UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM ENSINO (PPGEn)

ENSINO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUANI GRIGGIO LANGWINSKI

O ENSINO DE ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM OLHAR PARA A PRÁTICA DOS PROFESSORES DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

FOZ DO IGUAÇU, 2018

LUANI GRIGGIO LANGWINSKI

O ENSINO DE ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM OLHAR PARA A PRÁTICA DOS PROFESSORES DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM ENSINO (PPGEn)

ENSINO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino (PPGEn), Nível Mestrado, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE.
Orientadora: Drª. Tânia Stella Bassoi.

FOZ DO IGUAÇU, 2018

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Langwinski, Luani Griggio
O ensino de álgebra e os registros de representação semiótica: um olhar para a prática dos professores do 8° ano do ensino fundamental / Luani Griggio Langwinski; orientador(a), Tânia Stella Bassoi, 2018.
131 f.

Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Foz do Iguaçu, Centro de Educação, Letras e Saúde, Programa de Pós-Graduação em Ensino, 2018.

1. Registros de Representação Semiótica. 2. Ensino de Álgebra. 3. Professor de Matemática. I. Bassoi, Tânia Stella. II. Título.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Campus de Foz do Iguaçu - CNPJ 78.680.337/0004-27
Av. Tarquínio Joslin dos Santos, 1300 - Fone: (45) 3576-8100 - Fax: (45) 3576-2733
Pólo Universitário - CEP 85870-650 - Foz do Iguaçu - Paraná

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO

LUANI GRIGGIO LANGWINSKI

O ENSINO DE ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM OLHAR PARA A PRATICA DOS PROFESSORES DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ensino, área de concentração Ciências, Linguagens, Tecnologias e Cultura, linha de pesquisa Ensino em Ciências e Matemática, APROVADO(A) pela seguinte banca examinadora:

Orientador(a) - Tânia Stella Bassoi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Tiago Emanuel Klüber
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Etienne Cordeiro Guérios
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Celia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)

Foz do Iguaçu, 20 de fevereiro de 2018

AUTORIZAÇÃO PARA REPRODUÇÃO DO MATERIAL EM PDF

Eu, Luani Griggio Langwinski, autorizo a reprodução em PDF, no site da universidade, da dissertação de mestrado intitulada “O ENSINO DE ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM OLHAR PARA A PRÁTICA DOS PROFESSORES DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL”, apresentada ao Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Ensino, Nível Mestrado, da UNIOESTE.

Nome: Luani Griggio Langwinski

Foz do Iguaçu, 20 de fevereiro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Gratidão é o sentimento que toma conta de todo o meu ser ao pensar no trajeto desses dois anos de mestrado. É difícil encontrar palavras que possam expressar o meu agradecimento a todos que fizeram parte dessa trajetória. Contudo, alguns merecem ser lembrados.

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por ser o Senhor dos meus dias.

Agradeço a Maria, sob o título de Nossa Senhora Mãe da Divina Providência, pela interseção e proteção concedida a mim e aos meus.

Agradeço aos meus filhos Vitor e Otavio por ser a alegria dos meus dias e a força que me impulsiona a ser alguém melhor.

Agradeço ao meu esposo, amigo e companheiro Giovani, pelo apoio e incentivo, por estar ao meu lado e acreditar em mim.

Agradeço ao meu pai Nilton, homem justo e sincero, que partiu nesse período do mestrado, não podendo ver o término do trabalho. Obrigada meu amado pai, pelo exemplo de vida, pelos ensinamentos e a educação que me destes.

Agradeço a minha mãe Fátima, pela vida e pelo exemplo de fé, pelo amor e cuidado que tem pela minha família.

Agradeço ao meu irmão Giovani, aos meus sogros Venceslau e Sirlei, pelo carinho e apoio que sempre me deram.

Agradeço a minha orientadora, professora Drª Tânia Stella Bassoi, por ter me aceito e acreditado em mim. Por entender minhas limitações, pelos ensinamentos e orientações, pelas boas conversas e o café, por ter se tornado essa grande amiga.

Agradeço ao professor Dr Tiago Emanuel Klüber, por ter contribuído com minha formação enquanto pesquisadora, pela paciência com a minha ignorância, pelo exemplo de pesquisador sério e comprometido com a Educação.

Agradeço aos membros da banca, Ettiène Cordeiro Guérrios, Célia Finck Brandt e Tiago Emanuel Klüber que dedicaram tempo à leitura desse trabalho e aos professores Reginaldo Aparecido Zara e Marcos Lübek, meu singelo agradecimento pelas contribuições e observações.

Agradeço aos meus colegas de turma do mestrado, por fazerem parte dessa trajetória, pelas conversas prazerosas e pelos chorosos lamentos de mestrandos. Como sempre, com algumas pessoas nos identificamos mais e elas entram na nossa vida para fazer a diferença, obrigada Nadja, Steffany, Felipe, Dênis, Carlinha, Leidi, Patrick, Maria Helena e Dani, pelo sorriso, abraço apertado e conversas animadoras, que tornaram esta caminhada mais alegre.

Agradeço aos meus amigos professores, Susimeire, Evandro, Adriana, Thiago, Vanessa e Vânia, que de alguma maneira contribuíram com este trabalho.

Agradeço aos meus colegas de profissão docente, que abriram as portas de sua sala de aula para que eu pudesse compartilhar de suas experiências, anseios e práticas, e assim, crescer como pessoa, como pesquisadora e profissional na área da Educação.

Agradeço também a secretária Claudete, aos professores e a coordenação do Programa de Pós-Graduação *strictu sensu* em Ensino (PPGEn) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, campus Foz do Iguaçu, por todo o suporte.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Minha segurança se funda na convicção de que sei algo e de que ignoro algo a que se junta a certeza de que posso saber melhor o que já sei e conhecer o que ainda não sei. Minha segurança se alicerça no saber confirmado pela própria experiência de que, se minha inconclusão, de que sou consciente, atesta, de um lado minha ignorância, me abre de outro, o caminho para o conhecer. (Paulo Freire, 1996).

LISTA DE ABREVIATURAS

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAAE - Certificado de Apresentação para Apreciação Ética
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP - Comitê de Ética em Pesquisa
LD - Livro Didático
MGPCA - Grade Multidimensional para Competência Profissional em Álgebra Elementar
PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais
PR - Paraná
PSS - Processo Seletivo Simplificado
RRS - Registros de Representação Semiótica
SE - Sergipe
TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
USP - Universidade de São Paulo

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Esta é uma pesquisa qualitativa de natureza compreensiva, que teve como objetivo compreender e analisar como o professor mobiliza os registros algébricos em aulas de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental, realizada nos colégios estaduais do município de Santa Terezinha de Itaipu/PR, a fim de identificar e compreender as formas de abordagens do ensino de Álgebra utilizadas por eles para a formalização desse ensino. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram a entrevista semiestruturada, as observações e filmagens das aulas observadas e o diário de campo. Para auxiliar na análise e discussão dos dados adotamos como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semióticas (TRRS) de Raymond Duval. Direcionamos nosso olhar para a introdução do ensino de Álgebra, desse modo, os conteúdos matemáticos observados foram expressões algébricas, divisão e potenciação de monômios, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios e produtos notáveis. Da análise dos registros de representação utilizados, produzidos e elaborados pelos professores cabe destacar que: existe um esforço por parte dos professores em minimizar as dificuldades dos alunos, para isso fazem analogias, em que se destacam as representações geométrica e numérica. Apesar disso, percebemos o destaque dado ao tratamento algébrico. Como conclusão pode-se ressaltar que os diferentes registros utilizados pelos professores possibilitam uma melhor compreensão do conteúdo ensinado, contudo, o cuidado, principalmente com o registro falado e a relação entre o significado dado pelo professor e a significação atribuída pelo aluno devem ser sempre objetos de atenção.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica; Ensino de Álgebra; Professor de Matemática.

THE TEACHING OF ALGEBRA AND THE RECORDS OF SEMIOTIC REPRESENTATION: A LOOK AT THE PRACTICE OF THE TEACHERS OF THE 8TH YEAR OF FUNDAMENTAL EDUCATION

ABSTRACT

This is a qualitative research of a comprehensive nature; its objective was to understand and analyze how the teacher mobilizes the algebraic registers in Mathematics classes of the 8th year of Basic Education. The research was done in state schools in Santa Terezinha de Itaipu/PR, Brazil, to identify and understand the approaches of the teaching of Algebra used by the teachers for the formalization of this teaching. The instruments used for the data collection were the semi-structured interview, observations and filming of the observed classes and the field diary. We adopted Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS) as a reference to assist in the analysis and discussion of data. We investigate the introduction of Algebra teaching; we observe the mathematical contents: algebraic expressions, division and potentiation of monomials, operations of addition, subtraction, multiplication and division of polynomials and notable products. From the analysis of the representation registers used, produced and elaborated by the teachers, it is worth noting that: there is an effort on the part of the teachers to minimize the difficulties of the students, for that they make analogies, in which the geometric and numerical representations stand out. Despite this, we note the emphasis given to algebraic treatment. As a conclusion, we emphasize that the different registers used by teachers make possible a better understanding of the content taught, however, especially, the care with the spoken register and the relation between the meaning given by the teacher and the significance assigned by the student must always be objects of attention.

Keywords: Semiotic Representation Registers; Teaching Algebra; Math’s teacher.

LA ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA: UNA MIRADA PARA LA PRÁCTICA DE LOS PROFESORES DEL 8º AÑO DE LA ENSEÑANZA FUNDAMENTAL

RESUMEN

Esta es una investigación cualitativa de naturaleza comprensiva cuyo objetivo fue comprender y analizar como los profesores movilizan los registros algébricos en las clases de matemática del 8º año de la Educación Básica. Se llevó a cabo la investigación en colegios provinciales en la ciudad de Santa Terezinha do Itaipú/PR, Brasil, con la intención de identificar y comprender las formas de abordaje de la enseñanza del álgebra utilizadas por los profesores para formalizar esa enseñanza. Los instrumentos de recolección de datos usados fueran las entrevistas semiestructuradas, observaciones y grabaciones de clases observadas y el diario de campo. Adoptamos la Teoría Semiótica de Representación de Registros (TRRS) de Raymond Duval como referencia para auxiliar en los análisis y en las discusiones de los datos. Investigamos la introducción de la enseñanza del álgebra; observamos los contenidos matemáticos: expresiones algébricas, división y potenciación de los monomios, las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios y productos notables. Del análisis del registro de representación utilizados, producidos y elaborados por los profesores, destacamos que: existe un esfuerzo por parte de los profesores en minimizar las dificultades de los alumnos, para eso hacen analogías, en que se destacan las representaciones geométricas y numéricas. A pesar de ello, percibimos el destaque dado al tratamiento algébrico. Como conclusión, resaltamos que los diferentes registros utilizados por los profesores posibilitan una mejor compresión de los contenidos enseñados, sin embargo, especialmente, el cuidado con los registros hablados y la relación entre el significado dado por el profesor y la significación dada por el alumno deben ser siempre objetos de atención.

Palabras clave: Registros de Representación Semiótica; Enseñanza de Álgebra; Profesor de Matemática.

Sumário

INTRODUÇÃO

Segundo Condillac (1979) a língua da matemática é a Álgebra. Para ele a Álgebra é uma língua na qual traduzimos o raciocínio que fazemos por palavras. Desse modo, todas as soluções algébricas oferecem a mesma linguagem, ou seja, raciocínio expresso por letras. A Álgebra é para Condillac a mais metódica das línguas e desenvolve raciocínios que não se poderia traduzir em nenhuma outra.

> A álgebra é, com efeito, um método analítico, mas não deixa de ser uma língua, pois todas as línguas são métodos analíticos. Ora, é o que elas são efetivamente. Mas a álgebra é uma prova decisiva de que os progressos das ciências dependem unicamente dos progressos das línguas e que somente línguas bem feitas poderiam dar à análise o grau de simplicidade e de precisão do qual é suscetível, seguindo o gênero de nossos estudos. (CONDILLAC, 1979, p. 124).

A Álgebra se apresenta como uma linguagem matemática estruturada por rígidas regras e formalizações. O estudo da Álgebra compõe um espaço bastante significativo de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (DUVAL, 2011). Contudo, existem dificuldades relativas ao fazer pedagógico com a linguagem algébrica e em cálculos algébricos realizados que impossibilitam a compreensão dos conceitos associados (KIERAN, 1995).

Os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) indicam como um dos objetivos do ensino fundamental fazer com que os alunos sejam capazes de utilizar diferentes linguagens como "[...] meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias" (BRASIL, 1998, p. 4). Ao se comunicar matematicamente o aluno deve "[...] descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas" (ibidem, p. 48).

O objetivo do ensino da Matemática, especificamente o ensino de Álgebra é, fornecer instrumentos para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, análise, interpretação, visualização, permitindo a capacidade de construção do aluno em relação ao saber que lhe é ensinado, fazendo-o pensar, interrogar, argumentar, crescendo emocional, social e cognitivamente. (ANDRADE, 2008).

Ante as afirmações expostas e dada a importância dessa área da Matemática, o ensino e a aprendizagem da Álgebra, apesar de ocuparem no campo da pesquisa, um espaço significativo e complexo, parece ainda não ter avançado - ou as pesquisas não chegam até o professor, ou o professor não vê a pesquisa como um auxílio para seus propósitos pedagógicos. Sendo ele um ser ativo na sociedade, realiza “um trabalho que não é simples nem previsível, mas complexo e enormemente influenciado pelas próprias decisões e ações” (TARDIF, 2014, p. 236-237).

A linguagem matemática não é simples como a língua materna ou língua natural[1]. Ela é construída e necessita da língua natural para essa construção. A língua natural permite produzir uma variedade de tipos de discursos (DUVAL, 2011). É pelo discurso que expressamos o que estamos pensando, mas é preciso primeiramente tomar consciência e objetivar esse pensamento para então torná-lo explícito aos outros, quer dizer, não se trata de codificar um pensamento já explícito.

Similarmente, compreender não é decodificar uma frase ou o enunciado de um problema, “mas discriminar as unidades de sentido em função de diferentes níveis de organização dos discursos e eventualmente reformulá-los.” (DUVAL, 2011, p. 75). Segundo este autor, todo discurso produzido oralmente ou escrito, se decompõe em unidades de sentido que são determinadas pelas operações discursivas, a saber: a enunciação, a designação e a expansão discursiva. Intimamente ligadas ao conhecimento, à compreensão e à conscientização.

Matematicamente os alunos lidam com objetos que não estão presentes, que não são visíveis. O acesso a esses objetos só pode ser feito pelas suas representações, levando-nos a refletir que função tem as representações nesta aprendizagem. Assim, nesta pesquisa utilizamos como aporte teórico os Registros de Representação Semiótica, direcionando nosso olhar para as atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão realizados pelos professores nas aulas de matemática e como isso se efetiva no ensino de Álgebra.

Para tanto, dividimos o texto em sete partes, ao passo que, na segunda apresentamos a justificativa e a delimitação do nosso problema.

A terceira parte é dedicada à revisão de literatura, evidenciando o que mostram as pesquisas com os professores sobre o ensino de Álgebra e o que se concebe sobre esse ensino.

---

[1] Para Duval (2011) a língua natural são discursos que podem ser produzidos oralmente ou em forma de escrita.

A Teoria dos Registros de Representações Semiótica[2] (DUVAL, 2003, 2009, 2011, 2016), bem como o ensino de Álgebra relacionado a ela (DUVAL et al., 2014) são apresentados na quarta seção deste trabalho.

Na sequência explicitamos a metodologia assumida e detalhamos os procedimentos metodológicos utilizados, apresentando também os sujeitos da pesquisa.

A sexta parte é reservada as análises e discussões dos dados e encerrando, na sétima seção, mostraremos as conclusões da pesquisa.

[2] Para Duval (2016) autor dessa teoria, a exigência epistemológica fundamental é não confundir representação e objeto representado.

2 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

> *Tratai-o de acordo com a sua idade, apesar das aparências, e preocupai-vos em não exaurir as suas forças exercitando-as excessivamente. Se o seu cérebro se aquece, se percebei que começa a ferver, deixai-o primeiro fermentar em liberdade, mas atentai a não exercitá-lo mais do que o necessário, se não quereis que evapore inteiramente; quando, depois os primeiros entusiasmos acesos desaparecerem, freai os outros, reprimindo-os até que, com os anos, tudo se transforme em um calor de vida, em verdadeira força.(Jean-Jacques Rousseau).*

Durante a minha[3] vida escolar como estudante no Ensino Básico, posso considerar que fui uma "boa aluna", sempre muito esforçada, com excelentes notas, principalmente na disciplina de Matemática. Tinha boa memorização, habilidade no cálculo mental e na repetição de procedimentos, resolver o algoritmo não era problema para mim. Apaixonada por ensinar e pelo gosto em estudar Matemática, decidi ser professora na referida área.

Em 2011 iniciei a graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, campus Foz do Iguaçu. Apesar do destaque nas notas e das habilidades nos cálculos e resolução das fórmulas como aluna na Educação Básica, na graduação tive dificuldade nas disciplinas de Álgebra Linear, Estruturas Algébricas, Variáveis Complexas e Análise Real, algo considerado normal para o curso de Matemática.

Contudo, a abstração e generalização das demonstrações nessas disciplinas, foram se tornando obstáculos cada vez maiores para o meu aprendizado, precisava fazer um esforço enorme para entender o conteúdo e, intensificar meus estudos que, por vezes, para as provas, o jeito era decorar. O mais interessante é que minhas limitações estavam em entender alguns passos simples, como as regras básicas das operações matemáticas nas generalizações.

Foi ainda durante a graduação, mais especificamente no 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática, quando lecionei como professora substituta do Processo Seletivo Simplificado (PSS), em turmas de 7os anos e 2º e 3º séries do Ensino Médio e percebi que grande parte desses alunos apresentava dificuldades de compreensão do conteúdo relacionado à Álgebra, as quais eram relacionadas às regras básicas da aritmética, das propriedades comutativa, em relação à adição *(a +*

---

[3] Os verbos utilizados nessa seção estão em primeira pessoa do singular por referir-se a um pouco da trajetória estudantil e docente que me levou a pesquisar sobre o tema.

b = b + a) e à multiplicação *(a . b = b . a)* e distributiva da multiplicação em relação à adição *(a . (b + c) = a . b + a . c)*.

A partir das dificuldades dos alunos por mim observadas, surgiu uma inquietação. Procurei uma das professoras da graduação e conversamos sobre as dificuldades dos alunos e como lidar com isso. Foi então que ela propôs que eu pesquisasse sobre Pensamento Algébrico[4] e começamos a estudar sobre o assunto, gerando assim a escrita da minha monografia.

A partir disto, para a elaboração da monografia (LANGWINSKI, 2014), fundamentamos nossa pesquisa nas propostas de Canavarro (2007), Coxford e Shulte (1995), Cyrino e Oliveira (2011), Lins e Gimenez (1997) e Ponte (2005, 2006, 2008, 2013). Pude assim compreender um pouco melhor a definição da expressão *pensamento algébrico* na perspectiva da Educação Matemática e descobrir a importância do desenvolvimento desse pensamento nos alunos e sua contribuição para o ensino de Álgebra.

Como metodologia analisamos atividades propostas por Alvarenga e Vale (2007), Canavarro (2007), Cyrino e Oliveira (2011), Mendes et al. (2010) e de Santos (2008) para o ensino de Álgebra. Concluímos que muitas das atividades analisadas podem ser trabalhadas em diferentes formas de abordagens desde a aritmetização da Álgebra até o pensamento funcional, dependendo da série em que se encontram os alunos.

Concluí a graduação no ano de 2014 e no ano seguinte lecionei em turmas do 1º, 2º e 3º séries do Ensino Médio. Não compreendia como alunos de tais séries tinham tanta dificuldade em generalizar situações matemáticas e manipular símbolos algebricamente. Como professora recém-formada, comecei a buscar maneiras diversificadas para ensinar, trazendo para as aulas materiais manipuláveis como *Tangram* e a *Torre de Hanói*[5] e sólidos geométricos, além do livro didático, atividades extras como gráficos e tabelas retirados de jornais e revistas para serem

---

[4] O pensamento algébrico é uma forma de representar e dar sentido aos objetos da Álgebra, no conjunto da generalização destes objetos. Assim, há um olhar diferenciado para os símbolos no qual estes passarão a ser compreendidos como um instrumento para raciocinar e compreender a Álgebra, e não mais apenas como o estudo ou uso deles. (LANGWINSKI, 2014).

[5] O tangram e a Torre de Hanói são jogos matemáticos capazes de contribuir para o desenvolvimento da memória, da criatividade e raciocínio lógico. Maiores informações acesse < http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/curiosidades/tangram.htm > e < https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/torre-hanoi.htm >.

analisados e documentários disponíveis na *internet* para serem discutidos, buscando sempre relacioná-los com os conteúdos que estavam sendo trabalhados.

Foi esse anseio em o que fazer e como fazer, que me levou à pesquisa, bem como afirma D'Ambrósio (1997, p.79) “Pesquisa é o que permite a interface entre teoria e prática.”. Desse modo, pesquisando em *sites* educacionais e olhando os editais dos cursos de pós-graduação da Unioeste, vi que estavam abertas as inscrições para seleção de candidatos a aluno especial, na disciplina eletiva, *Ciências, Cotidiano e Tecnologias*. Escrevi a carta de intenção e fui selecionada.

Durante as aulas dessa disciplina, tive acesso a textos e discussões que oportunizaram reflexões sobre a pesquisa e o ensino, aguçando ainda mais o desejo de pesquisar. A partir disso, surgiu o interesse de fazer o Mestrado. Escrevi o projeto e no início do ano de 2016 entrei como aluna regular do Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Ensino - Nível Mestrado, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Campus Foz do Iguaçu.

Ao ingressar no programa, eu e minha colega, iniciamos os estudos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como tema de pesquisa do grupo de estudos assumido pela orientadora. A partir do reconhecimento de que os objetos matemáticos só se deixam reconhecer pelas suas representações (DUVAL, 2004, 2009) que por sua vez, não são os objetos, foi possível compreender as dificuldades tanto na aprendizagem quanto no ensino da Matemática.

Buscou-se na literatura, trabalhos que tratavam do ensino de Álgebra e da ação do professor que ensina Álgebra, para delimitar nosso problema.

Norteados pelo problema: que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra? Que tipo de processo de composição dos conhecimentos a adquirir pode ser visualizado nas atividades propostas?

Objetivamos nesta pesquisa, compreender o(s) modo(s) como o professor mobiliza os conteúdos algébricos em aulas de matemática, especificamente, analisar a partir dos métodos de análise de problemas de aprendizagem (Quadro 12) propostos por Duval et al. (2014), buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica: i) escrever uma relação entre duas listas de dados; ii) colocar em forma de equação os dados de problemas da realidade; iii) fórmulas para utilizar na realidade e iv) equações para resolver (Quadro 13).

3 REVISÃO DE LITERATURA

Para a revisão de literatura fizemos uma busca no Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no Banco de Dissertação e Teses da Capes, no Google Acadêmico, na Plataforma Sucupira, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e acessos em Revistas Eletrônicas e periódicos. As buscas foram feitas de maio de 2016 a junho de 2017. Utilizando expressões e palavras chave como: Ensino de Álgebra, Álgebra Elementar, Álgebra no 8º ano do Ensino Fundamental, professor de Matemática que ensina Álgebra e Registro de Representação Semiótica, tivemos um vasto material sobre o assunto.

Os critérios para a seleção dos trabalhos foram: trabalhos que tinham como sujeito de pesquisa os professores de Matemática que ensinam Álgebra, trabalhos que utilizaram como referencial teórico os Registros de Representação Semiótica e os que abordavam os conteúdos de Álgebra com alunos do 8º ano, dando prioridade aos que se encontravam no período de 2010 a 2016. Considerando que trabalhos como o de Brandt e Moretti (2014) e Colombo; Flores e Moretti (2008) haviam feito esta revisão em períodos anteriores.

Entre os trabalhos selecionados encontram-se teses, dissertações e artigos. O Anexo D traz um quadro com todos os trabalhos utilizados na revisão de literatura. Sendo assim, organizamos esta seção em quatro eixos.

Primeiramente apresentamos as pesquisas que tratam do ensino de Álgebra e da ação do professor que ensina Álgebra, seguida de uma breve revisão das concepções do termo *pensamento algébrico*.

O terceiro eixo intitulado as ideias da Álgebra no ensino, apresenta os estudos de pesquisadores da Educação Matemática preocupados com o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Por fim, apresentamos reflexões sobre o saber do professor perante o ensino de Álgebra.

3.1 O que mostram as pesquisas com professores que ensinam Álgebra

Compreender como se desenvolve o conhecimento algébrico na atividade humana, como ocorre a apropriação desse conhecimento e de que forma o conceito algébrico pode ser tratado como objeto de ensino sem perder sua especificidade, tem sido preocupação de muitos pesquisadores e instituições de ensino. Após revisão de literatura, olhando para o sujeito, “o professor de matemática” que ensina Álgebra, buscamos nesta seção apresentar os resultados das pesquisas realizadas com professores.

A pesquisa de Bassoi (2006, p. 22) buscou entender os recursos, as intervenções e os elementos auxiliares do fazer do professor, como o livro didático, em aulas que possibilitam a utilização e compreensão das representações como forma de acessar o objeto matemático em questão, uma vez que é o professor que decide a forma de abordagem.

Sua pesquisa teve como objetivo identificar, analisar e discutir os tratamentos e conversões de diferentes registros de representações do objeto matemático função usados por uma professora e seus alunos do 9º ano. A pesquisa aconteceu numa escola pública da periferia de Curitiba. Teve como sujeito uma única professora, escolhida pelos seguintes critérios: tempo de trabalho docente; é reconhecida profissionalmente pela qualidade de seu trabalho desenvolvido; participou de vários projetos de formação continuada de professores; é autora do livro didático de matemática adotado na escola. A turma foi selecionada com o critério dos alunos estarem cursando o 9º ano pela primeira vez.

Bassoi (2006) ressalta como ponto positivo na prática da professora em sala de aula a sua capacidade em conduzir os alunos a participarem atentamente da aula, favorecendo um ambiente de ajuda mutua e o modo como se reportava aos alunos que estavam dispersos e conversando, fazendo-lhes perguntas sobre o conteúdo para que retomassem a atenção e para aqueles que não sabiam responder ela retomava com eles o que não tinham entendido.

Segundo a pesquisadora, foi notória a predileção da professora pelo ensino da geometria para o ensino de funções, tendo em vista que era a responsável pelas atividades do livro didático e o modo como fazia as intervenções em suas aulas, sempre optando por conversões e transformações figurais, apresentando um caminho geométrico em boa parte dos exercícios e atividades propostas. Constatando que “o professor tende a organizar seu trabalho enfatizando os conteúdos que prefere e domina” (BASSOI, 2006, p. 21).

A pesquisa de Jacomelli (2006) teve por objetivo conhecer como duas coleções de livros didáticos de 6º a 9º Ano sendo: *Matemática* – Coleção 5ª a 8ª séries, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis e *Matemática, Uma aventura do* *pensamento*, de Oscar Guelli, e um professor de 8º Ano desenvolvem um trabalho contemplando o registro em linguagem natural e em linguagem algébrica, em termos de conversão e tratamento.

Restringimo-nos a olhar os resultados dessa pesquisa, apenas quanto ao professor. Segundo a pesquisadora o professor se contradiz na entrevista com a sua prática.

> Há um momento na entrevista em que o professor se contradiz, quando o assunto é *Álgebra como conteúdo complicado* ele diz que os alunos têm dificuldades, pois os LD apresentam o conteúdo de Álgebra "no contexto da geometria e os alunos não sabem geometria", depois ao ser solicitado que dê um exemplo de *abordagem da Álgebra* declara que é por meio do estudo de situações problemas envolvendo figuras planas, [...] é observado que o professor opta por essa abordagem, mesmo tendo relatado [...] uma crítica ao estudo da Álgebra usando geometria. (JACOMELLI, 2006, p. 89).

De acordo a autora o professor trabalhou com uma abordagem no contexto da geometria para introduzir o conteúdo de Álgebra, utilizando conceitos de área e perímetro de figuras planas. Entretanto a autora percebe que

> [...] a representação encontrada para perímetro não teve significado para o aluno pelo fato de não ser uma representação numérica. Mais do que isso, notamos que o professor não deu oportunidade para o aluno criar um significado para a expressão encontrada em linguagem algébrica. Isso porque o professor ficou com toda a responsabilidade na execução da tarefa, deixando para o aluno apenas um modelo de resolução. (JACOMELLI, 2006, p. 111).

Jacomelli (2006, p. 106) destaca ainda, que há "momentos referentes ao tratamento algébrico em que a fala do professor e/ou dos alunos, em linguagem natural, não coincide com a escrita.".

Tanto a pesquisa de Bassoi (2006) quanto à de Jacomelli (2006), valeram-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica como suporte teórico. Podemos perceber que ambos os sujeitos das pesquisas, preferiram para introduzir o conteúdo de Álgebra utilizar uma abordagem no contexto da geometria, mostrando a necessidade da utilização de mais de um registro para identificar o objeto matemático algébrico. No entanto, estes sujeitos diferem quanto ao modo que sensibilizaram e envolveram os alunos durante as aulas.

A tese de Figueiredo (2007) teve por objetivo detectar que saberes e que concepções de Educação Algébrica estão sendo mobilizados por atores – docentes, discentes e coordenador, de um curso de Licenciatura em Matemática. Embora tenha tomado como referencial teórico as categorizações de Lee (2001) e de

Fiorentini; Miorim e Miguel (1993) sua pesquisa traz quadros comparativos de concepções e propostas do ensino de Álgebra relevantes ao nosso estudo.

O trabalho de Passos (2012) buscou investigar os entendimentos dos professores das escolas públicas de Ribeirópolis/SE em relação à educação algébrica do 8º ano do Ensino Fundamental. Os sujeitos foram oito docentes de Matemática. Os instrumentos para coleta de dados consistiram de entrevista com os professores, cópia dos cadernos de atividades dos alunos e os livros didáticos adotados pelos sujeitos.

Sua pesquisa apresenta também atividades do livro didático, analisados sob as dimensões da Álgebra dos PCN (1998) e acrescido com a perspectiva de Usiskin (1995), fazendo uma reflexão segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

A pesquisadora ao observar o encaminhamento didático dos professores, no conteúdo de produtos notáveis, mais especificamente com o *Quadrado da soma* verificou que todos os docentes utilizaram apenas a regra prática e de cálculos abstratos para obter a fórmula expandida do polinômio, não se preocupando em representá-la em outra forma de registro.

Segundo ela, seis dos oito professores privilegiam a linguagem algébrica ou a linguagem natural para expressar conceitos ou definições, deixando de lado o registro geométrico, apesar de o livro didático contemplar tal registro e os alunos o possuírem. Identificou que, quanto ao nível de dificuldade das atividades selecionadas, os professores selecionavam apenas as consideradas mais elementares.

Mediante os relatos dos professores, percebeu que estes priorizam a dimensão estrutural da Álgebra, privilegiando atividades relacionadas à dimensão da Álgebra como equações, usando como justificativa que a dimensão aritmética generalizada é trabalhada nos 6º e 7º anos na introdução dos objetos matemáticos e a dimensão funcional da Álgebra, no Ensino Médio (PASSOS, 2012).

Com o objetivo de compreender ‘que Álgebra surge quando os docentes realizam o trabalho de ensiná-la’, Souza; Silva e Ribeiro (2013) em investigações realizadas com professores da Escola Básica elaboraram cinco situações matemáticas que foram propostas a esses sujeitos da pesquisa, relacionadas com o conceito algébrico.

Após análise das resoluções, identificaram que em algumas tarefas realizadas por esses professores, o significado da letra aparece como incógnita e também, com o papel de estabelecer uma relação de dependência e independência entre as grandezas dando o significado de variável, verificaram ainda que os professores privilegiam técnicas (SOUZA; SILVA; RIBEIRO, 2013).

Outro aspecto identificado como uma das dificuldades enfrentada pelos professores foi no entendimento do enunciado de problemas algébricos. Os pesquisadores entendem que estes professores apresentam confusão na passagem da linguagem natural[6] para a linguagem algébrica e, consequentemente, traduzir e solucionar as questões propostas. Acreditam que isso revela o não reconhecimento das diferentes funções atribuídas às letras no ensino de Álgebra.

É eminente a preocupação dos pesquisadores em entender como vem acontecendo o ensino e aprendizagem da Álgebra, quais as principais dificuldades encontradas pelos professores, como eles manifestam e revelam seu conhecimento, qual a linguagem utilizada, a metodologia, etc. (BEZERRA; GOMES; LIMA, 2012; LAUSTENSCHIAGER; RIBEIRO, 2014; ALMEIDA; et al, 2015; FIGUEIREDO et al., 2015; RIBEIRO; CURY, 2015; RIBEIRO, 2016).

A investigação de Gonçalves (2013) foi realizada no município de Campo Formoso/BA, com professores do Ensino Fundamental e teve como objetivo verificar as dificuldades dos professores e fornecer meios de contextualizar a Matemática. Segundo ela "A linguagem utilizada pelo professor nem sempre facilita a comunicação entre os alunos, a matemática e o próprio professor." (GONÇALVES, 2013, p. 49).

Sua pesquisa ainda destacou a importância de o professor abordar o conteúdo de maneira clara, com uma linguagem matemática adequada, direcionando os alunos a uma aprendizagem dinâmica, para que eles percebam que a Matemática é, de fato, uma ciência viva. O seu estudo revelou que

> [...] os professores carecem urgentemente de formação que facilite sua ação pedagógica, uma vez que fica clara a falta de algumas habilidades preponderantes nos professores de matemática que ensinam álgebra mecanicamente, tornando cada vez mais a álgebra como algo descontextualizado, sem significado algum para o aluno, como uma somatória de regras que se acumulam sem fazer sentido, legitimando a ideia mitificada em torno desta ciência. (GONÇALVES, 2013, p. 58).

---

[6] Para Duval (2009, 2011) a linguagem natural é o modo como o sujeito fala ou escreve, discursa sobre um conceito ou problema.

Devido às afirmações como a de Gonçalves (2013) que Ribeiro e Cury (2015) indicam como ações importantes para desenvolver os conhecimentos matemáticos para o ensino de Álgebra, que o professor deve fazer a transposição didática dos conteúdos, de modo que sua explicação para os alunos atenda o nível de conhecimento cognitivo desses estudantes e à linguagem entendida por eles.

O trabalho de Santos (2014) apresentou os resultados de uma pesquisa realizada com 23 professores de Matemática, então alunos da especialização em Didática da Matemática na Universidade Federal do Pará, sobre suas concepções acerca da Álgebra e seu ensino e como introduziam o tema Equações do Primeiro Grau em suas aulas no Ensino Básico.

Este autor concluiu que as ideias e comportamentos dos professores relacionado ao ensino de Álgebra e particularmente de Equações do Primeiro Grau, está intrinsecamente ligada ao processo de sujeições institucionais - que influenciam o sujeito a assumir práticas “enraizadas” nas instituições, sem questionar - desde os tempos que eram alunos e “pode configurar-se como um obstáculo para a constituição de modelos alternativos, principalmente quando o modelo dominante não é criticado” (SANTOS, 2014, p. 93).

A pesquisa de Ferreira (2014) teve como objetivo identificar os elementos constituintes do conhecimento matemático específico do professor, no que se refere particularmente ao trabalho com a Álgebra na Escola Básica. A pesquisadora observou as aulas de dois professores de uma escola pública da rede federal de ensino em Belo Horizonte, sendo um do 8º e um do 9º ano do Ensino Fundamental.

As aulas observadas de ambos os professores, foram no período em que a Álgebra foi o principal assunto abordado. Segundo a pesquisadora, seu trabalho identificou saberes importantes e fundamentais, que compõem o conhecimento matemático específico do professor da Educação Básica e que, no entanto, não são mencionados nas recomendações para a formação de professores de Matemática no Brasil.

Ferreira (2014) evidenciou em sua pesquisa que o ensino da Aritmética e da Álgebra não é desenvolvido de forma integrada e a obrigação de “cumprir o programa”, que paira sobre o professor, dificulta a retomada das discussões, em níveis mais refinados, relativas a aspectos trabalhados em anos anteriores.

Para Ferreira (2014), o professor em sala de aula, vivencia situações didáticas que demandam a mobilização de saberes docentes de natureza algébrica, que constituem elementos do conhecimento específico do professor no trabalho escolar com o desenvolvimento do pensamento algébrico em geral, e, em particular, com as definições, com as generalizações ou com a validação de procedimentos e formas de raciocínio matemático.

De acordo com a pesquisadora, duas questões adquiriram posição de destaque nas análises: a utilização da argumentação e da demonstração para justificar a extensão de resultados obtidos nos processos de generalização na álgebra e a dualidade processo-objeto presente na construção de noções abstratas, em particular, daquelas associadas às expressões algébricas.

Segundo ela, muito mais importante do que a apresentação das definições de objetos matemáticos como expressões algébricas, equações ou fórmulas encontradas no livro didático e trabalhadas pelo professor no contexto da sala de aula, é o reconhecimento dos diferentes significados das letras e símbolos em diferentes situações didáticas.

Durante a coleta de dados, já na primeira aula observada no 8º ano do Ensino Fundamental, Ferreira (2014, p.50) constata que "a linguagem é apresentada como uma característica primordial da Matemática e a álgebra como a parte da Matemática que utiliza *letras* no lugar de números." Segundo a autora há uma valorização da linguagem, reduzindo o papel da Álgebra ao estudo sintático da linguagem, desse modo,

> [...] o trabalho com a álgebra fica centrado na aprendizagem das regras para o uso das letras, nas simplificações, fatorações, resolução de equações etc.. Além disso, desconsidera-se a experiência anterior dos alunos com atividades algébricas, como se fosse essa a primeira vez que a álgebra aparece para os alunos. Há também uma ênfase na linguagem matemática como forma universal e sem ambiguidades. (FERREIRA, 2014, p. 50).

Na busca de responder: a) *Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)? b) Como esses conhecimentos (identificados na Questão a) se relacionam com as demandas de conhecimento da prática docente em matemática na Educação Básica?* A pesquisa de Silva (2015) teve como objetivo fazer uma comparação entre o conhecimento matemático apresentado no processo de formação e o conhecimento matemático específico para o ensino na Educação Básica.

Para isso, o pesquisador tomou como referência dos conhecimentos da formação - o currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais e como referência dos conhecimentos relevantes para a prática docente escolar - uma parte da literatura especializada sobre o ensino e aprendizagem de álgebra na Educação Básica, além de alguns trabalhos sobre as relações entre os saberes da prática e os saberes da formação.

De acordo com Silva (2015, p. 97) os diferentes aspectos extraídos da literatura consultada e identificada, foram considerados como “conhecimentos relevantes para a generalidade das práticas docentes escolares, em termos da promoção de uma educação algébrica de qualidade.”.

Entretanto, o autor concluiu que existe um distanciamento relativo[7] entre os saberes da formação e os saberes da prática, no sentido de que a formação enaltece a construção de uma visão acadêmica da Matemática escolar, enquanto o que o professor enfrenta na prática do trabalho com a Álgebra na educação escolar exige conhecimentos que vão muito além dessa visão acadêmica da Álgebra.

Com o objetivo de estabelecer relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e do objeto de ensino da Álgebra, a tese de Panossian (2014) para a coleta de dados se dividiu em dois momentos: um curso para professores de matemática da rede estadual de São Paulo, fornecido pela Universidade de São Paulo - USP e as ações de planejamento com uma professora que havia participado da formação.

Panossian (2014) buscou entender a relação entre a Álgebra como objeto da ciência e objeto de ensino. Para a autora é necessário compreender como se desenvolve o conhecimento algébrico na vida das pessoas (objetivação), como ocorre essa apropriação do conhecimento e de que forma o conceito algébrico pode ser tratado como objeto de ensino sem perder a sua especificidade. Segundo ela os objetos de ensino de qualquer ciência - no caso de seu estudo, o conhecimento algébrico - “devem ser constituídos por elementos fundamentais que instrumentalizem e desenvolvam o pensamento teórico dos alunos.” (PANOSSIAN, 2014, p. 257).

---

[7] O sentido de relativo para o autor, refere-se ao fato de que o professor talvez possa utilizar o conhecimento que a formação oferece no sentido de contribuição para seu trabalho efetivo na sala de aula, mas esse conhecimento está muito longe de abranger uma série de aspectos importantes das demandas da prática da educação algébrica escolar. (SILVA, 2015, p. 101).

Nesta perspectiva, a pesquisa apresenta também os elementos que compõem os nexos conceituais teóricos da Álgebra: o movimento da linguagem e dos modos da resolução de problemas; o reconhecimento de grandezas variáveis, a necessidade de generalização de objetos e métodos matemáticos.

Ao se referir a escrita algébrica a autora chama de “instrumentos da álgebra” (sequências, equações e funções), que para ela constituem a essência do conhecimento algébrico e analisa suas manifestações curriculares, em situações de ensino e no discurso do professor.

Para Panossian (2014, p. 261-262) “a forma de expressão e significado indica como a generalização se “expressa” e se identifica com o seu conteúdo, desde o uso de linguagem natural até expressões simbólicas”.

A autora destaca a necessidade de o professor criar situações em sala de aula que desencadeiem nos alunos a aprendizagem e que os envolvam nas atividades, gerando uma situação na qual eles atribuam significado. Isso pode ser feito, segundo ela, com diferentes recursos didáticos: jogos, situações do cotidiano, entre outros.

Ao se referir ao desenvolvimento do conhecimento algébrico, Panossian (2014, p. 268) reconhece que o desconhecimento no processo histórico de formação do conceito algébrico “limita o professor ao ensino do que se apresenta em apostilas e livros, que reforça a aprendizagem dos instrumentos da álgebra de forma técnica sem significado para o estudante, somente por meio de suas “operações”.” E afirma que a elaboração de atividades e seu desenvolvimento, exigem do professor “domínio aprofundado dos nexos conceituais do conhecimento envolvido e movimento do pensamento teórico no sentido do abstrato ao concreto, concreto este que se caracteriza por ser a síntese de múltiplas abstrações.” (ibidem).

Dentre as pesquisas revisadas, as que usam como aporte teórico os registros de representação semiótica destacam as práticas do professor olhando também para o livro didático, fazendo relações entre o modo como o professor ensina e a linguagem que ele usa, orientado pelo material utilizado.

Como já referido, as pesquisas apresentam a dificuldade que os professores têm em se expressar matematicamente, em basear o ensino dos elementos algébricos centrados nas regras, se valendo em usar apenas as técnicas, apesar de estarem preocupados com a aprendizagem do aluno, da distância entre a sua formação e atuação.

Contudo, a linguagem algébrica é uma forma específica de pensamento e de representação do mundo, está intimamente ligada com o raciocínio matemático e o seu emprego fornece uma interpretação concreta aos elementos abstratos e sua generalização (PONTE et al. 2008; USISKIN, 1995). O eixo a seguir tem como finalidade apresentar uma breve revisão das concepções do termo pensamento algébrico.

3.2 O Pensamento Algébrico e o Ensino de Álgebra

Muitos pesquisadores defendem a ideia de que o ensino de Álgebra deve ser explorado desde os anos iniciais de ensino, podendo ser o fio condutor do currículo escolar de modo a promover e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos (CANAVARRO, 2007; CYRINO; OLIVEIRA, 2011; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1997).

Concordando com esses autores, pretendemos neste eixo apresentar o que se compreende por pensamento algébrico na Educação Matemática, pois entendemos assim como Ribeiro e Cury (2015, p. 12) parafraseando Kaput (2008) que “a Álgebra é um artefato cultural e que pensar algebricamente é uma atividade humana.”.

Esse início do trabalho com Álgebra pode ser expresso por um problema em linguagem corrente, que dependendo da faixa etária dos alunos, pode ser apresentado com a ajuda de alguns símbolos e ainda, figuras ou letras, permitindo chegar à linguagem algébrica, por meio de generalizações em que é possível utilizar o mesmo pensamento em outras situações problema (RIBEIRO; CURY, 2015).

Segundo Araújo (2008, p. 338) “Para que ocorram mudanças, tão necessárias no ensino de álgebra, é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico.”.

De acordo com os PCN’s

> [...] o ensino de matemática deve contemplar o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de situações de aprendizagem que propiciem o aluno reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações problema favorecendo possíveis soluções. (BRASIL, 1998, p. 64).

Conforme este documento o ensino de Matemática, no que se refere ao pensamento algébrico através da exploração de situações de aprendizagem, devem levar o aluno a:

> - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
> - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81).

O trabalho de Silva (2013) apresenta uma revisão dos pesquisadores que tratam do pensamento algébrico e segundo ela, não é possível definir precisamente o que seja pensar algebricamente. Esta por sua vez, analisou as ideias de Blanton (2006, 2007), Fiorentini; Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Kaput (1999), Kieran (1996, 2004), entre outros. Baseada nas perspectivas estudadas e expostas em sua pesquisa apresentou um quadro que denominou caracterização para o pensamento algébrico, com o objetivo de reconhecer como ele acontece. Desse modo considerou que esse pensamento:

Quadro 1: Caracterização para o pensamento algébrico.

Não envolve necessariamente uma simbologia algébrica, de modo que pode ser desenvolvido em qualquer etapa escolar, ou seja, não tem como pré-requisito que o estudante apresente uma linguagem simbólica algébrica;
Está presente em todos os campos da Matemática, como na álgebra, geometria, aritmética;
É algo interno ao estudante, de modo que não há uma relação de independência com a tarefa proposta;
É um modo que envolve a construção da aprendizagem na medida em que o estudante vai produzindo relações e atribuindo significados para os conceitos a partir do que ele já sabe, ou seja, de seus conhecimentos prévios;
Enfim, esse pensamento envolve: formulação de conjecturas; estabelecimento de relações, utilização de diferentes notações para uma mesma tarefa; estabelecimento de regularidades; algum processo de generalização; compreensão de propriedades matemáticas importantes, como a comutatividade na adição; agrupamento, classificação, ordenação, justificação e validação de ideias, etc.

Fonte: (SILVA, 2013, p. 36).

Para Silva (2013, p. 36) “esse tipo de pensamento envolve a construção do pensamento matemático, tendo como objetivo que os estudantes pensem e reflitam sobre os conceitos matemáticos fundamentais, de modo que raciocinem algebricamente”. Segundo os autores supracitados, todos têm a capacidade de pensar algebricamente.

O pensamento algébrico é uma forma de representar e dar sentido aos objetos da Álgebra, no conjunto da generalização destes objetos (PONTE, 2006). Tendo um olhar diferenciado para os símbolos no qual estes passarão a ser compreendidos como um instrumento para raciocinar e compreender a Álgebra, e não mais apenas como o estudo ou uso deles, permitindo aos alunos ter maior liberdade para expressar a sua forma de raciocínio para resolver problemas (CANAVARRO, 2007).

Diante do exposto, finalizamos entendendo o pensamento algébrico como um conjunto de capacidades cognitivas que considera o modo de pensar matematicamente, não implicando só em saber fórmulas e aplicá-las, mas utilizando os símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão.

O eixo seguinte traz uma abordagem das ideias e concepções em que a Álgebra é elucidada por pesquisadores da Educação Matemática.

3.3 As Ideias da Álgebra no Ensino

Durante a revisão de literatura, encontramos estudos de pesquisadores da Educação Matemática, que preocupados com o ensino de Álgebra, foram procurando formas de melhorar e contribuir para esse ensino. Concepções, ideias, categorias ou vertentes são os modos que a Álgebra é explicitada por pesquisadores dessa área na tentativa de compreender esse ramo da Matemática.

Desse modo, esse eixo tem como objetivo mostrar a visão, concepção e propostas desses pesquisadores e suas contribuições para as pesquisas.

Ao falar de Álgebra, é fundamental primeiramente informar como é entendido esse ramo da Matemática. Segundo Usiskin (1995, p. 9) "não é fácil definir a álgebra.", pois como afirmam Ribeiro e Cury (2015, p. 12) "nem sempre há uma "definição" de álgebra que seja aceita por todos os matemáticos ou educadores matemáticos.".

Ponte (2006) ressalta que a Álgebra é cercada por uma forte simbolização, mas esta simbolização inicia com a Aritmética. Assim, a Álgebra apenas amplia e modifica os símbolos existentes. "Novos símbolos: x, y, <, >, {. Mudança do significado: =, +. Símbolos para operações abstratas: θ, σ, ω, φ, μ, η, λ..." (PONTE, 2006, p. 09).

No entanto, ao contrário da Aritmética que tem o centro da atenção voltada para os números e suas operações, na Álgebra isto não é tão definido.

> Quais são então os objetos fundamentais da Álgebra? Há duzentos anos a resposta seria certamente: "equações". Hoje em dia, essa resposta já não nos satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos. (PONTE, 2006, p. 07).

A Álgebra pode ser vista como um instrumento fundamental na origem do pensamento matemático e científico. Outra ideia que prevalece é a Álgebra como área em que se estudam expressões, equações e regras de transformações, apesar de tratar-se “de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 8).

Desde a década de 1980, há uma preocupação dos educadores Matemáticos em compreender como os alunos desenvolvem os conceitos e procedimentos algébricos e dessas pesquisas têm emergido características diversificadas de produzir significados para os objetos e processos da Álgebra. (CYRINO; OLIVEIRA, 2011; SOCAS, 2011).

O número de pesquisadores preocupados com o ensino e aprendizagem da Álgebra vêm aumentando. Kieran e Filoy (1989) descreveram algumas das contribuições de maior significância da investigação sobre processos cognitivos relacionados à Álgebra escolar até os anos finais da década de 80, em que destacam o marco aritmético como referência. Esse trabalho centra-se também em temas principais dessas pesquisas, sendo: variáveis, expressões e equações, resolução de equações, funções e seus gráficos e pesquisas que usam computadores.

Segundo estes pesquisadores, saber Álgebra não é simplesmente tornar explícito o que era implícito na Aritmética, ela exige do estudante uma troca no pensamento das situações numéricas concretas para proposições mais gerais referentes aos números e operações.

Há na verdade um consenso a respeito de quais são “as coisas” da Álgebra (RIBEIRO; CURY, 2015). Concepções, ideias, categorias ou vertentes são os modos que a Álgebra é explicitada por pesquisadores dessa área, na tentativa de compreender esse ramo da Matemática. Durante as buscas por trabalhos sobre o ensino de Álgebra, encontramos diferentes maneiras em que ela é apresentada na literatura.

Um dos trabalhos mais citados e utilizados como referencial teórico nas pesquisas direcionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra é o trabalho de Fiorentini; Miorin e Miguel (1993). Os autores com o objetivo de repensar a educação algébrica elementar apresentam alguns elementos a partir de uma leitura histórica do ensino de Matemática e concepções de Álgebra, implícitos a alguns fatos referentes ao desenvolvimento do conhecimento matemático, como podemos observar no quadro abaixo.

Quadro 2: Concepções de Álgebra e de Educação Algébrica.

CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA	CONCEPÇÕES DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA
i) processológica	i) linguístico-pragmática
ii) linguístico-estilística	ii) fundamentalista-estrutural
iii) linguístico-sintático-semântica	iii) fundamentalista-analógica
iv) linguístico-postulacional	

Fonte: Fiorentini; Miorin e Miguel (1993).

Estes autores especificam que a linguagem algébrica e o pensamento algébrico, podem se constituir independentemente, mas, que, entre eles, existe uma relação dialética, ou seja, a aquisição de um facilita a do outro.

Os autores Lins e Gimenez (1997) trazem um enfoque mais pedagógico e cuidadoso com o pensamento algébrico e suas estruturas, concluem que “caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 99).

Em sua obra, os autores discutem algumas características do processo de produção de significado para a Álgebra e para a Aritmética. E afirmam

> É essencial estabelecer, de forma clara, a distinção entre ‘genérico’ e ‘generalizado’. A situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares […] ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares. Isso não quer dizer, é claro, que a situação genérica se constitua independentemente de qualquer caso particular (embora isso não seja nada improvável ou impossível!) e sim, que, no interior da atividade, a atenção é diretamente dirigida ao que é geral, e não ao processo de ‘generalização’. (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 114)

No que diz respeito à Álgebra, alegam abordá-la de forma diferente das leituras tradicionais que a concebem como “Aritmética generalizada” ou como “Estrutura da Aritmética”. Indicam três concepções de Educação Algébrica, com diferentes conceitualizações da atividade, como pode ser observado no Quadro 3.

Quadro 3: Concepções de Educação Algébrica segundo Lins e Gimenes (1997)

Letrista: é uma visão restrita ao "*cálculo com letras"*, muito presente nos livros didáticos brasileiros;
Letrista Facilitadora: considera que a capacidade de lidar com as expressões literais é alcançada pela abstração decorrente de situações concretas;
Modelagem Matemática: essa concepção, segundo os autores, também apresenta como ponto de partida uma situação concreta. Contudo, o concreto na modelagem não é visto como ilustrativo, e sim como um problema real.

Fonte: Lins e Gimenes (1997)

Lins e Gimenes (1997) defendem para a introdução algébrica a concepção de Modelagem Matemática aliando a ela a Teoria dos Campos Semânticos [8], do primeiro autor.

Outro trabalho muito referenciado nas pesquisas e já citado neste estudo é o de Usiskin (1995). Ao classificar as concepções de Álgebra, as quais estão sempre relacionadas com o uso diferenciado das variáveis, o autor as relaciona com exemplos de atividades, contudo não menciona o pensamento algébrico implícito a essas atividades.

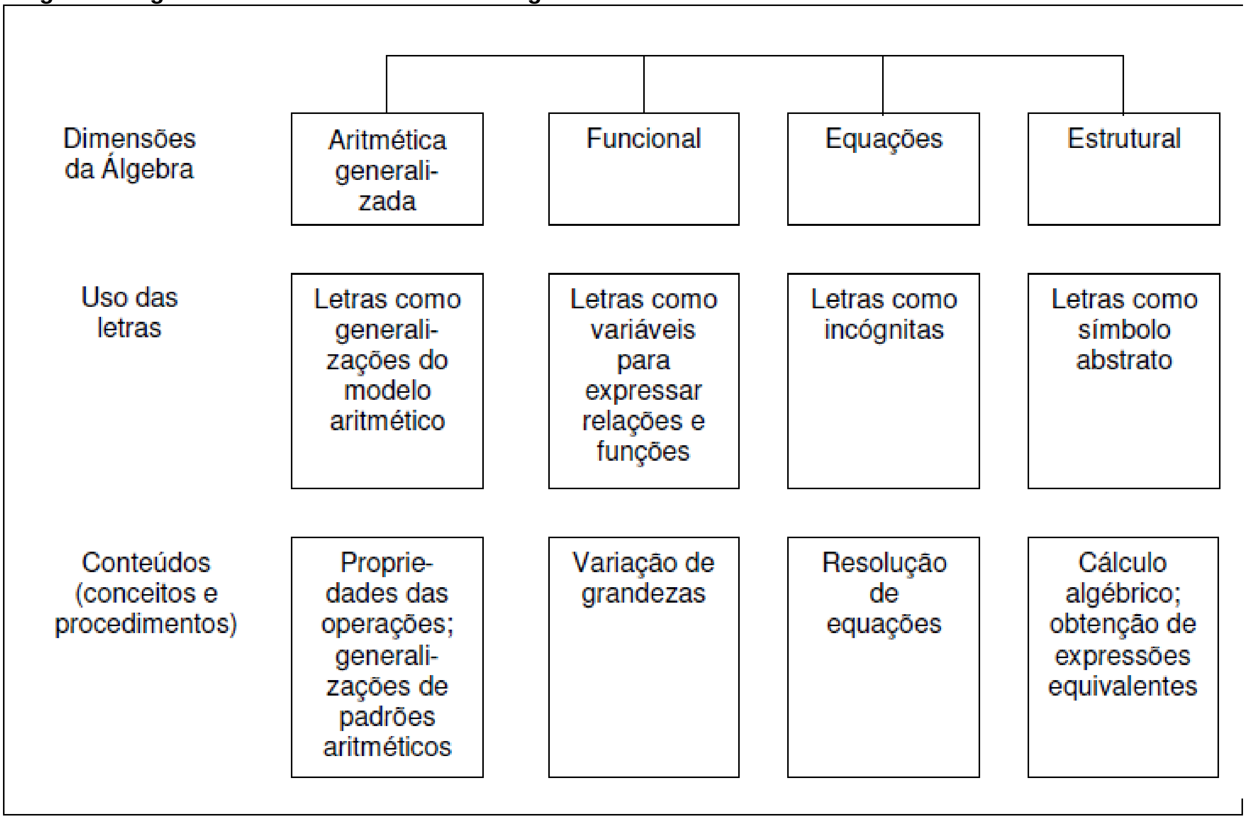
Embora não mencione o trabalho de Usiskin (1995), os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL, 1998) tem uma ideia muito semelhante à desse autor (FIGUEIREDO, 2007). O documento sugere a exploração de padrões em sequências numéricas como forma de desenvolver nos estudantes a compreensão e a generalização e enfatiza a necessidade dos alunos relacionarem a Álgebra a conhecimentos anteriores e ao mundo que os cerca, a fim de que haja a construção do pensamento algébrico.

Também destaca a importância na compreensão da linguagem e das ideias da Matemática sugerindo o trabalho com a resolução de problemas como direcionamento para a produção de significados para as distintas funções da Álgebra. Ainda que nas orientações didáticas contidas nos PCNs (BRASIL, 1998) apareça a expressão *concepções de álgebra*, na Figura 1 o qual o conteúdo foi dele extraído, consta o termo *dimensões*. A Figura a seguir sintetiza as diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras.

---

[8] Segundo Lins (1999, p.85), um Campo Semântico é algo que se constitui na própria atividade de produção de significados.

Figura 1: Álgebra no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998



Fonte: (BRASIL, 1998, p. 116)

Figueiredo (2007) considerando as propostas para o ensino de Álgebra que são muito similares a dos PCNs (BRASIL, 1998) para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental no Brasil, agrupa em um quadro as concepções de Usiskin (1995) para a escola média nos EUA e a de Socas et al. (1996) para a escola básica na Espanha. As três propostas enfatizam a representação que utiliza letras, como revela o Quadro 4:

Quadro 4: Três propostas para o ensino de Álgebra

<table>
<tr><th>Enfoque</th><th>Usiskin (1995): concepções</th><th>Socas Robayna et al. (1996): interações</th><th>Parâmetros curriculares Nacionais (BRASIL, 1998): dimensões</th></tr>
<tr><td>Aritmética generalizada</td><td>Generalizadoras de modelos.
Traduzir; generalizar.</td><td>Letras como generalizadoras de modelo aritmético.</td><td>Letras como modelo de generalizações de modelo aritmético.
Conteúdo: propriedades das operações.</td></tr>
<tr><td>Meio de resolver certos problemas</td><td rowspan="3">Incógnitas e constantes.
Resolver; simplificar.</td><td rowspan="3">Letras como incógnitas específicas.</td><td rowspan="3">Letras como incógnitas.
Conteúdo: resolução de equações.</td></tr>
<tr><td>Resolução de equações</td></tr>
<tr><td>Equações</td></tr>
<tr><td>Estudo das relações (Usiskin, Socas Robayna et al.)</td><td rowspan="2">Argumentos e parâmetros.
Relacionar; gráficos.</td><td rowspan="2">Letras como argumentos de funções.</td><td rowspan="2">Letras como variáveis para expressar relações e funções.
Conteúdo: variação de grandezas.</td></tr>
<tr><td>Funcional (PCN)</td></tr>
<tr><td>Estrutura (Usiskin)</td><td rowspan="2">Sinais arbitrários no papel.
Manipular; justificar.</td><td rowspan="2">Letras como símbolos abstratos.</td><td rowspan="2">Letras como símbolos abstratos.
Conteúdos: cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes.</td></tr>
<tr><td>Estrutural (Socas Robayna et al.; PCN)</td></tr>
</table>

Fonte: (FIGUEIREDO, 2007, p. 83)

Embora a concepção de Usiskin (1995) seja voltada para a escola média dos Estados Unidos - referente ao Ensino Médio do Brasil - e a concepção dos PCN (BRASIL, 1998) seja direcionada ao Ensino Fundamental - anos finais - é possível notar a similaridade entre elas.

De acordo com Figueiredo (2007) as concepções de educação algébrica encontradas nas pesquisas sobre Educação Matemática surgiram a partir da década de 1990, “possivelmente em respostas sobre concepções que acompanharam o próprio amadurecimento da Educação Matemática.” (FIGUEIREDO, 2007, p. 80).

Não poderíamos deixar de mencionar o trabalho de James Kaput (1999, 2008), que segundo Canavarro (2007) foi um dos pioneiros no domínio designado por alguns autores como *Early Algebra*[9]. De acordo com Canavarro (2007) em 1999, Kaput descreveu cinco vertentes da Álgebra. Posteriormente em um artigo com Maria Blanton, refere-se apenas a quatro e, num dos últimos artigos que escreveu antes da sua morte em 2005, que foi publicado apenas em 2008, reduziu as vertentes a três:

> 1. Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na Aritmética (Álgebra como Aritmética generalizada) ou no raciocínio quantitativo.
> 2. Álgebra como o estudo das funções, relações e (co)variação.
> 3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior. (Kaput, 2008, apud CANAVARRO, 2007, p. 88).

Vale destacar que na citação anterior Kaput (2008) refere-se ao termo "Álgebra" atribuindo-lhe o significado de pensamento algébrico. Para ele o foco do pensamento algébrico está na atividade de generalização.

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação). (Kaput, 1999, p. 6 apud CANAVARRO, 2007, p. 87).

Desse modo é possível verificar dois aspectos essenciais na concepção de Kaput. O primeiro é a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais e está relacionado com o *pensamento representacional*, reservado para designar os processos mentais pelos quais um indivíduo cria significados num sistema de representação. O segundo corresponde ao raciocínio e ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados, designado por *pensamento simbólico*, está associado ao modo como o indivíduo compreende e usa um sistema de símbolos e as respectivas regras, focando-se nos símbolos propriamente ditos (CANAVARRO, 2007).

---

[9] Early Algebra é um termo bastante usado pela Educação Matemática para se referir à abordagem da Álgebra no ensino da Matemática na escola elementar (CANAVARRO, 2007, p. 114).

Apresentando uma visão de Álgebra mais global, o trabalho de Lee (2001) discute a importância de exercícios de generalização para introdução da Álgebra, que possam auxiliar os alunos na elaboração de estratégias de resolução e argumentação, relacionar os conhecimentos, desenvolver uma comunicação e habilidades técnicas com maior agilidade. Esta pesquisadora realizou um estudo histórico internacional sobre a Álgebra na escola elementar.

Lee (2001) considera que a importância e a complexidade da Álgebra são muitas vezes subestimadas e que muitos veem a Álgebra como “obscura”, “decorada”, “insensata” e “só técnicas”. A autora sugere que desenhos, gráficos, tabelas, materiais manipulativos e programas de computador devam ser utilizados na resolução de problemas envolvendo Álgebra e considera a modelagem como outra opção para o trabalho com atividades algébricas.

Outra pesquisadora muito citada na área do ensino e da aprendizagem da Álgebra é Carolyn Kieran (RIBEIRO; CURY, 2015). As pesquisas de Kieran (2004 e 2007) baseiam-se na ideia de Álgebra como atividade, para isso a pesquisadora desenvolveu um modelo que sintetiza as atividades da Álgebra escolar em três tipos ou níveis, como é descrito no Quadro 5.

Quadro 5: Classificação das atividades algébricas segundo Carolyn Kieran

Geracional: atividades que envolvem a formação de expressões e equações estudadas em Álgebra, como equações de uma variável ou as expressões que representam padrões ou sequências numéricas, em que estão implícitas as variáveis e as incógnitas.
Transformacional: indicam as atividades transformacionais ou baseadas em regras, que incluem reduzir termos semelhantes, fatorar, expandir, substituir, adicionar e multiplicar expressões polinomiais, resolver equações, simplificar expressões, etc.
Global: atividades nas quais a Álgebra é usada como ferramenta, como a resolução de problemas, a modelagem, o estudo da variação, a generalização, a predição, etc.

Fonte: adaptado de (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 13).

De acordo com Kieran (2004) na transição da Aritmética para a Álgebra, os alunos precisam fazer muitos ajustes, mesmo aqueles que são bastante proficientes em Aritmética. Segundo a autora, esses que operam em um quadro de referência aritmético tendem a não ver os aspectos relacionais das operações pois o foco deles é o cálculo. Assim, é necessário um ajuste considerável no desenvolvimento de uma forma de pensamento algébrico, que inclui, mas não se restringe a:

> 1. Um foco nas relações e não apenas no cálculo de uma resposta numérica;
> 2. Um foco nas operações, bem como em seus inversos, e na ideia relacionada de fazer / desfazer;
> 3. Um foco em representar e resolver um problema em vez de simplesmente resolvê-lo;

> 4. Um foco em números e letras, em vez de em números sozinhos. Isso inclui:
> (i) trabalhar com letras que às vezes podem ser desconhecidas, variáveis ou parâmetros;
> (ii) aceitar expressões literais não fechadas como respostas;
> (iii) comparando expressões para equivalência com base em propriedades e não na avaliação numérica;
> 5. Uma reorientação do significado do sinal de igualdade. (KIERAN, 2004, p. 2-3 *tradução nossa*).

Preocupados com o ensino e aprendizagem da Álgebra, pesquisadores franceses seguindo dimensões similares às de Shulman (1986)[10], porém elaboradas especificamente para o ensino de Álgebra, desenvolveram uma estrutura denominada Grade Multidimensional para Competência Profissional em Álgebra Elementar, em inglês - Multidimensional Grid for Professional Competence in Elementary Algebra - MGPCA - (ARTIGUE et al., 2001 apud FERREIRA, 2014), que definem três dimensões inter-relacionadas para descrever o conhecimento da Álgebra para o ensino, como exposto no Quadro 6.

Quadro 6: Dimensões para o conhecimento da álgebra para o ensino segundo Artigue et al. (2001).

Dimensão epistemológica – inclui o processo de aquisição do conhecimento do conteúdo e da estrutura da álgebra; o papel e o lugar da álgebra dentro da Matemática e as conexões entre a álgebra e outras áreas da matemática e os fenômenos físicos.
Dimensão cognitiva – refere-se ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, as interpretações dos conceitos algébricos e das notações pelos alunos, as concepções inadequadas e dificuldades dos alunos em álgebra.
Dimensão didática - inclui o processo de aquisição do conhecimento relativo ao currículo, de utilização de recursos, das diferentes práticas e propostas de ensino de álgebra, conexões entre os diferentes níveis escolares em termos do ensino de álgebra, e a natureza e o desenvolvimento de um discurso algébrico efetivo na sala de aula.

Fonte: Adaptado de (FERREIRA, 2014, p. 15).

Como é possível observar, as dimensões propostas por Artigue et al. (2001) examinam os aspectos epistemológicos, cognitivos e dimensões didáticas do conhecimento do professor necessário para ensinar. Como já dito anteriormente, como os estudos de Artigue et al. (2001) baseiam-se nas ideias de Shulman (1986), este grupo ressalta que a aprendizagem do aluno esta intrinsecamente relacionada com a melhoria do conhecimento do professor e expressam a crença de que o conhecimento para ensinar Álgebra foi um processo evolutivo e dependente de cursos e experiências na prática real.

Outro grupo de pesquisadores, é o grupo mexicano de Sônia Ursini (Trigueros et al., 1996; Trigueros e Ursini, 2001; UrsinI et al., 2005) desenvolveram O *Modelo*

---

[10] O trabalho de Lee Shulman apresenta conhecimentos necessários e específicos do professor. Trataremos de suas ideias na seção saber docente.

3UV – o Modelo dos três usos da variável. As pesquisas de Silva (2009) e de Bianchini e Machado (2010) utilizaram esse modelo como aporte teórico em seus trabalhos.

Ursini *et al.* (2005) afirmam que a compreensão dos usos das variáveis requer que o professor se aproprie da concepção e uso destas e que o aluno desenvolva as capacidades básicas para:

> - Realizar cálculos simples operando com as variáveis;
> - Compreender por que é possível operar com as variáveis e por que estas operações permitem chegar a um resultado, seja ele numérico ou não;
> - Perceber a importância do uso das variáveis para modelar matematicamente situações de diferentes tipos;
> - Distinguir os diferentes usos das variáveis em Álgebra;
> - Transitar com flexibilidade entre os diferentes usos das variáveis;
> - Integrar os diferentes usos para vê-los como aspectos distintos de um mesmo objeto matemático, que se revelam dependendo da situação particular. (URSINI *et al.*, 2005, p. 23 apud BIANCHINI; MACHADO, 2010, p. 361)

Diante do que foi citado, o termo “uso das variáveis” usado pelos autores, pode estar relacionado aos diferentes estatutos da letra nas expressões matemáticas, sejam como incógnitas, variáveis ou parâmetro.

Outro pesquisador muito referenciado preocupado com a formação e desenvolvimento profissional de professores é Ponte[11]. Em seu trabalho com outras duas autoras afirmam que “aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação.” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

Segundo esses autores resumir a atividade algébrica à manipulação dos símbolos, seria o mesmo que reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma das suas particularidades. Para eles o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, como pode ser visto na Figura 2, que segue:

---

[11] João Pedro Mendes da Ponte é professor catedrático de Didática da Matemática e Diretor do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Figura 2: Vertentes do pensamento algébrico segundo Ponte, Branco e Matos (2009)

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 11).

Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que a grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza, pois a linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Desse modo, ressaltam que a perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal.

O grupo de pesquisa do Observatório da Educação (OBEDUC), com o título de “Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: Uma Abordagem Baseada em Perfis Conceituais” – COMEA, é coordenado pelo professor Alessandro Jacques Ribeiro da Universidade Federal do ABC (UFABC).

Segundo Bezerra, Gomes e Lima (2016) - autores que integram o grupo COMEA - o interesse em Álgebra vem tanto do destaque dado a ela na Educação Básica como dos resultados das macroavaliações, e, quanto ao interesse em professores, afirmam que

> O entusiasmo pelas concepções de álgebra de professores da Educação Básica de Ensino decorre a princípio da necessidade de identificar uma compreensão de álgebra própria do grupo, uma vez que, destas discussões teóricas, fica claro que o entendimento sobre o que é álgebra não é único nem restrito. (BEZERRA; GOMES; LIMA, 2016, p. 2).

A revisão de literatura do Grupo COMEA, esta pautada nos trabalhos de Ball; Thames e Phelps (2008), Figueiredo (2007), Fiorentini; Miorin e Miguel (1993), Lee

(2001), Lins e Gimenez (1997), Shulman (1986) e no trabalho de Usiskin (1995). Buscando responder a pergunta “o que é álgebra?” e após análise dos trabalhos dos autores supracitados, o grupo sintetizou as ideias de Álgebra como apresenta a Figura 3:

Figura 3: Categorias de Álgebra segundo o Grupo COMEA

Categorias de Álgebra	Principais ideias
1. Pré-Álgebra	» Manipulação de somas, produtos e potências aritméticos; » Resolução de problemas aritméticos para a introdução do pensamento algébrico.
2. Generalizações	» Aritmética generalizada; » Estrutura de representação formal do concreto (através da abstração); » Atribuir grau de abstração e generalidade aos símbolos linguísticos.
3. Relações	» Estudo das relações entre grandezas.
4. Estruturação	» Estudo das estruturas e propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios; » Linguagem simbólica/variável como símbolo arbitrário.
5. Modelagem	» Iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta; » Construção da atividade e exercícios de modelagem; » Modelagem de situações a partir de situações-problema.
6. Manipulação	» Conjunto de técnicas ou procedimentos específicos para abordar problemas por métodos algorítmicos; » Capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas primordialmente simbólicas; » Atividades que envolvam incógnitas com o objetivo de simplificar ou resolver.

Fonte: (ALMEIDA et al., 2015, anexos).

Após a revisão da literatura, em que encontramos tais concepções e dimensões relacionadas à Álgebra, compartilhamos com o que diz Panossian (2014, p. 262) que “as diferentes concepções de álgebra e de seu ensino não refletem “álgebras” diferentes, mas momentos históricos diferentes de seu desenvolvimento.”. Segundo essa mesma autora

> Essas diferentes concepções de álgebra e educação algébrica geram diferentes resultados no processo de ensino. Por isso, não se trata de assumir ou escolher uma ou outra concepção, mas sim de entender o alcance em relação ao conhecimento que elas potencialmente podem produzir. (PANOSSIAN, 2014, p. 263).

Podemos perceber que essas concepções embora de pesquisadores diferentes, cruzam-se em muitas ideias, principalmente aos diferentes procedimentos envolvendo os símbolos e a generalização, sendo encarada não apenas como uma técnica, mas igualmente, como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas.

A partir disso, compreendemos a complexidade e a extensão da responsabilidade do professor ao ensinar. Desse modo, fomos conduzidos a refletir sobre o saber docente e nesse último eixo apresentamos o que mostram as pesquisas sobre essa relação entre a Álgebra e o professor de Matemática.

3.4 O saber docente e a relação com o Ensino de Álgebra

> *O saber não é uma substância ou um conteúdo fechado em si mesmo; ele se manifesta através de relações complexas entre o professor e seus alunos. (TARDIF, 2014, p. 13)*

Muito além de um conjunto de conteúdos cognitivos, o saber docente é um processo em construção ao longo de uma carreira profissional. De acordo com Tardif (2014, p. 14) o saber docente é um saber social, pois “o professor aprende progressivamente a dominar seu ambiente de trabalho, ao mesmo tempo em que se insere nele e interioriza por meio de regras de ação que se tornam parte integrante de sua “consciência prática”.” E complementa que,

> [...] o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, porque envolve, no próprio exercício de trabalho, conhecimentos e um saber-fazer bastante diversos, provenientes de fontes variadas e, provavelmente, de natureza diferente. (TARDIF, 2014, p. 18).

Os professores são os principais encarregados para a mudança no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, responsáveis em criar em sala de aula um ambiente contextualizado, com tarefas desafiadoras, a fim de produzir nos alunos um envolvimento e a capacidade de comunicação matemática.

Segundo Bassoi (2006) o professor é o agente pela tarefa do ensino sistematizado. Para ela, esse ser humano com possibilidades, necessidades e limitações, vai, ao longo do tempo construindo saberes e práticas, muitas delas bem sucedidas, pois é essa trajetória docente, que o faz aprender com a sua própria prática ou com a influência mútua dos colegas. Conforme a autora, para ser um bom professor

> [...] são necessárias qualidades não inatas, mas que podem ser desenvolvidas, tais como: senso de humor ao lidar com situações inusitadas ou contraditórias, pois supõe autocrítica sem o medo de parecer que sempre sabe tudo; que tenha amor pelo conhecimento, que sinta paixão pelo que faz e que não se aborreça ao ensinar, [...] e saber que o mais importante não é responder perguntas, mas como provocar as perguntas nos alunos. (BASSOI, 2006, p. 19)

Já Figueiredo et al. (2015, p. 2) afirmam que é preciso ter clareza “acerca dos conhecimentos matemáticos que os professores precisam para desempenhar “de maneira eficiente” o seu papel de ensinar matemática aos nossos alunos”, existindo inúmeras questões a serem estudadas e outras a serem esclarecidas.

Os autores destacam ser importante da parte dos professores de Matemática “a análise dos princípios e critérios para a seleção dos conteúdos (o que ensinar) e a organização didática (como ensinar) além das estratégias para promover e acompanhar a aprendizagem.” (FIGUEIREDO et al., 2015, p. 3).

Mais do que reproduzir e manipular é imprescindível suscitar nos alunos situações matemáticas que permitam pensar genericamente, perceber regularidades, ou seja, que promova o progresso do pensamento algébrico. Mas isso exige do educador um conhecimento matemático que vá além do livro didático (LAUTENSCHIAGER; RIBEIRO, 2014).

A Álgebra é um campo muito rico, com muitas possibilidades de aplicações e abordagens de objetivos metamatemáticos[12]. O mesmo pode ser dito sobre o conhecimento matemático específico do professor para o trabalho com a Álgebra na Escola Básica. Provavelmente, a cada tema da Álgebra escolar poderiam ser associados outros correspondentes, no campo do conhecimento matemático específico do professor. Assim, escolhas precisariam ser feitas e elas deveriam contemplar, entre outros elementos, temáticas que possam se adequar melhor aos objetivos mais amplos da educação matemática escolar. (FERREIRA, 2014).

Uma coisa é conhecer e manipular a Álgebra como ciência ensinada nos cursos de graduação, outro é tornar acessível ao outro esse objeto matemático. Ao longo dos anos escolares a Álgebra vai sendo apresentada de forma abstrata e como um simbolismo que não permite reconhecer a linguagem algébrica escrita.

De acordo com Silva D. M. (2013) é necessário compreender as dificuldades que os alunos apresentam na Álgebra, para proporcionar uma aprendizagem contextualizada e com significado. A sua pesquisa revelou ser

> [...] necessário um esforço por parte dos professores para alterar as suas práticas, e abandonar a ideia de que na disciplina de Matemática não se escreve, ‘só se faz contas’. Acredito ser importante fomentar hábitos de escrita e de raciocínio, exigindo aos nossos alunos que escrevam as respostas e as justifiquem. (SILVA, D. M., 2013, p. 78).

---

[12] Metamatemática ou lógica matemática é o estudo dos conceitos matemáticos básicos, ou seja, que tem por objeto a estrutura da teoria da matemática formal.

Guimarães (2013) em sua pesquisa constatou o quanto é difícil elaborar uma sequência de atividades e planejar estratégias de como aplicar estabelecendo objetivos. Segundo a pesquisadora, mais importante do que ter materiais e livros didáticos em que os exercícios aparecem prontos, é saber o que pode contribuir para a aprendizagem, e desse modo, a autora afirma ser fundamental que o professor saiba escolher ou elaborar situações problemas que possibilite o aluno investigar, elaborar estratégias de resolução, tornando possível a generalização e abstração do conhecimento. Ainda reforça a necessidade da atualização e capacitação do professor, que além de contribuir para o seu crescimento profissional, intervém na formação dos alunos (GUIMARÃES, 2013).

Verificamos que mesmo os trabalhos como de Silva D. M. (2013) e Guimarães (2013), que tiveram como sujeito de pesquisa os alunos do ensino básico, os autores tendem sempre a olhar para o professor como agente fundamental para a aprendizagem.

O trabalho de Silva (2015) identificou a ação do professor como fundamental para auxiliar os alunos a lidarem e superarem suas limitações, pois para ele

> Os professores exercem um papel importante de mediadores no desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, respeitando o tempo e a maturidade cognitiva de cada um deles, incentivando-os através de atividades interessantes e que são próprias de cada estágio do desenvolvimento dessa forma fundamental de pensamento matemático. (SILVA, 2015, p. 99).

Para esse autor, o professor desempenharia o papel de mediador, promovendo debates e reflexões. Contudo, esse tipo de ação docente em sala de aula da escola demanda conhecimentos específicos que precisam ser trabalhados na formação.

Os trabalhos de Figueiredo (2007) e de Ferreira (2014) trazem a ideia de Shulman (1986, 1987) que introduz na literatura o termo conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge*) que seria um tipo especial de conhecimento profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que representaria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina.

Para Shulman (2014) professor é aquele que sabe alguma coisa que não é sabida pelo outro, neste caso, o aluno. O professor pode transformar a compreensão de um conteúdo, habilidades didáticas ou valores, em ações e representações pedagógicas. Essas ações e representações se traduzem em jeitos de falar, mostrar, interpretar ou representar ideias, de maneira que os que não sabem venham, a saber, os que não entendem venham a compreender e discernir.

Segundo este pesquisador o ensino necessariamente começa com o professor entendendo o que deve ser aprendido e como deve ser ensinado. Normalmente os professores procedem com uma série de atividades, as quais orientam os alunos e os conduzem para aprender. Esse método de transmissão de conhecimento, não é admirado por ele.

Para ele, a concepção de ensino não se limita à instrução direta, defende o aprendizado por meio da descoberta e pelo ensino investigativo. Acredita que, mesmo nas formas de educação centradas nos alunos, em que a maior parte da iniciativa está nas mãos deles, a compreensão do professor é ainda mais exigente para uma aula orientada à investigação do que para sua escolha didática.

O conceito de ensino para Shulman, tem como objetivo central, fazer com que os alunos aprendam a compreender e resolver problemas, a pensar crítica e criativamente e que aprendam fatos, princípios e regras. E desse modo, não sendo a aprendizagem do conteúdo da disciplina, vista como fim último do ensino, mas um motor a serviço de outras metas. Compreendendo assim, como uma nova compreensão tanto do professor como do aluno.

Para Shulman (2014), apesar de a compreensão ser uma concepção essencial no ensino, ela também é incompleta. Desse modo, este pesquisador, apresenta uma ideia geral de categorias de conhecimento implícita à compreensão do professor, necessárias para promover a compreensão entre alunos.

- Conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral, referenciado no gerenciamento e organização na sala de aula;
- Conhecimento do currículo: materiais e programas;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo: compreensão profissional;
- Conhecimento dos alunos e suas características;
- Conhecimento de contextos educacionais: vai desde o funcionamento da sala de aula, passando pela gestão dos sistemas educacionais até as características das comunidades e suas culturas; e
- Conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica.

Dentre essas categorias, a que Shulman tem especial interesse é o conhecimento pedagógico do conteúdo, que segundo ele, identifica os distintos corpos de conhecimento necessários para ensinar. Afirmando ser quem

> [...] representa a combinação de conteúdo e pedagogia no entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e apresentados no processo educacional em sala de aula. O conhecimento pedagógico do conteúdo é, muito provavelmente, a categoria que melhor distingue a compreensão de um especialista em conteúdo daquela do pedagogo. (SHULMAN, 2014, p. 207).

Tanto Tardif (2014) como Shulman (1986) se dedicam a estudos sobre saberes docentes que são produzidos e mobilizados nas práticas de professores. O primeiro enfatiza a pluralidade e a heterogeneidade dos saberes profissionais que derivam de diversas fontes, enquanto que este último interessa-se por investigações sobre a compreensão cognitiva do conteúdo a ser ensinado e das relações entre conteúdo e o modo como o professor o apresenta a seus alunos.

É preciso que o professor disponha não apenas de compreensão da matéria específica que ensina, mas também ter uma compreensão humanista que serve para enquadrar o já aprendido e facilitar a nova compreensão. Segundo Shulman (2014, p. 208)

> O professor tem responsabilidades especiais com relação ao conhecimento do conteúdo, pois serve como fonte primária da compreensão deste pelo aluno. A maneira como essa compreensão é comunicada transmite aos alunos o que é essencial e o que é periférico na matéria. Diante da diversidade dos alunos, o professor deve ter uma compreensão flexível e multifacetada, adequada à oferta de explicações diferentes dos mesmos conceitos ou princípios. Consciente ou não, o professor também transmite ideias sobre como a “verdade” é determinada numa área e um conjunto de atitudes e valores que influenciam notoriamente a compreensão do aluno. Essa responsabilidade demanda especialmente a profundidade de compreensão do professor das estruturas da matéria, assim como suas atitudes e entusiasmo com relação ao que está sendo ensinado e aprendido.

Segundo Figueiredo (2007) e Ferreira (2014), a partir do trabalho de Shulman, outros pesquisadores (BALL, BASS, 2002; BALL, THAMES, PHELPS, 2008), liderados por Debora Ball, desenvolveram o conceito de *conhecimento matemático para o ensino*[13],estruturado em seis domínios, como exposto no Quadro 7:

---

[13] No original, em inglês, Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

Quadro 7: Organização dos seis domínios do conceito de conhecimento matemático para o ensino

Conhecimento comum do conteúdo - inclui o que é usualmente ensinado na sala de aula da Escola Básica;
Conhecimento especializado do conteúdo – consiste na compreensão de diferentes interpretações das operações que os alunos não precisam saber distinguir, mas os professores sim;
Conhecimento do conteúdo e dos alunos – compreende o conhecimento das relações entre os alunos e a matemática (dificuldades dos alunos com determinados conteúdos ou erros mais comuns cometidos por eles, por exemplo);
Conhecimento do conteúdo e do ensino - envolve estratégias para o ensino dos conteúdos na escola;
Horizonte do conhecimento do conteúdo e *conhecimento do conteúdo e do currículo* [14] - Ball e sua equipe tem dúvidas se são categorias que perpassam os outros domínios ou se deveriam se constituir em uma categoria própria.

Fonte: adaptado de Ferreira (2014, p. 14-15).

Outras pesquisas foram desenvolvidas no Brasil utilizando como referencial as ideias de Shulman (1986, 1987) e de Ball et al. (2005) (BEZERRA; GOMES; LIMA, 2012; LAUSTENSCHIAGER; RIBEIRO, 2014; ALMEIDA; et al, 2015; FIGUEIREDO et al., 2015; RIBEIRO; CURY, 2015; OLIVEIRA, 2015; RIBEIRO, 2016). Buscaram fazer reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores para o ensino de Álgebra, compreender como mobilizam esses conhecimentos ao planejarem suas aulas na Educação Básica a fim de investigar o que pensam os professores sobre Álgebra.

Consideram “fundamental que o futuro professor tenha contato com as dificuldades dos alunos em relação a determinado conceito, sejam suas perguntas e suas respostas para os exercícios as usuais ou as inesperadas.” (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 104). Essas ações do professor estão relacionadas com o desenvolver o *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, na visão de Ball, Thames e Phelps (2008).

Outro fator hegemônico no ensino de Álgebra é o uso de livros didáticos e a preparação dos alunos para os exames nacionais ou internacionais. De acordo com Ribeiro e Cury (2015, p. 105) “saber o que está sendo apresentado nos livros e nos exames e planejar questões que levem em conta esses tópicos são elementos que fazem parte do *conhecimento do conteúdo e do ensino*.” Esse conhecimento possibilita, ao professor, avaliar os materiais que lhes são fornecidos para o ensino.

[14] No original, em inglês, Common Content Knowledge (CCK), Specialized Content Knowledge (SCK), Knowledge of Content and Students (KCS), Knowledge of Content and Teaching (KCT), Horizon Content Knowledge (HCK) e Knowledge of Content and Curriculum (KCC), respectivamente.

Por fim, os autores consideram a necessidade da avaliação contínua, os professores devem saber como avaliar as respostas dos alunos, não apenas para atribuir-lhes nota, mas para refletir sobre sua prática e fazer adaptações necessárias ao seu ensino, proporcionando aos estudantes uma melhor aprendizagem. Tendo assim, uma cooperação ideal entre os domínios do *conhecimento do conteúdo e dos alunos* e *conhecimento do conteúdo e do ensino*.

Ball, Thames e Phelps (2008) assinalam que também faz parte do conhecimento próprio do docente

> [...] explicar os procedimentos e que, para tal, ele necessita entender suas justificativas, os significados para os termos e as explicações dos conceitos. Além disso, o professor, para o ato de ensinar, precisa conhecer seus alunos, suas dificuldades e suas facilidades, de modo a se apropriar dos métodos, dos termos e das situações que sejam adequadas para o desenvolvimento deles. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008 apud OLIVEIRA, 2015, p. 30).

Para Langwinski (2014)

> O envolvimento do professor em sua ação pedagógica é o ponto-chave, pois serão seus diferentes conhecimentos que contribuirão para os questionamentos, fazendo com que os alunos se envolvam de fato nas atividades propostas. (LANGWINSKI, 2014, p. 25).

Diante da responsabilidade confiada ao professor, faz-se necessário que ele invista em seu conhecimento, a formação permanente deve ser para esse profissional da educação uma prioridade.

Lorenzato (2008) afirma que o professor precisa investir em sua formação e completa que “é fundamental que ele possua ou adquira o hábito da leitura, além da constante procura de informações que possam melhorar sua prática pedagógica.” (LORENZATO, 2008, p. 11). Segundo esse autor, o professor convive com um grande desafio que é manter-se atualizado, entretanto, por não ser bem remunerado acaba tendo que dar muitas aulas e assim, não conseguindo tempo nem dinheiro para investir em seus estudos. Contudo, ressalta que,

> Todos esses obstáculos não eximem o professor da responsabilidade de ser competente e, considerando que o processo de formação é individual e intransferível, cabe a cada um preencher as lacunas herdadas de sua formação inicial (no curso superior), bem como providenciar a continuada. (LORENZATO, 2008, p. 12).

Vale lembrar que todo ser humano tem a particularidade de se reconhecer como indivíduo. O fenômeno da individualidade está no cerne da profissão do professor, pois ele precisa estar disposto para reconhecer seus alunos como indivíduos, a fim de conhecê-los e compreendê-los em suas particularidades, exigindo do professor sensibilidade e discernimento para evitar as generalizações.

E em se tratando do ensino de Álgebra, para Duval et al. (2014) é necessário ter uma visão de conjunto dos objetivos ao longo dos anos escolares e das dificuldades recorrentes com as quais os alunos se deparam. Segundo esses autores, essa visão conduz à interrogação sobre como organizar as atividades e a importância e adequação das atividades escolhidas, para fazer com que os alunos tenham acesso à Álgebra.

Neste sentido, diante do que já foi exposto nesta seção, em relação às pesquisas já desenvolvidas, com os professores que ensinam Álgebra, a respeito do que se entende sobre pensamento algébrico, sobre os modos que a Álgebra é compreendida por pesquisadores da Educação Matemática e do saber docente e suas peculiaridades, na seção seguinte será apresentada a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e assim, mostrar como Raymond Duval[15] defende que deve acontecer o ensino de Álgebra.

[15] O pesquisador francês Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, desenvolve suas pesquisas em psicologia cognitiva desde os anos 1970, oferecendo importantes contribuições para a área de Educação Matemática. Atualmente é professor emérito em Ciências da Educação da *Université Du Littoral Côte d'Opale* da França.

4 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

> *Sendo a pesquisa o elo entre teoria e prática, parte-se para a prática, e, portanto se fará pesquisa, fundamentando-se em uma teoria que, naturalmente, inclui princípios metodológicos que contemplem uma prática. D'Ambrósio (1997, p.81).*

4.1 A escolha do referencial teórico

Para orientar a coleta e análise dos dados, escolhemos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Encontramos em Duval (2004, 2009, 2011) e Duval et al. (2014) o aporte teórico que trata de uma abordagem cognitiva voltada para a importância do uso e coordenação de diferentes registros para a aprendizagem em Matemática.

As representações semióticas são entendidas como produções constituídas pelo emprego de signos, utilizadas para expressar, objetivar e tratar as representações. A utilização das representações semióticas não são apenas essenciais para fins de comunicação como também necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática (DUVAL, 2009).

É importante ressaltar que o número de pesquisas que tratam dos registros de representações semióticas vem crescendo consideravelmente em nosso país. Segundo COLOMBO, FLORES E MORETTI (2008, p. 43) "a noção teórica proposta por Duval tem sido cada vez mais aprofundada e tem se mostrado profícua para os estudos sobre a aprendizagem da matemática".

Para Raymond Duval (2003, 2009, 2011), autor desta teoria, as representações semióticas são fundamentais na aprendizagem da Matemática em razão da abstração dos objetos matemáticos, que só são acessíveis por meio de seus diferentes registros de representações, tais como a língua materna, a escrita aritmética e algébrica, gráficos, tabelas, figuras geométricas, entre outros. Segundo esse teórico "A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como podemos ter acesso a eles por nós mesmos." (DUVAL, 2011, p. 15).

Outros autores também concordam com essa teoria e afirmam que

> [...] sempre que é utilizada uma representação semiótica, é necessário pensar que o estudante, percebe, reconhece, e se apropria de *alguns*

> aspectos do objeto, aqueles colocados em evidência, mas *não de todos* os que o professor tem em mente. Por isso, uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribui de maneira específica com alguns aspectos do objeto. (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 112).

A TRRS apresenta subsídios significativos tanto em aspectos conceituais como metodológicos, possibilitando compreender como se dá a aquisição do pensamento matemático e a reflexão sobre as maneiras de ensinar, em busca de alternativas concretas para o ensino de Matemática (BARRETO; OLIVEIRA, 2015).

A pesquisa de Gouveia (2014, p. 47) analisando e comparando diversos materiais referentes à educação básica, afirma que

> Seria difícil pensar que haveria Matemática sem uso das diferentes representações para seus objetos. O estudo da noção intuitiva de conjuntos, com todas as suas representações, símbolos, elementos, relações e operações, dificilmente poderia ser articulado sem uma representação simbólica adequada de seus conceitos.

O trabalho de Guadagnini (2013) utilizou a Teoria de Registros de Representação Semiótica como "guia na elaboração das atividades e, como base para a análise da mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico do conteúdo em estudo, privilegiando o estudo de dificuldades na conversão e nos tratamentos dos mesmos." (GUADAGNINI, 2013, p. 16). A autora acredita que a mobilização de mais de um registro do mesmo objeto matemático contribui para a construção do conhecimento do aluno, para ela

> Com o auxílio da TRRS é possível analisarmos se o aluno mobiliza os diversos registros propostos nas atividades e realiza conversão, mudança de um registro a outro e tratamento, transformação dentro de um mesmo registro e as dificuldades que eles encontram. (GUADAGNINI, 2013, p. 57).

Segundo a autora

> Como os alunos, de modo geral, não conseguem perceber o mesmo objeto matemático em diferentes representações, isto se torna um fator limitante para sua apreensão. Daí a importância de criar condições para que o aluno reconheça um mesmo objeto matemático em várias representações, promovendo uma apreensão mais significativa dos conceitos matemáticos. (GUADAGNINI, 2013, p. 58).

Levando em consideração as afirmações supracitadas e dada a importância das representações na aprendizagem matemática, o apoio dessa teoria nos oferece elementos sinalizadores, auxiliando-nos na reflexão sobre o ensino dessa disciplina. Desse modo, de forma mais detalhada apresentaremos a teoria que escolhemos para dar suporte à nossa pesquisa.

4.2 Compreendendo a Teoria dos Registros de Representações Semiótica (TRRS)

Desde Descartes e Kant a noção de representação está presente na reflexão referente à preocupação com a constituição de um conhecimento, pois “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2009, p. 29).

A teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (2004, 2009), focaliza sua pesquisa na aprendizagem da Matemática, buscando sua compreensão segundo os aspectos cognitivos. Em um trabalho mais recente, Duval (2016, p. 5) afirma que

> [...] as formas de pensar e trabalhar em matemática são radicalmente diferentes daquelas praticadas em outros domínios do conhecimento, uma vez que, tanto nas pesquisas sobre a aprendizagem de matemática quanto no conjunto das dificuldades intransponíveis de compreensão nas quais a maioria dos alunos se bate sistematicamente, o ponto de vista cognitivo sobre a matemática é tão fundamental quanto o ponto de vista matemático.

A ideia fundamental dessa teoria é de que a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Segundo Duval (2009) um objeto matemático só se deixa reconhecer pela sua representação, afirmando só ser possível que os sujeitos em fase de aprendizagem compreendam a Matemática se conseguem perceber a diferença de um objeto de sua representação. Por exemplo, os números são objetos matemáticos que podem ser representados na forma decimal, fracionária,..., as funções são objetos matemáticos que podem se apresentar da forma escrita, da forma algébrica ou de um gráfico. Um mesmo objeto matemático pode se apresentar com representações muito diferentes. Nós formamos as ideias do objeto por meio de suas representações.

No campo das representações, Duval (2009) refere-se a três tipos necessários à construção do conhecimento.

Recorrendo a noção de representação de Piaget, como evocação dos objetos ausentes, a **representação mental** permite focalizar o objeto na ausência dos significantes perceptíveis. Estas representações são internas e conscientes ao sujeito, uma interiorização das ações vividas.

A **representação interna ou computacional**, com teorias que privilegiam o tratamento de um sistema recebe as informações externas, para produzir uma resposta adaptada. Assim, a noção de representação torna-se fundamental como *forma* pela qual uma informação pode ser descrita e levada em conta num sistema de tratamento (DUVAL, 2009).

Diferente da concepção de representação anterior, não tem nada a ver com a "evocação dos objetos ausentes" que remetam à consciência de um sujeito, ao contrário, trata-se de uma codificação da informação.

A **representação semiótica** diz respeito a um sistema semiótico de representação, ou seja, os registros de representação pertencem a sistemas particulares de signos, a saber: o sistema figural, o sistema linguístico, o sistema numérico, o sistema algébrico. Por exemplo, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, que podem ser "convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo ter **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza." (DUVAL, 2009, p. 32 grifos do autor). A noção de representação semiótica implica na consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão de representações de um sistema semiótico para outro, ou seja, "**mudar a forma pela qual um conhecimento é representado**" (ibidem, p. 33 negrito do autor).

Para Duval (2009) sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende os conceitos matemáticos. Conforme este autor, os sistemas semióticos devem proporcionar *três atividades cognitivas ligadas à representação*:

A atividade de **formação** é o recurso a um ou mais signos para atualizar a atenção voltada para um objeto ou para substituir essa atenção. "Os resultados de formação são a designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento." (DUVAL, 2009, p. 55). A formação implica em selecionar um conjunto de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função, que são possibilidades próprias de representar o objeto no registro escolhido.

É importante que a formação siga as regras próprias ao sistema empregado denominadas de *regras de conformidade.* São aquelas que definem um sistema de representação: a determinação de unidades elementares - símbolos, vocabulário; as combinações que dão sentido; as combinações de unidades elementares - regras de formação para um sistema formal, gramática para a língua formal; as condições para que uma representação de ordem superior seja pertinente e completa – regras canônicas. As regras de conformidade completam uma função de identificação de sentido do objeto para o sujeito que a produziu.

As atividades de **tratamento** são operações que envolvem uma transformação no interior de um mesmo registro. Exemplo: ¼; 0,25; 25×10^{-2}.

As atividades de **conversão** são transformações que se fazem passar de um registro para o outro. Exemplo: o registro em língua natural “um quarto ou a quarta parte” para o registro em escrita numérica ¼.

Duval (2009) chama *semiósis*, a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e a *noésis* a apreensão conceitual de um objeto. O autor assegura que não existe *noésis*[16] sem *semíosis*[17], para ele “é a *semíosis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*.” (DUVAL, 2009, p. 17).

Por exemplo, quando alguém diz BOLA, aquele que ouviu a palavra bola vai pensar nesse objeto redondo, no entanto, cada um vai pensar numa “bola” diferente, com tamanho e cores distintas. Agora, quando se disser “bola de basquete” ou “bola de futebol americano” ou ainda “bola de futebol”, ninguém irá pensar numa bola de vôlei. O Quadro 8 apresenta o que se entende por significante, significado e significação, conferido pelo sujeito.

Quadro 8: Referências das palavras referente a TRRS

Significante (objeto)	Bola	5
Significado (conceito)	brinquedo ou objeto de um esporte	cinco unidades
Significação (referência)	bola de basquete, bola de vôlei, ...	atribuído pelo sujeito, depende do registro semiótico

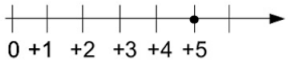
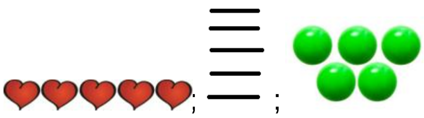
Fonte: a pesquisadora.

As representações semióticas são referentes a um sistema particular de signos, representantes do objeto matemático. “Semiótica é a ciência dos signos [...] a ciência de todas as linguagens” (SANTAELLA, 1990, p. 7). O Quadro 9 traz exemplos de representações que são utilizados no ensino de matemática.

---

[16] Conceito: definição, ato de conceber pelo pensamento.
[17] Signo: representação estabelecida socialmente.

Quadro 9: Exemplo de representações

Representação em língua natural	Os números positivos não nulos
Representação em linguagem algébrica	$x > 0$
Representação numérica	5; 10/2; 2 + 3; 7 – 2
Representação gráfica: reta numérica	
Representação pictórica	
Representações auxiliares	barras de cuisenaire, ábaco, ...

Fonte: a pesquisadora.

Para Duval (2004, 2009), no trabalho com as representações dos objetos matemáticos, é necessário que o objeto não seja confundido com suas representações, mas que seja reconhecido por cada uma delas.

Destarte, para os registros de representação semiótica, a relação entre semiósis e noésis diz respeito somente aos sistemas semióticos que permitem essas três atividades – formação, tratamento e conversão, confrontando com três fenômenos que aparecem estritamente ligados:

- **A diversificação de registros de representação semiótica**: fazer uso de sistemas de representações diferentes entre si, com aprendizagens específicas.
- **A diferenciação entre representante[18] e representado** ou ainda entre forma e conteúdo: compreender o que uma representação representa e associar a ela outras representações, integrando-as nos procedimentos de tratamento.

O representante refere-se ao objeto e o representado a palavra. Por exemplo, quando eu digo ‘casa’ é o objeto real, é o representado, mas cada um que ouviu a palavra casa vai pensar em uma casa segundo a sua concepção de casa, casa de alvenaria, casa de madeira, etc.

[18] O representante evoca os objetos ausentes e o representado é um objeto real. (DUVAL, 2009).

- **A coordenação entre os diferentes registros**: conhecer as regras de correspondência entre dois sistemas e ainda fazer essa conversão espontaneamente, percebendo as representações produzidas.

Em uma entrevista concedida à Freitas e Rezende (2013), Raymond Duval alega que escolheu o termo “registro” para distinguir os sistemas semióticos utilizados em Matemática e os outros sistemas semióticos utilizados fora da Matemática, por duas condições:

> Em primeiro lugar, esta é a palavra que Descartes utiliza nas primeiras páginas de sua *Geometria*. Em segundo, esta palavra também se refere à extensão dos recursos disponíveis em domínios como a voz, os instrumentos musicais, os modos de se expressar: falamos, por exemplo, de “registros” para designar o comando de cada um dos jogos de um órgão. (FREITAS; REZENDE, 2013, p. 16).

De acordo com Duval (2009, 2011; 2016) os registros são sistemas semióticos particulares. A diferença é que os sistemas semióticos são utilizados e desenvolvidos para preencher a função de comunicação, enquanto os registros são unicamente utilizados para calcular, deduzir, demonstrar e modelizar, ou seja, se caracteriza fundamentalmente, “pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar” (DUVAL, 2009, p.70).

Em se tratando de sistemas semióticos, Duval (2011) ressalta dois tipos heterogêneos de sistemas semióticos: os códigos e os registros. Os códigos são sistemas que permitem transmitir uma informação por codificação e os registros são sistemas cognitivamente produtores, criadores, de representações sempre novas. Segundo Duval (2011, p. 73) a diferença primordial entre registro e código, está no fato

> [...] de que os registros abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas, o que os códigos não permitem. [...] Mudar de registro de representação, não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação.

Em função dessa afirmação, Duval (2011, p. 76) reconhece que a língua natural “não é um código, mas um registro de representação semiótica.” Pois cumpre ao mesmo tempo, função de comunicação e de todas as funções cognitivas, uma vez que, preenche um desses dois atos: de dizer ou escrever qualquer coisa e compreender o que o outro quer dizer ou está escrito.

Sendo uma condição essencial para qualquer sistema semiótico de representação a **função de comunicação** preenchem outras duas funções: a função de objetivação e a função de tratamento. A *objetivação* “corresponde a descoberta pelo próprio indivíduo do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado.” (DUVAL, 2009, p. 41). E o *tratamento* consiste nas operações que podem ser realizadas no interior do registro, “estão diretamente ligadas à utilização de um sistema semiótico.” (ibidem, p. 42).

De acordo com Duval (2004, p. 88-89) as funções discursivas são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para ser considerada uma língua, devendo ser capaz de:

- designar os objetos,
- dizer algo sobre os objetos designados sob a forma de uma proposição,
- vincular uma proposição enunciada a outra de forma coerente,
- marcar o valor, o modo ou estatuto de uma expressão.

A língua natural permite produzir uma variedade de tipos de discursos, que podem ser produzidos oralmente ou em forma de escrita. Esses discursos se decompõem em unidades de sentido e podem ser também decompostas em outras unidades de sentido, contudo, em um nível de organização inferior (DUVAL, 2011).

A primeira produção de um discurso é a frase. É com a frase que aparece o poder produtor da língua, pois só é possível compreendê-la com base nas frases que ela permitiu e vai permitir produzir. A unidade de sentido que forma a frase é constituída por seu valor epistêmico, lógico ou por seu *status* no desenvolvimento do discurso. Conforme Duval (2011, p. 77) são as “operações discursivas que entram na produção, ou compreensão, de um discurso e que determinam as unidades de sentido [...] com base na frase.”.

Existem três tipos de operações discursivas: **a enunciação** – operação discursiva que determina uma frase para dizer qualquer coisa sobre qualquer coisa; **a designação** – dar significado sobre o que, ou a propósito do que, vai enunciar qualquer coisa e a **expansão discursiva** – “são aquelas que organizam uma sequência de frases em unidade com um mesmo propósito e que lhe dão coerência. [...] que criam a diferença cognitiva entre um raciocínio e uma descrição ou explicação” (DUVAL, 2011, P. 79).

Essas três operações discursivas são operações cognitivas, situadas exatamente em que conhecimento, compreensão e conscientização são inseparáveis, pois “é preciso se exprimir para si e para os outros para poder tomar consciência.” (DUVAL, 2011, p. 81). Segundo esse autor, para que alguém consiga compreender e fazer qualquer coisa, diante de qualquer produção matemática, é preciso primeiro reconhecer as unidades de sentido, ou seja, os dados ou as informações, matematicamente pertinentes e, posteriormente, delinear as transformações dessas unidades de sentido.

Conforme Duval (2011, p. 83) “A língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento.”. Segundo ele, do ponto de vista matemático, um único registro é suficiente para realizar um encaminhamento matemático, contudo, a análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela Matemática mostra, ao contrário, “a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder compreender.” (ibidem, p. 116). Desse modo, para analisar as atividades matemáticas organizadas com o objetivo de aprendizagem ou de formação, é necessário considerar todos os registros utilizados em Matemática.

Considerando os possíveis registros utilizados em Matemática, Duval (2004, 2011) apresenta uma classificação, ao mesmo tempo teórico e metodológico (como fazer). “Ela situa todos os tipos de transformações de representações que fazem parte da atividade matemática, a saber, as operações próprias de cada registro e a variedade de tipos de conversão.” (DUVAL, 2011, p. 117).

Essa classificação das operações feita por Duval (2011) em *registros discursivos e não discursivos* e, os *registros multifuncionais e monofuncionais*, podem ser melhor entendida analisando o Quadro 10.

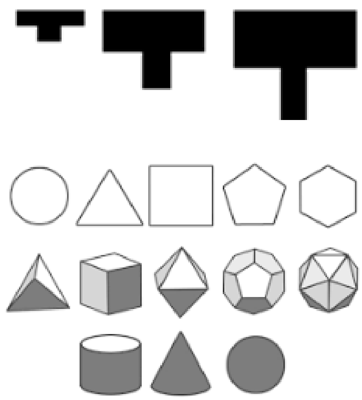
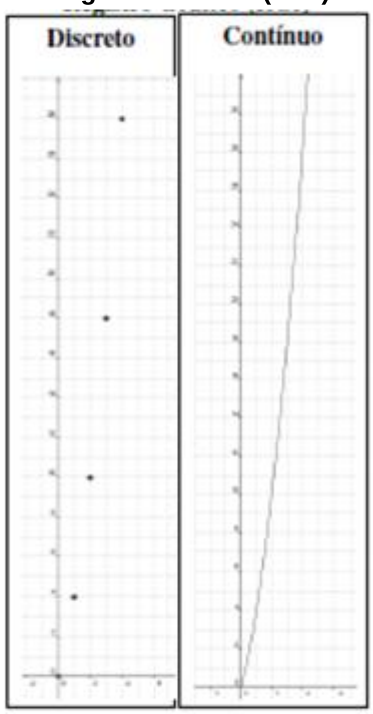
Quadro 10: Classificação dos tipos de registros semióticos

	Registros DISCURSIVOS *Linearidade fundamentada na sucessão* para a produção, apreensão e organização das expressões.	Registros NÃO DISCURSIVOS Apreensão simultânea de uma organização bidimensional
Registros MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos são não algoritmizáveis	As LÍNGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção: oral/escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas.)
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: as transformações de expressões são **algoritmizáveis**	As ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: escrita	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos.** ESQUEMAS

Fonte: (DUVAL, 2011, p. 118).

O trabalho de Passos (2012) exemplifica num quadro essa classificação das operações feita por Duval (2011). A pesquisadora apresenta os tipos de registros de representação utilizados em Matemática, a fim de torná-los conhecidos. Usaremos o Quadro 11 para apresentar alguns exemplos de como são classificados os registros de representação semiótica.

Quadro 11: Exemplos de classificação dos Registros de Representação Semiótica

<table>
<tr><th colspan="4">REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A ÁLGEBRA</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">Representação Discursiva</th><th>Representação não discursiva</th></tr>
<tr><td>Registros multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis</td><td colspan="2">Registro em Língua Natural (RLN)
Determine a área total de uma sequência geométrica composta por dois retângulos. O RETÂNGULO 1 possui duas unidades a mais na base em relação à altura. O RETÂNGULO 2 altura igual a do RETÂNGULO 1 e base fixada em uma unidade construída a partir do ponto médio da base do primeiro retângulo.</td><td>Registro Figural (RFg)
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Registros monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos</td><td colspan="2">Registro Numérico (RNm)
3 . 1 + 1 . 1
4 . 2 + 1 . 2
5 . 3 + 1 . 3
6 . 4 + 1 . 4</td><td rowspan="3">Registro Gráfico (RGr)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Registro Simbólico (RSb)
{(1,4), (2, 10), (3, 18), (4, 28)}
{x ϵ ℝ / x > 0}</td></tr>
<tr><td>Registro Algébrico (RAl)
A_1: ℕ→ℕ
A_1(n): (n +2)n + n.1
A_1(n): n^2 +2n + n
A_1: n^2 + 3n</td><td>Registro Tabular (RTb)
<table><tr><td>T</td><td>N</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>3</td><td>18</td></tr><tr><td>4</td><td>28</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td></tr></table></td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Passos (2012, p. 31).

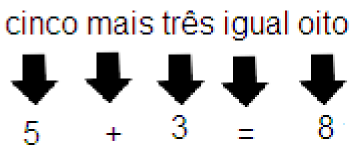
Para Duval (2011, p. 38) “as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos raramente visíveis, ou os traços”. A mudança de registro de uma representação dada após um tratamento é o primeiro passo do pensamento matemático. Porém, a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que parece ser. Na conversão entre dois registros de representação ocorrem dois fenômenos, denominados o da *congruência* e o da *não congruência*.

> Quando a representação terminal (no registro de chegada) transparece na representação de saída (enunciado) e a conversão se assemelha a uma situação de simples codificação, então há *congruência* (há correspondência semântica das unidades de significado entre os dois registros). Se a representação terminal não transparece absolutamente, então caracteriza-se a *não congruência*. (BASSOI; PECCIN, 2014, p. 191 grifos das autoras).

Segundo Duval (2009) existem três critérios de congruência: correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem dentro da organização das unidades nas duas representações. Caso não exista um desses critérios de congruência, a não congruência está confirmada e a dificuldade de conversão aumenta.

A atividade matemática requer a mobilização de dois registros de representação (DUVAL, 2004, 2011). Por exemplo, converter um enunciado em língua natural em equação:

i) e*xemplo de congruência*: cinco mais três é igual a oito. Este exemplo atende os três critérios de congruência, pois na conversão da fala para a escrita, vamos ter



Fonte: a pesquisadora.

ii) exemplo de não congruência: João tem o dobro da idade de André. E André é cinco anos mais velho que Felipe, que tem 11 anos. Quantos anos tem João?

$$J = 2A$$

$$A = F + 5$$

$$F = 11$$

$$J = ?$$

Fonte: a pesquisadora.

Já este exemplo não atende nenhum dos critérios de congruência, aumentando o nível de dificuldade de resolução, em que o aluno terá que primeiramente codificar o enunciado e fazer as substituições para encontrar a resposta correta.

O movimento de registro de partida e registro de chegada e o inverso convergem para um problema do ponto de vista cognitivo: nem sempre o registro que é congruente num sentido, também o é no sentido contrário. Além do mais, “Os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência” (DUVAL, 2011, p. 124).

4.3 A Álgebra e os Registros de Representação Semiótica: a contribuição de Raymond Duval

O trabalho de Duval et al. (2014) “Ver e ensinar a matemática de outra forma: *introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?*” teve como proposta analisar os caminhos e impasses do ensino de Álgebra, atendendo ao quadro de uma decomposição Matemática ou considerando uma decomposição cognitiva, sem querer submetê-la a uma ordem Matemática de progressão para as aquisições.

Os autores partem do fato de que o ensino de Álgebra se tornou um duplo equívoco no que se refere aos objetivos que lhes são atribuídos no quadro de uma formação geral comum dos estudantes no Ensino Fundamental e Médio. De um lado, o que chamamos com frequência “álgebra” historicamente é identificado com a utilização das letras para calcular, porém, do ponto de vista matemático, esse tipo de representação dos números e das grandezas não é suficiente para fazer Álgebra.

Partindo do ponto de vista matemático, não se pode confundir as fórmulas com as equações, enquanto de um ponto de vista não matemático, não é possível fazer essa discriminação, levando em consideração que a fórmula e a equação encontram-se no mesmo registro de escrita literal (DUVAL et al., 2014).

O outro equívoco diz respeito ao objetivo do ensino de Álgebra na formação geral. Sendo fundamental para resolver problemas em vários domínios da Matemática, qual seria o interesse dos alunos que não seguirão estudos matemáticos ou científicos pela Álgebra? Assim, o que o seu ensino pode ocasionar na formação geral dos indivíduos?

De acordo com Duval et al. (2014, p. 8) é estranho ver que damos a mesma resposta para justificar o ensino de Álgebra, “As equações não seriam apenas ferramentas para resolver problemas matemáticos, mas elas deveriam ajudar todos os alunos a resolver os problemas que se colocam na “realidade”!”. Essa palavra mágica usada para justificar o ensino de Matemática e as dificuldades que ela provoca, acabam tornando esse simbolismo formal das equações como uma espécie de “ferramenta” para resolver os problemas do dia a dia. Entretanto, esse ponto de vista nos leva a acreditar que não são as equações que são uteis e sim as fórmulas - que parecem intermináveis, fórmulas de física, fórmulas para calcular distância, área, volume, para medir consumo de água, etc. Dando-nos uma questão importante: “*é verdadeiramente necessário aprender a resolver equações para utilizar as fórmulas que encontramos em todos os lugares?*” (ibid. grifos do autor).

Esse duplo equívoco leva o ensino de Álgebra a um dilema: primeiro ele deve envolver as equações e não as fórmulas, senão não seria o ensino de Matemática. Mas, quando se trata de situações da realidade, as fórmulas é que são importantes. Para escapar desse dilema, Duval et al. (2014) alegam que é preciso esclarecer duas coisas

> Primeiro, é preciso saber resolver uma equação para usar as fórmulas. Em seguida, para descobrir que os vários problemas encontrados nas situações reais podem ser mais facilmente resolvidos com a ajuda das equações, *é preciso poder colocar em equações os dados desses problemas*. Mas aqui, já estamos duplamente engajados em um impasse, pois, a aprendizagem da álgebra não permite a muitos alunos utilizar as fórmulas. E, sobretudo, colocar em equações constitui um ponto de parada e de incompreensão intransponível ao longo de todo currículo, mesmo para os alunos que têm sucesso na resolução das equações. É um saber inutilizável que leva ao nada. (DUVAL et al., 2014, p. 9 grifos dos autores).

Diante desta afirmação, somos levados a nos interrogar sobre a influência do ensino de Álgebra no desenvolvimento do indivíduo e ainda, no modo que deve acontecer à introdução das equações, a fim de que os alunos possam se apropriar dessa ferramenta de resolução de problemas, tornando-se capazes de utilizá-las. Para isso, Duval et al. (2014, p. 9) apresentam algumas questões: “Por onde começar o ensino de álgebra? Que progressão organizar? Quais atividades propor para que os alunos possam compreender as escritas algébricas e suas transformações?”.

Para responder a estas questões os autores afirmam que os conhecimentos e as práticas matemáticas para poderem ser ensinadas devem ser decompostos em elementos de base a serem introduzidos sucessivamente, ou seja,

> Os objetivos e os conteúdos de um ensino correspondem aos elementos de base que resultam da decomposição de um conhecimento que, para os matemáticos, forma um todo apresentando múltiplos aspectos e tendo conexões implícitas com os outros. (DUVAL et al., 2014, p. 18).

Duval et al. (2014) chamam esse conhecimento de completo. Somente quando um conhecimento é completo é que ele se torna operatório para o sujeito que o adquiriu. Para esses autores o princípio da decomposição matemática de um conhecimento em elementos de base, parte do conhecimento completo, em que são isolados os conhecimentos pré-requisitos para a compreensão em Matemática e reiterados a fim de obter conteúdos "*minimais que ainda tenham sentido matemático*." (DUVAL et al., 2014, p. 19 grifos dos autores). Essa decomposição de um conhecimento em conhecimentos pré-requisitos é uma análise regressiva, ou seja, de cima para baixo.

Contudo, a organização do ensino se dá segundo a "*ORDEM INVERSA DO PROCESSO DE DECOMPOSIÇÃO REGRESSIVA: para cima ou por reconstrução progressiva.*" (DUVAL et al., 2014, p. 19 grifos dos autores). De acordo aos autores as pesquisas em ensino, em sua maioria, se fazem no quadro de decomposição regressiva dos conhecimentos a adquirir, em que o foco de ensino da matemática está direcionado aos conteúdos e ao aprendizado atingido ou não pelo educando.

Dessas acepções, podemos ressaltar que há necessidade em rever as possibilidades para outros tipos de ensino, o modo de acesso aos objetos matemáticos e como este processo se efetiva.

Para Duval et al. (2014, p. 20) "A decomposição regressiva de um conhecimento completo é o pano de fundo para a apresentação dos exercícios e dos problemas a serem trabalhados em sala de aula." Tendo como objetivo do ensino de álgebra a aquisição das equações como "ferramenta" de solução de problemas.

Entretanto, a palavra ferramenta tem sentido metafórico, pois as equações são produções semióticas em um registro de representação que permitem tratamentos algorítmicos, no qual em um problema "é preciso colocar os dados em forma de equação para poder, em seguida, fazer funcionar a ferramenta, isto é, resolver a equação." (ibidem, p. 21).

De acordo com estes autores, a escolha do problema a ser proposto aos alunos para atingir determinado objetivo de ensino deve ser a preocupação primeira dos professores. Pois

> Para efetuar essa escolha, existe uma gama aparentemente muito variada de problemas que vão, com certeza, de problemas puramente aritméticos, passando por problemas geométricos, até problemas que se referem às situações concretas ou do dia a dia. E é aqui que se coloca a questão de problemas em função dos objetivos de ensino. Os problemas escolhidos

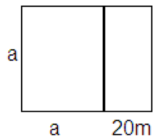
> possibilitam atingir os objetivos de aquisição visados? (DUVAL et al., 2014, p. 43).

Os autores, citando o artigo de Duperret e Fenice (1999)[19] que propõem exemplos de problemas sobre equações, sugerem que os problemas propostos por uma situação de aprendizagem devem ser analisados tal como apresenta o Quadro12:

Quadro 12: Métodos de análise de problemas de aprendizagem

Em função de sua solução	**Tornar o recurso às letras necessário para resolver um problema no que diz respeito a uma quantidade desconhecida.** Podem ser resolvidos usando três estratégias diferentes: tentativa e erro; raciocínio aritmético e recurso à escrita literal.	Exemplo: i) encontrar dois inteiros sucessivos cuja soma é 143. ii) o perímetro de um retângulo é de 80 m. o comprimento mede 20 metros a mais que a largura. Quais são as dimensões do retângulo?
	Colocar em forma de equação. Propor problemas para colocar em forma de equação exigem outras operações cognitivas.	Neste caso propõem-se tarefas de reconhecimento e avaliações de respostas para as questões. Exemplo (DUPERRET; FENICE, 1999, p. 4, tradução nossa): Qual (is) escrita (s) você escolhe para designar três números inteiros consecutivos? Assinale o que parece se encaixar: a, 2a e 3ª ; x, y e z a, a+1 e a+2 ; 5, 6e 7
	Descobrir as letras como variáveis. As letras não são mais introduzidas para designar um único número, mas como uma função de generalização.	Exemplo: dividir um número dado em dois números tendo uma diferença dada.
	Variação dos modos de apresentação dos modos de um problema. Existem diferentes maneiras de	Exemplo:

[19] DUPERRET, J. C.; FENICE, J. C. L'accès au littéral et a l' algébrique: um enjeu Du collège. Repères-IREM, n.34. 1999. p. 29-54.

Em função da distância variável entre a apresentação dos dados e o registro de tratamento	apresentar os dados de um problema e existem muitos problemas diferentes, mas que têm a mesma solução matemática.	 O perímetro do retângulo é de 80metros. Quais são as dimensões do retângulo? Esse problema é uma variante do problema ii).
	Inversão do sentido da conversão a efetuar. Quanto aos dados do problema anterior, é possível pedir para construir uma figura correspondendo à expressão literal.	Exemplo: desenhar uma figura cuja área é representada pela fórmula: 2a(a + 1).
	Uma mesma solução matemática para problemas que parecem diferentes. O problema ii) pode ser reescrito de outras maneiras.	Exemplo: a soma de dois números é 80. Sua diferença é 20. Quais são esses dois números?
	O lugar do dado que falta e deve ser encontrado. Gerard Vergnaud foi o primeiro a explicar que essa variável é mais cognitiva do que matemática, quando se referiu a problemas aditivos. No entanto, a variação dos modos de apresentação dos dados de um problema e a diversidade de problemas tendo uma mesma solução matemática, vão além do que diz respeito à natureza dos números.	Exemplo: 1 + 3 = __ ou __ + 3 = 4 ou 1 + __= 4. (G. Vergnaud) -2 + 3 = 1 (-2) E (+3) =__ ou (-2) E __ = (+1) ou __ E (+3)= (+1) (DUVAL et al. 2014)

Fonte: DUVAL et al. (2014).

Esses dois métodos de análise apresentados no quadro anterior, equivalem a abordagens diferentes de problemas de organização que o ensino da Matemática e a formação dos professores debatem ou, ao contrário problemas específicos de compreensão enfrentados pelos alunos na aprendizagem dela.

A análise dos problemas em função de sua solução se enquadra na decomposição regressiva, como pré-requisito para a aquisição das equações em que é preciso reconhecer o funcionamento para poder utilizá-las como ferramenta de resolução de problemas. Já a análise de problemas em função da distância cognitiva que separa a apresentação dos dados e dos tratamentos matemáticos que produzem a solução, requer a análise cognitiva da atividade que considere a situação epistemológica particular da Matemática.

A questão da compreensão em Matemática, do ponto de vista cognitivo, não se refere em termos de justificativas ou explicações, mas de reconhecimento, já que trabalhamos apenas com as representações semióticas ou sobre as representações semióticas. Principalmente em Álgebra o que é preciso reconhecer, ou seja, não confundir, "*são as operações de substituição semiótica variadas e heterogêneas*: uma letra por um número desconhecido, [...] vários números por uma letra, os símbolos designando as grandezas positivas e negativas [...] etc." (DUVAL et al., 2014, p. 51 grifos dos autores).

Conforme esses autores, começar a Álgebra pela introdução de letras no quadro de resolução de problemas numéricos, implica na redução da variedade cognitiva dessas operações a uma utilização triplamente unívoca:

> Unicidade do status de incógnita, unicidade de seu emprego (re) designando um objeto porque ela torna incompreensível a designação funcional de outro objeto com a mesma letra, unicidade do jogo de substituições internas na resolução da equação, porque ele focaliza a atenção no que a letra representa e não nas suas ocorrências e nas posições dela. (DUVAL et al., 2014, p. 51).

Diante dessa afirmação, os autores ressaltam que quando damos um problema, não sabemos o que pedir realmente aos alunos para resolvê-lo, não apenas do ponto de vista matemático, mas também cognitivo. Isso nos leva a questionar sobre os dois lados do problema didático em Matemática: "é preciso dar problemas para introduzir a colocação em forma de equação ou, ao contrário, é preciso propor equações numéricas com buracos para construir problemas a serem resolvidos?" (DUVAL et al., 2014, p. 52).

Segundo eles, quase sempre propomos problemas com duas incógnitas para desencorajar estratégias numéricas. Isso conduzirá o aluno a uma nova dificuldade, pois, diferente dos problemas com uma incógnita, terá que cruzar duas informações diferentes do enunciado para obter um dado significativo. Além do mais, o registro das escritas simbólicas é diferente dos registros da língua natural, mas possibilita fazer operações discursivas equivalentes às da língua natural.

Na língua natural as expressões completas são as frases ou proposições que tem valor epistêmico, lógico ou pragmático. No registro das escritas simbólicas são as equações e as fórmulas. Uma vez que, do ponto de vista cognitivo, a Álgebra não começa com o emprego das letras, assim como a língua natural não começa com o emprego das palavras. “Pois, na língua natural, o único emprego de palavras não é suficiente para designar um objeto. É preciso um sintagma, isto é, articular várias palavras em uma expressão referencial!” (DUVAL et al., 2014, p. 53).

O que difere as escritas algébricas da língua natural é a organização das letras e dos símbolos de relação em expressões, que são puramente operatórias, que é diferente da organização das palavras em sintagmas ou em frases que dependem da função das palavras. Nesse sentido, os tratamentos que efetuamos com base em frases ou em proposições para desenvolver um raciocínio, uma explicação ou uma descrição, e aqueles efetuados com base em equações para executar um cálculo não são os mesmos.

De acordo com Duval et al. (2014, p. 54 grifo dos autores) “A Álgebra permite *a generalização da operação semiótica de substituição*, não de um sinal em um objeto, mas a de um sinal em outro sinal e mais globalmente de uma expressão em outra expressão.”, permitindo uma extensão sem limites da operação semiótica de substituição. Segundo estes autores, a Álgebra requer quatro tipos de substituição semiótica:

1. **Substituir, respectivamente, uma letra e um sintagma operatório compreendendo essa letra** por *duas listas abertas de números*, quando essas duas listas estão ligadas por uma relação funcional. Esse tipo de substituição nos remete a ideia de montar uma tabela, a fim de reconhecer se existe ou não regularidade na progressão da segunda lista em relação à da primeira.
2. **Substituir uma letra e/ou sintagma operatório compreendendo essa letra na** *designação lexical ou numérica-lexical dos dados* de um problema. Primeiro tem que haver uma redesignação literal do que já foi designado articulando duas grandezas heterogêneas para designar um valor numérico: o preço do quilo do feijão. Na sequência, associa UM número com a letra escolhida e não com uma lista aberta de números ou de valores. Exemplo: $P = 5{,}25\ X\ 1\ J$.

Do ponto de vista matemático, isso significa que as letras não têm o mesmo status nos dois tipos de operação de substituição. O preço do quilo do feijão sempre será R$ 5,25, o que vai variar é a quantidade em quilos.

3. **Substituir um valor numérico ou um número** *por uma letra no contexto de uma fórmula* ou de uma equação. Neste caso, trata-se de uma simples atividade de decodificação: cada letra da fórmula é substituída por um valor lido. Por exemplo, as fórmulas em física.
4. **Substituir uma expressão literal por outra expressão literal** *que é mais desenvolvida ou mais reduzida*. Essa operação se refere às unidades relativas a uma operação de designação de elementos. No caso das equações de 1º grau, para a organização discursiva é necessário:

   - separar os termos literais e os termos puramente numéricos, e para isso mudar um termo de membro,
   - colocar em evidência.

   Essas substituições que fazem parte do nível da organização interna da equação apresentam uma característica semiótica fundamental: as transformações de escrita não dizem respeito as letras, mas as ocorrências das letras.

O Quadro 13 apresenta um resumo de todos os tipos de substituições explicitas ou implícitas mobilizadas ao se iniciar o ensino de Álgebra.

Quadro 13: Quatro tipos de substituição semiótica.

<table>
<tr><th colspan="3">Substituições de termos relativos à simples operação de designação ou de redesignação</th><th>Substituições de expressões pertencentes a uma relação de igualdade entre membros</th></tr>
<tr><td>1. ESCREVER UMA RELAÇÃO entre duas listas de dados</td><td>2. COLOCAR EM FORMA DE EQUAÇÃO os dados de problemas da realidade</td><td>3. Fórmulas para utilizar na realidade</td><td>4. EQUAÇÕES para resolver</td></tr>
<tr><td>Produção de duas listas de dados correlacionados a uma observação</td><td>Descrição verbal de uma situação e de seus dados: dois níveis</td><td>Uma letra codifica o termo genérico de um fator</td><td>Transformações internas de escrita de uma equação dada: dois níveis</td></tr>
<tr><td>ESCOLHA DE UMA LETRA para a primeira lista

e

DESIGNAÇÃO FUNCIONAL da segunda lista</td><td>a. ESCOLHA DE UMA LETRA ANTECIPANDO a designação funcional

b. CONVERSÃO DE UM TERMO DE PROPRIEDADE dos números em expressão literal</td><td>a. SUBSTITUIR UM DADO NUMÉRICO por cada uma das letras (menos uma)</td><td>Nível 1:

a. DESLOCAR todas as letras de um membro para o outro</td></tr>
<tr><td></td><td>c.REAGRUPAMENTO DE OPERAÇÕES SUCESSIVAS respeitando as prioridades operatórias para formar uma única expressão</td><td>b. Às vezes, DESLOCAR uma letra de um membro para o outro
Caso particular para a relação de duas letras</td><td>b. 1ºgrau: REAGRUPÁ-LAS segundo as prioridades operatórias
c. 2º grau: RECONHECER AS FORMAS DE EXPRESSÃO (fatorar ou desenvolver)</td></tr>
<tr><td></td><td>Nível 2:
d. DUAS DESIGNAÇÕES DE UM MESMO OBJETO para escrever uma EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL (EQUAÇÃO)</td><td></td><td>Nível 2:

d. considerar o número de soluções</td></tr>
</table>

Fonte: Duval et al., (2014, p. 57).

É possível observar no quadro, que os autores distinguem a análise cognitiva das equações em três níveis de organização discursiva, em que o terceiro nível corresponde à quarta coluna – da transformação da escrita de uma equação em outras equações. E as três primeiras colunas correspondem ao primeiro nível de organização discursiva - da designação dos objetos. O segundo nível satisfaz às conversões – transformar um enunciado de problema em uma equação.

Mesmo do ponto de vista matemático, não podemos confundir os diferentes tipos de substituição expostas no quadro. Pois segundo Duval et al. (2014, p. 58-59) “isso equivaleria a não mais distinguir o *status* da letra como variável, como incógnita ou como codificação de um fator.”. Conforme os autores, propor problemas aritméticos com o propósito de conduzir os alunos a utilizar as letras para resolvê-lo é tornar a Álgebra totalmente incompreensível para eles desde o começo. Causando assim, “uma achatamento unidimensional da grande diversidade de operações de substituição semiótica que a álgebra coloca em funcionamento.” (ibidem, p. 60).

Segundo Duval et al (2014) não é a atividade de resolução de problemas que é importante nas primeiras aprendizagens em Matemática, mas a de elaboração de problemas. Esta afirmação nos leva a perguntar do ponto de vista cognitivo: o que é um problema matemático didático, isto é, um problema elaborado com a finalidade de aprendizagem ou de controle de aquisição? Para esses autores

> Um problema é a AMPUTAÇÃO[20] DA DESCRIÇÃO COMPLETA de uma situação, de forma que as informações guardadas permitem encontrar aquelas que foram suprimidas. Os elementos constituintes de uma descrição completa são determinados pelos dados necessários para a aplicação de uma operação, de uma relação ou de um algoritmo matemático. Obtemos assim uma descrição parcial mínima que constitui UM PROBLEMA. (DUVAL et al., 2014, p. 61 grifos dos autores).

Um exemplo simples são os problemas aditivos com uma operação. A descrição completa de uma situação requer três dados, suprimindo um dos três, obtemos um problema. A saber, os problemas matemáticos têm duas características:

- Um problema mobiliza pelo menos dois registros de representação: o registro próprio de tratamento da operação e enunciado em língua natural ou tabela,
- Existem tantos problemas didáticos possíveis quantas maneiras diferentes de suprimir uma descrição completa para obter uma descrição parcial mínima. Elas nos conduzem a três equações numéricas possíveis com um espaço em branco para ser preenchido.

  1 + 2 = ...   1 +... = 3   ...+ 2 = 3

[20] O termo ‘amputação’ pode ser substituído pelo termo supressão.

Podemos observar que as diferentes descrições mínimas possíveis não são equivalentes. Apesar de constituírem um problema diferente, se trocamos a situação concreta guardando a mesma descrição mínima, obtemos o mesmo problema. É possível se ter diferenças consideráveis de sucesso de acordo com a descrição mínima escolhida. De acordo com Duval et al. (2014, p. 63, grifos dos autores)

> A compreensão de um problema não interfere no nível da descrição parcial escolhida, mas na variação de todas as descrições mínimas possíveis. Pois, a possibilidade de aplicar um conhecimento matemático implica que possamos discernir e compreender as diferentes situações de aplicação. Isso porque, de um ponto de vista cognitivo, é O CAMPO DOS PROBLEMAS ABERTOS POR UMA DESCRIÇÃO COMPLETA que é essencial e não uma descrição mínima. É neste nível que interfere a compreensão que cria a competência em utilizar os conhecimentos matemáticos.

Um problema matemático apresenta dois lados: o da sua resolução - localizar o problema e realizar a conversão; e o da sua elaboração - que se torna quase sempre “uma caixa preta” para os alunos e constitui o inverso do problema. De acordo com Duval et al. (2014) o sentido clássico de elaboração de um problema é aquele de resolução de problemas numéricos: ou propomos um problema quase sempre discursivo ou partimos de equações em que é preciso calcular o lado que falta.

No Quadro 14, Duval et al. (2014) apresentam três maneiras de suprimir um termo, resultando em três equações numéricas possíveis. A comparação das colunas II e IV possibilita ver que duas correspondências são cruciais para a elaboração desses problemas:

> - A correspondência das notações dos inteiros positivos e negativos (+/-), respectivamente, com os verbos antônimos: ganhar/perder, subir/descer, avançar/recuar, comprar/vender etc.
> - A correspondência da operação (indicada “E”) com a conjunção de duas proposições que descrevem o primeiro membro da equação numérica. [...] a ambiguidade redacional da maioria dos problemas aditivos propostos aos alunos decorre da ausência dessa segunda correspondência. [...] a tendência de traduzir os verbos ganhar/perder, respectivamente, por uma operação de adição e por uma operação de subtração. (DUVAL et al., 2014, p. 65).

Os autores ressaltam o fato de que “passar das equações numéricas com espaços em branco para a elaboração de um problema no contexto da realidade nos faz deslizar dos números para as grandezas” (DUVAL et al., 2014, p. 64). O Quadro 14 mostra a necessidade dos dois sentidos de conversão – passagem do registro numérico para a língua natural.

Quadro 14: Os dois lados do problema: necessidade de conversão?

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">→</td><td>Resolver cada vez UM problema</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elaborar diferentes problemas POSSÍVEIS</td><td colspan="2">←</td><td></td></tr>
<tr><td>I
Descrição numérica completa</td><td>II
As supressões possíveis de dados</td><td>III
Operação</td><td>IV
Grandezas heterogêneas</td><td>V. TANTOS ENUNCIADOS VERBAIS DIFERENTES QUANTO QUEREMOS PARA CADA REDUÇÃO POSSÍVEL</td></tr>
<tr><td rowspan="3">-2 + 3 = 1</td><td>(-2) E (+3) =...</td><td></td><td>Não</td><td>Em uma primeira partida, Paulo perde 2 bolas E em uma segunda ele ganha 3. O que se passa no final?</td></tr>
<tr><td>(-2) E ... = (+1)</td><td></td><td>Não</td><td>Em uma primeira partida, Paulo perde duas bolas E joga uma segunda partida. Ao final ele ficou com (ganhou) 1 bola. O que se passou na segunda partida?</td></tr>
<tr><td>... E (+3) = (+1)</td><td></td><td>Não</td><td>Paulo joga uma primeira partida E uma segunda em que ele ganha 3 bolas. No final ele ficou com uma bola. O que se passou na primeira partida?</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Duval et al. (2014)

Duval et al. (2014, p. 69) afirmam que “partir de uma igualdade numérica para elaborar problemas aditivos com uma operação é o caminho mais direto e mais natural para entrar na álgebra.”. Todavia essa elaboração comporta várias etapas:

- Transformar uma igualdade numérica em três equações numéricas, sem a necessidade de introduzir a letra, apenas um espaço em branco por uma letra;
- Mostrar para os alunos a correspondência entre os pares de verbos antônimos e os números relativos, a fim de que possam relacionar os números propostos com os verbos antônimos ou com as locuções de comparação (maior que..., menor que...), como mostra o Quadro 15:

Quadro 15: A correspondência entre expressões antônimas e números relativos.

Inteiro positivo	Inteiro negativo
Ganhar Subir Avançar ⋮	Perder Descer Recuar ⋮

Fonte: (DUVAL et al., 2014, p. 70).

- Resolver cada uma das operações com espaços em branco, mudando o lugar vazio para isolá-lo;
- Comparar os três procedimentos de resolução para tomar consciência da equivalência das três equações;
- Discutir o sentido e o sinal das operações, tomando consciência de que um espaço vazio corresponde na verdade a dois: um para o sentido da operação e o outro para o sinal do relativo. Ex.: (-2) + (+3) = (+1) em (-2) ... (...) = (+1).

Para Duval et al. (2014, p. 71) “apenas após tal trabalho sobre a elaboração de problemas por redução de igualdades numéricas é que podemos preencher um espaço em branco com uma letra”. Seguindo agora o caminho inverso do exposto e que é o impasse real do ensino da Álgebra, os autores apresentam como equacionar um problema e afirmam ser essa uma atividade cognitivamente complexa. Tomando como exemplo um problema simples: “*Um jornal e seu suplemento custam 1,10 reais. O jornal custa 1 real a mais que seu suplemento. Quanto custa o jornal*” (ibidem, p. 72 grifo nosso).

Para converter esse enunciado em uma equação, os autores afirmam que é preciso ser efetuadas três tipos de operações:

> 1. REDESIGNAR todos os objetos (quantidades, grandezas) JÁ DESIGNADOS NO ENUNCIADO. Ora, nos encontramos diante de dois casos: alguns são designados diretamente e outros são designados em relação a outros. Falamos neste caso de *designação funcional*.
> 2. Encontrar um objeto que possa ser DESIGNADO OU REDESIGNADO DUAS VEZES. A dupla designação de um mesmo objeto é a primeira operação discursiva em toda atividade matemática, pois ela permite efetuar substituições, sequências de instruções, de raciocínios. É aqui uma operação quase reflexo totalmente estranha, até mesmo bizarra, em relação à prática normal do discurso, na palavra ou na escrita, fora da matemática.
> 3. Colocar na forma de equação é escrever uma equivalência referencial entre as duas designações de um mesmo objeto, segundo Descartes: “exprimir uma mesma quantidade de duas maneiras: o que se nomeia equação”. (DUVAL et al., 2014, p. 72).

É preciso tomar consciência dessas operações para colocar na forma de equação um problema simples, exigindo que se realizem em paralelo ou em segundo plano nas antecipações das operações seguintes. Pois, é a possibilidade da designação funcional que determina a escolha da incógnita. No Quadro 16 os autores apresentam a colocação em forma de equação como conversão de um enunciado verbal.

Quadro 16: A colocação na forma de equação como conversão de um enunciado verbal.

	Designação verbal	**Dados Numéricos**	**Redesignação Literal**
Designação direta	Custo do jornal Custo do suplemento Custo dos dois	... ? ... ... ? ... 1,1	a b (a + b)
Designação funcional	O jornal **custa ... mais que** o suplemento	(... + 1)	(b + 1)
Dupla designação de um mesmo objeto	Objeto: o custo dos dois “um jornal e seu suplemento custam 1,1”	1,1	(a + b) ((b + 1) + b)
Equivalência referencial			2b + 1 = 1,1 b = 0,05

Fonte: (DUVAL et al., 2014, p. 73)

Analisando o quadro, vemos que há três redesignações literais diretas possíveis. Essa designação direta dos objetos no enunciado não se faz por palavras, mas por descrições definidas ou sintagmas, resultado de um procedimento linguístico, que consiste em transformar uma frase em um sintagma nominal. “um jornal custa...” torna-se “o custo do jornal”.

A questão da operação de designação funcional, no ensino de Álgebra “não se trata de utilizar letras para designar diretamente os números desconhecidos, mas para designar também outros números de maneira indireta” (DUVAL et al., 2014, p. 74). No Quadro 17 os autores apresentam uma tarefa de dupla conversão para introduzir as letras, listas abertas, a fim de fornecer uma progressão para a primeira lista, dar somente os primeiros termos da segunda lista e pedir que os alunos completem ou encontrem uma escrita para que evitem ter que continuar.

Quadro 17:Tarefa de dupla conversão para introduzir letras.

I.Designação em língua natural	**Dois números sucessivos**		**Um número par**		**Um número ímpar**		**Um número e seu quadrado**	
II.Escrita decimal dos números designados	1 2 3 4 5	**2** **3** **4**	1 2 3 4 5	**2** **4** **6**	1 2 3 4 5	**1** **3** **5**	1 2 3 4 5	**1** **4** **9** ... ...
III.Condensação simbólica	x	x+ 1	x	2x	x	2x + 1	X	x^2

Fonte: (DUVAL et al., 2014, p. 76).

Uma tarefa para introduzir as letras a fim de cumprir simultaneamente uma função de condensação e permitir uma designação funcional, apresenta quatro características:

- Utiliza a exploração de duas listas abertas de números, em que seja possível a comparação das duas listas;
- O desenvolvimento dessas duas listas não se faz por tentativa e erro, mas pela progressão regular que é iniciada;
- É preciso variar o registro de entrada e aquele no qual é solicitada a redesignação. O desafio dessas variações cognitivas é o reconhecimento imediato das redesignações ou das substituições possíveis, independente dos registros;
- Existe uma segunda dimensão de variação que envolve as propriedades ou a relação constante, a fim de favorecer a compreensão das operações de designação em Álgebra, em que o destaque são o *status* das letras e a designação funcional.

Apesar dessas formas diferenciadas de se introduzir o conteúdo de Álgebra, sabemos que um enunciado de problema apesar de ter a descrição parcial dos dados de uma situação, para resolvê-la é preciso reconhecer os dados referentes. De acordo com Duval et al. (2014, p. 81 grifos dos autores) essas informações "*são sempre o resultado do cruzamento das designações de dois objetos que surgem de* *duas dimensões semanticamente diferentes*". Com base nessa afirmação, os autores alegam a necessidade de uma representação intermediária para compreender como colocar na forma de equação os dados de um problema a partir de um enunciado verbal.

Tomemos um exemplo dado pelos autores: Recolhendo todas as galinhas e ovelhas de uma fazenda, contamos 3 (ou 37 ou ...) cabeças e 8 (ou 96 ou ...) patas. Qual a quantidade de galinhas e ovelhas dessa fazenda? Apesar do enunciado conter apenas uma frase, a compreensão do problema consiste no reconhecimento implícito ou explícito da organização bidimensional da descrição parcial. Vejamos no Quadro 18 como Duval et al.(2014) organiza a representação intermediária:

Quadro 18: Cruzamento de duas designações de objetos de dimensão semântica diferente.

	Galinhas	Ovelhas	Total
Número de cabeças			
Número de patas			

Fonte: (DUVAL et al., 2014, p. 83).

Este exemplo tem dados que estão ocultados, ou seja, não estão descritos, mas, no entanto, subentende-se que cabeça é uma por animal e se é pata, é quatro para um e dois para o outro. Essas quantidades não estão presentes no enunciado, os dados que estão presentes são outros. Mas que deve ser apreendido por meio de outro conhecimento, para poder completar aquele problema e gerar as duas equações. Como feito no Quadro 19.

Quadro 19: Conversão dos dados do problema em termos de um sistema de equações.

	Galinhas	Ovelhas	Total
Número de cabeças	X	Y	3 (ou 37 ou ...)
Número de patas	2x	4y	8 (ou 96 ou ...)

Fonte: (DUVAL et al., 2014, p. 83).

No Quadro 19 os termos de cada uma das equações aparecem como o resultado desse cruzamento. O número de galinhas e ovelhas está atrelado ao processo atribuído à letra na construção da sentença matemática, já impregnando a cada uma dessas incógnitas a ponto de descobrir o resultado e saber quais são. A comparação possível entre linhas e colunas permite do ponto de vista cognitivo e da aprendizagem a compreensão dos enunciados cuja resolução começa por colocar em forma de equação. De acordo com Duval et al. (2014, p. 85 grifo dos autores)

> A leitura de um enunciado de problema exige sua conversão quase imediata em uma organização bidimensional dos tipos de dados que constituem o

> problema. Sem tal organização, o enunciado torna-se uma "charada", para qual os alunos só têm expedientes de recorrer às representações icônicas induzidas pelas roupagens do problema.

Em se tratando do Quadro 16 e do Quadro 19 Duval et al. (2014) ressaltam que esses problemas poderiam ser resolvidos através de estratégias numéricas. Entretanto, para desencorajar esse recurso dos alunos, os professores tendem a escolher números bem grandes para forçá-los a introduzir uma letra. Os autores nos alertam que é preciso lembrar que os estudantes não são matemáticos, "eles têm apenas algumas horas de matemática por semana e, principalmente [...] o funcionamento cognitivo cultivado não tem nada a ver com o requerido para compreender matemática". (DUVAL et al., 2014, p. 89).

5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Por tratar-se de uma abordagem qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986; CARVALHO, 2006; GIBBS, 2009), nessa pesquisa adotamos a observação em ambiente natural sem intervenções da pesquisadora nas aulas dos sujeitos de pesquisa.

O projeto de pesquisa e o roteiro para as entrevistas foram aprovados pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Unioeste, em 31 de janeiro de 2017, com número de Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) 64457417.5.0000.0107.

Para a coleta de dados, foi realizada uma entrevista semiestruturada, com registros em gravações individuais "a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações." (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

Elaboramos um roteiro com questões principais, como propósito de ser nosso guia nas entrevistas, para que se tenha certa ordem lógica e também psicológica. As gravações das entrevistas foram todas transcritas para análise. O roteiro da entrevista semiestruturada encontra-se nos anexos (Anexo C).

As aulas dos professores foram gravadas em vídeo, sendo que, a primeira filmagem foi indicada pelo professor e as demais comunicadas pela pesquisadora, um dia antes da aula a ser observada, conforme o combinado no dia da entrevista. Durante as observações das aulas, quando necessário, a pesquisadora também fez anotações por escrito, o que Tremblay (2008) chama de diário de campo.

5.1 Nosso contexto de pesquisa

A pesquisa foi realizada no município de Santa Terezinha de Itaipu, com 22.783 habitantes[21] e está localizada na região sudoeste do estado do Paraná. A opção por centrar o estudo nesse município está vinculada ao fato de a pesquisadora residir nesse local e a acessibilidade às escolas e professores, pois já lecionou em todas elas e os professores foram todos colegas de trabalho.

[21] Cf <www.ipardes.gov.br/perfil_municipal/MontaPerfil.php?codlocal=173&btOk=ok> acesso em 08 ago 2017.

O município conta com quatro colégios estaduais, dois localizados na região central e os outros dois, um em cada bairro de maior população no município. A pesquisa foi realizada nos quatro colégios. Nomearemos os colégios como C1, C2, C3 e C4. Os colégios[22] C1 (43 turmas e 926 alunos matriculados) e C2 (53 turmas e 1093 alunos matriculados) estão localizados na região central, sendo que C2 está localizado no centro da cidade. O colégio C3 (21 turmas e 467 alunos matriculados) está localizado no bairro mais pobre do município e o colégio C4 (16 turmas e 414 alunos matriculados) apesar de estar localizado no bairro mais populoso, é um colégio de porte pequeno.

5.2 Procedimentos da coleta de dados

Para a escolha dos sujeitos da pesquisa considerou-se: estarem lecionando nos 8º anos; tempo de trabalho lecionado com esse ano (série) superior a dez anos para atender aos objetivos da pesquisa; lotados nos colégios estaduais do município de Santa Terezinha de Itaipu. A escolha pelo 8º ano é devido ao ensino de Álgebra ser iniciado formalmente neste ano escolar.

Ainda no ano de 2016, ao visitar os colégios, a pesquisadora falou sobre o projeto de pesquisa e perante a permissão para realizá-la apresentou o Termo de ciência do responsável pelo campo de estudo (ANEXO A) e o TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (ANEXO B).

Dos onze professores convidados, nove aceitaram fazer parte da pesquisa. Dos nove professores que assinaram o TCLE, apenas cinco fazem parte da pesquisa, pelo fato, de três professores não estarem lecionando em turmas do 8º ano nesse ano de 2017 e a outra por ocupar cargo de direção.

Tratamos os professores entrevistados como P1 e P2 que lecionam no colégio C1; P3 que leciona no C2; P4 que leciona no C3 e P5 que leciona no C4.

Para a transcrição das entrevistas, usou-se “( )” nas intervenções das falas, “(...)” para pausas e momentos de silêncio, letra em caixa alta para representar a mudança de entonação de voz, [ ] com escrita em itálico para caracterizar os momentos que não apareciam na gravação, interrupções nas falas e comentários da pesquisadora, / para o truncamento nas falas e :: para continuação de vogais ou consoantes, por exemplo, “éh::” .

---

[22] Cf < www.consultaescolas.pr.gov.br > acesso em 03 nov 2017.

As entrevistas foram feitas no período de 23 de fevereiro a 10 de março de 2017. Elas aconteceram individualmente, agendadas antecipadamente para o horário da hora-atividade do professor, com exceção de P3, que preferiu ser entrevistada em sua casa.

Ao final de cada entrevista, a pesquisadora combinou com o professor que a primeira observação das aulas, seria comunicada por ele quando iniciasse o conteúdo de Álgebra. Para tanto a pesquisadora deixou seu contato telefônico e confiou que eles se lembrariam de entrar em contato quando o conteúdo fosse iniciado.

As primeiras observações aconteceram praticamente na mesma semana. Contudo, algumas aulas tiveram seus horários em conflito, pois eram de colégios diferentes e desse modo fez-se necessário remarcar a observação para a semana seguinte.

Foram observadas quatro aulas de cada professor, com exceção de P3 que foram observadas seis aulas[23], totalizando 22h/aulas de observação. Como o objetivo era observar o início do conteúdo de Álgebra, as aulas abordaram como conteúdos: expressões algébricas, polinômios e suas operações e produtos notáveis. As observações foram feitas no período de 07 de abril a 22 de maio de 2017 e sempre em aulas geminadas.

5.3 Procedimento das análises dos dados

Para realizar a análise dos dados a pesquisadora considerou a prática em sala de aula e as informações obtidas nas entrevistas. As aulas observadas e filmadas foram todas transcritas. As anotações do diário de campo serviram como orientadoras para as análises das observações das aulas e apoiarem as discussões dos resultados.

O material de apoio era um único Livro Didático (LD) escolhido por todos os colégios do município, trata-se do livro *Matemática: compreensão e prática (2015), da autoria* de Ênio Silveira.

---

[23] Inquieta com a prática de P3, a pesquisadora decidiu fazer uma observação a mais com esta professora. Escolhendo o conteúdo de produtos notáveis, pois P3 na entrevista afirmou que era esse o conteúdo que os alunos tinham mais dificuldades.

Ressaltamos que durante as transcrições tanto das entrevistas quanto das filmagens, não fizemos correções nas falas dos sujeitos, pelo fato das transcrições serem feitas fielmente às falas a que correspondem (CARVALHO, 2006).

Na perspectiva de Duval (2003, 2009, 2011), a pesquisadora destacou o modo como os conteúdos algébricos foram abordados pelos professores, selecionando as atividades cognitivas ligadas à representação, a saber, formação, tratamentos e conversões dos registros. Utilizamos o termo representações intermediárias[24] para as representações não formais utilizados pelos professores.

Devido a respostas dadas por alguns professores na entrevista - a fala de P1 e P3 sobre usar mais que um livro devido os exercícios não serem suficientes - fez necessário também olhar para as atividades propostas no livro didático utilizado pelos professores.

Para a análise e discussão dos resultados agrupamos as reflexões em formação, tratamento e conversão, seguidos de uma síntese.

[24] "Duval chama a atenção para a complementaridade de registros necessários à passagem de um registro a outro que Damm (1999, p.149) denomina de representação intermediária." (BASSOI, 2006, p. 55).

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Os dados das entrevistas e as observações em sala de aula permitiram à pesquisadora perceber características de como os professores identificam os objetos matemáticos algébricos e verificar como eles conduzem esse ensino nos diferentes modos de representação.

No decorrer das observações das aulas, encontramos elementos de diferentes naturezas operados pelos professores para explicar os conteúdos aos alunos. O quadro a seguir apresenta os conteúdos que foram trabalhados pelos professores durante as aulas observadas.

Quadro 20: Conteúdos trabalhados pelos professores durante as observações

Professor	P1	P2	P3	P4	P5
Conteúdos	Soma e subtração de polinômios e multiplicação de polinômios; Expressão numérica com a soma e a diferença dos quadrados, de dois termos.	Divisão de monômio por monômio; Potenciação de monômios.	Divisão de polinômios; Divisão de polinômios; O quadrado da diferença de dois termos.	Expressões algébricas; Atividade com o Tangran; Fatoração da diferença de dois quadrados.	Expressões algébricas; O piquenique algébrico.

Fonte: dados da pesquisa.

Ao longo do texto, destacaremos as três atividades cognitivas ligadas à representação: formação, tratamento e conversão. No entanto, daremos ênfase ao discurso utilizado pelos professores e a congruência e não congruência presentes nele, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014).

Segundo Duval (2009) a **formação** implica em fazer a “designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento.” (DUVAL, 2009, p. 55). *S*eguindo as regras próprias ao sistema empregado, ou seja, aquelas que definem o sistema de representação. O modo como o professor concebe o objeto matemático sem dúvida influência e impacta a maneira como ele apresenta o ensino.

P4 e P5 formalizaram a palavra expressão. P4 utilizou o exemplo numérico e P5 fez referência às operações matemáticas. O registro língua natural foi utilizado por P4 e P5 para identificarem os elementos que constituem uma expressão.

> P4: [...] vamos lá, pensa em um número, todo mundo pensaram? (As: aham) Tá, dobra. [...] isso, multiplicar por dois. É a expressão vezes dois. O número que você pensou vezes dois. Tá beleza? Mais dez. O resultado dessa expressão mais dez. Certo? Dividi por dois. (A: eita) Agora este valor menos o número que você pensou. Aquele “xis” que você estava pensando, que você já sabe. (A1: pronto!)
> A6: dobra é fazer ele [*o número pensado*] vezes dois?
> P4: daí ia dar dez. E se eu tivesse mandado vocês somar oito? (As: quatro) E se eu tivesse mandado vocês somar on-ze? (As: tumulto) Aí vocês se enroscaram, por isso que a gente escreve a expressão.
>
> P5: Expressão é quando a gente tem que fazer multiplicação, potência, raiz quadrada tudo junto.

P4 e P5 estão fazendo a formação da sentença algébrica no registro falado. Que pode ser feito também no registro escrito. À medida que se é exposto os dois registros para o aluno, se torna mais fácil à compreensão ao existir congruência entre os dois registros.

P5 trabalha o princípio de “pensamento algébrico”, conduzindo o processo utilizando a fala.

> P5: Agora vocês prestem atenção que eu vou falar, qual é o número que somado com cinco dá onze?
> As: seis.
> P5: qual é o número que somado com noventa e nove dá duzentos?
> As: cento e um.
> P5: qual é o número que somado com dez dá menos cinco?
> As: menos quinze.
> P5: menos quinze. A primeira foi fácil? (As: foi) A segunda foi fácil? (As: sim) A terceira teve que pensar um pouquinho mais ou foi fácil também? (As: mais ou menos) Então tá. O dobro de um número somado com quatro dá dezesseis, que número que é esse?
> As: doze/seis/quatro.
> [...]
> P5: teve que pensar um pouco mais? O A3 fez rapidinho, outras pessoas nem entenderam direito o que eu falei né. Outras pessoas começaram a pensar como que faziam. Gente o que nós acabamos de fazer não foi descobrir uma charada, nós acabamos de resolver uma equação.
> [...]
> P5: [...] equação é [...] quando a gente quer descobrir um número que chega num resultado [...] a primeira coisa que a gente pode pensar da equação é assim, que número mais cinco dá onze. Isso aqui vocês faziam lá no quinto ano, que é tentar descobrir, que é a parte mais fácil. Daí ano passado no sétimo ano, que esse ‘qual é o número’ a gente representa por um símbolo, esse símbolo é uma letra, pode ser qualquer letra. Poderia ser até se eu quisesse colocar um coraçãozinho também

> estaria certo, só que o matemático ele gosta das coisas bem tradicionais, daí todo mundo usa uma letra e a maioria das pessoas usa o “xis”. Mas pode ser qualquer letra.

Pela fala P5 está construindo com os alunos a escrita de uma equação, atribuindo implicitamente o conceito de incógnita. Quando ela fala que se pode substituir o valor por um coraçãozinho, ela esta tentando atribuir um grau de generalização para essa letra como se isso garantisse a aprendizagem dos diferentes estatutos da letra numa sentença matemática.

Nas colocações de P4 e P5, se apresentam um modo de decomposição regressiva, isto é, dá o problema para obter a expressão, que segundo Duval et al (2014) não leva à atribuição de significados. O contrário seria dar expressões com supressão de dados e pedir para elaborarem o problema. Para estes autores, para que os alunos aprendam a utilizar as fórmulas é preciso que eles compreendam que os problemas podem ser mais facilmente resolvidos com a ajuda das equações e ainda, que consigam colocar em equações os dados do problema.

Para mostrar a fórmula da área do triângulo, P4 serviu-se do tangram e para isso usou como representação intermediária a figura de dois triângulos que unidos formavam a figura de um quadrado.

> P4: eu admiti que a medida desse lado é quatro, a área dessa figura então é quanto?
> As: dezesseis.
> P4: e agora é quanto? [*tirou um dos triângulos*].
> A2: quatro, não pera aí, éh::
> As: dezesseis.
> A2: oito, oito!
> P4: ah, tá vendo oh. Então vamos lá, então nós vamos criar uma formulazinha [...] de novo, a área dessa figura, aqui é quatro, aqui é quatro, então vai dar deze? (As: dezesseis). Mas quando eu tiro uma das partes, quanto que fica? (As: oito). Tá mas se eu tirei metade, como é que a gente vai achar esse oito? Como é que eu acho esse oito se deu dezesseis? [*o professor juntava e separava os triângulos, a fim de tentar fazer com que os alunos visualizassem que os dois triângulos formavam um quadrado e portando um triângulo era a metade*].
> A2: porque oito é a metade, deze...
> A7: dezesseis dividido por dois.
> P4: isso, quando a gente fala assim, [...] A área de um triângulo nós fazemos pela base vezes altura, [...] dividido por dois.

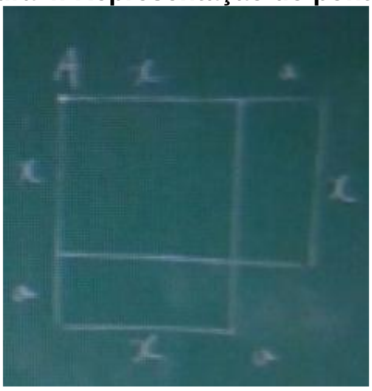
Essa atividade feita por P4 trabalha com as letras com outro estatuto: fator desconhecido que leva a fórmulas. E pode ser analisada quanto aos tipos de substituição semiótica proposto dor Duval et al. (2014): o *tipo 3*, que é substituir um valor numérico por uma letra em uma fórmula, tratando-se de uma simples codificação, nesse caso, a área do triângulo $A = \frac{b.h}{2}$, em que cada letra é substituída por um valor dado.

Este mesmo professor ao verificar que alguns alunos estavam escrevendo as letras em forma maiúscula, chamou a atenção e explicou que não poderiam usar letra maiúscula para representar os lados da figura, recordando que a escrita maiúscula se refere a ponto na geometria, possivelmente é um ato consciente ou não, para que os alunos não comecem a confundir as letras dos lados de uma figura com as letras de uma equação.

Duval et al. (2014) apontam quanto a generalização da operação semiótica a importância da compreensão e designação lexical na substituição de uma letra e/ou sintagma operatório nos dados de um problema, e que, do ponto de vista matemático, as letras não têm o mesmo status. Na sequência temos a fala e o desenho apresentado por P4 na Figura 4.

> P4: [...] Eu estou vendo que tem gente colocando letra maiúscula aqui nas letras. A gente coloca letra maiúscula quando vai representar os pontos, isso são os pontos, olha. [*escreveu o ponto A no quadrado*].

Figura 4: Representação do ponto A



Fonte: dados da pesquisa.

P4 também fez uso de representações intermediárias como: material manipulativo de figuras planas, da representação geométrica de uma situação algébrica por desenho para concluir a escrita algébrica, concretizando geometricamente a formação do quadrado perfeito, traduzido como o binômio algébrico $(a + b)^2$.

Quanto à formação do que é perímetro para os professores P3, P4 e P5, temos como significado as palavras lado e soma. Presenciamos na fala de P3 a ausência da palavra “medida” que está diretamente ligada ao conceito de perímetro, o que tem sido uma luta cognitiva na construção das ideias/conceitos de perímetro e área.

> P3: [...] O que que é perímetro mesmo?
> As: é a soma de todos os lados.
> P3: é a soma de todos os lados!
>
> P4: Vamos relembrar, perímetro é só a? [*contornava a figura com o dedo*].
> A2: é a área!
> P4: não. Olha lá no rodapé da sala, eu vou ter que medir lá, lá, lá e lá [*apontava com o dedo para os lados da sala*]. [...] é a soma.
> P5: isso, mas antes disso, o que é o perímetro?
> As: é a medida de todos os lados/ é o contorno/ a soma do contorno.
> P5: é a medida do contorno de uma volta, então quando dá toda a volta dela.[...]

A resposta de P3 derivou de um exercício que pedia para calcular o perímetro da figura na forma algébrica. P4 fez uso de duas representações intermediárias diferentes para se referir ao perímetro: estava com a figura de um quadrado nas mãos contornando-a com o dedo e utiliza o exemplo da medida do lado do rodapé. A professora P5 estava relembrando o conteúdo da aula anterior e com o registro falado reforça a significação de perímetro.

Quanto ao modo como os alunos foram introduzidos nas letras e nas operações com letras em expressões literais, os professores reforçavam as explicações, dando exemplos para justificar os procedimentos de resolução, como mostra o Quadro 21, trazendo algumas atividades que foram propostas por P1, P2 e P3 durantes suas aulas.

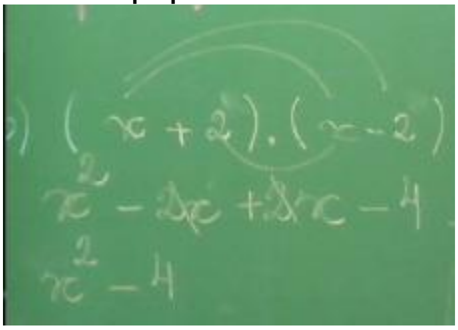
Quadro 21: Atividades de fixação.

P1	P2	P3
Simplifique as expressões: a)$[(x + y)^2 – (x^2 + y^2)]^2$ b) $(x + y)^2 – (x – y)^2$ c)$(2x – 1)^2 – (x– 3)^2 + 5(2 – x^2)^2 – (3–x)^2$	Efetue as divisões a seguir: a) $(-3 a^4b^6) : (-6ab^5)$ b) $(x^4y^4z^4):(x^2y^3z^4)$ c) $(6 x^6) : (- 3 x^{-4})$	Desenvolva algebricamente cada quadrado da diferença de dois termos. a)$(x – 3)^2$ b)$(x/3 – 2)^2$ c)$(9 x^2 – 2)^2$ d)$(x^3 – y^3)^2$ e)$(x^2 – y^2)^2$ f)$(- x - y)^2$ g)$(xy – z)^2$ h)$(x/2 – y/3)^2$

Fonte: dados da pesquisa.

Os professores utilizavam o ‘chuveirinho’ como representação intermediária para operacionalizar a propriedade distributiva da multiplicação, como apresenta a Figura 5.

Figura 5: "Chuveirinho" propriedade distributiva da multiplicação



Fonte: dados da pesquisa.

Ou ainda, com atividades usando tratamento, que não trabalhavam a posição operatória da letra, como por exemplo, a apresentada a seguir, que exigia a substituição e redução dos termos.

Atividade 5. Sendo A = a + b – c, B = a – b – c e C = a – b + c, determine (SILVEIRA, 2015, p. 62):

a) A – B

b) C – A

c) A – B

d) (A + B) – C

e) C – (A + B)

f) B + (A – C)

Atividades como esta, frequentemente encontradas nos livros didáticos e selecionadas pelos professores P1 e P3, enquadram-se no quarto tipo de substituição semiótica, que se refere em substituir uma expressão literal por outra expressão literal que é mais desenvolvida ou mais reduzida e reagrupá-las segundo as propriedades operatórias. Aqui a letra não assume papel nem de incógnita, nem de variável e nem de parâmetro, ela assume o status de codificação, mas que por vezes é transmitida ao aluno como letras que podem ser substituídas por letras, sem a designação e redesignação necessária para a compreensão, fazendo da Álgebra incompreensível desde o começo.

Para formalizar uma ideia algébrica, a maioria dos professores utilizou as representações numéricas, com a intenção de que os alunos entendessem sem uma explicação clara, que nem sempre o que ocorre com os termos numéricos ocorrerá com os termos algébricos. Tomando como exemplo a formação de uma sentença algébrica, o que ocorre na aritmética, três mais quatro é igual a sete ($3 + 4 = 7$), não ocorre numa sentença algébrica utilizando os mesmos elementos numéricos, três a mais quatro b não é igual a sete ab ($3a + 4b \neq 7ab$).

Aqui está o maior obstáculo didático já apontado por pesquisas: a Álgebra como aritmética generalizada. Os professores não percebem que estão partindo de situações matematicamente diferentes expressa por elementos semelhantes. Esses exemplos embora tenham termos semelhantes, não tornam claras as diferentes propriedades as quais essas sentenças matemáticas se referem.

Destacamos que todos os professores apresentaram aos alunos a existência do coeficiente ‘um’ nas expressões, possivelmente para que o aluno não atribua ao termo inexistente o valor zero.

> P1: agora o b, esse primeiro número aqui [*apontou para o primeiro termo da expressão*], ele não tem nenhum número aqui, ele tá valendo quanto? (As: um) um.
> P2: [...] sempre do lado da letra, do lado esquerdo, quando não aparece é um.
> P3: [...] nesse exemplo b, quer dizer, nessa resolução de exercício, vai ser dividido por? [a professora fez esta pergunta, pois o coeficiente era um] (As: xis/ um) por um.
> P4: [...] Vamos ver aqui, ao invés de eu colocar só letras, mas colocar letras e números. [*escreveu a expressão* $(x + 2)^2$] pode ter coeficiente aqui? [*apontava para o x*] aqui que coeficiente é? (A: um).
> P5: [...] e quem que é aqui? [*apontou para o menos xis*] (As: menos um) Vinte nove mais um? Trinta xis.

Apenas P2 fez uma afirmação referente ao coeficiente um. P1, P3, P4 e P5 questionaram os alunos, contudo somente P4 o chama de coeficiente, P1 chama de número e P3 e P5 querem saber quem é. Chamar de número o coeficiente é destacar apenas o visual, o icônico. Não é o número, ele tem uma função operatória de coeficiente, está mostrando quantas vezes aquele termo (letra) se repete. Se for ‘5x’, o ‘xis’ se repete cinco vezes, $x + x + x + x + x$. Visualizar o número alocado a uma ou mais letras, é não conceber o valor operatório ao qual Duval (2003) diz ser importante, a relação operatória do número com a letra.

Destacamos agora os **tratamentos** realizados pelos professores, lembrando que para Duval (2003, 2009) estes são transformações que acontecem em um mesmo registro.

Nem sempre os tratamentos são simples manipulações de letras e números, por exemplo, o desenvolvimento da expressão $(a + 3).(a - 3)$ não tem o mesmo custo cognitivo que a passagem do polinômio $a^2 – 9$ para a sua forma fatorada, ou seja, a conscientização do funcionamento cognitivo próprio de cada um dos registros, exige a compreensão de que eles nem sempre permitem efetuar os mesmos tratamentos matemáticos, determinando buscas específicas para cada um dos registros (DUVAL; MORETTI, 2016).

O exemplo a seguir pode ser comparado como uma decomposição regressiva em elementos de base, que se limita ao único objetivo da resolução das equações, que é o funcionamento da “ferramenta equações”, no que concerne aos algoritmos ou às regras de transformações de escrita, ou seja, os “conhecimentos procedimentais”: desenvolver, fatorar e mudar um termo de membro (DUVAL et al., 2014).

$$(a+3).(a-3) = a^2 - \cancel{3a} + \cancel{3a} - 9 = a^2 - 9$$

Destacamos a explicação do exemplo utilizado por P1 para iniciar o conteúdo do produto da soma pela diferença de dois termos: (a + b).(a – b).

> P1: A primeira parte é a soma e a segunda parte é a diferença, que é a subtração. Esse caso está bem prático para vocês resolverem, você vai pegar e multiplicar o primeiro pelo primeiro é o mesmo método, pega o primeiro termo e multiplica pelo, pelos dois termos seguintes. Depois pega o segundo termo multiplica pelos dois termos seguintes, usando o jogo de sinal, fazendo a soma dos expoentes e depois reduzindo ao máximo que você puder. [...] a vezes a, (As: a ao quadrado) o expoente quando não tem vale um. A vezes b? (As: ab) como eles são diferentes nós vamos só repeti-los. (A1: menos) e aqui colocando o sinal, para que possamos separar os termos, mais vezes menos (A1: menos). Tá, o a eu já multipliquei com os dois, agora vou para o segundo e multiplicar aqui [*a professora enquanto fala da multiplicação faz o chuveirinho*] b vezes a (As: ab/ ba) mais com mais, mais ab. Vamos mudar aqui para ficar igual, ab. [*a professora se referiu a multiplicação b vezes a*] e b vezes b (As: b ao quadrado) mais vezes menos, menos b ao quadrado. [*novamente houve interrupção da aula para pedir silêncio*] olhem aqui, entenderam a primeira parte? (A2: simmm) então olha aqui, o a ao quadrado só tem ele uma vez, então nós vamos repetir. Aqui ab com ab, nós vamos somar ou subtrair? (As: subtrair) subtrair né. Sinais diferentes subtrai, então vai ficar um menos um? [*faz com o dedo o um imaginário na frente dos termos*] (As: zero). Então a gente só corta eles aqui, não precisa aparecer o zero ali. E o b, menos b ao quadrado. O que que acontece aqui oh, pegamos o primeiro termo ao quadrado menos o segundo termo ao quadrado [*afirmou mostrando o resultado*].

Neste episódio, primeiramente P1 faz a formação do processo do tratamento, mostrando aos alunos como deve ser a sequência dos procedimentos a serem tomados. Nesta explicação o que P1 fez, foi mostrar aos alunos como se dá o resultado do produto fatorado, ou seja, a técnica. P1 não fez o tratamento contrário.

P1 atribuiu a inexistência do expoente um utilizando apenas a fala e não outro registro, como por exemplo, o escrito. Quando o professor suprime ou usa uma palavra errada, acaba atribuindo uma significação que pode confundir o aluno em outras situações escritas.

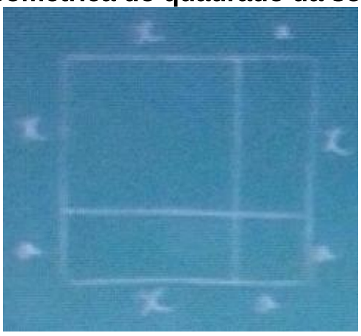
Segundo Duval et al. (2014), é possível observar a ausência referente ao *status* das letras e dos diferentes sentidos do símbolo “=”, sendo utilizado apenas os “conceitos” que justificam os procedimentos de tratamento, que são: multiplicação, potências, adição e distributiva da multiplicação em relação a adição.

Esta atividade pode ser classificada como o tipo 4 de substituição semiótica: substituir uma expressão literal por outra, que é mais desenvolvida ou mais reduzida. E que exige uma operação de designação de elementos, em que é preciso distinguir vários tipos de substituições, que vão exigir um reconhecimento puramente formal da forma de expressão, com “uma característica semiótica fundamental: as transformações de escrita não dizem respeito às letras, mas às ocorrências das letras” (DUVAL et al., 2014, p. 56).

Diante do que afirma Duval et al. (2014) e da explicação de P1, é possível nos questionar: os alunos entendem o que fazem ou só reproduzem o modelo do professor?

Na aula de P4, a partir de uma pergunta de um aluno, ele mostra a volta desse tratamento, após apresentar a representação geométrica do quadrado da soma.

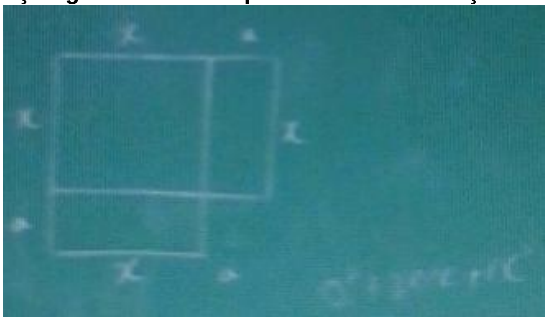
Figura 6: Representação geométrica do quadrado da soma de dois termos



Fonte: dados da pesquisa.

A5: agora faz uma coisa, tira aquele quadradinho do lado. [*o aluno estava se referindo ao quadrado menor da figura*].
P4: e agora? [*o professor apagou a figura que o aluno se referiu*].

Figura 7: Representação geométrica do quadrado da diferença de dois termos



Fonte: dados da pesquisa.

A: como assim?
A5: eu acho que fica quase a mesma coisa só que em vez de ficar dois ax, fica ax.
P4: e agora que nós tiramos esse quadradinho, como vai ficar?
A5: fica dois a mais 4 xis. [*o aluno contou a quantidade de cada letra representando os lados*].
P4: olhem para cá. [*o professor pegou a figura de sulfite para mostrar aos alunos*].
A7: “xis” elevado ao quadrado mais dois a “xis”, eu não sei mais.
P4: “xis” ao quadrado, menos a ao quadrado.
A5: “xis” ao quadrado MAIS DOIS A “XIS” menos a ao quadrado.
P4: is-so. Por isso que fica o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo. Então quer dizer, oh, eu vou fazer o contrário aqui oh. [*escreveu $a^2 - b^2$*] como que fica a fatoração dele aqui? (As: ...) é a mesma coisa gente, só que é ao contrário. Agora vou fazer com letra e número [*escreveu $a^2 - 4$*] esse como é que vai ficar?
As: a mais quatro vezes a menos quatro/ a mais quatro vezes a, pera aí.
P4: agora peguei vocês. Vê se a expressão algébrica vai dar esse valor.
As: a ao quadrado/ dois. A ao quadrado mais dois vezes a ao quadrado menos dois.
P4: beleza! Vou escrever igual vocês estão falando. [*escreveu a expressão como os alunos disseram $(a^2 + 2)(a^2 - 2)$*].

Apesar de todo esforço feito por P4, de trazer as figuras recortadas, desenhar a figura no quadro e escrever a expressão algébrica, não garantiu que os alunos compreendessem a relação entre os três registros. A volta da transformação do registro geométrico para o algébrico deve ser compreendida como uma equivalência de área. É importante compreender que os termos de uma equação de um quadrado perfeito correspondem a áreas, é essa significação que deve ser atribuída pelo aluno e que na maioria das vezes não é ensinada pelo professor ou deixada passar despercebida, pois para ele isso já é claro.

De acordo com Duval et al. (2014) existe uma diferença cognitiva importante quando se trata de efetuar as duas operações originárias da técnica: desenvolver e fatorar. Desenvolver é uma operação que se começa e que se desenvolve automaticamente aplicando uma sequência de operações, já para fatorar é preciso reconhecer cada termo numérico como o produto possível de dois números, e ainda mais, ela deixa certo equívoco didático, porque as duas letras “a” e “b” “*podem ser* *substituídas seja por outra letra, seja por um número* (que será então o quadrado de outro).” (ibidem, p. 41 grifos do autor).

Ao perceber que os alunos estavam confusos, na fatoração da expressão $a^2 + 4$, o ato de o professor fazer o registro escrito $(a^2 + 2)(a^2 - 2)$ para os alunos visualizarem o que estavam falando, possibilitou que eles percebessem onde estava o erro.

> A7: a ao quadrado está errado pssor. [*depois que os alunos visualizaram a expressão, viram que não tinha como $a^2 . a^2$ dar a^2*] É só a, não é a ao quadrado.
> P4: ah, por isso que eu deixei vocês falarem. Tem esse a ao quadrado? [*apontou para o termo a^2*] (As: não) Não. Porque a hora que a gente fizer o produto [*mostrou com o dedo*] vai ficar na quarta potência. Não existe ao quadrado, só existe o a.
> A: agora a gente já sabe.
> P4: agora não tem mais graça, porque se eu fizer esse aqui [*escreveu $x^2 - 49$*] qual é a expressão algébrica?
> A1: “xis” mais dois três.
> P4: mais dois o quê? Qual a área quadrada que vai dar quarenta e nove?
> A1: sete.
> A5: “xis” mais sete vezes xis menos sete. [*o professor escrevia enquanto o aluno falava*]
> P4: agora volta. O quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo. Mas vamos tirar a prova real se é mesmo. [*fez a multiplicação membro a membro, com o chuveirinho*] Agora vamos fazer uma atividade, escreva aí, fatore as expressões.

Duval (2009) afirma que é preciso criar condições para que o aluno visualize um mesmo objeto matemático em várias representações, ainda que no mesmo registro, gerando uma significação dos conceitos matemáticos.

Destacamos a fala do aluno A1 ao responder “xis mais dois três” referindo ao primeiro fator de $x^2 - 49$. Percebemos que o aluno faz a raiz de quatro e a de nove separadamente. Diante da resposta do aluno, P4 mudou a forma da pergunta: “Qual a área quadrada que vai dar quarenta e nove” e entendendo o significado o aluno respondeu corretamente. A expressão utilizada pelo aluno vai revelar que ele sabe transformar a diferença de quadrados num produto da soma pela diferença de dois termos. Porém, percebe-se que se vale de quarenta e nove cujos valores posicionais respectivamente identificam-se com quadrados reconhecidos quatro e nove.

Segundo Duval (2009) a língua natural possibilita produzir uma variedade de tipos de discursos, que podem ser decompostos em unidades de sentido podendo ser reformulados e também ser decompostos em outras unidades de sentido, tornando acessível à compreensão do outro.

No tratamento feito por P2 no conteúdo de divisão de monômio por monômio, separamos a resolução da letra d) $(18\ x^5y^4) : (-9\ x^5y^3)$.

> A1: dezoito “xis” elevado a cinco. (P2: dezoito “xis” na quinta) y quatro [*professor abriu e fechou os parênteses sem que o aluno ditasse*] dividido por menos nove “xis” elevado a cinco, y elevado a três.
> P2: vamos lá então, dezoito dividido por nove?
> As: dois.
> P2: mais dividido por menos?
> As: menos.
> P2: “xis” na quinta dividido por “xis” na quinta?
> A: y.
> A1: que?
> A: zero. [risos]
> P2: “xis” na quinta dividido por “xis” na quinta, zero, não vai, isso! y, quatro menos três? Um, então, menos dois y.

Destacamos o momento em que P2 diz “xis na quinta por xis na quinta, zero”, embora estivesse se referindo possivelmente a subtração dos expoentes, o aluno entende como um “processo divisório”. Está é uma divisão em que o dividendo e o divisor são iguais, ou seja, xis na quinta dividido por xis na quinta é igual a um. Embora exista uma regra na potenciação que afirme que ‘todo número elevado à zero é igual a um’, o que deve estar claro para o professor e para o aluno é que essa regra resulta de uma das propriedades da potenciação, como podemos observar na demonstração por indução:

$$x^0 = x^{5-5} \Rightarrow \frac{x^5}{x^5} = \frac{x.x.x.x.x}{x.x.x.x.x} = 1.1.1.1.1 = 1$$

A fala carrega as dificuldades dos alunos entenderem esses processos operatórios. Quando o professor fala que “xis” na quinta, dividido por “xis” na quinta é zero, ele impregna do ponto de vista do registro da fala, uma concepção errônea do processo divisório, de dividir duas quantidades iguais. O problema quando o professor fala zero, está se referindo ao expoente, mas o aluno entende o zero como um processo divisório. A significação atribuída pelo aluno é diferente daquela exposta pelo professor.

Retomamos o que dizem Duval et al. (2014) que na Álgebra é preciso reconhecer as operações de substituição semiótica e o que os símbolos designam.

P2 e P5 fazem uma transformação na escrita de um número mostrando aos alunos outra representação desse mesmo objeto matemático utilizando o mesmo registro numérico, ambos transformam a escrita decimal para a escrita fracionária. P2 faz esse tratamento na explicação dos exemplos do conteúdo de divisão de monômios, resolvendo a letra e) (- 3/5 xyz^2) : (0,2 yz). Já P5 faz a transformação na correção das tarefas de radiciação, letra b) $\sqrt{1{,}21}$. Vejamos como se deu o discurso desses professores durante o tratamento:

> P2: aqui gente, nós temos uma fração e um número decimal. Eu não sei como vocês fizeram. Se já fizeram direto, ou se transformaram esse daqui, três quintos em decimal, ou transformaram o decimal em fração. [*a turma está pensativa*] eu prefiro que vocês transformem o número decimal em fração. Que às vezes quando vocês forem transformar esse daqui em decimal [*apontou para o três quintos*] pode acontecer uma dízima periódica, indefinida, lá zero seis seis seis, daí se for tirar uma prova real depois, vê que não vai fechar. Vai faltar alguns valores. Então eu prefiro transformar esse aqui [*apontou para o 0,2*] em fração. [...] menos três quintos dividido por zero dois, e o zero dois [*o professor escreveu no ladinho do quadro, quando disse 'zero dois' escreveu 0,2*] não é zero vírgula dois que nós lemos, como é que é?
> A1: dois décimos.
> P2: isso, dois décimos. Então como você leu, você muda. Se você leu dois décimos, então dois décimos [*e escreveu a fração 2/10*] certo é assim que transforma. Eu já falei para vocês e depois também, você vai contar uma casa decimal significa? Um zero no denominador, é isso? Dez, cem, mil. Se fosse zero zero dois, dois centésimos. E a divisão como é que a gente faz?

A fala do professor 'como você leu, você muda' referente à fala dois décimos para a transformação 2/10 é congruente, no entanto quando ele fala 'zero dois' para referir-se a 0,2 pode causar um conflito para o aluno na significação da escrita posicional desse número. A preocupação de P2 em homogenizar a representação, transformando 0,2 em 2/10, deve ter sido possivelmente para mostrar aos alunos como é o processo de resolução da divisão de frações, tendo em vista que o exemplo f também era com números decimais.

Quanto a P5, diante de sua fala entendemos que ela faz a transformação de 1,21 em 121/100, porque compreende que para os alunos é muito mais simples visualizar e encontrar a raiz quadrada de um número interiro do que de um número decimal.

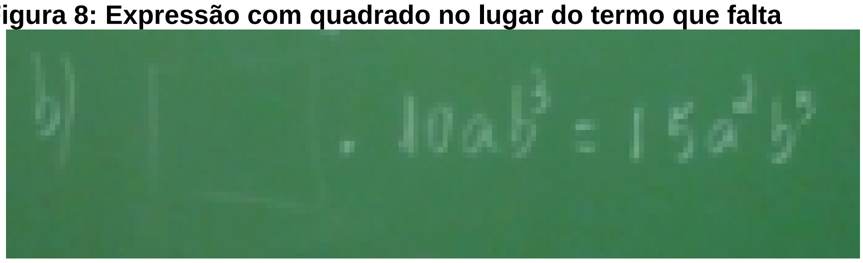
> P5: [...] O que que nós aprendemos sobre raiz de número decimal?
> A: que tem que transformar em fração.
> P5: e como transforma um número decimal em fração?
> A: tem que tirar a vírgula.
> P5: isso! Tirei a vírgula, gente oh, [*riscou a vírgula do 1,21*] ficou cento e vinte e um sobre? (As: cem). Porque que sobre cem nessa fração? (As: por que tem duas casas depois da vírgula). Duas casas depois da vírgula, cento e vinte e um sobre cem. [...]

Essa mudança feita pelos professores nestas operações possibilitou aos alunos conhecerem o mesmo objeto matemático em mais de uma representação, ainda que no mesmo registro.

Segundo Duval (2009) a escrita de um número representa o objeto matemático quantitativo e tem uma significação operatória atrelada aos tratamentos, permitindo efetuar as operações referentes a aquela representação. Os tratamentos não são os mesmos para a representação decimal e para a representação fracionária. Se P2 tivesse escolhido a representação decimal para resolver a divisão, o processo operatório exigido seria outro. Bem como a transformação efetuada por P5, pois como afirma Duval (2003) o custo cognitivo entre uma operação e outra não são os mesmos.

Na resolução da atividade ‘Qual é o monômio que, multiplicado por 10 ab^3, tem como resultado 15 a^2b^5?’, P2 coloca no lugar do monômio que deve ser encontrado, um quadrado, como pode ser visualizado na Figura 8. Essa lacuna o qual ele quer dar um caráter operatório, recorrendo ao pensamento algébrico, procurando minimizar as dificuldades dos alunos de lidarem com o que desconhecem.

Figura 8: Expressão com quadrado no lugar do termo que falta



Fonte: dados da pesquisa.

P2 parte do que os alunos já sabem, tentando sempre impregnar as propriedades algébricas a partir das propriedades numéricas.

> P2: [...] as letras a gente já descobriu, eu quero saber aqui o quinze. [...] vou dar aqui um exemplo numérico. [...] Igual eu falei ontem, quanto que é três vezes quatro? (As: doze). [*o professor deu um exemplo numérico*, *enquanto falava escrevia o algoritmo (3 x 4 =12)*] se eu apagar esse que é o que eu quero descobrir [*apagou o três e fez um quadrado no lugar □ x 4 = 12*] o que que eu vou fazer com esses dois? [*apontou se referindo ao quatro e ao doze*] (A: vai dar 3) vai dividir. [*e foi escrevendo o algoritmo*]. Então o que que a gente vai escrever aqui com esses dois? [*e apontoupara a expressão, se referindo ao dez e ao quinze*]. (As: dividir) Então vamos lá, então vai ficar quinze dividido eu posso por assim? [*escreve a fração 15/10*] (As: pode) Oh, quinze dividido por dez [*aponta os números nessa sequência*]. Daqui para cá. As letras nós já fizemos, então dois tira um sobra um, cinco tira três sobra dois, agora quinze dividido por dez, quinze décimos, simplificando, (A1: dá 15) não. Por cinco, então quinze por cinco? (As: três) dez por cinco (As: dois). Então três meios [*escreve a resposta*].

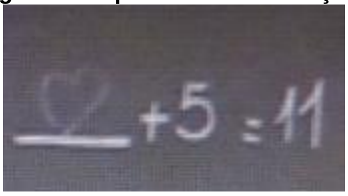
O desenho do quadrado feito pelo professor na expressão que precisa ser encontrada substitui a supressão de um termo, que agora não é mais um número, mas uma expressão, aumentando o grau de dificuldade. O fato de o professor colocar o quadrado para representar a expressão e não outra letra se fez possivelmente para não confundir ainda mais os alunos. No entanto, isso não garante que o aluno estabeleça a equivalência que aquele quadrado ou espaço vazio representa, exigindo um procedimento de redesignação.

Quando o professor dá um exemplo numérico ele sugere subjacentemente que as propriedades numéricas valem também para os termos algébricos. Contudo, nem sempre isso é verdade na Álgebra, pois nem sempre somamos ou multiplicamos as letras como fazemos com os números. Por exemplo, a divisão de polinômios por polinômios, a divisão não é dividir termo a termo. Esse processo analógico entre os números e monômios, por exemplo, não tem equivalência, a operação está significando a mesma coisa, mas a forma do tratamento não é equivalente com a divisão numérica.

Do ponto de vista dos Registros de Representação Semiótica, esse modo como o professor exemplifica, para nós indica uma possibilidade de minimizar a incongruência que existe entre a fala e a escrita.

> P5: [...] Por exemplo, eu falei pra vocês, qual é o número que somado com cinco dá onze. [...] que número [*traçou um risco*] mais cinco dá onze. [...] esse ‘qual é o número’ a gente representa por um símbolo, esse símbolo é uma letra, pode ser qualquer letra. Poderia ser até se eu quisesse colocar um coraçãozinho [...]

Figura 9: Expressão com coração



Fonte: dados da pesquisa.

Para Duval et al. (2014) partir de uma igualdade numérica para elaborar problemas aditivos com uma operação é o caminho mais direto e natural para introduzir o conteúdo de Álgebra, transformando esta igualdade em três equações numéricas, suprimindo um termo de cada vez. Segundo os autores, o importante não é dar o problema, o importante é reformular o problema a partir da sentença matemática.

P5 está usando o processo substitutivo de uma expressão referida por uma pergunta. Nessa relação a professora exclui sempre o primeiro termo numa relação de operação de adição e subtração triádica, o que não é equivalente a suprimir o segundo ou o terceiro termo em caso de conversão (DUVAL et al., 2014). Ressaltamos que não é o ‘espacinho’ ou uma letra que vai garantir o valor operatório na expressão entre eles, mas como é transformado numa linguagem discursiva, falada ou escrita. É preciso reconhecer que naquele espaço em branco, que pode ser substituído por uma letra, um coraçãozinho ou outro símbolo, tem uma função diferente do que se estivesse ocupando outro espaço.

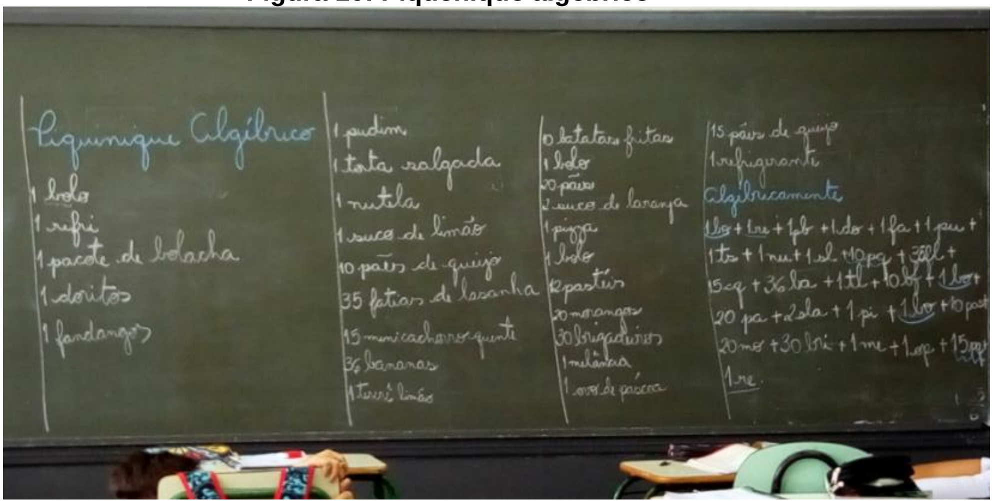
A ‘situação problema’ piquenique algébrico, mencionada por P5 ainda na entrevista foi observada pela pesquisadora em sala de aula. A professora propôs aos alunos que fizessem uma lista de coisas para se levar a um piquenique, em que cada um ia falando o que levaria.

> P5: tá gente fizemos nossa lista, escolhemos tudo que nós vamos levar para o piquenique. Vocês acharam que deu uma lista muito grande? (As: sim) Deu, então o quê que a gente pode fazer, a gente pode usar a álgebra pra diminuir essa lista. Como que nós vamos fazer? Nós vamos deixar a quantidade normal de cada um, a gente vai transformar isso, agora usando a álgebra numa expressão menor, [...]. Então a matemática ela serve primeiramente pra quê? Além lógico da gente calcular, usar pra que a gente precisa descobrir, mas ela serve também pra fornecer ferramentas que facilitem o nosso trabalho. Então nós vamos deixar o número na frente e nós vamos abreviar a palavra, por exemplo, bolo eu vou usar bo, por que tem outras coisas com b igual a banana. [*assim a professora foi abreviando as palavras*] Gente preste bastante atenção pra entender e vocês tem que saber o que significa cada coisa [*assim com a ajuda dos alunos foram montando a nova lista*].

Ao usar bo para representar o bolo, P5 fez uma relação primeira de como as letras são assumidas como coisas diferentes do ponto de vista das expressões algébricas. Mostrando o valor operatório, que não é possível juntar bo com ba, por exemplo, pois são duas coisas diferentes, bo + ba, não é a mesma coisa que boba.

A três primeiras partes do quadro negro mostram a lista do piquenique dos itens escritos com os nomes completos. A partir da palavra algebricamente escrita em azul os itens já estão abreviados.

Figura 10: Piquenique algébrico



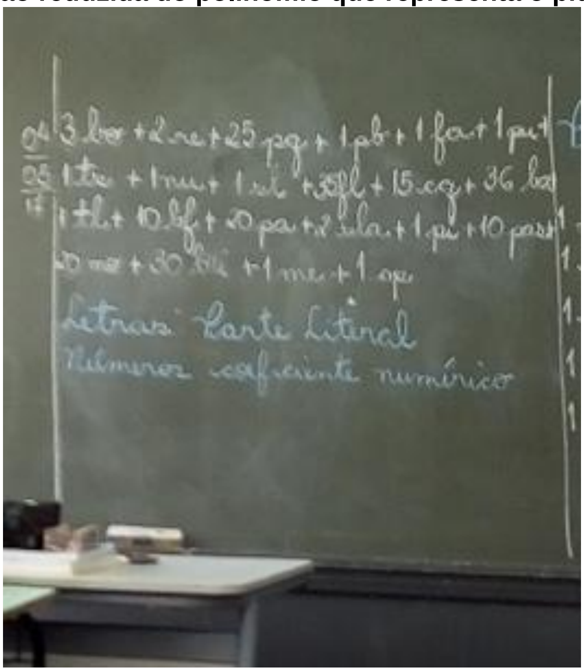
Fonte: dados da pesquisa.

> P5: tá gente entenderam o que a gente fez? (As: sim) Só que vocês perceberam que poderia fazer outra coisa pra deixar isso ainda menor? (A1: podia ter juntado os iguais) Poderia ter juntado os iguais? (As: sim) Por que que poderia ter juntado os

> iguais? (As: por que é a mesma coisa) Por que é a mesma coisa. Então gente olha, na álgebra é a mesma coisa, eu posso juntar as coisas que são iguais. Por que elas representam a mesma coisa. Então o que são iguais aqui primeiro? Oh primeiro bolo [*marcou 1 bo*] Então tem um bolo, dois bolos, três bolos, três bolos [*escreveu na nova expressão 3 bo*] gente, olhem só, o que que eu somei? Somei a quantidade de cada um e o quê que eu repeti? (As: o bo) Isso, então eu somo a parte numérica e repito a parte das letras.

E assim foi somando cada um dos itens repetidos, quando chegava aos que já havia sido somado, ela perguntava se iria somar novamente, os alunos que estavam muito atentos respondiam que não.

Figura 11: Expressão reduzida do polinômio que representa o piquenique algébrico



Fonte: dados da pesquisa.

> P5: terminaram de copiar? (As: não) Então gente prestem atenção um pouquinho, imaginem que a gente combinou de fazer esse piquenique, mas no dia a A1 faltou e a A1 ia levar o tererê, gente o que que nós teríamos que fazer com a nossa lista? (As: tirar ele/ diminuir) Diminuir o tererê, ia ter que tirar o tererê de limão. Mas suponha que a professora Luani que ia trazer os quinze pães de queijo, não pôde vir na terça feira, o que que ia acontecer? (A: ia diminuir quinze pão de queijo) A gente teria que diminuir quinze pães de queijo dos vinte e cinco e daí ficaria só com quanto? (As: dez) E nós poderíamos diminuir? (As: sim) Sim, por que não veio vai tirar da quantidade que já tinha de pão de queijo. Gente olha aqui, dessa parte do piquenique algébrico vocês entenderam para que que a gente usa essas letras? (As: sim) Pra que que a gente usa?
> A1: pra simboliza.
> P5: pra simbolizar algo que nós não queríamos escrever inteiro. O que que significa esses números na frente? [*apontou para o coeficiente*].
> A1: a quantidade.
> P5: a quantidade. Essas quantidades em alguns casos pode somar ou pode diminuir? (A: sim) Quando que pode somar ou pode diminuir? (As: quando são iguais)
> A1: quando vem mais gente ou não. [*a aluna quis dizer se a pessoa trouxe mais ou não trouxe o que disse que traria*].

> P5: a gente pode somar e diminuir quando se representam a mesma coisa, o mesmo objeto, a mesma comida. Neste caso pela gente é representado pelas mesmas letras.

A fala de P5 não traduz uma relação nem de incógnita e nem de variável. Na verdade ela acaba formando um polinômio enorme e faz a redução desse polinômio, mostrando aos alunos que as letras servem para denotar, identificar um objeto, trazendo a letra como uma codificação. Destacamos que é P5 quem faz toda essa reunião dos termos e os alunos apenas a acompanham.

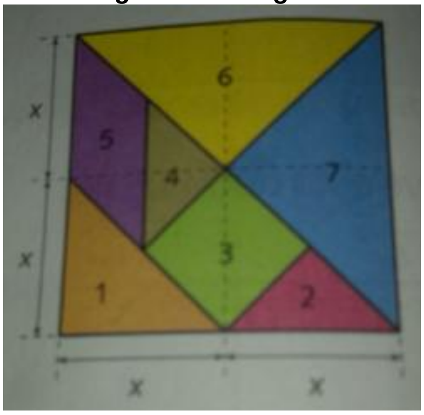
A conversão consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação em outro registro, seguindo as mudanças referentes a cada registro. Para Duval (2003, p. 15), “a capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados”. As **conversões** que aconteceram durante as observações das aulas se estabeleceram comumente entre os registros língua falada e escrita algébrica, língua falada e língua escrita, figural e escrita algébrica e vice versa.

Mesmo P3 e P5 recorrendo às atividades para que fosse encontrado o perímetro, as figuras relacionavam os elementos para usá-los como expressão algébrica. As conversões em maior parte se deram entre o registro falado e o registro escrito. Contudo não houve nenhuma conversão de um problema em linguagem natural para se criar uma expressão algébrica e nem a de elaboração de problemas.

P4 usou o tangran para apresentar a conversão da forma figural para a escrita algébrica da área do triângulo.

Atividade 6. O tangran é um jogo chinês, que é uma espécie de quebra-cabeça, composto de sete peças, com as quais se podem criar numerosas figuras. Determine a área das peças 1, 6 e 7, sabendo que a soma de todas as áreas corresponde a $4x^2$. (SILVEIRA, 2015, p. 54).

Figura 12: Tangran



Fonte: (SILVEIRA, 2015, p. 54)

Para a resolução da atividade, o professor poderia apenas ter resolvido com os alunos por meio da fórmula da área do triângulo ((b.h)/2) tendo em vista que o problema dava além dos dados necessários. Porém, ele fez a construção do jogo com os alunos, utilizando o tangran como material manipulativo para mostrar como chegar nesta fórmula.

P4 disponibilizou aos alunos uma folha sulfite e com ela cada um construiu o seu tangran seguindo as instruções dadas por ele. Após a construção do jogo, o professor foi conversando e questionando os alunos sobre o que eles tinham feito e estavam enxergando.

> P4: [...] se aqui tem a mesma medida dessa, [*mostrou os catetos*] e eu não sei quanto mede e determinei chamar de “xis”. Agora eu vou substituir o “xis” por um valor numérico [...] Então aqui o valor numérico é quatro, vamos substituir por quatro. Qual a área quadrada dessa figura? Quatro e quatro [*mostrou os catetos enquanto falava*].
> As: oito/ oito “xis”/ seis.
> P4: oito? Área quadrada.
> A7: dezesseis.
> P4: quando é área quadrada é multiplicada. Um lado pelo outro lado. Esse lado vezes esse [*mostrou os catetos*]. Então vamos lá, qual a área quadrada mesmo? (As: dezesseis) Mas será? Agora eu pergunto, dezesseis quadradinhos certo? Será que se eu for cortar esse triângulo, vai dá dezesseis quadradinhos? (As: não/ vai) vai ou não vai? E se eu ajuntar esse? [*juntou os dois triângulos maiores*].
> A2: trinta e dois.
> P4: ué, como vai ser trinta e dois se aqui é quatro e aqui é quatro. [*mostrou os lados*].
> A2: ué, dezesseis mais dezesseis.
> As: discussão.
> P4: calma. Olha, aqui não é quatro, aqui não é quatro [*foi mostrando os lados enquanto falava*] (A2: oito, doze, dezesseis). Presta atenção, eu admiti que a medida desse lado é quatro, a área dessa figura então é quanto?
> As: dezesseis.
> P4: e agora é quanto? [*tirou um dos triângulos*].
> A2: quatro, não pera aí, éh::
> As: dezesseis.
> A2: oito, oito!

P4: ah, tá vendo oh. Então vamos lá, então nós vamos criar uma formulazinha oh, e é o exercício que tem aí [*se referiu ao exercício do LD*] de novo, a área dessa figura, aqui é quatro, aqui é quatro, então vai dar deze? (As: dezesseis). Mas quando eu tiro uma das partes, quanto que fica? (As: oito). Tá mas se eu tirei metade, como é que a gente vai achar esse oito? Como é que eu acho esse oito se deu dezesseis? [*o professor juntava e separava os triângulos, afim de tentar fazer com que os alunos visualizassem que os dois triângulos formavam um quadrado e portando um triângulo era a metade*].
A2: porque oito é a metade, deze...
A7: dezesseis dividido por dois.
P4: A área de um triângulo nós fazemos pela base vezes altura [...] dividido por? (A: dois) dividido por dois. [*enquanto falava escrevia a fórmula no quadro*]. [...] Aí gente essa é a resposta da figura um.

O fato de o professor insistir no juntar e separar os triângulos para que os alunos visualizassem que o quadrado estava dividido em dois, possibilitou que eles fizessem a conversão do registro geométrico para o numérico e posteriormente, permitiu ao professor mostrar a fórmula da área do triângulo.

Contudo, P4 não faz uso constante de desenhos e esquemas. Ele prefere o registro língua natural e o repete inúmeras vezes como uma forma de provocar a aprendizagem.

O professor continuou com os questionamentos, pois o objetivo da atividade era encontrar a área das figuras 1, 6 e 7, referente à Figura 11.

P4: eu quero ver se alguém faz alguma relação da área da figura seis com a figura um.
A2: ela é metade do outro.
P4: ochi, então tá fácil. Se ele é metade do outro então quer dizer que ele é o dobro desse [*estava com os triângulos grande e médio na mão e se referia á eles respectivamente*].
A2: é.
P4: opa então ficou fácil, se é o dobro então, é só ocupa essa daqui e fazer o dobro dela [*apontou no quadro para a resposta da figura um*].
A: “xis” veis “xis” veis “xis”. [*o aluno denominou os lados do triângulo de “xis” e fez a multiplicação*]
P4: gente olhem não é o mesmo? (As: sim) Então quer dizer que é a metade [*sobrepôs o triângulo médio no triângulo grande, mostrando que cabiam dois*]. Se é a metade, então quer dizer que essa maior é o? (As: ...) dobro dessa aqui. Sendo o dobro é só fazer duas vezes.

Embora o professor afirmasse ‘tá fácil’, os alunos não estavam conseguindo compreender. Não é tão simples assim, para os alunos entenderem que o dobro de uma quantidade é equivalente a duas vezes à quantidade.

Nesse caso, o dobro se referia a uma grandeza geométrica. Pensar no dobro de alguma coisa acarreta um processo operatório próprio do pensamento algébrico. Mas esse dobro de alguma coisa estava atrelado exclusivamente ao dobro da área de uma figura, o dobro da área do triângulo, ‘o dobro do que’. Para saber o dobro da área de um triângulo cuja área vale “xis” ao quadrado sobre dois ($x^2/2$), então o dobro dessa área é dois “xis” ao quadrado sobre dois ($2x^2/2$). Essa analogia não é simples para os alunos estabelecerem. O apelo para representações que não estão visíveis ou escritas dificulta a compreensão do aluno.

6.1 Síntese

Esta pesquisa teve por objetivo analisar os tipos de transformações cognitivas: formação, tratamento e conversão, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014), presentes na condução de aulas de Álgebra, ministradas pelos professores do 8º ano de colégios do município de Santa Terezinha de Itaipu/PR.

Norteados pelo problema: que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra? Que tipo de processo de composição dos conhecimentos a adquirir pode ser visualizado nas atividades propostas? Buscou-se observar a introdução desse conteúdo. Os conteúdos trabalhados pelos professores e observados pela pesquisadora foram: expressões algébricas, divisão de monômio por monômio, potenciação de monômios, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dos polinômios e produtos notáveis.

Se perguntarmos aos professores “qual a diferença da letra”, poucos sabem que, uma é variável, que outra pode ser incógnita, ou pode ser um valor desconhecido. Que a fórmula, $A = b.h$, por exemplo, não tem o mesmo sentido da equação $x + 3 = 5$, ou ainda, $y = 2x + 1$, são todas letras, mas têm estatutos diferentes. E isso está diretamente ligado às atividades que eles selecionam e propõem aos seus alunos.

Foi notório que os professores, sujeitos desta pesquisa, veem a Álgebra como o cálculo com letras. Percebemos que o tempo de trabalho não amenizou a problemática deles não compreenderem o estatuto da letra. Por entender que a Álgebra é um conteúdo abstrato, os professores acabam se atendo as regras de manipulação dos símbolos e utilizando exemplos numéricos na tentativa de minimizar esse distanciamento que acabou sendo criado entre a Aritmética e a Álgebra.

Segundo Duval et al. (2014) na Álgebra a letra assume um valor operatório, em que, o importante é que o aluno entenda e saiba diferenciar o valor operatório seja ele como incógnita, variável ou como nenhum dos dois – como parâmetro. Entendemos que isso não está claro para nenhum dos professores sujeitos da nossa pesquisa e somos levados a pensar se esta ocorrência não seria um problema na sua formação inicial. Sabemos que isso não é um processo simples de acontecer, mas a questão é: que argumentos esses professores estão usando para que os alunos consigam entender isso na sua versão – na versão equacional, na versão funcional, na versão que é só uma expressão algébrica?

Do ponto de vista da língua natural, os professores impregnam na letra, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, um único significado. Não apenas os registros escritos são importantes, a fala também é muito potente. Usar as palavras exatas e corretas, segundo os pressupostos de Duval (2004) potencializa o ensino de matemática, pois o registro falado ele produz no outro o significado do termo utilizado.

Quando o professor fala e ele escreve, ele está utilizando dois registros diferentes, muitas vezes falando coisas que provocam uma significação no aluno completamente diferente daquilo que ele está tentando ensinar. Nem sempre o uso de dois registros diferentes garante que o aluno vai compreender, depende da coerência das palavras, ou seja, dos termos corretos utilizados pelo professor.

A pronúncia dos termos adequados, mostrando ‘essa variável aqui’ ou em outra situação ‘o valor dessa incógnita’, se o professor conhece e faz essa distinção ao referenciar a letra, o aluno vai percebendo ao longo de seu aprendizado que essas letras assumem valores operatórios diferentes, por que vão ter uma função diferente naquela escrita, possibilitando ao aluno compreender que há diferença entre estes objetos.

Quanto a nossa pergunta: “Que tipo de processo de composição dos conhecimentos a adquirir pode ser visualizado nas atividades propostas?” a afirmação de Duval et al (2014) a respeito da decomposição de processo regressivo, foi claramente evidenciada. Do ponto de vista matemático, o ensino é organizado exatamente como os professores fazem, eles querem ensinar as letras, mas Duval et al. (2014) dizem que as letras não precisam ser ensinadas, as letras têm que emergir. No entanto, os exemplos dados pelos professores, basicamente todos algébricos ou numéricos, não satisfazem os métodos de análise de problemas de aprendizagem (ver Quadro 12) recomendados pelos autores.

Com a intenção de sintetizar as discussões, o Quadro 22 apresenta alguns exemplos selecionados das atividades que foram propostas pelos professores aos seus alunos. A terceira coluna traz algumas considerações relacionando-as as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Quadro 22: Respondendo a nossa problemática

	O modo como o professor procedeu	**Um possível encaminhamento a TRRS**
P1	(a + b).(a – b) “A primeira parte é a soma e a segunda parte é a diferença, que é a subtração.[...], você vai pegar e multiplicar o primeiro pelo primeiro é o mesmo método[...]”	Notamos que a preocupação primeira de P1, P2 e P3 era mostrar os procedimentos e ensinar a técnica. As atividades selecionadas por eles no LD eram todas de tratamento, que podem ser classificadas como o tipo 4 dos tipos de substituição semiótica: substituir uma expressão literal por outra expressão que é mais desenvolvida ou reduzida. Encaminhamento proposto segundo a TRRS: a exploração de outros registros. Neste caso, a representação algébrica atrelada à geométrica.
P2	$(18\ x^5y^4) : (-9\ x^5y^3)$	
P3	$(x – 3)^2$	
P4	Construção do tangran;	Observamos que ao construir o tangran com os alunos, o docente pode propiciar oportunidades de reflexão ao instigar os alunos por meio de perguntas.
	Traz pronta a representação geométrica do quadrado perfeito;	De acordo a TRRS, a construção do quadrado perfeito com os alunos favorece a apreensão conceitual.
	Escreve a expressão (x+ 7)(x-7) na forma algébrica; Traz a representação do quadrado perfeito pronto.	De outra forma, apresentar por meio da representação geométrica como se dava tal expressão.
P5	Escreve no quadro a expressão __+5=11;	Propõe-se a supressão dos outros membros da igualdade e não apenas o primeiro e ainda, a elaboração de problemas realizados pelos alunos, não os apresentando pronto.
	Propõem a ‘situação problema’ piquenique algébrico.	Construção algébrica elaborada pelos alunos, para que passem a designar o estatuto da letra não apenas como incógnita ou variável, e sim perceber o valor operatório dela.

Fonte: dados da pesquisa.

Na obra de Duval et al. (2014), os autores propõem algumas atividades e sugestões que podem ser aproveitadas para o ensino de Álgebra. Por exemplo, que se dê uma lista aberta e faça questionamentos: isso acontece sempre? Como se comporta? Tem um modo de escrever essa lista? Para que os alunos encontrem as respostas, “ah cada elemento de uma coluna é o dobro do outro”, ou “esse é um maior que o outro”, etc. Isso na linguagem natural, e depois escrever na linguagem matemática, os autores chamam de processo de condensação, em que a letra entra para mostrar uma relação. Então o professor não precisa ensinar a letra, ela vai aparecer.

Vale destacar que a maioria dos professores usou o livro didático como único guia e referencial para preparação das aulas. Jacomelli (2006) e Passos (2012) também fizeram essa constatação, bem como em outras pesquisas na Educação Matemática, que tratam da formação de professores. Ressaltamos que, o problema não está em usar o LD, ele é importante para que o professor se organize quanto aos conteúdos, mas também pode ser dispensável. A questão é que, é preciso ir para além do livro e a seleção das atividades deve ser a mais heterogênea possível, possibilitando ao aluno o reconhecimento dos objetos matemáticos nos diferentes registros de representação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *Sou feita de retalhos. Pedacinhos coloridos de cada vida que passa pela minha e que vou costurando na alma. Nem sempre bonitos, nem sempre felizes, mas me acrescentam e me fazem ser quem eu sou. Em cada encontro, em cada contato, vou ficando maior... Em cada retalho, uma vida, uma lição, um carinho, uma saudade... Que me tornam mais pessoa, mais humana, mais completa. [...] E a melhor parte é que nunca estaremos prontos, finalizados... Haverá sempre um retalho novo para adicionar à alma. (CORA CORALINA, 1889-1985).*

Este trabalho trouxe muitas influências para a prática profissional da pesquisadora enquanto docente. Ao refletir sobre a prática pedagógica dos sujeitos de pesquisa, pôde perceber limites não só na prática deles, como na própria. A realização desta reflexão distanciada e embasada teoricamente só foi possível pela oportunidade de leituras teóricas sobre o tema e de reflexões sistemáticas, por meio da mediação de outros – sobretudo da orientadora – sobre as situações em sala de aula. Passando a enxergar com outros olhos a própria prática pedagógica, o que deve trazer resultados significativos na maneira de agir pedagogicamente em sala de aula.

Segundo Duval et al. (2014) os professores devem propor situações de aprendizagem que propiciem a aprendizagem das equações fazendo se necessário primeiramente reconhecer como ela funciona para depois conseguir utilizá-la como ferramenta de resolução de problemas. E não apenas isso, mas os professores devem propor problemas que requerem uma análise cognitiva, exigindo dos alunos não apenas justificativas e explicações acerca das respostas, mas de reconhecimento sobre o valor operatório que a letra assume e o que o símbolo representa.

Durante a coleta de dados a pesquisadora não presenciou a aplicação de atividades referentes ao que Duval et al. (2014) propõem como elaboração de diferentes problemas possíveis a partir de uma descrição numérica completa e as supressões possíveis dos membros, e de problemas matemáticos exigindo dos alunos a conversão do enunciado em linguagem algébrica. A professora P5 foi quem mais se aproximou, quando propôs a situação do piquenique algébrico, no entanto, esse modo pode ter dado aos alunos a significação de que o uso das letras serve para designar um objeto, focando no que a letra representa e não nas suas ocorrências e nas posições que ela ocupa.

O estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas e as reflexões acerca das práticas dos professores contribuíram para que a pesquisadora refletisse sua própria prática, referente ao ensino/aprendizagem da Álgebra nos conteúdos de expressões algébricas, polinômios e produtos notáveis.

O uso dos registros simultâneos – fala e escrita, figura e registro algébrico; o material manipulativo – não dar pronto, mas construir com os alunos - fazendo os recortar, decompor as figuras, montar e desmontar as peças, será com certeza, utilizado e explorado por ela em sala de aula.

Do ponto de vista pedagógico exercido pela pesquisadora, faz-se necessário o uso de mais de um registro de representação para representar um mesmo objeto matemático, a conversão entre eles seria o essencial, construir e desconstruir as figuras geométricas em material manipulável, associando-os aos registros escritos algébricos, coerência entre fala e escrita, atenta ao significado e significação dos termos matemáticos, são atitudes que devem sempre estar presentes na prática do professor, a fim de propiciar ao aluno a designação do objeto matemático e suas representações.

Em vários momentos, os professores fizeram analogias utilizando as representações intermediárias, destacando-se as representações geométrica e numérica. Contudo, evidenciamos uma ênfase dada por eles ao tratamento algébrico e a ausência de registros figurais, tendo em vista que o LD apresenta atividades com figuras planas como outro registro das expressões algébricas.

Cabe ressaltar que os professores – com exceção de P4 - não utilizaram figuras geométricas para o ensino desse conteúdo, haja vista que na entrevista a maioria afirmou gostar mais de ensinar o conteúdo de geometria. Disso conclui-se que os professores veem a Geometria e a Álgebra como duas coisas completamente separadas. Apesar de sabermos que a Álgebra surgiu como outro registro para representar o mesmo objeto matemático muitas vezes conhecido somente pelo registro geométrico.

Constatou-se que os professores preocupam-se em preparar o aluno para o uso dos algoritmos e propriedades algébricas, destacando que eles precisarão desse conteúdo para os próximos anos. Quando percebiam que os alunos não compreendiam o exercício, davam outro exemplo, sendo eles algébricos ou numéricos frisando os procedimentos e regras. É notória a ênfase dada pelos professores nos procedimentos de resolução, ou seja, a preocupação em ensinar a técnica. Não tiramos o mérito de que exercitar os tratamentos algébricos não seja importante no ensino de Álgebra, porém, o grande problema é que os professores acabam ficando apenas na escrita literal, não garantindo que o aluno compreenda a função dos elementos algébricos (Duval et al. 2014).

Estes mesmos autores, afirmam que as contribuições para a aprendizagem da Álgebra requer que os alunos distingam na escrita algébrica, incógnita, variável, parâmetro, dependendo da situação matemática, pois é o processo operatório que diz tratar-se de uma equação, função ou nenhuma das duas. Contudo, essa confusão pode ter a significação para o aluno que a equação é simplesmente uma fórmula.

O maior obstáculo da aprendizagem, a formação de uma sentença 3 + 4 = 7 não ocorre como a sentença 3a + 4b que é diferente de 7ab. O grande obstáculo da Álgebra é tratá-la como aritmética generalizada. Assim os alunos nunca vão aprender que um a + b é só igual a um a+b, e não um ab, trazendo aqui um problema maior que não é o campo numérico ou o campo algébrico, mas o campo da operação matemática, pois operamos com letras e operamos com números. No entanto essas operações se comportam de modos distintos segundo o campo em que se encontram.

A revisão de literatura mostrou o esforço e dedicação dos pesquisadores da Educação Matemática em encontrar e dispor de maneiras para auxiliar professores e alunos no ensino e aprendizagem da Álgebra, revelando o quanto avançamos e do quanto ainda precisamos avançar. No entanto nos questionamos: será que elas estão chegando à sala de aula?

Entendemos que as pesquisas têm que atingir a sala de aula, principalmente as da área de ensino. Uma das coisas que não podemos deixar de fazer é ter essas discussões e fazer essa pesquisa chegar lá. Esses professores precisam ser atendidos, eles precisam ser compreendidos. Sabemos do trabalho e do ‘mergulho’ que esse professor faz todos os dias em ir para as escolas e trabalhar com seus alunos, em que muitas vezes ele é sozinho nas suas dúvidas e nos entendimentos que ele tem que mostrar.

Desse modo, o desafio que a pesquisadora se dispõe a enfrentar é propor e discutir com esses professores um conjunto de tarefas que dê indicativos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A fim de que eles possam ter ferramentas e refletir sobre a proposta que o autor traz de fazer a escolha certa do problema a ser dado aos alunos para atingir determinado objetivo de ensino, pois entendemos que aplicar a teoria em sala de aula é discutir e traduzir ela no contexto em que ela se encontra.

Sabemos que o que trouxemos neste trabalho é apenas um pequeno recorte da prática do professor em sala de aula. Há muito a ser pesquisado, analisado, refletido e estudado. Estamos apenas dando nossos primeiros passos...

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. R.; ALVES, K. A.; SILVA, T. H. I.; SILVA, R. L. Uma proposta de análise vertical: investigando o conhecimento matemático para o ensino de professores da educação básica. In**.: EMEM – Encontro Mineiro de Educação Matemática**. 2015. Disponível em < http://comea.net.br/uploads/publicacoes/uma-proposta-de-analise-vertical-investigando-o-conhecimento-matematico-para-o-ensino-de-professores-da-educacao-basica.pdf > Acesso em: 23 abr 2017.

ANDRADE, L. S. **Registros de representação semiótica e a formação de professores em matemática**. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, ULBRA, Canoas, RS, 2008.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. In.: **Educ. Mat. Pesqui**., São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008. Disponível em < https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1740/1130 > Acesso em 17 dez 2017.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? In.: **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008. Disponível em <https://pdfs.semanticscholar.org/2daa/67d3bbde0d751eab7302c6704f41f9f31f97.pdf> Acesso em 24 abr 2017.

BALL, D.L.; BASS, H.; SLEEP, L.; THAMES, M. A theory of mathematical knowledge for teaching. Work-session apresentada no **ICMI Study 15**, Lindoia, Brazil, 2005. On line access: http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html.

BALL, D.L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: SIMMT,E.;DAVIS, B. (Eds.). **Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.Kingston**, Canada: CMESG Program Committee,p.3-14, 2002.

BARRETO, M. C.; OLIVEIRA, B. P. Contribuições da teoria dos registros de representação semiótica para o ensino de matemática. In.: **Didática e a prática de ensino na relação com a escola**. Maria Socorro Lucena Lima... [et al.] (Org)– Fortaleza: CE: EdUECE, 2015. (recurso digital) (Coleção Práticas Educativas). Disponível em <http://www.uece.br/endipe2014/ebooks/livro1/174-%20CONTRIBUI%C3%87%C3%95ES%20DA%20TEORIA%20DOS%20REGISTROS%20DE%20REPRESENTA%C3%87%C3%83O%20SEMI%C3%93TICA%20PARA%20O%20ENSINO%20DE%20MATEM%C3%81TICA.pdf> Acesso em 20 nov 2017.

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental**. 176 f. Tese (Doutorado em Educação) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, Curitiba, PR, 2006.

BASSOI, T. S.; PECCIN, M. S. O cálculo mental e o registro de representação semiótica no EJA. In.: **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. (Org) Célia B; Méricles M. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014, p. 185-208.

BEZERRA, F. J. B.; GOMES, F. E. R., LIMA, C. M. P. Reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de álgebra. In.: **Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**, São Paulo, SP, 2016. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5801_3837_ID.pdf> Acesso em 23 abr 2017.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. In.: **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em <https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwji8LzrxofUAhXHPiYKHVoQBmcQFggmMAE&url=https%3A%2F%2Frevistas.pucsp.br%2Findex.php%2Femp%2Farticle%2Fdownload%2F4198%2F3310&usg=AFQjCNFtGj_lCYdM6PTTR3tpj3wAHAqrXA> Acesso em 24 mai 2017.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995. p. 23-36.
BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica In.: **Perspectivas da Educação Matemática – UFMS** – v. 7, n. 13 – 2014, p. 22-37.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ 5ª a 8ª séries**. Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.

CAMPOS. M. A. **CONSTRUINDO SIGNIFICADOS PARA O X DO PROBLEMA.** 167 f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC. ILHÉUS /BA. 2015.

CANAVARRO, A.P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.** Universidade de Évora e CIEFCUL. Quadrante, Vol. XVI, Nº 2, 2007.

CHALOUH, L.; HERCCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In.: COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995, p. 37-48.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. In.: **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. p. 41-61,2008. Disponível em: < http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2397/2159 > Acesso em: 10 ago. 2016.

CONDILLAC, É. B. 1715-1780 **Condillac, Helvétius, Degérando: os pensadores**.Traduções de Luiz Roberto Monzani et al.- 2 ed.- São Paulo: Abril Cultural, 1979.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: SANTOS. F. M. T.; GRECA, I. M. (Orgs). **A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2006. p. 13-48.

CORDEIRO, C. A. C. **A sala de aula de matemática: o discurso do professor e as implicações pedagógicas**. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) -

Programa de Pós-Graduação em Ciências da Linguagem da Universidade Católica de Pernambuco, Recife, PE, 2008.

CRUZ, P. S. F. **Pensamento algébrico e os significados do sinal de igualdade: o uso da oralidade e da narrativa nas aulas de matemática**. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da PUC/SP. São Paulo, 2016.

CYRINO, M.C.C.T.; OLIVEIRA, H. M. **Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 24, p. 97-126, 2011.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 2ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

DUVAL,R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática**, org. Sílvia D. A. Machado,Campinas,SP:Papirus, p.11-33, 2003.

________. **Semiosis y pensameiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universiade del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía-Grupo de Educación Matemática. 2004.

________. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissagens Intellectuels): (fascículo I) / Raymond Duval. Trad. LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:**entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. vol I, org. Tânia M. M Campos; trad. Marlene A. Dias. São Paulo: PROEM Editora, 2011.

________. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Trad. Méricles T. Moretti. In.: **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1/33628 > Acesso em 30 jun 2017.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M.M.; DIAS, M. A.; BARROS, L. G. X. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como? vol II; org. Tânia M. M. Campos. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2014.

FERREIRA, M. C. C. **Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor**. 183 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG. Belo Horizonte, MG, 2014.

FIGUEIREDO, A. C. **Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática**. 290 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo, 2007.

FIGUEIREDO, S. A.; SALES, A.; SANTOS, J. W. BERTO, L. Conhecimento Profissional Docente: Perspectivas emergentes num diálogo entre formadores. In.: **XIV CIAEM-IACME**, Chiapas, México, 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/171/46> Acesso em 25 abr 2017.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. MIGUEL, A. Álgebra ou geometria para onde pende o pêndulo?. **Proposições**. vol. 3.n.1[7].Março de 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. MIGUEL, A. Contribuição para um repensar: a educação algébrica elementar. **Proposições**. vol. 4. n.1[10]. Março de 1993.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. In: **Boletim de Educação Matemática**. v. 19, n. 26, 2006, p. 1- 22. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro. Disponível em: < http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221866005 > Acesso em: 23 jun. 2016.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. In.: **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, PR, v.2, n.3, jul-dez. 2013.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Tradução Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009. (Coleção Pesquisa Qualitativa/ coordenada por Uwe Flick)

GONÇALVES, I. C. C. O professor e o ensino de álgebra: uma proposta **de intervenção contextualizada na construção de conceitos matemáticos**. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF. Juazeiro/BA. 2013.

GUIMARÃES, J. F. **As concepções da Álgebra articuladas aos conteúdos de matemática no ensino fundamental**. 95 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2013.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In.: COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995. p. 1-8.

JACOMELLI, K. Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental**. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina UFSC, Florianópolis, SC, 2006.

KIERAN, C. FILLOY, E. Y. El aprendizaje del álgebra escolar desde uma perspectiva psicológica. In.: **Enseñanza de Las Ciencias**, 1989, 7 (3), 229-240.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulations. In: LESTER Jr., F.K. (Ed.) **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, p. 707-762, 2007.

KIERAN, C. The core of algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (Eds.). **The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers**, p.21-33, 2004.

KIERAN. C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org); Traduzido por DOMINGUES, H. H. In.: **As ideias da álgebra**. Atual. 1995, p. 104-110.

KUCHEMANN, D. E. Álgebra. In: HART, K. **Children's understanding of mathematics**. London: Murray, 1981, p.102 – 119.

LANGWINSKI, L. G. **O pensamento algébrico e sua contribuição ao ensino da álgebra.** 39 f. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Foz do Iguaçu/PR. 2014.

LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da educação básica. In.: **JIEEM** – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática **IJSME** – International Journal for Studies in Mathematics Education. v.7(3)-2014. p.1- 26. Disponível em < http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/69> Acesso em: 05 mar 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In.: COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org). **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995, p. 144-154.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 2. ed. rev.- Campinas, SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Formação de Professores).

LÜDKE, M., ANDRÉ M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas***.* São Paulo: EPU, 1986.

MATOS, A.; PONTE, J. P. O estudo das relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. In.: **Relime**. vol.11 no.2 México jun. 2008. Disponível em<http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362008000200003&script=sci_arttext&tlng=en#r1> Acesso em 04 mar 2017.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2014.

PARANÁ, Governo do Paraná. Secretaria de Estado da Educação do Paraná/ Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica: matemática**. Paraná, 2008. 82 p.

PASSOS, D. S. **A educação algébrica no 8º ano do ensino fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis/SE: entendimentos dos professores de Matemática**. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática NPGECIMA da Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, SE, 2012..

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** (p. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE, 2006.

PONTE, J. P.; Matos, A.; Silvestre, A. I.; Branco, N.. **Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória**. 2008.

RIBEIRO, A. J**. Equação e seus multissignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 141 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. In.: **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516731320130001000005&script=sci_abstract&tlng=pt> Acesso em 23 abr 2017.

RIBEIRO, A. J. A Álgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores. In.: **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. 2016. Año 11. Número 15. pp 127-136. Costa Rica. Disponível em <http://comea.net.br/uploads/publicacoes/a-algebra-que-se-aprende-e-a-algebra-que-se-ensina-encontros-e-desencontros-na-visao-dos-professores.pdf> Acesso em 14 mar 2017.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** 1ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A. P. V. S. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. In.: **zetetiké** – fe/unicamp & feuff – v. 23, n. 44 – jul/dez-2015. p. 311-327. Disponível em < http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/7494> Acesso em 21 abr 2017.

SANTOS. A. B. C. **Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do primeiro grau.** 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Cientifica - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém/PA, 2014.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. 3 ed. São Paulo. Editora Brasiliense, 1985.

SHULMAN, L. S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. In.: **Cadernoscenpec**, São Paulo, v.4, n.2, p.196-229. dez. 2014. Tradução Leda Beck. Disponível em <http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293/297> Acesso em 23 abr 2017.

SILVA, D. M. T. F. **Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano**. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do ensino básico e secundário) da Universidade da Madeira – UMa. Funchal/ Portugal, 2013.

SILVA, Daniele Peres. **Caracterizações do Pensamento Algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I**. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina, PR. 2013.

SILVA, J. P. **Álgebra na escola básica versus álgebra na licenciatura: onde se encontra o x da questão?.** 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto/MG. 2015.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. 3 ed., 3 v. São Paulo: Moderna, 2015.

SOCAS, M. La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. In.: **Números Revista de Didáticas de las Matemáticas**. Vol 77. Jul 2011, p. 5-34.

SOUZA, D.; SILVA, R. L.; RIBEIRO, A. J. Investigando o que pensam os professores da educação básica sobre a Álgebra. In.: **IV SHIAM** Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. 2013. Disponível em< http://comea.net.br/uploads/publicacoes/investigando-o-que-pensam-os-professores-da-educacao-basica-sobre-algebra.pdf> Acesso em 23 abr 2017.

SCHOEN, H. L. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org); Traduzido por DOMINGUES, H. H. **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995P. 135- 154.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17 ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TREMBLAY, M. A. Prefácio: Reflexões sobre uma trajetória pessoal pela diversidade dos objetos de pesquisa. **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. 2ª ed. Editora Vozes, 2008.

TRIGUEROS, M.; REYES, A.; URSINI, S. QUINTERO, R. Diseño de um cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable em el álgebra. In.: **Investigación y Experiencias Didácticas.** Enseñanza de las ciências, 1996, México. p. 351-363.

TRIGUEROS, M. URSINI, S. A model for the uses of variable in elementary algebra. In.: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings…** Utrecht: Utrecht University, 2001. v. 4, p. 327-334.

___________. Understanding of different uses of variable: a study with starting college students. In.: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21. 1997, Lathi. **Proceedings…** Finland, 1997. v. 4, p. 254-261.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A.P. (Org); Traduzido por DOMINGUES, H. H. **As ideias da álgebra.** São Paulo. Atual, 1995. p. 9-22.
URSINI, S.; ESCARENO, F.; MONTES, D. E.; TRIGUEROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa**. México: Trillas, 2005.

ANEXOS

ANEXO A: Termo de ciência do responsável pelo campo de estudo.

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na

CONEP em 04/08/2000

ANEXO IV

TERMO DE CIÊNCIA DO RESPONSÁVEL PELO CAMPO DE ESTUDO

Título do projeto: As estratégias mobilizadas pelo professor de matemática no ensino dos objetos matemáticos algébricos: variável e incógnita

Pesquisadore(s): Tânia Stella Bassoi (45) 99981-5339 e Luani Griggio Langwinski (45) 999677925.

Local da pesquisa:

Responsável pelo local de realização da pesquisa:

O(s) pesquisador(es) acima identificado(s) está(estão) autorizado(s) a realizar a pesquisa e a coleta dados, os quais serão utilizados exclusivamente para fins científicos, assegurando sua confidencialidade e o anonimato dos sujeitos participantes da pesquisa segundo as normas da Resolução 510/2015 CNS/MS e suas complementares.

(local e data)__________________, _____ de __________________ de 2016.

____

(Nome(s) e assinatura(s) do(s) responsável pelo campo da pesquisa.

ANEXO B: Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP

Aprovado na
CONEP em 04/08/2000

ANEXO I

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Título do Projeto: As estratégias mobilizadas pelo professor de matemática no ensino dos objetos matemáticos algébricos: variável e incógnita

Pesquisador responsável e colaboradores com telefones de contato: Tânia Stella Bassoi (45) 99981-5339 e Luani Griggio Langwinski (45) 999677925.

Convidamos o(a) senhor(a) ______________________________________ a participar de nossa pesquisa que tem como objetivo compreender as formas de abordagens do ensino de álgebra e identificar as abordagens pedagógicas usadas pelo professor para a formalização desse ensino.

Feita a seleção dos sujeitos da pesquisa, a pesquisadora iniciará as observações das aulas no inicio do ano letivo de 2017. Tais aulas serão gravadas e posteriormente transcritas. Após observação dessas aulas, será feita uma entrevista semiestruturada também composta de algumas atividades.

Para isso, solicitamos sua autorização, para a realização das filmagens, bem como a utilização das imagens (as imagens serão das atividades) para fins de pesquisa.

Durante a execução do projeto, destacamos que os riscos associados à sua participação é o constrangimento ou algum tipo de desconforto com a câmera, neste caso a filmagem será interrompida, qualquer dúvida durante a pesquisa, os pesquisadores deverão ser contatados imediatamente. Destacamos que o participante não pagará nem receberá nada para participar da pesquisa e que a participação dos envolvidos no projeto poderá ser cancelada a qualquer momento que julgarem necessário.

Será mantida a confidencialidade do sujeito sendo que todo e qualquer material como as imagens, fotos, vídeos, áudios, documentos e outros meios de comunicação, serão utilizadas somente para fins científicos do projeto de Pesquisa. O TCLE será entregue em duas vias, sendo que uma ficará com o sujeito da pesquisa. O telefone do comitê de ética é 3220-3272, caso o sujeito necessite de maiores informações.

Declaro estar ciente do exposto e desejo participar da pesquisa.

Nome do sujeito de pesquisa:____

Assinatura: ____

Nós, **Tânia Stella Bassoi e Luani Griggio Langwinski**, declaramos que fornecemos todas as informações do projeto ao participante.

________________________, ____ de _____________ de 2017.

ANEXO C: Instrumento de coleta de dados.

NOME:

FORMAÇÃO:

TEMPO QUE LECIONA ÁLGEBRA:

COLÉGIO QUE TRABALHA:

ENTREVISTA SEMI ESTRUTURADA:

1. O que você mais gosta de ensinar em Matemática?
2. O que é importante ensinar sobre Álgebra?
3. O que você leva em conta quando prepara uma aula de Álgebra?
4. Quando você ensina Álgebra, você começa pelo quê?
5. O que você espera do aluno ao final do ensino do 8º ano?
6. Qual o material didático utilizado?
7. Se fosse possível substituir o conteúdo de álgebra na grade curricular, por qual conteúdo o substituiria?
8. Qual conteúdo de Álgebra você mais gosta de ensinar?
9. Qual conteúdo de Álgebra que os alunos têm mais dificuldade?
10. O aluno consegue diferenciar variável de incógnita? Quando ele pergunta qual a diferença, como você responde?
11. Relate suas experiências com o ensino de álgebra:
12. Relate uma experiência sobre o ensino de álgebra que você acha que não deu certo. Por quê?
13. Relate uma experiência que deu certo no ensino de álgebra.
14. Você sabe já ouviu falar no termo “pensamento algébrico”?

ANEXO D: Trabalhos utilizados na revisão de literatura.

Tipo do trabalho	**Autor/ano**	**Título**	**Instituição da publicação**
Tese	BASSOI, 2006	Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental.	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná
Dissertação	JACOMELLI, 2006	A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental.	Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina UFSC
Tese	FIGUEIREDO, /2007	Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática.	Doutorado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Artigo	ARAÚJO, 2008	Ensino de álgebra e formação de professores.	In.: **Educ. Mat. Pesqui**
artigo	BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. A, 2010	Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos.	In.: **Educ. Matem. Pesq**.
Dissertação	PASSOS/2012	A educação algébrica no 8º ano do ensino fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis/SE: entendimentos dos professores de Matemática.	Núcleo de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática NPGECIMA da Universidade Federal do Sergipe
Dissertação	GONÇALVES, 2013	O professor e o ensino de álgebra: uma proposta de intervenção contextualizada na construção de	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Vale do

		conceitos matemáticos.	São Francisco – UNIVASF
Dissertação	GUIMARÃES, 2013	As concepções da Álgebra articuladas aos conteúdos de matemática no ensino fundamental.	Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Dissertação	SILVA, D. P., 2013	Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano.	Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do ensino básico e secundário) da Universidade da Madeira – UMa. Funchal/ Portugal.
Artigo	SOUZA, D.; SILVA, R. L.; RIBEIRO, A. J., 2013.	Investigando o que pensam os professores da educação básica sobre a Álgebra.	In.: **IV SHIAM** Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática.
Tese	FERREIRA, 2014	Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor.	Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG. Belo Horizonte
Artigo	LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J./2014.	Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da educação básica.	In.: **JIEEM** – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática **IJSME**
Dissertação	SANTOS, 2014	Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do	Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Cientifica - Programa de Pós-

		primeiro grau.	Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.
Tese	PANOSSIAN,2014	O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra.	Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.
Artigo	ALMEIDA, M. V. R.; ALVES, K. A.; SILVA, T. H. I.; SILVA, R. L./2015	Uma proposta de análise vertical: investigando o conhecimento matemático para o ensino de professores da educação básica.	In.: EMEM – Encontro Mineiro de Educação Matemática.
Artigo	FIGUEIREDO, S. A.; SALES, A.; SANTOS, J. W. BERTO, L., 2015	Conhecimento Profissional Docente: Perspectivas emergentes num diálogo entre formadores.	In.: XIV CIAEM-IACME
Artigo	RIBEIRO, A. J.; OLIVEIRA, F. A. P. V. S, 2015	Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações.	In.: zetetiké
Dissertação	SILVA, 2015	Álgebra na escola básica versus álgebra na licenciatura: onde se encontra o x da questão?.	Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.
Artigo	BEZERRA, F. J. B.; GOMES, F. E. R., LIMA, C. M. P, 2016.	Reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de álgebra.	In.: Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM
Artigo	RIBEIRO, A. J. 2016	A Álgebra que se aprende e a	In.: Cuadernos de Investigación y

		Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores.	Formación en Educación Matemática.