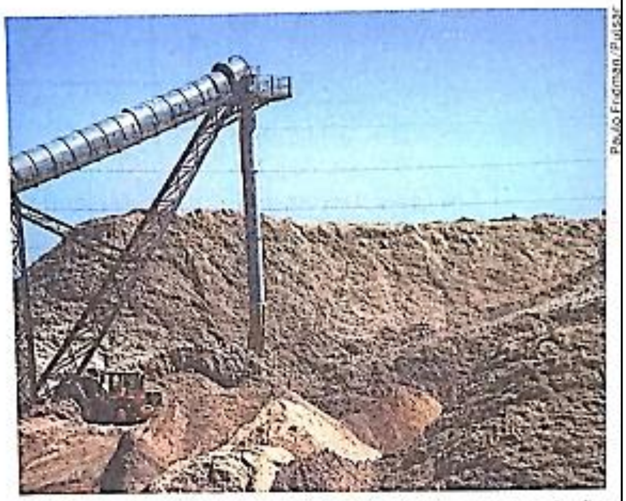
4.8.2 Comparação Multiplicativa e Proporção Simples

A categoria de situações-problema identificada como comparação multiplicativa e proporção simples possui duas relações do campo das estruturas multiplicativas. Portanto, não se trata de um problema misto.

Uma única situação no livro didático do Ensino Médio foi caracterizada como do tipo comparação multiplicativa e proporção simples, pois possui uma relação ternária de comparação multiplicativa e uma relação quaternária de proporção simples, como analisada na situação a seguir (FIGURA 37):

29. No processo de industrialização da cana-de-açúcar, em que podem ser produzidos açúcar e etanol, por exemplo, gera-se um resíduo de cerca de 30% da massa em bagaço.

Uma destinação adequada para o bagaço é a geração de energia elétrica, de maneira que 1 t desse resíduo pode gerar cerca de $\frac{100}{3}$ W.



Pátio com bagaço de cana-de-açúcar utilizado para produção de energia elétrica em usina, em Cerqueira César (SP), em 2014.

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade de watts produzida E com a quantidade processada de cana-de-açúcar q, em toneladas. $E(q) = 10q$

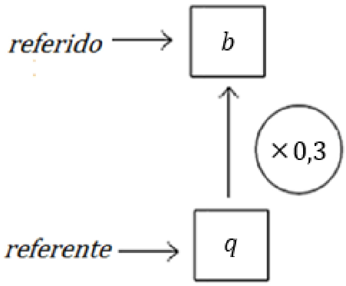
b) A função que você escreveu no item a é crescente, decrescente ou constante? crescente

c) Esboce o gráfico da função que você escreveu no item b. Resposta nas Orientações para o professor.

Figura 37: Situação-problema de função afim do tipo comparação multiplicativa e proporção simples
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 88)

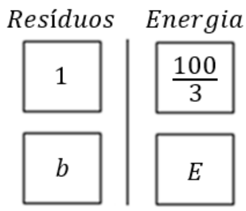
Para relacionar a quantidade de cana-de-açúcar q, em toneladas, com a quantidade de watts produzida E consideremos, inicialmente, a quantidade de bagaço produzida de acordo com a quantidade de cana-de-açúcar, pois a quantidade de energia produzida depende da quantidade de bagaço, que depende da quantidade de cana-de-açúcar que chega à indústria.

Portanto, consideramos que a quantidade de bagaço produzida (b) é resultado de uma comparação multiplicativa, sendo a quantidade de cana-de-açúcar (q) o referente e a relação de comparação a porcentagem $30\% = 0{,}3$, representado pelo seguinte esquema:

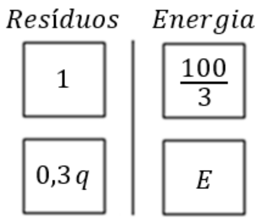


Desta forma, a quantidade de bagaço produzida é $b = q \cdot 0{,}3$, ou seja, $b = 0{,}3\ q$.

A quantidade de energia produzida E depende da quantidade de bagaço b disponível, pois cada $1\ tonelada$ de bagaço é transformada em $\frac{100}{3}\ W$ de energia. Desta forma, considera-se a relação de proporção simples entre essas duas medidas, sendo a pergunta relacionada a quantidade de energia produzida de acordo com o seguinte esquema:



Sendo b obtido da quantidade de cana-de-açúcar $b = 0{,}3q$, tem-se:



Considerando a relação de proporção simples, algebricamente tem-se: $\dfrac{1}{0{,}3q} = \dfrac{100/3}{E}$, ou seja, $E = \frac{100}{3} \cdot 0{,}3\ q \Rightarrow E = 10\ q$.

Na situação considerada nesta categoria tem-se a ocorrência de uma comparação multiplicativa e uma proporção simples. Assim, a forma analítica da função obtida neste caso é $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$.

4.9 Considerações sobre a caracterização de situações-problema de função afim identificadas em livros didáticos

Nesta seção apresenta-se um resumo dos principais resultados no que se refere à categorização de situações-problema relacionadas ao conceito de função afim, presentes em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Médio, na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais.

Apresenta-se as conclusões referentes às categorias identificadas nesta pesquisa, com base nas categorias de problemas das estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, e considerando a categorização de problemas mistos, com base no estudo piloto.

Ao todo, identificou-se nove (09) categorias de situações-problema de função afim, sendo que sete (07) foram pré-estabelecidas e duas (02) emergiram do mapeamento das situações-problema em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio, no capítulo voltado ao ensino de função afim.

O estudo das relações estabelecidas entre os elementos presentes no enunciado das situações identificadas permitiu categorizar as situações-problema as quais não se enquadraram nas categorias estabelecidas previamente.

Apresentamos no quadro 22, a seguir, um quantitativo das situações-problema identificadas em cada nível de Ensino. Nosso objetivo não é analisar os livros didáticos, pois este foi usado como uma fonte para consulta de situações-problema que envolvem o conceito de função afim e estudá-las sob a perspectiva da teoria em questão. Contudo, o quantitativo de situações-problema identificadas é um resultado que obtido nesta investigação e é apresentado no quadro 22:

Categoria	Frequência por nível de Ensino	
	Ensino Fundamental	Ensino Médio
Proporção Simples	14	17
Produto de Medidas	0	1
Composição de medidas	3	0
Proporção Simples e Composição	17	15
Proporção simples e transformação de medidas	2	3
Comparação Multiplicativa e Composição de Medidas	1	4
Comparação Multiplicativa e transformação de medidas	2	1
Proporção Simples, composição de transformações e transformação de medidas	0	2
Comparação multiplicativa e proporção simples	0	1

Quadro 22: Frequência da ocorrência de cada categoria de situações indicadas nos livros didáticos por nível de Ensino
Fonte: a autora

As categorias que mais apresentaram situações relacionadas ao tipo de relação estudada nos campos conceituais aditivo e multiplicativo foram: proporção simples; e proporção simples e composição de medidas. A primeira, relacionada à função linear $y = ax$, e à segunda relacionada a função $y = ax \pm b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$. As categorias do tipo produto de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples foram identificadas somente em livros de Ensino Médio. Foram encontradas situações com mais diversidade de relações no livro do Ensino Médio, tornando-as mais complexas (situações que apresentam mais de um tipo de relação entre os elementos do enunciado), e composição de medidas somente nos livros do Ensino Fundamental.

Este resultado nos leva a questionar se as categorias de problemas proporção simples; e proporção simples e composição de medidas são as mais frequentes em livros didátivos de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, assim como se as cotegorias de situações-problema que formam indentificados somente nos livros do Ensino Fundamental e do Ensino Médio são frenquentes somente nessas obras, tal como indicado por esta pesquisa.

Além disso, cada categoria de situação-problema identificada apresenta, no seu processo de resolução, com estudo das relações envolvidas, uma forma analítica específica (QUADRO 23). Considerando $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$, tem-se:

Categoria	Expressão analítica relacionada
Proporção Simples	$y = ax$
Produto de Medidas	$y = ax$
Composição de medidas	$y = ax$ ou $y = \pm ax \pm b$
Proporção Simples e Composição	$y = ax \pm b$
Proporção simples e transformação de medidas	$y = b \pm ax$
Comparação Multiplicativa e Composição de Medidas	$y = ax + b$
Comparação Multiplicativa e transformação de medidas	$y = ax$
Proporção Simples, composição de transformações e transformação de medidas	$y = ax + b$
Comparação multiplicativa e proporção simples	$y = ax$

Quadro 23: Expressão analítica resultante do tipo de relação estabelecida
Fonte: a autora

No que se refere a variação das situações-problema de cada categoria de situações que envolvem ao conceito de função afim, consideradas para a análise, as variações do tipo de relação estabelecida entre as medidas no estudo das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, denominadas por subclasses. Apresenta-se no quadro a seguir, as variações de situações-problema de função afim identificadas em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio (QUADRO 24):

Categoria	Variações quanto ao tipo de relação estabelecida	Frequência
Proporção Simples	Proporção simples – *um para muitos*	17
	Proporção simples – *quarta proporcional*	14
Produto de Medidas	Produto desconhecido	1
Composição de medidas	Composição de medidas (composição desconhecida)	1
	Composição de medidas (parte desconhecida)	2
Proporção Simples e Composição de medidas	Proporção simples *um para muitos* e composição de medidas (composição desconhecida)	26
	Proporção simples *um para muitos* e composição de medidas (parte desconhecida)	3
	Proporção simples *quarta proporcional* e composição de medidas (composição desconhecida)	4
Proporção simples e transformação de medidas	Proporção simples *um para muitos* e transformação de medidas (transformação positiva)	3
	Proporção simples *um para muitos* e transformação de medidas (transformação negativa)	1
	Proporção simples *quarta proporcional* e transformação de medidas (transformação positiva)	1
Comparação Multiplicativa e Composição de Medidas	Comparação Multiplicativa (referido desconhecido) e composição de medidas (composição desconhecida)	5
Comparação Multiplicativa e transformação de medidas	Comparação Multiplicativa (referido desconhecido) e transformação de medidas (transformação negativa)	3
Proporção Simples, composição de transformações e transformação de medidas	Proporção simples *um para muitos*, composição de transformações (transformações elementares – uma negativa e uma positiva) e transformação de medidas (transformação positiva)	2
Comparação multiplicativa e proporção simples	Comparação multiplicativa (referido desconhecido) e proporção de medidas *um para muitos*	1

Quadro 24: Variações identificadas nas situações-problema quanto ao tipo de relações estabelecidas
Fonte: a autora

De acordo com as análises realizadas, foi identificada apenas um tipo de variação para as seguintes categorias: produto de medidas; comparação de medidas e composição de medidas; comparação multiplicativa e transformação de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples, sendo que em duas (02) destas categorias (produto de medidas; comparação multiplicativa e proporção simples) foram identificadas apenas uma situação nos livros didáticos. A ausência de variação destes casos pode ter se dado devido ao fato da pequena quantidade de situações-problema identificadas, em relação às demais categorias.

As variações indicadas se restringem às situações identificadas nesta pesquisa, referentes aos problemas presentes nos livros didáticos analisados. No entanto, destaca-se que outras variações das situações podem ocorrer, além daquelas mencionadas no quadro 24. Por exemplo, na categoria proporção simples e transformação de medidas não foram identificadas nesta pesquisa a variação proporção simples – quarta proporcional e transformação negativa.

Além disso, considerou-se, nas situações analisadas, variações que não estão necessariamente relacionadas à estrutura dos problemas, mas cuja forma de apresentação dos dados podem modificar o nível de dificuldade do problema. Sendo assim, e considerando cada categoria de situações identificada nesta pesquisa, apresenta-se o quadro 25 a seguir:

Categoria	Caracterização	Diversidade identificada nas situações de livros didáticos de matemática
Proporção simples	Situações que a buscam pela variável dependente varia de forma proporcional à variável independente; está relacionada a um problema de proporção simples.	- Referente ao tipo de relação: proporção simples do tipo *um para muitos* e *quarta proporcional*. - Relacionada à apresentação dos elementos: dados em tabela e gráfico; interpretação de escalas; conversão de medidas.
Produto de medidas	Situações relacionadas a problemas de área ou volume as quais a variável dependente em questão se refere à grandeza resultante do produto, a área ou o volume.	- Referente ao tipo de relação: o produto como medida desconhecida. - Relacionada à apresentação dos elementos: Dados em figura ou enunciado; abordagem do conceito de área ou volume.

Composição de medidas	Situações relacionadas a composição de medidas de mesma natureza. Duas ou mais medidas são compostas, sendo as partes desta composição expressas por meio de funções afins.	- Referente ao tipo de relação: composição desconhecida ou parte desconhecida. - Relacionada à apresentação dos elementos: dados expressos em figura; abordagem do conceito de volume.
Proporção simples e composição de medidas	Situações relacionadas às situações em que a variável depende é a composição ou faz parte da composição de duas medidas, sendo uma delas variável resultante de uma proporção. Se caracterizam pela forma de uma composição de uma taxa fixa e uma parte variável.	- Referente ao tipo de relação: proporção simples – *um para muitos* ou *quarta proporcional;* composição desconhecida ou parte desconhecida. - Relacionada à apresentação dos elementos: dados em gráfico; ausência da taxa fixa; ausência da taxa de proporção.
Proporção simples e transformação de medidas	Situações relacionadas à ideia de transformação, apresentando um estado inicial que sobre uma transformação variável resultante de uma proporção simples. A variável dependente é o estado final da transformação.	Referente ao tipo de relação: proporção simples do tipo *um para muitos* e *quarta proporcional;* transformação positiva ou transformação negativa. - Relacionada à apresentação dos elementos: apresentação de dados em tabela; ausência da taxa de proporção; conversão de medidas; ausência do valor inicial – estado inicial.
Comparação multiplicativa e composição de medidas	Situações relacionadas às situações em que a variável depende é a composição, sendo uma das partes da composição variável e resultante de uma relação, uma comparação multiplicativa. Se caracterizam por envolverem uma composição de uma taxa fixa e uma parte variável.	- Referente ao tipo de relação: não identificamos variação quanto à forma de relação estabelecida - Relacionada à apresentação dos elementos: comparação multiplicativa por intermédio de um número na representação decimal ou fracionária relacionado à porcentagem.
Comparação multiplicativa e transformação de medidas	Situações em que a variável dependente é o estado final de uma transformação. Nas situações-problema identificadas o estado inicial é variável e a transformação também é variável e resultante de	- Referente ao tipo de relação: não identificamos variação quanto à forma de relação estabelecida; transformação negativa. - Relacionada à apresentação dos elementos: comparação multiplicativa por intermédio de um número na

	uma comparação multiplicativa. As situações identificadas estão relacionadas ao contexto de desconto.	representação decimal ou fracionária, relacionada à porcentagem.
Proporção Simples e composição de transformações, transformação de medidas	Situações com características semelhantes às da categoria proporção simples e transformação de medidas. As situações identificadas apresentam duas transformações sobre o estado inicial, sendo uma positiva e uma negativa.	- Referente ao tipo de relação: não identificamos variação quanto à forma de relação estabelecida; apresenta uma relação positiva e uma negativa. - Relacionada à apresentação dos elementos: ausência do estado inicial.
Comparação multiplicativa e proporção simples	Situações que apresentam duas relações multiplicativas, sendo que a variável dependente é resultado de uma relação de proporção simples em relação a uma parte variável, resultante de uma comparação multiplicativa	- Referente ao tipo de relação: não identificamos variação quanto à forma de relação estabelecida. - Relacionada à apresentação dos elementos: comparação multiplicativa por intermédio de um número na representação decimal ou fracionária, relacionada à porcentagem.

Quadro 25: Caracterização de situações-problema que envolvem conceito de função afim
Fonte: a autora

Neste quadro, apresentou-se, juntamente com as variações identificadas, as variações quanto às relações, de acordo com as subclasses de problemas das categorias de problemas das Estruturas Aditivas e das Estruturas Multiplicativas. Entende-se que estas variações podem estar associadas a um maior ou menor nível de dificuldade de cada problema.

Além disso, para cada categoria é possível apresentar características gerais sobre as relações envolvidas, de forma que os cálculos relacionais envolvidos para a categoria considerada se repetem, representando esses pelos esquemas relacionais (ou esquema sagital) apresentado na análise desta pesquisa.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, investigamos situações-problema relacionadas ao conceito de função afim presentes em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, com intuito de categorizá-las na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais.

A partir de investigações relacionadas ao conceito de função (CARAÇA, 1963, TINOCO, 2002; NOGUEIRA, 2014; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006); os indicativos de imbricações entre Campos Conceituais (TELES, 2010; VERGNAUD, 2009a; 2009b); e assumindo como referencial teórico a teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1993; 2009a; 2009b; 2011; 2017), buscamos, nesta pesquisa, investigar a diversidade de situações-problema de função afim, adotando como princípio as classificações estabelecidas por Vergnaud (2009a; 2009b) para as estruturas aditiva e multiplicativas.

A proposta do GEPEDiMa de estabelecer o Campo Conceitual da função afim, nos levou à proposta de pesquisa de Mestrado, relacionada à identificação de diferentes situações do conceito de função afim, uma vez que, de acordo com Vergnaud (1993; 2009a, 2009b, 2011), um campo conceitual pode ser estabelecido como um conjunto diferentes situações que dão sentido ao conceito, e que um conceito não se desenvolve isoladamente, mas por meio de conjuntos indissociáveis S – Situações, I – Invariantes operatórios e R – Representações.

Nesta pesquisa, o estudo das diferentes situações-problema que envolvem o conceito de função afim tem como referência as relações estabelecidas entre as medidas (os elementos) envolvidos nas situações (ternárias ou quaternárias), o tipo de relação em questão (Estruturas Aditivas e/ou Estruturas Multiplicativas), sendo classificadas como puramente aditiva, puramente multiplicativa ou mista e as combinações dos tipos de relações. As combinações de relações do campo conceitual aditivo e do campo conceitual multiplicativo deram origem à um conjunto de possíveis tipos de problemas mistos e estas foram identificadas em situações-problema de função afim, estabelecendo novas categorias, como, por exemplo, *proporção simples e transformação de medidas*.

Como percurso metodológico, realizamos o levantamento relacionado aos livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD dos anos de 2017 e 2018, dos níveis de Ensino Fundamental e Ensino Médio adotados em colégios pertencentes ao NRE de Campo Mourão, seguido pelo levantamento de situações-problema nas obras que apresentavam uma abordagem ao conceito de função afim e desenvolvemos um estudo piloto com estudos iniciais para o estabelecimento possíveis categorias de problemas de função afim, no que se refere ao estudo das relações estabelecidas entre os elementos presentes no enunciado de situações-problema.

Nossos estudos preliminares, dentre eles Vergnaud (2009b), nos deram embasamento para a análise de problemas algébricos e mistos, e indicaram a possibilidade de associar situações-problema envolvendo o conceito de função afim com problemas mistos. Com este direcionamento, o estudo piloto foi importante para delimitar os critérios de análise, e para constatarmos que as situações-problema de função afim são passíveis de serem analisadas, mediante os estudos relacionados às estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas.

Neste contexto, as situações-problema foram identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, no capítulo voltado ao estudo de função afim e no conjunto de atividades propostas ao aluno, ao término da apresentação do conteúdo.

Como já mencionado, tivemos como objetivo geral desta pesquisa categorizar situações-problema que envolvem o conceito de função afim, na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, sendo que as situações-problema foram identificadas em livros didáticos de matemática.

Para as análises, foram consideradas as classificações de situações propostas por Vergnaud (2009a; 2009b), bem como os estudos de Gitirana *et al* (2014), Zanella e Barros (2014), Magina e Porto (2018) e Magina, Merlini e Santos (2014) relacionados às estruturas aditivas e às estruturas multiplicativas. Sendo seis (06) classes relacionadas às estruturas aditivas, a saber: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação; composição de relações, e cinco (05) classes relacionadas às estruturas multiplicativas, sendo: proporção simples; comparação multiplicativa; produto de medidas; função bilinear; e proporção múltipla. As possíveis variações de cada classe também foram levadas em consideração (totalizando 15 subclasses), como, por exemplo, no caso da composição de medidas, pertencente às Estruturas Aditivas - podemos considerar o caso em que a composição é o termo desconhecido ou em que uma das partes é desconhecida.

No que tange à categorização de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, à luz da teoria dos Campos Conceituais, identificamos nesta pesquisa um total de 89 situações-problema e constatamos 09 categorias de situações, a saber: proporção simples; produto de medidas; composição de medidas; proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas; comparação multiplicativa e transformação de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples.

Considerando as categorias em questão, e de acordo com as situações-problema identificadas, apontamos as seguintes variações no que diz respeito aos tipos de relações que foram estabelecidas (QUADRO 26):

Categoria	Variações quanto ao tipo de relação estabelecida
Proporção Simples	Proporção simples – *um para muitos*
	Proporção simples – *quarta proporcional*
Produto de Medidas	Produto desconhecido
Composição de medidas	Composição de medidas (composição desconhecida)
	Composição de medidas (parte desconhecida)
Proporção Simples e Composição de medidas	Proporção simples *um para muitos* e composição de medidas (composição desconhecida)
	Proporção simples um para muitos e composição de medidas (parte desconhecida)
	Proporção simples *quarta proporcional* e composição de medidas (composição desconhecida)
Proporção simples e transformação de medidas	Proporção simples *um para muitos* e transformação de medidas (transformação positiva)
	Proporção simples *um para muitos* e transformação de medidas (transformação negativa)
	Proporção simples *quarta proporcional* e transformação de medidas (transformação positiva)

Comparação Multiplicativa e Composição de Medidas	Comparação Multiplicativa (referido desconhecido) e composição de medidas (composição desconhecida)
Comparação Multiplicativa e transformação de medidas	Comparação Multiplicativa (referido desconhecido) e transformação de medidas (transformação negativa)
Proporção Simples, composição de transformações e transformação de medidas	Proporção simples *um para muitos*, composição de transformações (transformações elementares – uma negativa e uma positiva) e transformação de medidas (transformação positiva)
Comparação multiplicativa e proporção simples	Comparação multiplicativa (referido desconhecido) e proporção de medidas *um para muitos*

Quadro 26: Subclasses de situações que envolvem o conceito de função afim
Fonte: a autora

Sendo assim, nesta pesquisa identificamos um total de 15 subclasses de problemas de função afim, a partir das sete (07) categorias principais. Além disso, identificamos alguns fatores que podem ser modificadores do nível de dificuldade da situação, relacionados ao modo de apresentação dos elementos da situação (QUADRO 25): apresentação de dados em gráfico ou tabela; apresentação de dados em figura relacionada ao enunciado; interpretação de escalas; conversão de medidas; ausências de taxas de forma explícita no enunciado (como a ausência da taxa de proporção e ausência do valor fixo).

Ainda, no que se refere à variação da estrutura das situações identificadas, ou seja, variações como se estabelece as relações entre os elementos em uma determinada categoria, cinco (05) categorias apresentam apenas uma variação: produto de medidas (01); comparação de medidas e composição de medidas (05); comparação multiplicativa e transformação de medidas (03); proporção simples + composição de transformações e transformação de medidas (02); e comparação multiplicativa e proporção simples (01). A ausência de variação referente ao tipo de relação estabelecida entre os elementos presentes nas situações identificadas, nestes casos, pode ser resultado da baixa quantidade de situações-problema associadas a estas categorias.

As categorias com mais situações-problema foram: proporção simples (31) e proporção simples e composição de medidas (33). No caso da categoria proporção de medidas e composição de medidas, para a variação proporção simples – *um para muitos* e composição de medidas (composição desconhecida), identificamos 26 situações.

A verificação da frequência maior ou menor das situações-problema identificadas em cada categoria nos faz questionar sobre a ocorrência destas categorias de problemas em outras fontes de pesquisa e na prática do professor de matemática, assim como as dificuldades relacionadas a estes tipos de situações e em como os elementos modificadores identificados (e a serem identificados em pesquisas futuras) influenciam nesta dificuldade.

A constatação do quantitativo de situações-problema nas categorias identificadas nesta pesquisa, mencionada anteriormente, indica a necessidade de outros estudos que possam ampliar a tipologia aqui proposta, bem como a importância de se analisar outras fontes como, por exemplo, outros livros didáticos, avaliações nacionais e internacionais, como, por exemplo, do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio – e as avaliações do PISA – Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes), vestibulares entre outros documentos voltados ao ensino de função afim.

Desta forma, consideramos pertinente a existência de outras pesquisas no que tange ao estabelecimento de uma tipologia de situações de função afim à luz da teoria dos Campos Conceituais, bem como consideramos importante pesquisas que analisem conhecimentos e esquemas mobilizados por alunos na resolução destes diferentes tipos de situações de função afim.

Destacamos a pertinência deste estudo quanto aos diferentes tipos de situações-problema que envolvem o conceito de função afim, pois, de acordo com a teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), o sentido que os sujeitos atribuem a um conceito depende da variedade de situações que eles enfrentam durante o processo escolar.

Esperamos que a presente pesquisa venha contribuir para o estudo do conceito de função afim na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, caminhando para o estabelecimento do Campo Conceitual das Funções; para o estabelecimento de uma tipologia de situações do conceito de função afim; para o ensino de funções mediante a abordagem de diferentes tipos de situações; para autores e professores que utilizam livros didáticos, no que diz respeito às diferentes situações que envolvem o conceito de função afim.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática** (Edição Renovada). 4ª ed. Editora do Brasil: 2015.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: Interação e Tecnologia. Vol.1. 2 ed. São Paulo: Leya, 2016.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática – Bianchini.** 8ª ed. Moderna: 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular –** Ensino Médio. Brasília, DF, 2016.

CAMPITELI, Heliana Cioccia; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1963, p. 107-139.

CHAVANTE, Eduardo. **Convergências – Matemática.** 1ª ed. SM: 2015.

DANTE, Luiz Roberto. Livro didático de Matemática: uso ou abuso? In: **Revista Em Aberto**. Brasília: INEP. Ano 16. n.69, p.83-90, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – contexto e aplicações**. 3ª ed. Editora Ática: 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris – Matemática.** 2ª ed. Editora Ática: 2015.

DEGENSZAJN, David; IEZZI, Gelson; ALMEIDA, Nilze de; DOLCE, Osvaldo; PÉRIGO, Roberto. **Matemática: ciências e aplicações**. 9ª Ed. Saraiva Educação: 2016.

GAY, Mara Regina Garcia. **Projeto Araribá – Matemática.** 1ª ed. Moderna: 2014.

GITIRANA, Verônica *et al*. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2014.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio –** Volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2006.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; MERLINI, Vera Lucia; SANTOS, Aparecido dos**.** O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Online)**, v. 20, n.2, p. 517-533, 2014.

MAGINA, Sandra; PORTO, Rozimeire Soares de Oliveira. **É possível se ter Raciocínio Funcional no nível dos anos iniciais?** Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. In: VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Foz do Iguaçu, 2018.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Uma análise de situações-problemas relacionadas ao conceito de função afim à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** In: XXII EBRAPEM – Encontro Brasileito de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Belo Horizonte - MG, 2018.

MIRANDA, Clarice de Almeida; REZENDE, Verdiana; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. **Uma análise de situações relacionadas ao conceito de função afim na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. In: IV SEA – Simpósio Nacional de Ensino e Apredizagem: Atualidades, prospectivas e desafios, Londrina - PR, 2018.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; LOPES, Tânia Maria Rodrigues; OLIVEIRA. João Luzeilton de. Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE. In: **Revista Thema**. v. 14. n.4. 2017. p. 100-113.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Construindo o conceito de funções. In: NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; RAMOS, Antoneli da Silva; REJANI, Fernanda Campanha. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ. Núcleo de Educação a Distância, 2014. 121 p.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de Função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 174 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAIVA, Manoel. **Matemática - Paiva.** 3ª ed. Moderna: 2016.

PAVAN, Luciane Regina. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª serie do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas.** 2010. 195 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2010.

PAVAN, Luciane Regina; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; KATO, Lilian Akemi. **As relações entre o Campo Conceitual Multiplicativo e as ideias básicas do conceito de função:** um estudo com crianças da 4ª série (5º ano) do Ensino Fundamental. In: Anais do X Encontro paranaense de Educação Matemática. Unicentro, Guarapuava, 2009.

PRESTES, Diego; CHAVANT, Eduardo. **Quadrante – Matemática**. 1ª ed. SM: 2016.

QUEIROZ, Páblo Carcheski de. **Uma proposta para o Ensino de função articulando as linguagens algébrica e geométrica.** 2014. 158 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande – MS, 2014.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SALES, Antonio; FIGUEIREDO, Sonner Arfux de; SOUZA, Mauro Eduardo de; REIS, Maurício Soares dos. A escolha do livro didático pelo professor de matemática**.** In: **Revista da Faculdade de Educação.** Ano VI. n. 9. jan./jun. 2008. p. 73-89.

SANTANA, Aveilson José de. **Análise das praxeologias matemáticas em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio:** o caso da função afim. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife, 2016.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática – compreensão e prática.** 3ª ed. Moderna: 2015.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo.** 1ª Ed. Saraiva Educação: 2016.

SOUZA, Emilia Isabel Rabelo; MAGINA, Sandra Maria Pinto. A Concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10, p. 797-815, 2017.

SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. **Contato Matemática.** 1ª ed. FTD: 2016.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber – Matemática.** 3ª ed. FTD: 2015.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage**, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009a. p. 13-35.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009b.

VERGNAUD, Gérard. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. In: **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1. 2011. p. 15-27.

VERGNAUD, Gérard. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud:** Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1-26.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Um estudo sobre a influência do Campo Algébrico na Resolução de situações que envolvem fórmulas de área. In. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. v.12. n.1. 2010. p. 129-142.

TINOCO, Lucia A. A. **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: Projeto Função, 2002.

ZANELLA, Marli Schmitt; BARROS, Rui Marcos de Oliveira. **Teoria dos Campos Conceituais:** situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais. 1. ed. – Curitiba, PR: CRV, 2014.