

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ – UNIOESTE
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

RENATO FRANCISCO MERLI

**A DISTINÇÃO CARTESIANA ENTRE CURVAS
GEOMÉTRICAS E CURVAS MECÂNICAS**

TOLEDO - PR
2016

RENATO FRANCISCO MERLI

A DISTINÇÃO CARTESIANA ENTRE CURVAS
GEOMÉTRICAS E CURVAS MECÂNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Centro de Ciências Humanas e Sociais da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Área de concentração: Filosofia Moderna e Contemporânea.

Linha de pesquisa: Metafísica e Conhecimento

Orientador: Prof. Dr. César Augusto Battisti

TOLEDO - PR
2016

M565d Merli, Renato Francisco

A distinção cartesiana entre curvas geométricas e curvas mecânicas. / Renato Francisco Merli. Toledo /PR, 2016.
130 f.

Orientador: Prof. Dr. César Augusto Battisti.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Filosofia Moderna e Contemporânea. Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

1. Curvas. 2. Geometria. I. Battisti, César Augusto. II. UNIOESTE. III. Título.

CDD: 110

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo

RENATO FRANCISCO MERLI

A DISTINÇÃO CARTESIANA ENTRE CURVAS
GEOMÉTRICAS E CURVAS MECÂNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Filosofia do Centro de Ciências Humanas e Sociais da Universidade Estadual do Oeste do Paraná para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora em 27/10/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Augusto Battisti – (orientador)
UNIOESTE

Prof. Dr. Wilson Antônio Frezzatti Júnior
UNIOESTE

Prof. Dr. Davide Crippa
UNIVERSITÉ PARIS 7

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Lauro e Rosilene, por me mostrarem que o caminho nem sempre é fácil de trilhar, mas que, com dedicação e esforço é possível chegar lá.

Às minhas irmãs, Milena e Rafaela, que apesar dos percalços da vida pelos quais passaram me mostraram que a sua perseverança, coragem e determinação conseguem transpor barreiras.

À minha esposa, Ana Cláudia, sem ela, este trabalho não teria acontecido. Meu exemplo de dedicação incondicional, compreensão, companheirismo e amor. Nos últimos três anos vivenciamos juntos mais dois mestrados (um meu e um dela), nos quais, muitos dias e noites foram “tomados” por eles.

Ao professor Dr. César Augusto Battisti, principalmente pela confiança depositada em mim, pela disposição, dedicação e paciência, pois sabia das minhas limitações conceituais e, mesmo assim, assumiu a orientação e me permitiu conhecer um pouco mais desse belo mundo da filosofia e da história matemática, principalmente dos gregos e de René Descartes. E mais, um dos poucos que conheço que tenha plena leitura e domínio do clássico matemático *Os Elementos*. Um grande mestre, amigo, filósofo e, excelente geômetra matemático.

Aos professores Doutores Wilson Antônio Frezzatti Júnior e Davide Crippa, pelas sugestões e críticas que muito contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Filosofia que muito me ajudaram a compreender esse novo mundo da filosofia pelo qual tenho me aventurado. Agradeço principalmente às conversas com meus amigos Bruno e Thayla. E à professora Ester, pelas grandes contribuições que sua disciplina possibilitou.

Aos colegas de trabalho e alunos da UTFPR, obrigado pela compreensão e pelos incentivos a continuar.

Enfim, muito obrigado a todos que de uma maneira ou de outra ajudaram a tornar este trabalho realidade.

RESUMO

MERLI, Renato Francisco. **A distinção cartesiana entre Curvas Geométricas e Curvas Mecânicas**. 2016. 130 p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, 2016.

Matemática, segundo a maioria das pessoas, é uma ciência exata - mas o que significa ser exata? Ou ainda, se é exata, como são seus objetos? Exatos? Ou melhor, o que é um objeto matemático? Como diferencio um objeto matemático de outro? Que características/propriedades são necessárias para que um objeto seja matemático? Ser exato significa ser inteligível? Essas perguntas, que não serão alvo de discussões neste trabalho, foram as desencadeadoras do presente estudo. A proposta é discutir a recusa cartesiana do critério grego de demarcação entre os dois tipos de curvas e procurar entender o estabelecimento de novos critérios adotados por Descartes. Sendo assim, procura-se ao longo da dissertação buscar entender as razões que levaram o filósofo a discutir e reclassificar as curvas. Para compreender a distinção cartesiana entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas é preciso inicialmente apresentar o contexto em que tais curvas aparecem. Nesse aspecto, inicialmente é realizado um retrospecto histórico das principais curvas estudadas e investigadas pelos gregos, bem como os seus principais geômetras representantes. Nesse contexto, é comentado e discutido o papel fundamental dos problemas clássicos, os quais influenciaram no aparecimento e desenvolvimento de tais curvas. São eles que desencadearam novas investigações e o aparecimento de novas curvas. Na sequência, é realizada uma discussão sobre o ensaio *A Geometria*, contendo um panorama geral sobre a obra, uma caracterização e uma demarcação das curvas nesse âmbito. Em seguida é discutido o entendimento de Descartes para a distinção entre as curvas geométricas e mecânicas. Por fim, são apresentadas as conclusões a respeito da tese aqui defendida. Segundo Bos (2001), o argumento adotado por Descartes para classificar as curvas foi a “análise filosófica da intuição geométrica”, ou seja, a construção e a representação das curvas serviram para criar objetos conhecidos. Por trás de qualquer escolha dos procedimentos para a construção estava a intuição do “conhecido-desconhecido”, ou, em geral, a intuição da certeza na geometria. A visão geral que fincava suas estacas era a de que a geometria foi moldada por uma preocupação filosófica baseada na certeza das operações geométricas, em particular das construções, ou seja, a matemática cartesiana era (e ainda é) a matemática de um filósofo e, nesse contexto, essa matemática não se pode postular sem argumentos. Nesse aspecto, fica compreendido que Descartes teve uma ideia de racionalidade baseada na continuidade. Continuidade essa que pressupõe um movimento contínuo de intuições que podem se reduzir em um todo ou em vários movimentos, desde que contínuos e intelegíveis. Por exemplo, em uma teia de aranha, há um fio principal que se tocado, movimentando todos os outros fios. Assim também o é o movimento contínuo intuitivo pressuposto por Descartes para o entendimento de uma curva geométrica. A continuidade da geração de um objeto geométrico corresponde à continuidade do pensamento matemático e, portanto, de compreensão desse objeto de forma contínua.

PALAVRAS-CHAVE: Curvas Geométricas; Curvas Mecânicas; Distinção.

ABSTRACT

MERLI, Renato Francisco. **The Cartesian distinction between Geometric curves and curves Mechanics**. 2016. 130 p. Dissertation (Master's Degree in Philosophy) - State University of Western Paraná, Toledo, 2016.

Mathematics, according to most people, is an exact science - but what it means to be exact? Or, if it is accurate, as are their objects? Exactly? Or rather, what is a mathematical object? How to differentiate a mathematical object to another? What characteristics / properties are necessary for an object to be mathematical? Be accurate means to be intelligible? These questions, which are not the subject of discussions in this work were the triggering of this study. The proposal is to discuss the Cartesian refusal of the Greek criterion of demarcation between the two types of curves and try to understand the establishment of new criteria adopted by Descartes. Thus, looking along the dissertation seek to understand the reasons that led the philosopher to discuss and reclassify the curves. To understand the Cartesian distinction between geometric curves and mechanical curves we must first present the context in which these curves appear. In this aspect, it is initially held a historical retrospect of the main curves studied and investigated by the Greeks, as well as its main geometers representatives. In this context, it is reviewed and discussed the key role of the classic problems, which influenced the appearance and desenvolvimento of such curves. Are they triggered new investigations and the appearance of new curves. Following a discussion of the Geometry test is carried out, containing an overview of the work, a characterization and demarcation of curves in this area. Next is discussed the understanding of Descartes to distinguish between geometrical and mechanical curves. Finally, conclusions are drawn about the view expressed here. According to Bos (2001), the argument adopted by Descartes to classify the curves was the "philosophical analysis of geométrica intuition", namely the construction and representation of curves served to create objects known. Behind any choice of procedures for the construction was the intuition of "known-unknown", or, in general, the certainty of intuition in geometry. The overview that fincava her stakes was that the geometry has been shaped by a philosophical concern based on the certainty of geometrical operations, particularly buildings, ie the Cartesian mathematics was (and still is) the mathematics of a philosopher, in this context, that mathematics can not posit no arguments. In this respect, it is understood that Descartes had an idea of rationality based on continuity. Continuing this presupposes that a continuous movement of insights that can be reduced in a whole or in several movements, since continuous and intelligible. For example, in a spider's web, there is a main wire which is touched, it moves all other wires. So is the intuitive continuous movement presupposed by Descartes to the understanding of a geometric curve. The continuity of the generation of a geometric object corresponds to the continuity of mathematical thinking and therefore of understanding of the object continuously.

KEYWORDS: Geometric curves; Mechanical curves; Distinction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Papiro de Rhind ou Ahmes	22
Figura 2 - Tábua de Plimpton	23
Figura 3 - Duplicação do Cubo	28
Figura 4 - Mesolábio de Eratóstenes	30
Figura 5 - Solução de Arquitas	32
Figura 6 - Solução de Eudoxo	33
Figura 7 - Solução de Menaecmus	34
Figura 8 - Esquadro de Platão.....	35
Figura 9 – Modelo de um Mesolábio de Eratóstenes	35
Figura 10 - Aparelho de Nicomedes.....	36
Figura 11 - Solução de Nicomedes.....	37
Figura 12 - Solução de Apolônio, Herão e Filão.....	38
Figura 13 - Solução de Diócles.....	38
Figura 14 - Lúnulas de Hipócrates de Quios	43
Figura 15 - Método de Bryson.....	45
Figura 16 - Exemplo de Ângulo Tripartido	47
Figura 17 - Trisseção do Ângulo por Pappus	48
Figura 18 - <i>Nêusis</i> - Ângulo	49
Figura 19 - <i>Nêusis</i> 1.....	50
Figura 20 - <i>Nêusis</i> 2.....	50
Figura 21 - <i>Nêusis</i> 3.....	51
Figura 22 - <i>Nêusis</i> 4.....	51
Figura 23 - <i>Nêusis</i> 5.....	52
Figura 24 - <i>Nêusis</i> 6.....	52
Figura 25 - <i>Nêusis</i> 7.....	53
Figura 26 - <i>Nêusis</i> 8.....	53
Figura 27 - Mapa Conceitual dos Problemas Clássicos	55
Figura 28 - Cone de Revolução	57
Figura 29 - Cônicas a partir do Cone.....	59
Figura 30 - Parábola	61
Figura 31 – Construção de uma Parábola.....	61
Figura 32 - Parabológrafo.....	62
Figura 33 - Hipérbole	63
Figura 34 - Construção de uma Hipérbole com Régua e Compasso	63
Figura 35 - Construção de uma Hipérbole por Movimento Contínuo.....	64
Figura 36 - Construção de uma Hipérbole por um Instrumento.....	64
Figura 37 - Cônicas obtidas do Dispositivo de Strong	65
Figura 38 - Elipse	66
Figura 39 - Construção de uma Elipse por Régua e Compasso.....	67
Figura 40 - Construção da Elipse por Movimento Contínuo.....	67
Figura 41 - Elipsógrafo.....	68
Figura 42 - Exemplo da Duplicação do Cubo - Menaecmus.....	69

Figura 43- Proposição 24 - Arquimedes.....	71
Figura 44 - Quadratura do Círculo - Arquimedes.....	72
Figura 45 - Espiral de Arquimedes.....	73
Figura 46 - Quadratriz	73
Figura 47 - Aparelho de Nicomedes.....	76
Figura 48 - Concóide / Conchóide de Nicomedes.....	77
Figura 49 - Cissóide.....	77
Figura 50 - Solução de Pappus para Duplicação do Cubo	82
Figura 51 - Multiplicação	92
Figura 52 - Raiz Quadrada.....	93
Figura 53 - Triângulos Inscritos no Círculo	94
Figura 54 - Semelhança de Triângulos	95
Figura 55 - Problema 1 - Van Schooten	101
Figura 56 - Exemplo 1 de Descartes - Livro I.....	104
Figura 57 - Exemplo 2 de Descartes - Livro I.....	105
Figura 58 - Exemplo 2 de Descartes - Livro I - Com Descrição	106
Figura 59 - Interseção entre Parábola e Hipérbole	111
Figura 60 - Mesolábio de Descartes	121

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	RETROSPECTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DAS CURVAS.....	21
2.1	Problemas	28
2.1.1	<i>Duplicação do Cubo</i>	28
2.1.2	<i>Quadratura do Círculo</i>	40
2.1.3	<i>Trisseção do Ângulo</i>	46
2.2	Curvas.....	56
2.2.1	<i>Cônicas</i>	56
2.2.2	<i>Espiral.....</i>	70
2.2.3	<i>Quadratriz.....</i>	73
2.2.4	<i>Concóide (Conchóide).....</i>	75
2.2.5	<i>Cissóide.....</i>	77
2.2	Algumas Considerações.....	78
3	CONTEXTUALIZANDO E DISCUTINDO A PROBLEMÁTICA.....	87
3.1	O Começo	87
3.2	Estrutura da obra <i>A Geometria</i>	90
3.3	Descartes e as Curvas Geométricas e Mecânicas.....	118
4	CONSIDERAÇÕES “FINAIS”	122
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127

1 INTRODUÇÃO

Matemática, segundo a maioria das pessoas, é uma ciência exata - mas o que significa ser exata? Ou ainda, se é exata, como são seus objetos? Exatos? Ou melhor, o que é um objeto matemático? Como diferencio um objeto matemático de outro? Que características/propriedades são necessárias para que um objeto seja matemático? Ser exato significa ser inteligível? Essas perguntas, que não serão alvo de discussões neste trabalho, foram as desencadeadoras do presente estudo.

Ao longo da história os matemáticos têm levantado repetidamente a questão da exatidão e da inteligibilidade, e a tem reformulado a fim de cumprir com as mais altas e apropriadas normas de entendimento. Ao longo dos anos, vários esforços têm sido bem sucedidos. Explorando os meandros da incomensurabilidade e do infinito, matemáticos gregos criaram teorias cujo rigor ainda nos impressiona. A formalização da análise no século XIX forneceu novos padrões de prova, o que levou a uma compreensão mais profunda dos números e das funções, assim como a novos métodos analíticos poderosos.

O período moderno, ao qual Descartes participou avidamente, testemunhou um esforço para esclarecer e instituir o conceito de exatidão, ou melhor, de inteligibilidade dos objetos matemáticos. Este esforço mobilizou muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII, interessados, num contexto principalmente geométrico, em responder o que significava para um objeto matemático ser conhecido/dado e o que isso significava para um problema ser resolvido e ter encontrado a sua solução. A geometria clássica grega forneceu, mesmo que parcialmente, as respostas a estas perguntas. As figuras geométricas eram conhecidas/dadas se pudessem ser construídas a partir de elementos que fossem considerados dados desde o início; um problema semelhante foi considerado resolvido se a configuração necessária fosse geometricamente construída.

Durante o renascimento das práticas dos geômetras gregos, muitos historiadores aceitaram as principais respostas, as ditas clássicas, contudo, muitos também se viram confrontados com perguntas sobre a falta de material disponível que explicasse satisfatoriamente as construções matemáticas. Tal confronto em especial diz respeito à aceitabilidade dos meios de construção, ou seja, o que significa aceitar uma construção inteligível? O que é necessário para que a solução seja conhecida? Como verificamos, a

régua e o compasso¹, ou melhor, a linha reta e os círculos², foram meios aceitáveis de construção, mas os geômetras clássicos, por experiência, perceberam que, apenas por esses meios, não resolveriam determinados problemas³. Diante dessa inquietude, novos meios de construção foram adicionados, para além do uso das linhas retas e dos círculos, o que gerou uma insatisfação em muitos geômetras, a ponto de avaliarem que tais construções não deveriam ser aceitas. O problema que se instaura é: por que motivos eles não aceitaram esses tipos de construção? Que critérios foram estabelecidos para separar os meios aceitáveis dos não aceitáveis?

Essas perguntas, estabelecidas já no período grego principalmente por Pappus, não deixaram que a geometria grega avançasse; contudo, foi no período moderno que essa questão se tornou mais evidente. Por que razão? Em razão do aparecimento da álgebra cartesiana⁴ e a sua preocupação em tentar resolver todos os problemas geométricos insolúveis até então. Essa álgebra foi uma valiosíssima ferramenta para resolver os problemas geométricos que até então estavam sem resposta e permitiu que fossem resolvidos de forma mais simples. Outra razão para reconsiderar o conceito de construção está ligada aos objetos geométricos especiais, as curvas. As curvas, de acordo com Bos (2001), desempenham três funções principais: são objetos de estudo, são meios de construção e são soluções para problemas. No primeiro caso, elas

¹ Destaco aqui que a régua a que nos referimos é a dos antigos geômetras gregos, ou seja, uma régua não graduada.

² Ao longo do texto procurarei utilizar os termos linhas retas e círculos ao invés de régua e compasso, pois, como apontam alguns historiadores da matemática (BOS, 2001; ROQUE, 2012), Euclides não utiliza os termos régua e compasso, apesar de estar implícito que todas as construções utilizaram apenas esses instrumentos. Para maiores discussões, o texto *O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra*, de Gert Schubring e Tatiana Roque, fornece outros detalhes.

³ Os problemas a que me refiro são os ditos clássicos: da duplicação do cubo, da quadratura do círculo e da trisseção do ângulo. No próximo capítulo nos atermos com maior profundidade a eles.

⁴ Vale notar que as razões pelas quais Descartes se preocupou com a demarcação das curvas que eram aceitáveis e das que não eram aceitáveis na geometria está situada em meio ao surgimento de sua álgebra; na medida em que se deparava com um empecilho na resolução de um problema geométrico e buscava relacioná-lo à sua álgebra emergente, foi necessário que ele reclassificasse e situasse as curvas de modo que as soluções geométricas e algébricas fossem conectadas. Por exemplo, ao conseguir encontrar uma equação que representasse uma concóide, ele precisou colocar essa curva numa classificação que não fosse a mesma da quadratriz, pois essa última não possuía, até então, uma equação que a representasse. Nesse sentido, na medida em que ele ia desenvolvendo sua álgebra, concomitantemente a seus estudos sobre problemas geométricos, foi necessário que ele reclassificasse as curvas e os problemas. Descartes (2001, p. 53, nota 33 do tradutor) coloca em dúvida a ordem epistemológica da solução cartesiana para o problema das cinco linhas de Pappus por meio da interseção da parábola com a linha reta. Normalmente os historiadores acreditam que Descartes desenvolveu a álgebra como resultado de seus estudos geométricos; o autor coloca um ponto de interrogação sobre esse aspecto, dada a complexidade dessa solução geométrica, sugerindo que, para esse caso, talvez, Descartes tenha encontrado primeiro a equação da reta e da parábola, para depois interpretar que a interseção entre reta e parábola era a solução do problema proposto por Pappus para cinco linhas. Entrarei em mais detalhes no capítulo que se refere a essa discussão em *A Geometria*.

normalmente são conhecidas/dadas ou construídas de antemão, para que então os matemáticos investiguem suas propriedades particulares. Nos outros dois casos, no entanto, elas não são necessariamente conhecidas de antemão, mas após sua construção. Novamente, dado o surgimento da álgebra e a sua vinculação com a resolução dos problemas geométricos, a questão de quando uma curva é suficientemente conhecida ou aceitável para uma construção ficou em voga.

A solução de um problema, por vezes, era uma curva a qual os matemáticos já estavam familiarizados. Nesse caso, apenas determinar os parâmetros da curva e a sua posição no plano resolviam o problema. A questão se tornava mais séria, entretanto, quando a curva solução para um problema também era desconhecida. Nesses casos, encontrar um método de como tornar essas curvas desconhecidas conhecidas também entrou em pauta nas investigações dos matemáticos. Os desenvolvimentos conceituais e as técnicas relativas à construção geométrica e sua representação no início do período moderno levaram os matemáticos da época a adotarem métodos algébricos de análise da geometria e, posteriormente, à sua emancipação do contexto geométrico.

Nesse contexto, a proposta de estudar *A Geometria*, de René Descartes, se mostrou estimulante, tendo o pensador francês lidado com objetos matemáticos ao longo de todo este terceiro ensaio do método (os outros dois sendo *A Dióptrica* e *Os Meteoros*), *A*, todos publicados juntamente com sua obra magna *Discurso do Método* (1637). O último ensaio (matemático, como pode ser verificado pelo título) pode fornecer pistas para responder, ou ao menos clarificar nossa razão, àquelas questões levantadas. De que modo? Neste ensaio Descartes discute essencialmente o tema da resolução de problemas geométricos por meio da construção de curvas matemáticas. Essas curvas, segundo o filósofo e baseando-se na classificação feita pelos antigos geômetras gregos, podem ser classificadas em dois tipos: geométricas e mecânicas. Ao distinguir tais curvas em dois tipos, Descartes está entendendo que há dois objetos matemáticos distintos, as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Essa distinção levantada por ele difere da classificação dada pelos gregos. Por quê? O que faz com que Descartes apresente uma classificação diferente? Será que o objeto matemático curva geométrica é diferente para Descartes e para os gregos? Os critérios adotados por ele são diferentes dos gregos? De que modo?

Neste sentido, a proposta do presente trabalho é discutir a recusa cartesiana do critério grego de demarcação entre os dois tipos de curvas e procurar entender o

estabelecimento de novos critérios adotados por Descartes. Assim, como também Bos (2001) o fez, acredito que a concepção e as práticas de construção dos geômetras, desde a Grécia até o período moderno, tornará possível entender esse processo de demarcação.

Sendo assim, dado o problema, procuro ao longo da dissertação estabelecer um diálogo com o leitor no intuito de buscar entender as razões que levaram o filósofo a discutir e reclassificar as curvas. Vale salientar que minha pesquisa tem razões internas e externas para ser realizada. As externas dizem respeito à disponibilidade apenas recente da tradução do ensaio *A Geometria* para o português⁵, e à existência de poucas discussões a nível nacional sobre o tema, além de haver poucas articulações entre os conhecimentos matemático e filosófico nela envolvidos⁶. Embora, atualmente, as preocupações sobre a aceitabilidade de construções geométricas e representações não façam mais parte da consciência e prática matemática, elas foram centrais no início do período moderno. O desaparecimento das preocupações é um processo intrigante, e compreendê-lo é, pois, um objetivo válido do estudo histórico que pretendo realizar. Além disso, o estudo dessas questões, de construção e de representação, me parece importante, porque contribui de diferentes maneiras para a nossa (filósofos e matemáticos) compreensão do desenvolvimento da matemática. No que se refere às razões internas, e aí talvez resida a importância maior do trabalho, pretende-se investigar a fundo essa distinção das curvas, primeiramente porque parece que o filósofo não deixa claro as razões para tal distinção, em segundo lugar porque os comentadores não se preocuparam ou não deram a devida atenção para tal questão, e em terceiro lugar porque, ao conseguir demarcar a distinção entre as curvas – e aí, talvez esteja a importância de entender *quais os procedimentos adequados na geometria*

⁵ A tradução recente é portuguesa e não brasileira. Trata-se da versão de Emídio César de Queiroz Lopes, publicada em 2001 pela Editora Prometeu, em Portugal. Uma tradução brasileira de César Augusto Battisti se encontra no prelo e deverá estar disponível em breve.

⁶ A dificuldade de articular os conhecimentos matemáticos e filosóficos aparece desde os textos dos antigos geômetras gregos, como aponta Molland (1976, p. 23-24, tradução nossa): “as declarações explícitas que foram feitas muitas vezes vieram daqueles cujo principal interesse era mais filosófico do que matemático, e não devemos ficar surpresos ao encontrar diferenças entre o que os matemáticos realmente fizeram e o que os filósofos disseram ser adequado a essa disciplina. Este fato tem sido por vezes obscurecido na historiografia da matemática grega, e sua negligência é auxiliada pelo fato de que os primeiros livros dos *Elementos* de Euclides confirmam mais a certeza filosófica do que fazem em seus livros subsequentes, ou em outras obras de caráter geométrico. É como se os cuidados fossem tomados para mostrar como as partes mais elementares e básicas de geometria pudessem ser feitas de modo a ser filosoficamente aceitável, deixando uma maior liberdade para o matemático seguir suas próprias intuições nos trechos mais elevados”. Essa discussão filosófica-matemática fez parte do ideário grego e trouxe com ela discussões em torno de que construções eram adequadas ou não para a geometria, um dos pontos de discussão desse texto.

para a construção delas –, isso nos leve a determinar as fronteiras entre o que é matemático e o que não é, e, como consequência, nos leva a delimitar também a fronteira do que é ciência e do que não é, culminando, enfim, com o propósito de Descartes, compreender o que é dominado pela razão, o conhecimento verdadeiro, se atentando para aquilo que lhe escapa, definindo, portanto, o que é racional e o que não é.

Assim, resolver essa problemática envolve uma série de etapas que pretendo discuti-las. Para compreender a distinção cartesiana entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas é preciso inicialmente apresentar o contexto em que tais curvas aparecem. Nesse aspecto, realizo inicialmente um retrospecto histórico das principais curvas estudadas e investigadas pelos gregos, bem como os seus principais geômetras representantes. É claro que, para isso, não posso deixar de comentar e discutir o papel fundamental dos problemas clássicos, os quais influenciaram no aparecimento e desenvolvimento de tais curvas. São eles que desencadearam novas investigações e o aparecimento de novas curvas. No mesmo capítulo apresento as construções das curvas e ao final realizo algumas discussões sob essa perspectiva.

No capítulo seguinte, trato essencialmente da problemática apresentada por Descartes em seu ensaio *A Geometria*. Nesse capítulo realizo um panorama geral sobre a obra, caracterizo e demarco as curvas nesse âmbito. Num próximo capítulo, após a demarcação da problemática e apresentação das curvas, discuto o entendimento de Descartes para a distinção entre as curvas geométricas e mecânicas. Por fim, apresento minhas conclusões a respeito da tese aqui defendida.

2 RETROSPECTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DAS CURVAS

As primeiras atividades matemáticas aparecem em resquícios arqueológicos datados de milhares de anos atrás. Tais atividades envolviam operações numéricas, contagem, padrões e formas geométricas. Mesmo com tais resquícios, ainda assim, é difícil de pontuar sua origem já que tais atividades são “mais antigas que a arte de escrever” (BOYER, 2012, p. 26). No que compete ao trato das relações espaciais e geométricas, há escritos de que no período neolítico o homem possuía preocupação em medição de terras e lazer, fatores que, segundo os historiadores, foram primordiais para o aparecimento da geometria ou da preocupação com as formas. O que Boyer (2012, p. 27) sugere, como uma das hipóteses, é que a “[...] preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações espaciais pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas [...]”. Outra hipótese é que “a geometria, como a contagem, tivesse origem na prática de rituais primitivos” (BOYER, 2012, p. 27), fato esse que não foi estabelecido até o momento.

O que se tem de fato é que um dos primeiros registros escritos da história da matemática é o Papiro de Rhind ou de Ahmes (Figura 1), escrito por volta de 2000 a 1800 a.C. Nesse papiro foram encontrados os primeiros problemas geométricos, como, por exemplo, o problema 51; ele mostra que “a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura” (BOYER, 2012, p. 33). Esse problema dá a ideia do aparecimento de uma teoria, mesmo que rudimentar, de congruência e de demonstração, já que Ahmes justifica o método de resolução por meio de equivalência entre figuras geométricas⁷. Cabe lembrar que, apesar de tal demonstração – eu diria: mostraçãõ, pois se trata de mostrar um caso particular de cálculo, – a geometria presente nesse papiro não estabelecia de forma clara a distinção entre as relações exatas e as que eram apenas aproximativas (BOYER, 2012, p. 33).

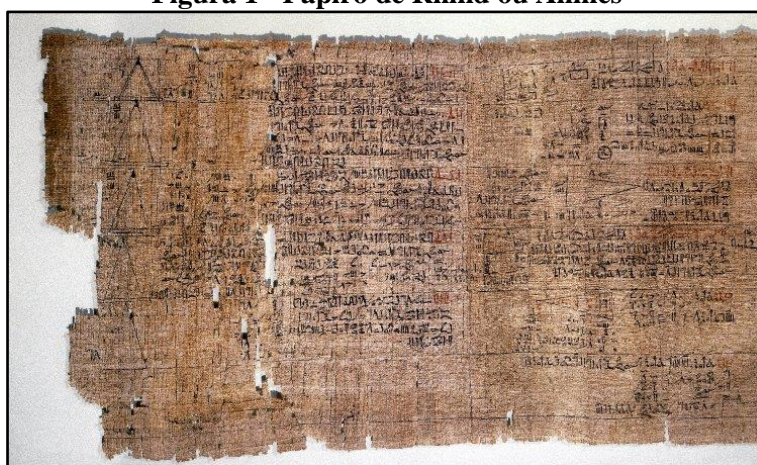
Nos problemas 48 e 50 aparecem as primeiras ideias de círculo e o cálculo de

⁷ O fato de existir um texto/papiro antigo contendo problemas sugere que, desde os tempos mais remotos, o que tem levado o desenvolvimento da matemática ao seu estado atual seja a resolução de problemas, ou seja, a capacidade de resolvê-los. Tal preocupação aparece, a meu ver, como uma necessidade básica para o aparecimento de novas teorias e novos objetos matemáticos. Isso fica claro, por exemplo, com a vasta gama de curvas que surgiram para dar conta dos problemas clássicos da geometria grega, como veremos mais adiante.

sua área. No problema 50, assume-se que “a área de um campo circular com diâmetro de 9 unidades é a mesma de um quadrado com lado de 8 unidades” (BOYER, 2012, p. 34). Por sua vez, no problema 48, o “escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado 9 unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área de 4 unidades e meia”. Nesses problemas também é possível perceber que a aproximação que faziam para o π era muito boa, ou

seja, $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Figura 1 - Papiro de Rhind ou Ahmes



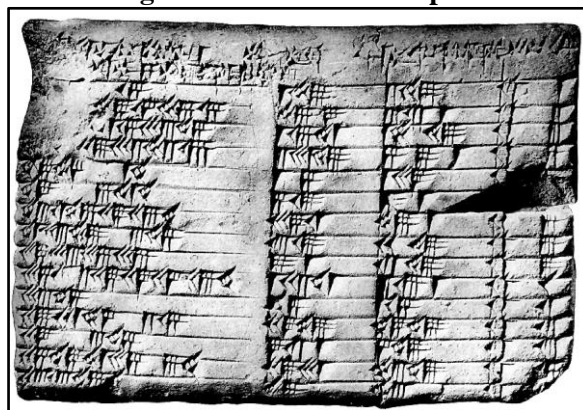
Fonte: Museu Britânico⁸

Outros documentos como o de Edfu, datado de 1500 anos depois do Papiro de Rhind, o Papiro de Moscou, datado de 1890 a.C., e o Papiro de Kahun, também de 1890 a.C., são exemplos dos primeiros registros de atividades matemáticas.

Posteriormente, na Mesopotâmia, outros textos denotaram a importância das atividades matemáticas na civilização. Nesse período, há discussões sobre a relação entre a aritmética e os problemas geométricos aplicados. Os fenícios desenvolveram tábuas cuneiformes com resultados de equações quádricas e cúbicas que resolviam problemas ligados ao volume e à área. Além disso, há a tábua de Plimpton 322 (Figura 2), com diversas interpretações para seus escritos (BOYER, 2012, 43-49).

⁸ **Museu Britânico.** Disponível em: <<http://www.britishmuseum.org/>>. Acesso em: 10 jul. 2015.

Figura 2 - Tábua de Plimpton



Fonte: Boyer (2012, p. 48)

Em seguida, na linha histórica, aparecem as contribuições gregas para a matemática, um dos enfoques desse texto. No campo da geometria, os gregos - grandes geômetras - criaram uma das obras de maior alcance de toda a história, *Os Elementos*, livro que organizou e sistematizou todo o conhecimento elementar da geometria grega daquela época, ou seja, até o século III a.C. e é atribuído ao matemático Euclides. Há quem diga que o texto apenas compilou os resultados existentes produzidos por outros, contudo, outros defendem que esses trabalhos, já produzidos, tenham sido apresentados de um modo novo, o que revelaria um pensamento grego original, baseado na lógica e na dedução. Essa originalidade seria uma passagem para o pensamento dedutivo, dada a necessidade de fundar a geometria prática nascentes em bases mais sólidas, já que, até então, algumas inconsistências apareciam, como, por exemplo, o problema da incomensurabilidade⁹ de medidas. Outro aspecto relatado por alguns historiadores matemáticos (BOYER, 2012; HEATH, 1981; SMITH, 1951) é que *Os Elementos* surgem como uma resposta às exigências de alguns filósofos gregos de delimitar uma matemática abstrata e universal que seguisse certos padrões de rigor, como por exemplo, o uso apenas de retas e círculos nas construções. Nesse aspecto, o livro apresenta um método axiomático-dedutivo que contemplaria o cunho filosófico dado por Platão. Sob esse prisma, aparecem dois mitos: “a necessidade de expor a matemática com base no método axiomático-dedutivo e a restrição das construções

⁹ Boyer (2012, p. 70) comenta que era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de *arithmos* ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. Os Diálogos de Platão, especificamente o TEETETO, mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que, na própria geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo propriedades básicas simples. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis não importa quão pequena se escolha a unidade de medida.

geométricas às que podem ser realizadas com régua e compasso. O primeiro teve origem, principalmente, com Proclus; e o segundo, com Pappus” (ROQUE, 2012, p. 150).

No livro de Euclides, aparecem resultados de diferentes matemáticos (sem menção dos nomes no livro) em diferentes aspectos, mas organizados por um único indivíduo. Do ponto de vista histórico, podemos nos perguntar: até que ponto o padrão que esse livro exprime era realmente preponderante na matemática que se desenvolveu antes e depois de Euclides? O fato é que as construções propostas nessa obra são efetuadas por meio apenas de retas e círculos. Mas seria essa restrição decorrente de uma proibição de outros métodos de construção? Isso teria afetado toda a geometria depois de Euclides? Dizer que a restrição às retas e aos círculos vale para toda a geometria grega significa afirmar que o conjunto das práticas gregas segue um padrão de rigor e que tal padrão foi estabelecido por Euclides. Mas, nesse caso, por que um matemático, famoso como Arquimedes, que viveu logo depois de Euclides, não seguiu tal regra e não empregou métodos de construção euclidianos?¹⁰ (ROQUE, 2012, p. 152).

Nas últimas décadas, diversos historiadores têm analisado as origens das crenças sobre as motivações de Euclides. Na verdade, relatos diretos sobre a matemática grega nos períodos pré-euclidiano e euclidiano são muito escassos. Das fontes utilizadas, as mais antigas datam de uma época bem recente da de Euclides, caso das obras de Proclus e Pappus. Além disso, comentários do primeiro sobre *Os Elementos* tinham clara motivação de defender certos princípios do pensamento platônico¹¹ (ROQUE, 2012, p.

¹⁰ Como veremos ao longo do texto, Arquimedes não se limitou à utilização de régua e compasso, mas utilizou diferentes meios para resolver os problemas da época. Sendo ele um dos expoentes da matemática grega e não se limitando aos procedimentos dos *Elementos*, coloco em dúvida se essa obra pode ser considerada como parâmetro teórico-metodológico do que era aceito dentro de todo o pensamento matemático grego. Não coloco em xeque a importância da obra e suas consequências, mas questiono as colocações de alguns historiadores, filósofos e matemáticos que atribuem a ela a determinação do teor de **todo** o pensamento matemático grego. O livro de Tatiana Roque “*História da Matemática – uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*” traz algumas discussões acerca desse pensamento.

¹¹ Nos Comentários de Proclus ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides havia vários comentários sobre o estatuto especial das linhas retas e dos círculos na geometria. Proclus invoca, sobretudo, a autoridade de Platão. Assim, em uma passagem no início do livro, ele escreveu: “Platão constrói a alma de todas as formas matemáticas, divide-a de acordo com os números, a liga juntamente com as proporções e as relações harmoniosas, deposita seus princípios primordiais nas figuras, na linha reta e no círculo, e define os círculos em seu movimento inteligentemente harmonioso. Toda a matemática está, portanto, presente na alma do primeiro. Antes que os números tenham se autogerados, antes que as figuras tenham se tornado visíveis, antes que a harmonia das partes tenha se harmonizado, antes que os corpos entrassem num movimento circular, os círculos invisíveis já estavam construídos, e a alma estava repleto dele” (BOS, 2001, p. 24, tradução nossa). Proclus ainda continua: “Platão assume que as duas espécies mais simples e fundamentais são a linha reta e o círculo, e faz com que todos os outros tipos de

152).

Proclus afirma, por exemplo, que os teoremas são superiores aos problemas. Estes diferem daqueles porque lidam com construções, ao passo que os teoremas procuram demonstrar propriedades inerentes aos seres geométricos. Há certo ar de desprezo por parte de Proclus para com aqueles que se ocuparam com problemas ao invés dos teoremas. Segundo ele, os teoremas enunciam a parte ideal desses seres que pertencem ao mundo das ideias, e os problemas constituem apenas um modo pedagógico de se chegar aos teoremas. Se dissermos que os ângulos internos de um triângulo são iguais a dois ângulos retos, teremos um teorema, pois essa propriedade vale para todo triângulo (desde que fiquemos no universo da geometria euclidiana) (ROQUE, 2012, p. 152).

Todo enunciado universal sobre um objeto geométrico é um teorema geométrico. Os problemas são um primeiro passo para passarmos do mundo prático à geometria teórica. Para Proclus, seguidor fiel de Platão, quando a geometria lida com o mundo prático, ela opera por problemas e só ascende ao saber superior por meio de teoremas e proposições. Grande parte da crença que temos na motivação platônica de Euclides é decorrente dos comentários de Proclus.

A *Coleção Matemática* (1982a, 1982b) de Pappus é uma das principais fontes de conhecimento dos trabalhos matemáticos gregos cujos registros originais se perderam. Pappus classificava os problemas geométricos do seguinte modo:

os antigos consideravam três classes de problemas geométricos, chamados *planos*, *sólidos* e *lineares*. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e círculos são chamados *problemas planos*, uma vez que as retas e curvas que os resolvem têm origem no plano. Mas problemas cujas soluções são obtidas por meio de uma ou mais seções cônicas são denominados *problemas sólidos*, já que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada *linear* porque outras *linhas*, envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para a sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, a conchóide, a cissóide, todas com muitas propriedades importantes (PAPPUS, 1982a, p. 38-39, tradução nossa¹²).

A resolução de problemas geométricos envolve sempre uma construção, e o

mistura de ambos sejam chamados de espiral, sendo considerados planos ou sólidos, e as linhas curvas que são produzidas pela seção de sólidos” (BOS, 2001, p. 25, tradução nossa).

¹² Sempre que possível irei optar por versões brasileiras dos textos; contudo, se a versão tiver uma tradução duvidosa ou não haja uma tradução para as obras, as traduções serão de minha responsabilidade.

critério usado nessa classificação baseia-se nos tipos de linhas necessárias para efetuá-la. Além de régua e compasso, são listados métodos que usam cônicas e curvas mais complexas, como a quadratriz, a cissóide, a espiral de Arquimedes e a concóide/conchóide de Nicomedes, conhecidas antes do fim do século III a. C. As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos, para cuja solução, se necessário, se utilizavam de outros métodos. Recorrendo a cônicas e curvas ditas mecânicas, eles conseguiram *resolver*¹³ alguns dos problemas clássicos da geometria grega, como a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a triseção do ângulo (ROQUE, 2012, p. 152).

Isso mostra que a limitação a construções com retas e círculos verificada nos *Elementos* de Euclides não pode ser estendida a toda geometria grega e suas razões precisam ser compreendidas. A explicação de que se tratava de uma restrição imposta pela filosofia platônica já não é satisfatória. A visão de que os matemáticos gregos se aferravam aos fundamentos e aos padrões rígidos tem origem na história da matemática desenvolvida na virada dos séculos XIX e XX, período marcado por pesquisas sobre o rigor da matemática dessa época. Hilbert, por exemplo, tinha como objetivo fundamentar a geometria euclidiana no mais alto rigor atentando-se para as suas convicções. Mas será que os matemáticos da Antiguidade eram tão preocupados assim com questões de fundamento quanto os do final do século XIX?

As concepções formalistas sobre as motivações da matemática grega, mesmo que parcialmente verdadeiras, não devem, no entanto, desviar a atenção de um ponto primordial: a geometria tem suas bases em uma atividade essencialmente prática de resolver problemas. Veremos que problemas de construção envolvendo métodos diversificados atravessaram a época da publicação dos *Elementos*. A pergunta que surge é: por que restringir as construções ao uso apenas de régua e compasso? Uma primeira hipótese (e não única): cunho pedagógico, ou seja, transmitir os principais resultados da geometria da época de uma forma simples e compreensível; daí a demonstração dos vários resultados, a explicação de todos os pressupostos usados nas demonstrações e a preferência pelo encadeamento lógico, argumentos necessários para convencer o leitor de suas validades. Uma segunda hipótese, dividida em outras três subjacentes: cunho epistemológico, ou seja, 1) conhecer um objeto (também como meio) é determinar o seu

¹³ Cabe aqui ressaltar que *resolver* o problema é encontrar uma solução para ele sem a preocupação de utilizar como critério de construtibilidade aqueles dados pelos *Elementos*: o uso de linhas retas e círculo, ou de forma habitual, o uso da régua e do compasso.

lugar no interior da matemática (ou, de uma forma geral, da ciência), logo, é preciso determinar até *onde vão* as linhas retas e o círculo; 2) exigências lógicas de hierarquização: esgotar o nível mais elementar para passar ao outro (uma exigência também presente em Descartes¹⁴); 3) dedutibilidade, a partir do que é mais simples.

Um fato interessante de ser colocado em evidência é que Arquimedes não foi sucessor de Euclides na proposta dos limites impostos pelo livro *Os Elementos*¹⁵, fato curioso, pois Arquimedes nasceu na época em que Euclides¹⁶ morreu. Era de se esperar que Arquimedes continuasse com os trabalhos de Euclides, já que sua obra era a mais influente da época. Na verdade, o que percebemos é um distanciamento entre os trabalhos dos dois autores: Arquimedes não tinha o menor pudor em utilizar métodos mecânicos para a construção de curvas, como, por exemplo, o uso de sua espiral para resolver o problema da quadratura do círculo, enquanto que Euclides pressupunha a não utilização de tais meios (KNORR, 1993, p. 151).

Tais como Arquimedes, muitos outros geômetras gregos procuraram resolver os três problemas clássicos: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trisseção do ângulo, utilizando outros meios que não a régua e o compasso. Qual a importância disso? O desenvolvimento matemático da época. Na tentativa de encontrar uma solução para esses problemas, muitos matemáticos desenvolveram novas teorias e criaram novas curvas que pudessem ajudar na construção e resolução de tais problemas. A história do surgimento de novas curvas com a resolução de tais problemas se confundem e se entrelaçam; e, portanto, ao falar das curvas é preciso também falar dos problemas

¹⁴ Essa é uma exigência de toda a filosofia clássica, dos antigos até os modernos, pelo menos, e de todos aqueles que admitem a noção de fundamento. Nesse aspecto, o livro *Os Elementos*, enquanto uma estrutura lógica unitária, é ordenado de tal forma que cada prova não necessite do que vem depois: o livro como um todo respeita o critério exigido a uma estrutura axiomática dedutiva, de modo que toda e qualquer proposição utiliza apenas conhecimentos anteriores, sejam os proporcionados pelos primeiros princípios ou aqueles fornecidos pelas proposições já provadas anteriormente. Diz Descartes: “No modo de escrever dos geômetras, distingo duas coisas, a saber, a ordem e a maneira de demonstrar. A ordem consiste apenas em que as coisas propostas primeiro devam ser conhecidas sem a ajuda das seguintes, e que as seguintes devam ser dispostas de tal forma que sejam demonstradas só pelas coisas que as precedam. E certamente empenhei-me, tanto quanto pude, em seguir esta ordem em minhas *Meditações*” (DESCARTES, 1979, p. 166).

¹⁵ Chamo a atenção para esse fato simplesmente porque Arquimedes não teve a preocupação com o uso apenas de linhas retas e círculos para resolver os problemas geométricos, enquanto que, Euclides, nos *Elementos* utilizou desse critério. Outro ponto a ser salientado é que Euclides, em outras obras, tais como: *Os Dados* e *Sobre Divisões (de figuras)*, de caráter geométrico, ou ainda *O Fenômeno*, *A Óptica*, *A Catóptrica (ou teoria dos espelhos)* e *Os Elementos da Música*, de caráter mais aplicado, não utilizou a mesma estrutura axiomática dos *Elementos*, o que pode indicar que ele também não buscava o rigor matemático extremo em toda sua obra.

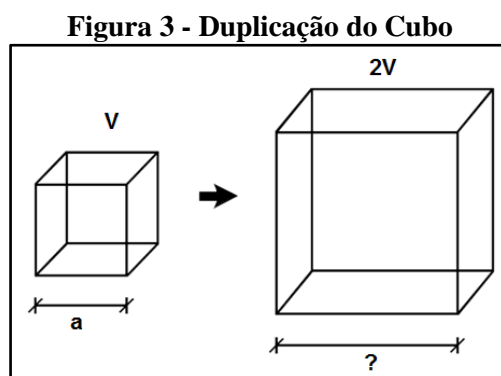
¹⁶ As datas de Euclides são incertas, mas sua atividade está normalmente atrelada ao período de 300 a.C.; já o nascimento de Arquimedes é usualmente estabelecido em 287 a.C. (KNORR, 1993, p. 197).

clássicos. A seguir, apresento de forma breve cada um dos três problemas e quais as curvas que estão atreladas à sua resolução.

2.1 Problemas

2.1.1 Duplicação do Cubo

Os escritos aos quais os historiadores tiveram acesso sobre esse problema advêm de relatos de Eratóstenes de Cirene, que viveu no século III a.C. Entre tais escritos está uma de suas obras chamada *Platonicus*, em que apresenta uma solução mecânica ao problema utilizando o mesolábio¹⁷. Segundo o texto, existe uma lenda segundo a qual em 427 a.C. Péricles teria morrido de peste justamente com um quarto da população de Atenas. Consternados, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, em Delfos, para saber como enfrentar a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. Prontamente, as dimensões do altar foram multiplicadas por dois, mas isso não afastou a peste. O volume havia sido multiplicado por oito, e não por dois. A partir dessa lenda, o problema que consiste em: dada uma aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo, tendo o dobro do volume do primeiro, ficou conhecido como *problema deliano* ou da *duplicação do cubo* (Figura 3).



Fonte: Do autor, 2015

¹⁷ Mesolábio ou “tomador de meios”, ou seja, um mecanismo capaz de encontrar dois meios proporcionais. Ele será mais bem exemplificado posteriormente.

Com base no testemunho de Eratóstenes de Cirene, que viveu no século III a.C., e em escritos matemáticos ligados a Platão pode-se conjecturar que essas histórias devem ter sido fabricadas no contexto da Academia de Platão, por volta do século IV a.C. Nessa época, o problema da duplicação do cubo já tinha ganhado notoriedade com os avanços efetuados por Hipócrates de Quios. Na verdade, esse geômetra tinha mostrado, no século anterior, que o problema poderia ser reduzido ao dos meios proporcionais. Segundo Heath (1981a, p. 245, tradução nossa), Hipócrates de Quios “descobriu pela primeira vez que, se pudermos encontrar uma maneira de encontrar dois meios proporcionais entre duas retas, o maior deles é o dobro do menor, e assim o cubo ficará duplicado; ou seja, o problema foi transformado em algo menos complexo”. Na época, Eratóstenes e alguns outros comentadores não apreciaram a solução de Hipócrates de Quios, uma vez que seu método não fornecia uma solução para o problema original, reduzindo-o a outro, os meios proporcionais.

O que Hipócrates de Quios afirma é que, dado um cubo de aresta a , se encontrarmos dois segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, isto é, encontrarmos dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão $\frac{b}{a}$. A duplicação do cubo é um caso particular, quando $b = 2a$, e procuramos assim x e y tais que, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Fazendo as devidas simplificações obtemos da proporcionalidade anterior que $x^3 = 2a^3$, o que prova¹⁸ que o cubo de aresta x tem volume duplicado em relação ao cubo de aresta a , ou seja, a razão dos volumes dos cubos (de arestas a e x respectivamente) é a razão de 1 para 2, pois $\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$. Sendo assim, é evidente a equivalência entre os dois problemas, o da duplicação do cubo e o da construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro (Figura 4).

¹⁸ Admitindo que o cubo de aresta a tenha volume V_1 e o cubo de aresta x tenha volume V_2 , então podemos estabelecer a seguinte proporção $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{x^3} = \left(\frac{a}{x}\right)^3$. Como estamos interessados num cubo que seja o dobro do outro, estabelecemos que $V_2 = 2V_1$.

modo, figuras análogas.

Portanto, se o problema da duplicação do quadrado pode ser reduzido ao problema de encontrar *um meio proporcional* entre a aresta e o seu dobro, não seria de se esperar que o problema da duplicação do cubo pudesse ser reduzido ao problema de encontrar *dois meios proporcionais* entre a aresta e o seu dobro? Na verdade, o uso de técnicas que reduzem um problema mais complexo a outro mais simples tem sido utilizado bem antes de Hipócrates de Quios. Não temos registros de que Hipócrates de Quios tenha sido capaz de construir os dois meios proporcionais a que se refere na sua redução¹⁹ do problema da duplicação do cubo ao problema dos dois meios proporcionais. Wilbur Knorr (1993, p. 24, tradução nossa) irá dizer que “mais tarde os geômetras reconheceram que uma *redução*²⁰ não é ela mesma uma *solução* ao problema proposto. Mas será que Hipócrates de Quios já tinha feito esta distinção no seu tratamento do problema da duplicação do cubo? Uma passagem de Aristóteles sugere que sim”²¹.

Depois de Hipócrates de Quios ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que todo o esforço subsequente foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em causa²². Estas buscas foram importantíssimas para o desenvolvimento da matemática, pois permitiram o surgimento de outras curvas. Como apresenta Eutócio, muitos matemáticos ao tentarem resolver tal problema desenvolveram novas curvas, como é caso das soluções dadas por Platão, Herão, Filão, Apolônio, Diócles, Pappus, Esporo, Menaecmus, Arquitas, Eratóstenes e Nicomedes.

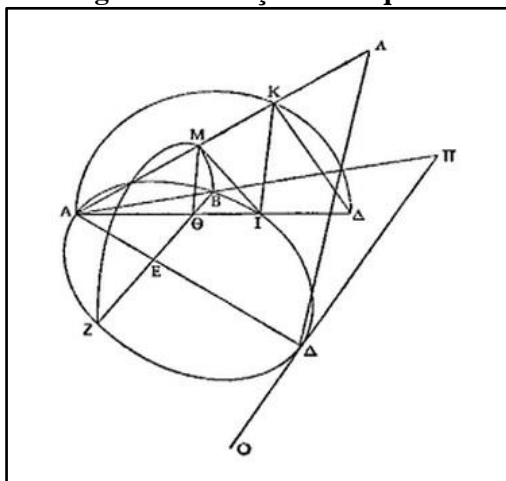
¹⁹ Sobre a redução (apagagé), Battisti (2002, p. 103) diz que “há evidências de que essa concepção de análise (ou esse tipo especial de análise) foi empregada por Hipócrates de Quios (primeira metade do séc. V a.C.) ou até pelos primeiros pitagóricos, como Teodoro de Cirene e Arquitas de Taranto”. O autor ainda chama a atenção para o método da redução, pois segundo ele “a redução de um problema complexo a um outro mais simples é um importante passo na resolução de um problema, mesmo que este último também não esteja ainda resolvido” (BATTISTI, 2002, p. 104).

²⁰ Redução é uma transição de um problema ou teorema para outro, sendo a solução ou prova feita também manifesta (HEATH, 1956, p. 135, tradução nossa).

²¹ Efetivamente a passagem a que Knorr se refere encontra-se na obra de Aristóteles *De Anima II* quando este define o termo “quadratura” (tetragônismos) (KNORR, 1983, p. 24).

²² Vale ressaltar que o problema inverso não se aplica, ou seja, um método para a duplicação do cubo não pode ser utilizado para a determinação dos dois meios proporcionais. Por esta razão, há uma certa confusão ao considerar a duplicação do cubo, em vez da determinação de dois meios proporcionais, como um dos três problemas clássicos, já que, ao resolver o último, o primeiro estaria resolvido.

Figura 5 - Solução de Arquitas



Fonte: Heath (1981a, p. 247)

A primeira *solução*²³ é de Arquitas de Tarento, o qual utilizou a interseção de três superfícies de revolução: um cone reto, um cilindro e um toro (Figura 5). Segundo Allman (1889, p. 110, tradução nossa), Diógenes Laertius afirmou que Arquitas,

foi o primeiro a empregar um método científico de tratamento das Mecânicas, introduzindo o uso de princípios matemáticos simples, e também foi o primeiro a aplicar o movimento mecânico na solução de problemas geométricos, enquanto tentava encontrar os dois meios proporcionais da seção de um semicilindro, com o objetivo de duplicar o cubo.

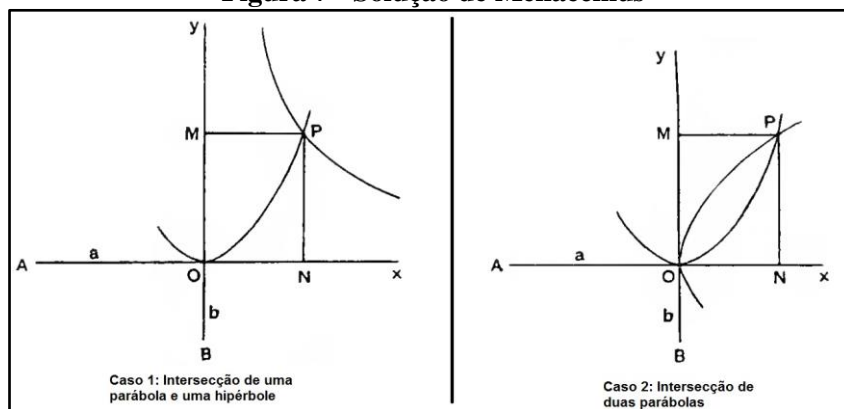
A *solução* de Eudoxo (Figura 6) foi dada pelo que Eutócio chamou de linhas curvas. Thomas Heath afirma que:

É de se admitir que a sugestão de Tannery para o método de Eudoxo é atraente; mas obviamente é apenas uma conjectura. Em minha opinião, a objeção encontrada está que a solução de Eudoxo é muito próxima de uma adaptação das ideias de Arquitas. Eudoxo foi, é verdade, um aluno de Arquitas, e existe uma grande semelhança de estilo entre a construção de Arquitas para a curva de dupla curvatura e a construção de Eudoxo para a lemniscata esférica, usando a revolução de esferas concêntricas; mas Eudoxo era, penso eu, muito original como matemático para se contentar ele próprio com uma mera adaptação da solução de Arquitas” (Heath, 1981a, p. 251, tradução nossa).

Mas Paul Tannery não foi o único a relacionar Eudoxo com Arquitas. Riddell, no artigo *Eudoxan Mathematics and Eudoxan Spheres*, publicado na *Archive for*

²³ A solução está em itálico para lembrar que não é uma solução utilizando régua e compasso. As próximas soluções também seguem esse padrão.

Figura 7 - Solução de Menaecmus



Fonte: Adaptado de Heath (1981a, p. 254)

Eutócio atribui a Platão uma *solução* de cariz mecânico para o problema da duplicação do cubo, ou melhor, e uma vez mais, para o problema da inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de reta. No entanto, é amplamente aceite que esta solução foi incorretamente atribuída a Platão, pois, como salienta Heath (1981a, p. 255), “Platão reprovou as soluções mecânicas por estas destruírem a virtuosidade da geometria”. E, portanto, seria de estranhar que ele próprio apresentasse uma solução dentro dos parâmetros que reprovava. Knorr adverte que:

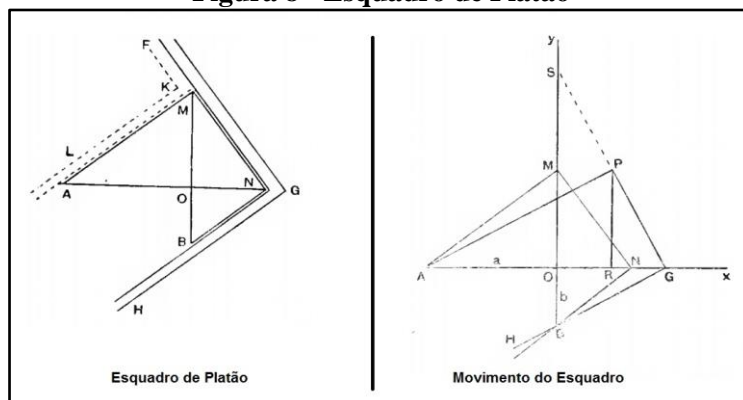
a proveniência Platônica deste método deixa em aberto sérias dúvidas. Primeiro Eratóstenes não faz referência ao longo das suas considerações sobre os primordiais esforços na duplicação do cubo. Tal fato é ainda mais notório tendo em atenção que o seu interesse pela filosofia platônica é muito evidente ao longo da sua obra *Platonicus*, onde relata a história do envolvimento de Platão com o oráculo de Delos²⁶ [sic]. Certamente, se fosse o caso, Eratóstenes teria um interesse particular em indicar uma efetiva solução de Platão, se a conhecesse. Além disso, este método depende da concepção de um aparelho mecânico (KNORR, 1993, p. 57, tradução nossa).

Existem duas teorias relativas à autoria da solução mecânica atribuída a Platão para resolver o problema da duplicação do cubo. Uma que defende que Platão inventou esta solução mecânica para ilustrar como é fácil descobrir tais soluções; a outra, talvez a mais aceita, que defende que esta solução mecânica foi inventada pelos seus discípulos na Academia (HEATH, 1981a, p. 255). Sendo assim, uma dúvida persiste: a quem atribuir a autoria deste método? Sem responder diretamente a esta questão, Thomas Heath (HEATH, 1981a, p. 256-258) indica alguns pontos comuns entre o método aqui

²⁶ A palavra Delos aparece conforme consta no texto original, contudo, o termo correto é Delfos, conforme aparece na literatura clássica.

em causa (na sua vertente mais teórica e menos mecânica) e a segunda solução de Menaecmus, enquanto que Wilbur Knorr acrescenta a procura de uma relação com a solução perdida de Eudoxo (KNORR, 1993, p. 57-62).

Figura 8 - Esquadro de Platão

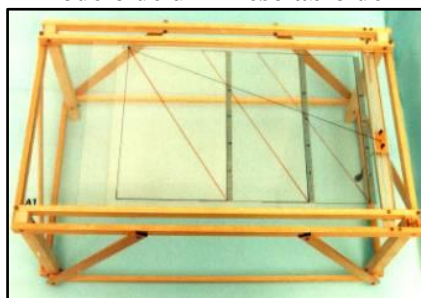


Fonte: Adaptado de Heath (1981a, p. 256-257)

Novamente estamos na presença de uma *solução* que não está de acordo com as regras previamente estabelecidas, pois a solução envolve um instrumento mecânico (o esquadro de Platão) (Figura 8) muito diferente da régua não graduada e do compasso.

O nome de Eratóstenes de Cirene não está apenas associado ao problema da duplicação do cubo, mas também a uma solução do problema dos dois meios proporcionais, através de um instrumento mecânico, o conhecido mesolábio (Figura 9), descrito por Pappus no livro III da *Coleção Matemática*.

Figura 9 – Modelo de um Mesolábio de Eratóstenes



Fonte: Museu Universitário de História Natural²⁷

A suposta carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu é uma possível fonte de informação histórica, embora haja dúvidas sobre sua veracidade. Thomas (1957a)

²⁷ Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica dell' Università degli studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: < <http://www.museo.unimo.it/labmat/mesolbin.htm>>. Acesso em: 11 jul. 2015.

afirma que

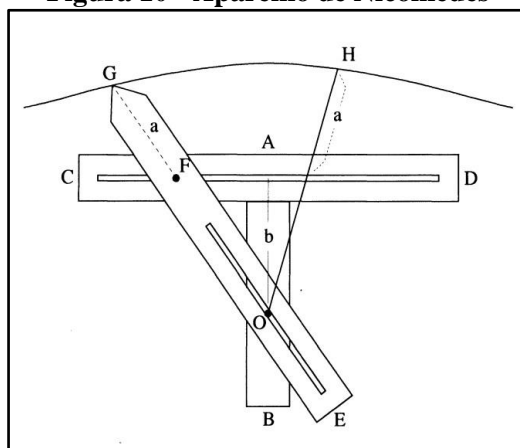
[...] não há motivos para duvidar da história relatada, a qual é, de fato, amplamente confirmada. E deve agradecer-se ao autor por ter incluído na sua carta a prova e o epigrama, retirados de um monumento prometido, que são trabalhos genuínos de Eratóstenes (THOMAS, 1957a, p. 256-257, tradução nossa).

Eratóstenes fez uma réplica do seu mecanismo em bronze e o colocou em uma coluna dedicada ao rei Ptolomeu, erguida em Alexandria. Da coluna também constava uma breve demonstração e uma epigrama onde se lia:

Se, bom amigo, de qualquer cubo pequeno queres obter um cubo duas vezes maior, e rapidamente transformar qualquer sólido em outro, aqui está a tua possibilidade [...]. Não procure conseguir coisas difíceis de executar por meio dos cilindros de Arquitas, nem cortar o cone pela tríade de Menaecmus, nem descrevê-las por alguma espécie de linhas curvas do divino Eudoxo. De fato, por meio destas placas, facilmente construirás milhares de médias a partir de uma base pequena. Afortunado Ptolomeu, porque é um pai que goza a juventude com o seu filho e lhe deste tudo o que é preciso para as Musas e Reis; possa ele no futuro, Zeus Celestial, receber o cetro das tuas mãos. Que assim aconteça, e que cada um que veja esta oferta prometida diga: ‘esta é uma oferta de Eratóstenes de Cirene’ (HEATH, 1981a, p. 260, tradução nossa).

Conforme a solução dada por Platão, a de Eratóstenes não está de acordo com as regras previamente estabelecidas, pois a solução envolve um instrumento mecânico (o mesolábio).

Figura 10 - Aparelho de Nicomedes



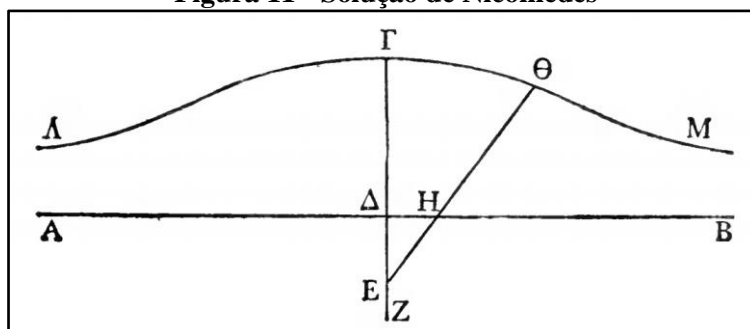
Fonte: Bos (2001, p. 31)

A solução de Nicomedes para a construção dos dois meios proporcionais teve

por base a redução do problema a uma construção por *nêusis*²⁸, fazendo uso de um aparelho desenvolvido por ele, conforme a Figura 10.

Por meio desse aparelho e da curva chamada *concóide/conchóide*²⁹ (Figura 11), desenvolvida por ele, e que também foi usada para resolver o problema da trisseção do ângulo, ele resolveu o problema da duplicação do cubo. Ele ficou muito orgulhoso pela sua construção a ponto de reclamar que esta solução para o problema da duplicação do cubo era muito superior ao método de Eratóstenes (HEATH, 1981a, p. 260).

Figura 11 - Solução de Nicomedes



Fonte: Thomas (1957a, p. 299)

Thomas Heath apresenta as *soluções* de Apolônio, Herão e Filão de Bizantino (HEATH, 1896, p. cxxvii) conjuntamente, já que são muito parecidas. Argumenta o autor:

Pappus disse que ele [Herão] nos dará quatro soluções, uma de sua própria autoria; a primeira, segunda e terceira ele atribui a Eratóstenes, Nicomedes e Herão. Mas em uma sentença anterior ele menciona Filão juntamente com Herão, e nós sabemos por Eutócio que a solução de Herão é praticamente a mesma que a de Filão (HEATH, 1981b, p. 300, acréscimo e tradução nossa).

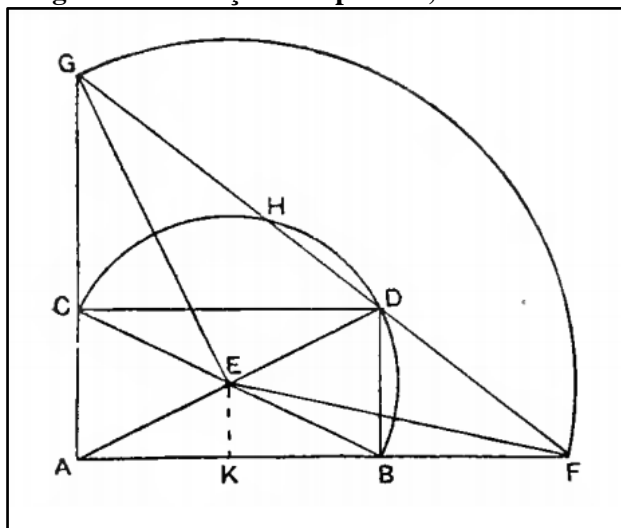
O método de Herão “[...] não aparece apenas na narrativa de Eutócio, mas também nos legados de Herão, em *Mecânica* e *Belopoeica*, e Pappus toma conhecimento deste método através de Herão. Mas outro comentador, João Filópono, atribui-o a Apolônio” (KNORR, 1993, p. 188, tradução nossa). Portanto, temos

²⁸ Literalmente “*nêusis*” significa “aproximando de”: o segmento dado é colocado entre duas linhas de tal forma que ele converge ou aponta para o pólo dado. Em geral, uma *nêusis* não pode ser construída por meio de linhas retas e círculos. O problema da *nêusis* desempenhou um papel importante na prática da construção clássica grega. No entanto, a importância deste papel se tornou evidente para os matemáticos modernos somente após a publicação da *Coleção* de Pappus em 1588 (BOS, 2001, p. 31). Heath (2002, p. c) também define *nêusis*, *νεύσις*, como inclinação, no latim *inclinatio*, apesar de julgar que uma tradução para a palavra seja difícil, dada sua complexidade no contexto em que aparece.

²⁹ Mais adiante irei descrever com mais detalhes essa curva.

razões para crer que podemos agrupar estas três soluções do problema, pois, como aponta Knorr (1993, p. 305, tradução nossa), “por uma questão de clareza, vou falar dos métodos ‘Heroniano’ e ‘Filoniano’, embora anteriormente tenha mostrado que de alguma forma ambos utilizaram o tratamento ao problema dado por Apolônio”³⁰ (Figura 12).

Figura 12 - Solução de Apolônio, Herão e Filão

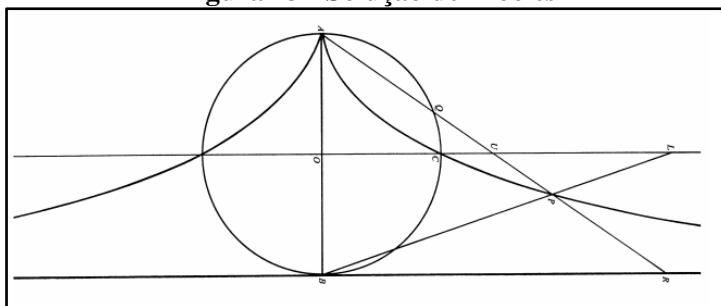


Fonte: Heath (1981a, p. 262)

Durante certo período de tempo não se conhecia muito sobre a obra e vida de Diócles, a não ser por dois fragmentos da sua obra *Dos Espelhos Cústicos*, preservados por Eutócio em seus comentários sobre o texto de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. Knorr (1993, p. 233, tradução nossa) afirma:

De um trabalho de Diócles *Dos Espelhos Cústicos*, o comentador Eutócio desenha dois extensos fragmentos, nenhum sobre os espelhos, um ele lida com o método da duplicação do cubo e outro fornece uma solução alternativa para o problema de Arquimedes na divisão de uma esfera.

Figura 13 - Solução de Diócles



Fonte: Lockwood (1961, p. 130)

³⁰ Podemos encontrar em Knorr (1993, p. 305-308) uma descrição aprofundada das interligações entre os métodos de Apolônio, Herão e Filão.

E continua, “na terceira parte, Diócles apresenta dois métodos para a duplicação do cubo: o primeiro reproduz simplesmente uma forma alternativa ao método das duas parábolas de Menaecmus, enquanto o segundo utiliza uma curva especial, conhecida nos tempos modernos com o nome de *cissóide*” (Figura 13) (KNORR, 1993, p. 234, tradução nossa).

Como inferimos, deve-se a Diócles a solução do problema da duplicação do cubo por meio de uma nova curva - a *cissóide*. Segundo parece, não foi Diocles quem lhe atribuiu este nome, pois nos seus escritos ele utiliza o termo “linha” para se referir a tal curva e, além disso, “o nome *cissóide* (“forma de hera”) é mencionado [pela primeira vez] por Gémino no séc. I a.C., isto é, cerca de um século depois da morte do inventor Diócles” (LOCKWOOD, 1961, p. 132, tradução nossa).

A *cissóide* despertou o interesse de várias gerações de matemáticos, eles, que pertenciam ao século XVII:

[...] colocaram à prova as suas habilidades através da *cissóide*. Fermat e Roberval construíram a tangente (1634); Huygens e Wallis encontraram a área (1658); enquanto Newton a utiliza como exemplo, na sua *Arithmetica Universalis*, para as antigas tentativas na resolução de problemas cúbicos [...] (LOCKWOOD, 1961, p. 133, tradução nossa).

Por fim, os últimos (da época) a discutirem sobre esse problemas foram Esporo e Pappus. O primeiro se dedicou intensamente a dois problemas matemáticos: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo, segundo Eutócio. Quanto a Pappus de Alexandria, matemático e comentador da primeira metade do séc. IV d.C., ele nos deixou *A Coleção Matemática*, uma importante fonte – muitas vezes a principal ou a única – para os nossos conhecimentos sobre os desenvolvimentos da matemática que o precederam. Assim, relativamente ao problema da duplicação do cubo, além da versão transmitida por Eutócio, temos acesso à versão de Pappus, nas suas próprias palavras, no Livro III da sua *Coleção Matemática*.

Segundo Thomas Heath,

As soluções de Esporo e Pappus são essencialmente as mesmas que a de Diócles; a principal diferença consiste no fato de que, em vez de usarem a *cissóide*, usaram um compasso que roda em torno de certo ponto até que certa interseção leve que dois pares de linhas sejam iguais (HEATH, 1981a, p. 266, tradução nossa).

Pappus tinha conhecimento da obra de Esporo e é provável que este fosse seu

professor ou colega. Wilbur Knorr vai um pouco mais longe e afirma que tanto Esporo como Pappus edificam o procedimento como uma *nêusis* e que por uma observação atenta podemos detectar que Esporo trabalhou diretamente a partir de Diócles, enquanto Pappus parece ter elaborado uma reformulação independente do método platônico (KNORR, 1993, p. 240-242).

Assim temos, uma vez mais, razões que nos levam a agrupar soluções do problema de Delos. Vamos agrupar as soluções de Pappus e Esporo, sem, no entanto, esquecer as relações destas com a solução anterior, a solução de Diócles por meio da curva cissóide. Omitimos aqui as demonstrações de Esporo e Pappus (que podem ser encontradas nas obras acima citadas). Será que Pappus, ao atribuir esta solução a si próprio, expondo-a de uma maneira mais acessível que a solução de Esporo (a acreditar na versão transmitida por Eutócio) apenas está chamando para si os créditos de uma solução que originalmente era de Esporo? (HEATH, 1981a, p. 266). E sem solução continua o problema da duplicação do cubo, visto que as soluções de Esporo e Pappus também não respeitam as regras estabelecidas na época.

2.1.2 *Quadratura do Círculo*

Wilbur Richard Knorr começa sua discussão sobre a quadratura do círculo com a seguinte frase atribuída a Proclus e se referindo à Proposição 45, do Livro I, dos Elementos:

Tendo conduzido este problema, acredito que os antigos também procuraram a quadratura do círculo. Porque, se um paralelogramo é encontrado, dada uma figura retilínea qualquer, é digno de investigação se é possível provar que figuras retilíneas são iguais a figuras ligadas por arcos circulares (KNORR, 1993, p. 25, tradução nossa).

O autor quer chamar a atenção para o fato de que esse problema tem sua tradição nos textos antigos dos egípcios e mesopotâmicos, pois no papiro de Rhind ou Ahmes, conforme já citado anteriormente, consta uma passagem que fornece “um método para construir um quadrado com a área igual a de um círculo, que consiste em subtrair um nono do diâmetro do círculo usando o restante como lado do quadrado” (ROONEY, 2012, p. 99-100), embora isso seja mostrado como uma maneira de calcular a área de um círculo e não para resolver a quadratura.

Segundo Boyer (2012, p. 64), Plutarco em seus escritos afirmou que, “enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo”. Essa é a primeira menção ao problema da quadratura do círculo. Como afirma Heath (1981a, p. 220), provavelmente não haja um problema no mundo que tenha causado tanto fascínio ao longo dos tempos como o de quadrar o círculo. Quadrar uma região plana consiste em traçar, somente com régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área da região dada. O problema de quadrar qualquer região poligonal está completamente resolvido nos *Elementos* de Euclides, conforme Livro II, Proposição 14³¹. Euclides tratou sobre círculos a partir do seu Livro III e o tratamento de área deles só foi aparecer no Livro XII.

As primeiras tentativas de resolver o problema são da segunda metade do século V a. C. Uma passagem do livro de Aristófanes³² *As Aves* (414 a.C.) evidencia a popularidade do problema. O livro, uma Comédia Grega, retrata o surgimento de uma nova cidade, em que o personagem principal, *Peisthetaerus*, é visitado por várias pessoas que oferecem seus serviços. Uma das pessoas a oferecer seus serviços é Meton – matemático da época. Vejamos o seu diálogo:

METON: Vim em direção a vocês...

PEISTHETAERUS: Este é outra peste... Que é que você veio fazer aqui? Qual é o seu caso? Que significa este coturno? Por que você veio?

METON: Quero medir o ar e dividi-lo em lotes para vocês.

PEISTHETAERUS: Em nome dos Deuses! Quem é você?

METON: Quem sou eu? Eu sou Meton, conhecido em toda Hellas e Colonus.

PEISTHETAERUS: Diga-me: que badulaques são estes que você está trazendo para cá?

METON: São instrumentos para medir o ar. Eu vou me explicar. Você vai ficar sabendo que a abóbada celeste é parecida com um forno, então observe, aplicando aqui minha haste flexível e fixando meu compasso lá – você entende?

PEISTHETAERUS: Eu não.

³¹ Construir um quadrado igual à retilínea dada (EUCLIDES, 2009, p. 149).

³² O autor, Aristófanes, foi um dos dramaturgos mais bem sucedidos de sua época. Em geral, as obras de Aristófanes refletem preocupações contemporâneas que vão desde comentários amargos sobre a longa guerra entre Atenas e Esparta aos retratos irreverentes de magistrados, filósofos, poetas e matemáticos.

METON: Com a haste reta eu meço **que o círculo pode ser quadrado**; e no centro um lugar para o mercado; e as ruas serão conduzidas diretamente para o centro; assim como uma estrela que, embora circular, ilumina com seus raios em linha reta para todas as direções.

PEISTHETAERUS: Mas Meton é um novo Thales!?
(ARISTÓFANES, 1996, p. 135-136, negrito nosso).

Serafina Cuomo chama a atenção para a importância de Meton. Como afirma a autora,

sabemos a partir de fontes posteriores que ele foi responsável por uma reforma do calendário ateniense, que instituiu um instrumento para a observação de solstícios no Pnyx (a colina em Atenas, onde se reunia a Assembléia Geral) e que construiu uma fonte e/ou um dispositivo de manutenção do tempo movido à água na Ágora, em uma colina chamada Colonus Agoraios (daí a referência na passagem) (CUOMO, 2005, p. 18-19, tradução nossa).

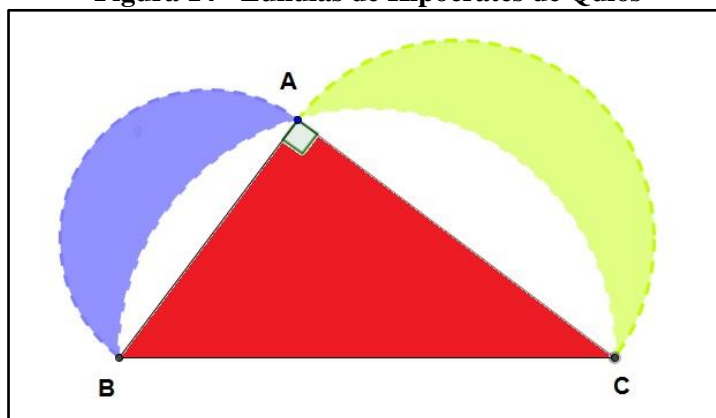
Meton deve ter sido suficientemente famoso para ter seu nome colocado em um papel da comédia grega. O público, ao que parece, deve ter sido capaz de entender a alusão cômica para o problema da quadratura do círculo, que foi considerado impossível de se resolver. Em nossa interpretação, poderíamos sugerir que Meton foi feito uma figura de diversão, pois se envolveu em um tipo de matemática que nem todos entendiam como relevante e importante, ou que era demasiadamente sofisticada para entender.

Thomas Heath apresenta uma versão diferente do que Serafina diz, segundo ele:

este é um jogo de palavras [se referindo à frase atribuída a Meton “**que o círculo pode ser quadrado**”], porque o que Meton realmente faz é dividir um círculo em quatro quadrantes por dois diâmetros perpendiculares uns aos outros; a ideia é que as ruas irradiem da Ágora, no centro de uma cidade; a palavra τετραγωνοζ [tetrágono], realmente significa “com quatro ângulos (retos)” (no centro), e não “quadrado”, mas a palavra transmite uma hilária alusão ao problema da quadratura do mesmo jeito (HEATH, 1981a, p. 220-221, tradução, negrito e acréscimos nossos).

Hipócrates de Quios resolve o problema da Quadratura das Lúnulas (Figura 14), sem, contudo, estar ciente de que o método de resolução por planos não iria resolver a quadratura do círculo. Assim sendo, por uma questão de interesse pessoal talvez, ele quis mostrar que, se os círculos não poderiam ser enquadrados por estes métodos, eles poderiam ser utilizados para encontrar a área de algumas figuras limitadas por arcos circulares, ou seja, determinadas lunas (lúnulas).

Figura 14 - Lúnulas de Hipócrates de Quios



Fonte: Do autor, 2015

Antífonos de Atenas é um contemporâneo de Sócrates, o próximo a chamar a atenção para uma possível solução. De acordo com Heath (1981a, p. 221), “nós devemos a Aristóteles e seus comentadores o conhecimento do método de Antífonos”. A quadratura por um meio proporcional é provavelmente a solução da quadratura das lunas de Hipócrates de Quios. O método de Antífonos, segundo Heath (1981a), é indicado por Themistius e Simplicius. Suponha que haja um polígono regular inscrito em um círculo, por exemplo, um quadrado ou um triângulo equilátero³³. Em cada lado do triângulo ou do quadrado inscritos, a base descreve um triângulo isósceles, com o vértice do arco do segmento menor do círculo subtendido pelo lado. Isto dá um polígono regular inscrito com o dobro do número de lados. Repita a construção com o novo polígono, e temos um polígono inscrito com quatro vezes o número de lados, em relação ao polígono original. Dando continuidade ao processo, podemos dizer que, embora Antífonos tenha pensado que, desta forma (com inúmeras repetições), a área (do círculo) aumentaria, devendo, em algum momento, existir um polígono inscrito no círculo cujos lados teriam uma dimensão tão pequena que coincidiriam com a circunferência do círculo. E, desse modo, ele quis concluir que, como é possível fazer um quadrado igual a qualquer polígono, então seria possível fazer um quadrado igual a um círculo.

Mas, de acordo com Simplicius, o princípio geométrico foi violado, pois um círculo toca uma linha reta em apenas um ponto. Eudemus corretamente disse que era o

³³ De acordo com Themistius, Antífonos começou com um triângulo equilátero, e esta parece ser a versão autêntica; Simplicius diz que ele inscreveu alguns dos polígonos regulares que podem ser inscritos em um círculo, “suponho que, se assim acontecer, o polígono inscrito é um quadrado” (HEATH, 1981a, p. XX).

princípio da divisão finita das magnitudes que tinha sido violado; pois, se a área do círculo é divisível para o infinito, o processo descrito por Antífonos nunca resultará na área total ou, no caso, nunca fará dos lados do polígono o comprimento da circunferência. Mas a objeção à afirmação de Antífonos é mais do que verbal, pois Euclides, nos *Elementos*, usa igualmente a construção da proposição 2³⁴, do Livro XII, contudo ele expressa a conclusão de uma maneira diferente, dizendo que, “[...] cortando as circunferências restantes em duas, e ligando as retas e fazendo isso sempre, deixaremos alguns segmentos do círculo que serão menores do que o excesso pelo qual o círculo [...] excede a área [...]” (EUCLIDES, 2009, p. 529). Antífonos entendeu que o círculo é o limite de um polígono inscrito quando o número de seus lados é indefinidamente aumentado. Portanto, conforme aponta Heath (1981a, p. 222, tradução nossa), “Antífonos merece um lugar de honra na história da geometria, em razão de ter sido ele quem originou a ideia da *exaustão* de uma área por meio de polígonos regulares inscritos com um número sempre crescente de lados”.

Eudoxo fundou o método da exaustão. A prática do método de construção de Antífonos foi ilustrada no tratado de Arquimedes sobre a *Medida de um Círculo*, onde, através da construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos com 96 lados, Arquimedes provou que $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ ³⁵, sendo o limite inferior, $\pi > 3\frac{10}{71}$, obtido por meio do cálculo do perímetro do polígono inscrito de 96 lados, que é construído principalmente pelo método de Antífonos de um triângulo equilátero inscrito. A construção a partir de um quadrado foi também a base da expressão de Viète para $\frac{2}{\pi}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \dots \\ \frac{2}{\pi} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)}\right)} \cdot \dots \end{aligned} \quad (\text{ad infinitum}).$$

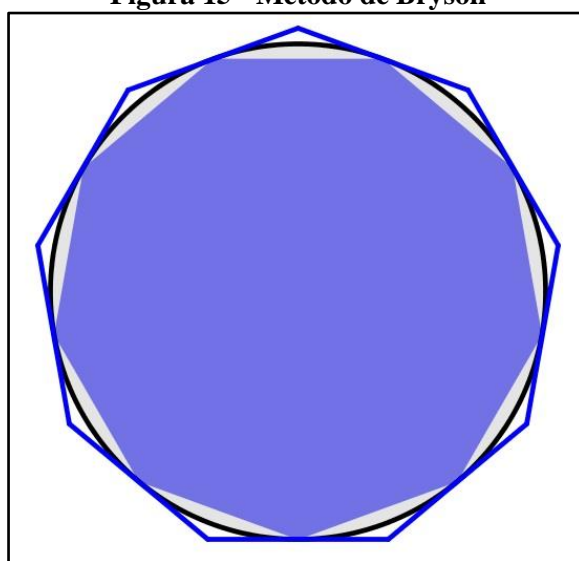
Bryson, aluno de Sócrates ou de Euclides de Megara, foi o autor de outra

³⁴ Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros (EUCLIDES, 2009, p. 528). Segundo Heath (2002, p. xlviii) Euclides prova nessa proposição o método de exaustão atribuído a Eudoxo.

³⁵ Arquimedes cita no livro *Medida de um Círculo*, na Proposição 3, que “a razão da circunferência de qualquer círculo com o diâmetro é menos que $3\frac{1}{7}$, mas maior que $3\frac{10}{71}$ ” (ARQUIMEDES, 2002, p. 9, tradução nossa).

tentativa de quadratura. Ele foi criticado por Aristóteles como sendo “sofista” por utilizar na solução princípios que não eram aceitos na geometria, mas que eram aplicáveis igualmente a outros assuntos. O método de Bryson foi além do método de Antífonas, por considerar polígonos inscritos e circunscritos ao círculo. Como aponta Heath (1981a, p. 224, tradução nossa), “o nome de Bryson de maneira nenhuma merece ser banido da história da matemática grega; pelo contrário, na medida em que ele sugeriu a necessidade de considerar os polígonos inscritos e circunscritos, ele deu um passo além do que Antífonas” (Figura 15).

Figura 15 - Método de Bryson



Fonte: Do autor, 2015

Chegamos agora às retificações reais ou quadraturas de círculos efetuadas através de curvas mais complexas, cuja construção é mecânica. Algumas destas curvas foram aplicadas para resolver mais do que um dos três problemas clássicos, e, como admite Heath (1981a, p. 225, tradução nossa), “nem sempre é fácil determinar qual era o propósito original de seus inventores, porque os diferentes especialistas do assunto não conseguem entrar em um acordo”. Segundo Iamblicus ([?] *apud* Heath, 1981a, p. 224, tradução nossa) se referindo à quadratura do círculo:

Arquimedes efetuou por meio da curva em forma de espiral, Nicomedes por meio da curva conhecida pelo nome especial de *quadratriz* (τετραγωνιζουσα), Apolônio por meio de uma determinada curva que ele mesmo chamou de “irmã da cochóide”, mas que é a curva de Nicomedes, e finalmente Carpus por meio de uma determinada curva que ele simplesmente chamou (a curva resultante) de “um duplo movimento”.

Pappus, no seu Livro IV da *Coleção*, se refere a uma dessas curvas: “uma linha que tinha a denominação e propriedade que foi adotada por Dinostrato, Nicomedes e outros autores recentes para realizar a quadratura do círculo foi chamada de quadratriz [...]” (PAPPUS, 1982a, p. 191-192, tradução nossa).

Proclus ([?] *apud* Heath (1981a, p. 225, tradução nossa), se referindo à trisseção de qualquer ângulo, diz que,

Nicomedes trissectou qualquer ângulo retilíneo por meio das curvas conchoidais; sendo ele próprio o responsável pela construção, pela ordem e pelas propriedades dos quais ele profere. Outros têm feito a mesma coisa por meio das quadratrizes de Hípias e Nicomedes [...], outros ainda, a partir das espirais de Arquimedes, dividiram qualquer ângulo retilíneo em uma dada razão.

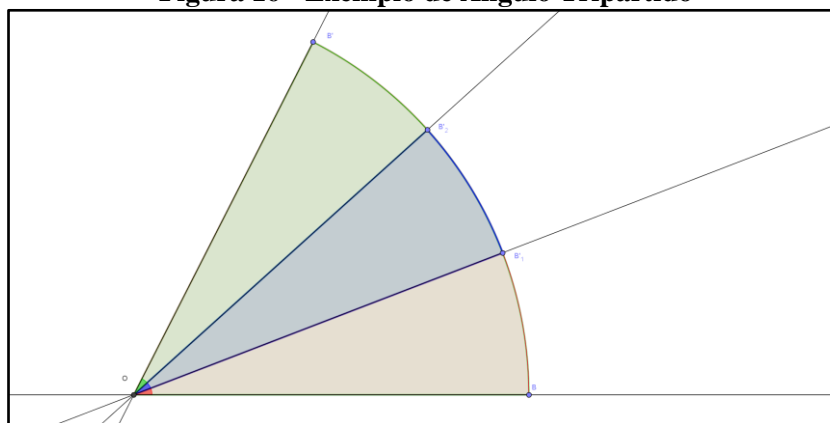
Todas essas passagens se referem à quadratriz inventada por Hípias de Elis. Iamblichus e Pappus parecem dizer que ela não foi usada por Hípias para quadrar o círculo, mas que foi Dinostratus (um irmão de Menaechmus) e outros geômetras posteriores que primeiro aplicaram para tal. Podemos concluir que Hípias originalmente destinou a curva para trisseccionar um ângulo. Mas isso se torna duvidoso quando analisamos as passagens de Proclus.

De qualquer modo, o objetivo deste trabalho não é olhar para qual foi o principal motivo da origem de uma curva, mas para a utilidade das curvas em destaque, entender o seu modo de construção, pois a partir dele, talvez, seja possível compreender os motivos que levaram Descartes a aceitar algumas curvas como geométricas e outras não.

2.1.3 *Trisseção do Ângulo*

O problema da trisseção do ângulo (dividir um ângulo qualquer, apenas com régua e compasso, em três partes iguais) (Figura 16) difere em pelo menos dois aspectos dos outros dois clássicos problemas da geometria grega - a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Em primeiro lugar não existe lenda que lhe esteja associada; em segundo lugar, enquanto que não é possível duplicar um cubo ou quadrar um círculo, com régua não graduada e compasso, por mais especiais que sejam os valores da aresta do cubo ou do raio do círculo é, no entanto, possível trissectar ângulos de determinadas amplitudes.

Figura 16 - Exemplo de Ângulo Tripartido



Fonte: Do autor, 2015

Por exemplo, Pappus indica, no Livro IV, proposição XXXIX da sua *Coleção Matemática* (PAPPUS, 1982a, p. 213), um método muito simples para trissectar um ângulo reto (Figura 17):

Mas, se o ângulo vier a ser reto, tomaremos uma reta BG sobre a qual descreveremos o triângulo equilátero BDG e, dividindo o ângulo compreendido pelas retas DB, BG em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas retas AB, BG dividido em três partes iguais (PAPPUS, 1982a, p. 213, tradução nossa).

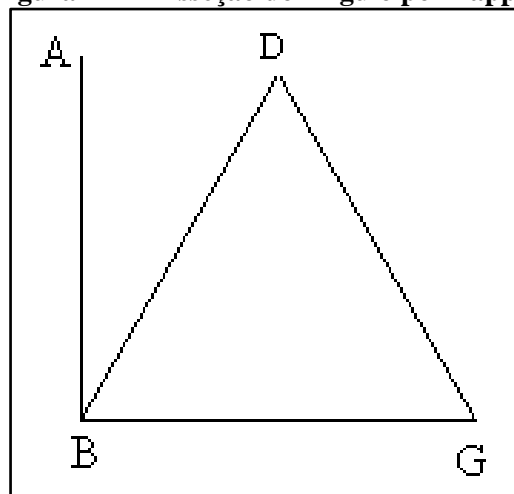
Não sabemos a origem do problema da trisseção do ângulo, mas é provável que tenha surgido das discussões em torno da construção de polígonos regulares (HEATH, 1981a, p. 235). Por exemplo, para construir um polígono regular de nove lados é necessário trissectar um ângulo de 120° . Além disso, encontramos no Livro IV dos *Elementos* (2009) de Euclides construções para inscrever num círculo polígonos regulares de três (Proposição 2³⁶), quatro (Proposição 6³⁷), cinco (Proposição 11³⁸) e seis lados (Proposição 15³⁹). Os gregos não conheciam uma construção exata para os polígonos regulares de sete e nove lados, o que nos leva a supor que a construção desses tipos de polígonos regulares foram assuntos que ocuparam os matemáticos da Grécia, incentivados pela descoberta pitagórica do pentágono regular.

³⁶ No círculo dado, inscrever um triângulo equiângulo com o triângulo dado (EUCLIDES, 2009, p. 188).

³⁷ Inscrever um quadrado no círculo dado (EUCLIDES, 2009, p. 192).

³⁸ Inscrever, no círculo dado, um pentágono tanto equilátero quanto equiângulo (EUCLIDES, 2009, p. 196).

³⁹ Inscrever, no círculo dado, um hexágono equilátero e também equiângulo (EUCLIDES, 2009, p. 201).

Figura 17 - Trisseção do Ângulo por Pappus

Fonte: Adaptado de Pappus (1982a, p. 213)

Allman afirma que seja

[...] provável que o terceiro problema célebre – a trisseção do ângulo – tenha também ocupado a atenção dos geômetras neste período [o período do problema da duplicação do cubo]. Não há dúvida de que os Egípcios conheciam como dividir um ângulo ou o arco de um círculo, em duas partes iguais; assim eles também deviam saber como dividir um ângulo reto em três iguais. Nós já vimos, além do mais, que a construção do pentágono regular era conhecida de Pitágoras e podemos inferir que ele podia dividir um ângulo reto em cinco partes. Deste modo, nessa altura, o problema da trisseção de um ângulo qualquer – ou o mais geral, de dividir um ângulo num qualquer número de partes iguais – podia surgir naturalmente (ALLMAN, 1889, p. 88, tradução nossa).

No entanto, não podemos deixar de pensar na hipótese deste problema ter surgido como uma extensão natural da bisseção de um ângulo (EUCLIDES, 2012, Livro I, prop. 9, p. 105), cuja construção poderia ser realizada com régua e compasso. Outra hipótese é que era possível, com instrumentos euclidianos, dividir um segmento de reta em tantas partes iguais quanto se queira e, ao tentar transpor a essa ideia para os ângulos, tenha surgido o problema da trisseção de um ângulo (HEATH, 1981a, p. 235; EVES, 1995, p. 137).

Dividir um ângulo em três partes iguais não é um problema tão simples de resolver. Escreve Eves (1995, p. 136):

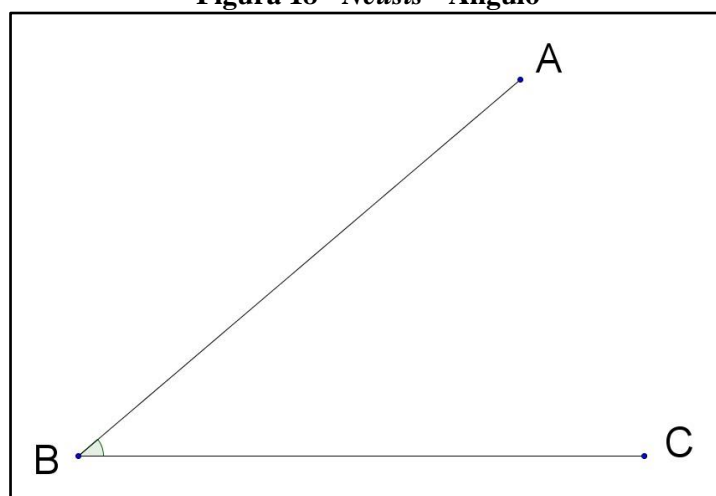
[...] dos três famosos problemas da Antiguidade, o da trisseção do ângulo é destacadamente o mais popular entre os não iniciados em

matemática dos Estados Unidos hoje em dia. Todos os anos os jornais de matemática e os membros da classe dos professores de matemática do país recebem muitas comunicações dos ‘trisseccionadores de ângulos’ e não é raro ler-se em jornais que alguém finalmente resolveu o evasivo problema.

Pappus de Alexandria, no Livro IV da sua *Coleção Matemática*, afirma que “os geômetras gregos foram incapazes de resolver o problema relativo [à trisseção do] ao ângulo, porque era de natureza sólida, buscando por meio dos planos, porque as seções cônicas não lhe eram familiares e, por isso, o problema ficou incerto” (PAPPUS, 1982a, p. 209-210, tradução nossa, acréscimo nosso). Contudo, mais tarde, resolveram a trisseção do ângulo ao reduzirem ao problema da inclinação ou *nêusis*.

As tentativas para resolver o problema da trisseção do ângulo foram importantes ao desenvolvimento da geometria e da matemática como os outros problemas, tendo os geômetras gregos procurado por diferentes meios resolvê-lo e, assim, desenvolvido novas curvas e novos métodos de construção. Assim como no caso da duplicação do cubo os geômetras reduziram o problema original ao de encontrar os dois meios proporcionais, aqui, no caso da trisseção do ângulo, os geômetras reduziram-no ao problema da construção por *nêusis*, ou seja, ao da inserção de um segmento de reta de comprimento pré-definido entre duas curvas, de modo que um ponto fixo se encontre ou nesse segmento ou no seu prolongamento. Nesse caso, como no dos dois meios proporcionais, encontrar esse segmento de reta de comprimento pré-definido implica a necessidade de uma reta graduada, ou seja, novamente foge ao pressuposto básico de utilizar apenas régua (não graduada) e compasso.

Figura 18 - Nêusis - Ângulo

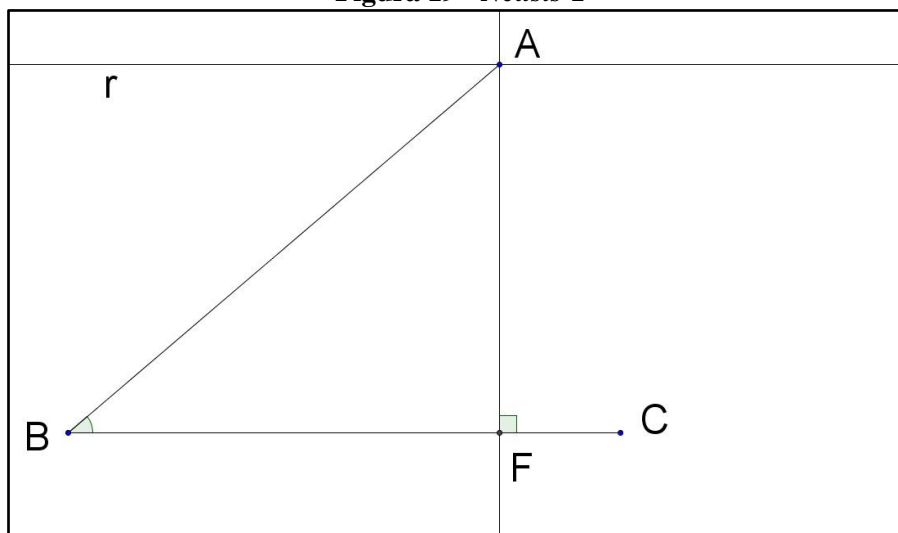


Fonte: Do autor, 2015

Mas como funciona o método de construção por *nêusis*? Vamos considerar que queiramos trisseccionar o ângulo agudo ABC, conforme Figura 18.

Pelo ponto A de um dos lados, fazemos uma paralela e uma perpendicular ao outro lado conforme Figura 19. Pela figura percebemos que AF é perpendicular a BC e a reta r é paralela a BC.

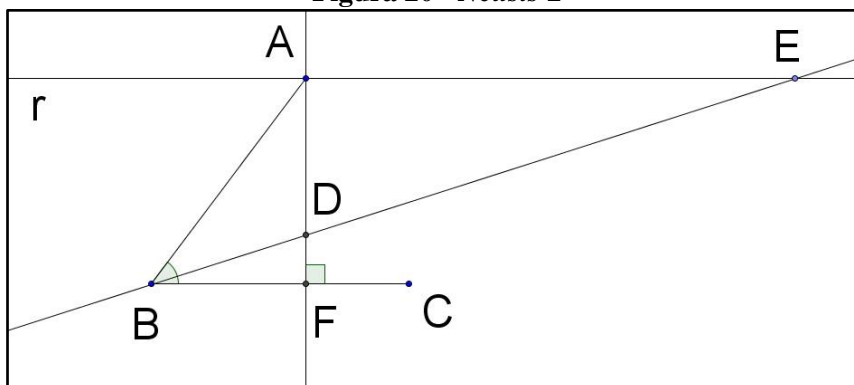
Figura 19 - Nêusis 1



Fonte: Do autor, 2015

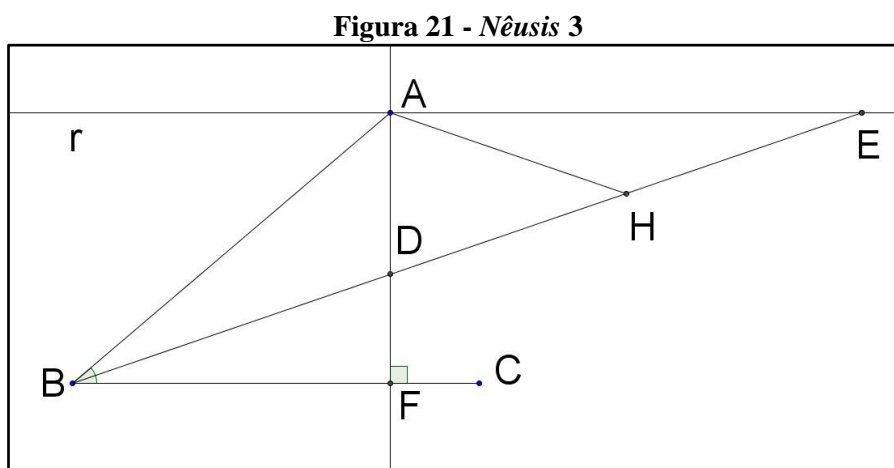
Em seguida, inserimos um segmento entre as duas retas paralelas (r e BC) de modo que o seu comprimento seja o dobro do comprimento do segmento AB e, ainda, de tal modo que o ponto B, vértice do ângulo a trisseccionar, seja um dos seus extremos e o outro esteja sobre a reta r.

Figura 20 - Nêusis 2



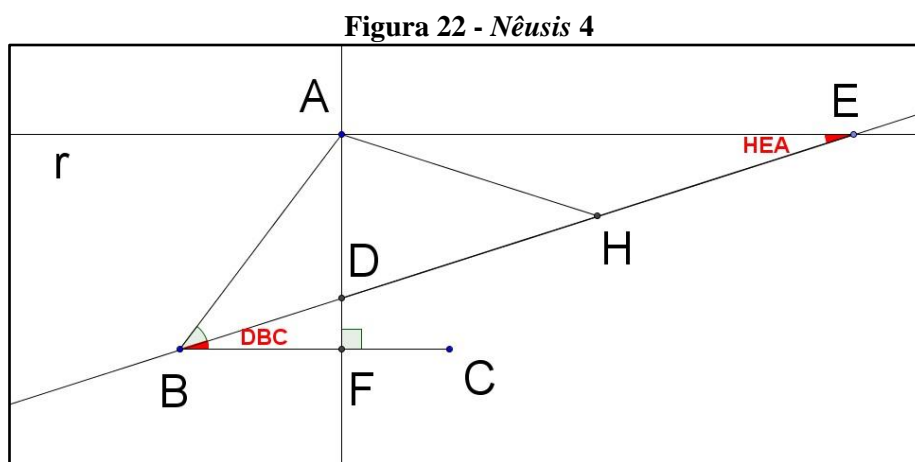
Fonte: Do autor, 2015

Então, o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC. E, portanto, resolvemos o problema da trisseção do ângulo. Vamos justificar que o ângulo ABC é trissectado pela reta BD. Começemos marcando o ponto H, que é o ponto médio do segmento DE, e unamos os pontos A e H, conforme Figura 21.



Fonte: Do autor, 2015

O segmento DE intercepta as retas paralelas AE e BC, portanto, com base na proposição 29⁴⁰ do Livro I dos *Elementos*, podemos afirmar que os ângulos alternos internos HEA e DBC são geometricamente iguais, conforme podemos verificar na Figura 22 os ângulos destacados em vermelho.



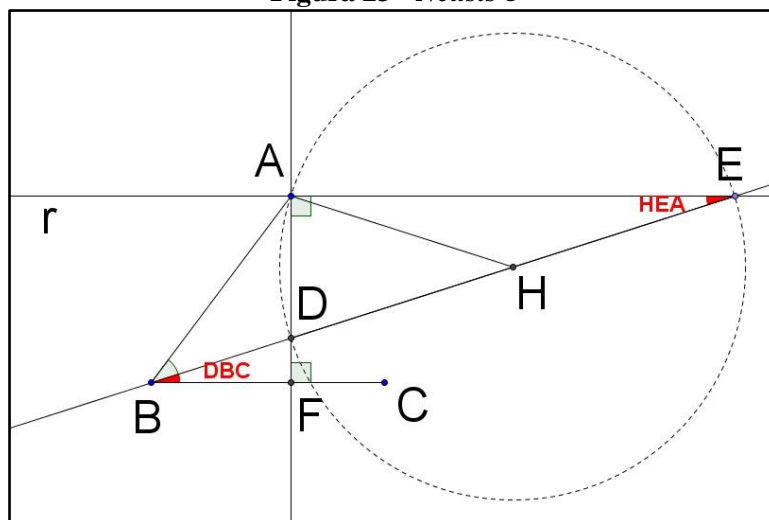
Fonte: Do autor, 2015

Por outro lado, o ângulo EAD, visto que é reto, pode ser inscrito numa

⁴⁰ A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 120).

semicircunferência de diâmetro DE e centro no ponto H, conforme Figura 23.

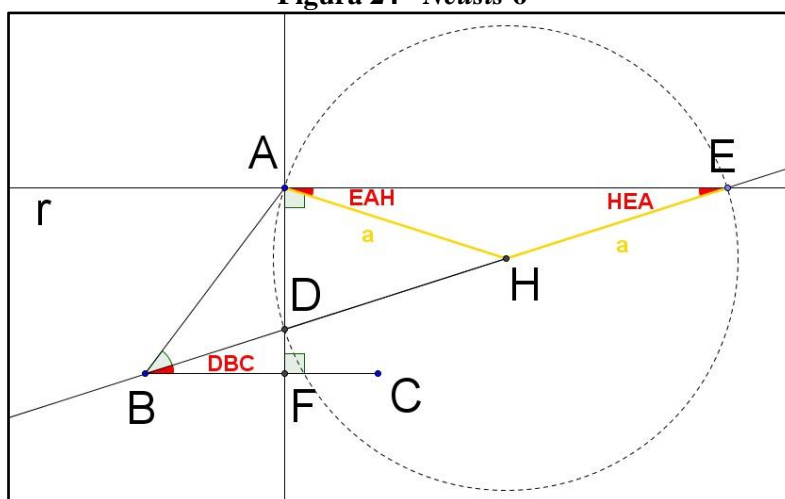
Figura 23 - Nêusis 5



Fonte: Do autor, 2015

Assim, visto que por construção os segmentos HE e HA são iguais, o triângulo AHE é isósceles e, portanto, da proposição 5⁴¹, do Livro I dos *Elementos*, os ângulos EAH e HEA são iguais, como vemos na Figura 24.

Figura 24 - Nêusis 6



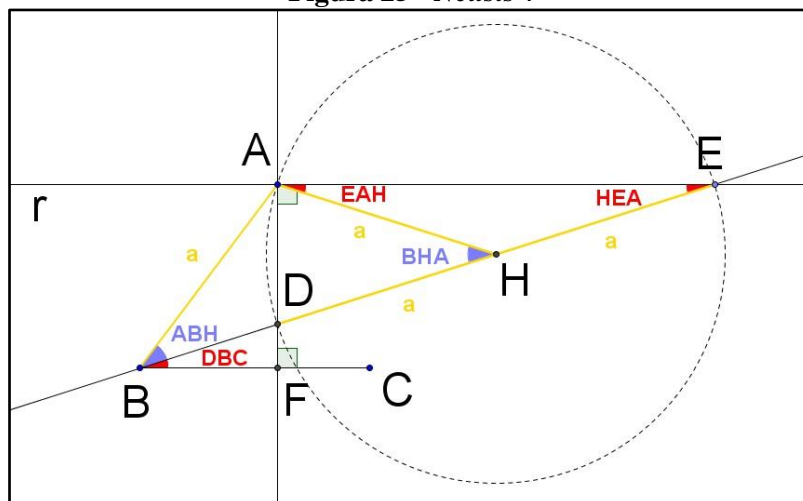
Fonte: Do autor, 2015

Lembrando que DE tem o dobro do comprimento de BA, H é o ponto médio de

⁴¹ Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongados ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si (EUCLIDES, 2009, p. 102).

DE e que AB é igual à AH, chegamos à conclusão que o triângulo ABH é isósceles. Assim, novamente da proposição 5, do Livro I dos *Elementos*, podemos dizer que os ângulos ABH e BHA são iguais (Figura 25).

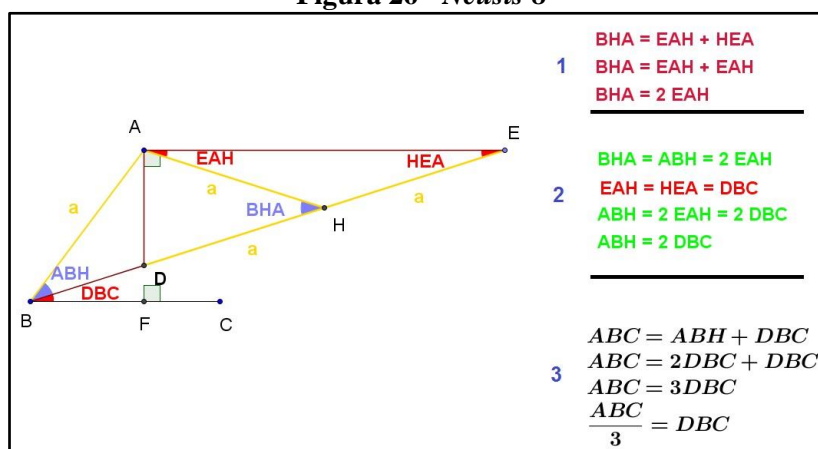
Figura 25 - *Nêusis 7*



Fonte: Do autor, 2015

Como o ângulo BHA é um ângulo externo ao triângulo AHE, podemos afirmar da proposição 32⁴², do Livro I dos *Elementos*, que o ângulo BHA é igual à soma dos ângulos internos opostos, EAH e HEA. O ângulo BHA é o dobro do ângulo HEA (ou do ângulo EAH) e, como o ângulo ABD é igual ao ângulo BHA, temos que o ângulo DBC é metade do ângulo ABD e, finalmente, que o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC (Figura 26).

Figura 26 - *Nêusis 8*



Fonte: Do autor, 2015

⁴² Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 122).

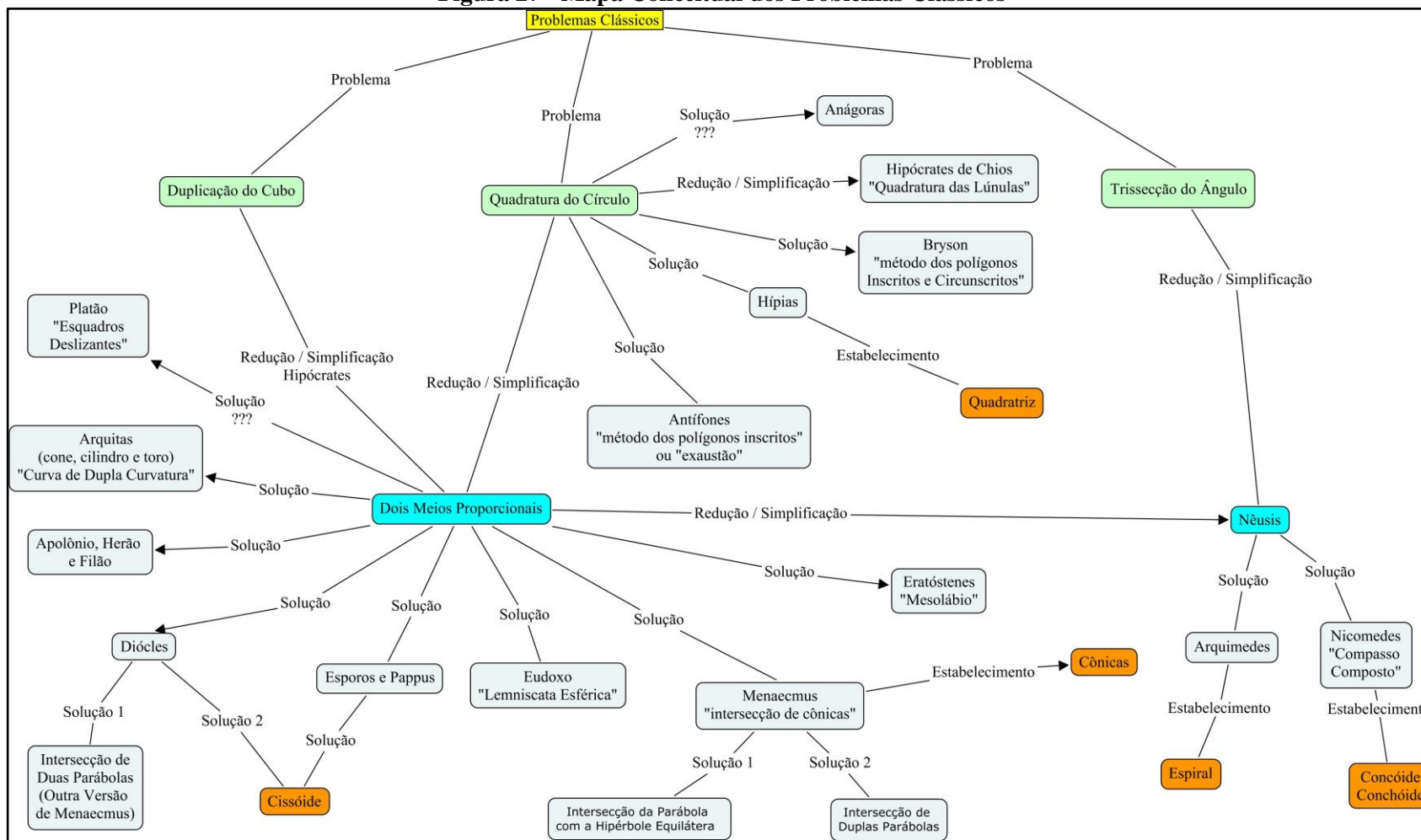
Pelo que foi exposto, o problema da trisseção de um ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento DE (o dobro de BA) entre as retas FA e AE e direcionado para o ponto B. Assim, ao nos depararmos com o problema da trisseção do ângulo, podemos reduzi-lo ao problema de construção por *nêusis*. A questão passa a ser como construir por *nêusis*. Thomas Heath mostra que a solução desta construção por *nêusis* é equivalente à solução de uma equação cúbica (HEATH, 1981a, 237). Em geral, as construções por *nêusis* não podem ser descritas com régua e compasso, mas uma exceção conhecida é o da construção da terceira lúnula de Hipócrates de Quios, na qual são utilizados apenas régua e compasso.

Além da construção por régua e compasso, os geômetras buscaram outras formas de resolver, como, por exemplo: a concóide/conchóide de Nicomedes, a quadratriz de Hípias e a espiral de Arquimedes. A *Coleção Matemática* de Pappus apresenta o desenvolvimento das soluções para o problema da trisseção do ângulo (PAPPUS, 1982a, p. 213- 235). A primeira solução apresentada por Pappus, a proposição 33, do Livro IV, faz uso de uma construção por *nêusis* cuja solução envolve o uso de uma hipérbole. A redução do problema da trisseção do ângulo a um problema de inclinação, conforme Pappus apresenta na proposição 34, do Livro IV, é, na verdade, resolver um problema de *nêusis*. Como mostra Pappus, nas proposições seguintes, é extremamente fácil de executar a construção com outros instrumentos mecânicos (como o esquadro de Nicomedes para traçar a concóide/conchóide ou uma régua graduada onde se marca a medida pretendida).

Em termos de resolução do problema, não havia mais o que fazer, já que era possível resolvê-lo mecanicamente, contudo, os geômetras não estavam satisfeitos com as soluções mecânicas. Essa insatisfação foi passada para os matemáticos posteriores até chegar a Descartes, ponto em que estamos interessados.

Enfim, após um exame minucioso dos três problemas clássicos, podemos fazer um resumo deles, juntamente com as curvas que foram necessárias para “resolvê-los”, conforme Figura 27.

Figura 27 - Mapa Conceitual dos Problemas Clássicos



Fonte: Do autor, 2015

Nas seções seguintes vou apresentar uma discussão sobre a definição, as propriedades e a construção de cada curva, com principal intuito de compreender os critérios que levaram Descartes a demarcar as curvas geométricas e as curvas mecânicas.

2.2 Curvas

2.2.1 Cônicas

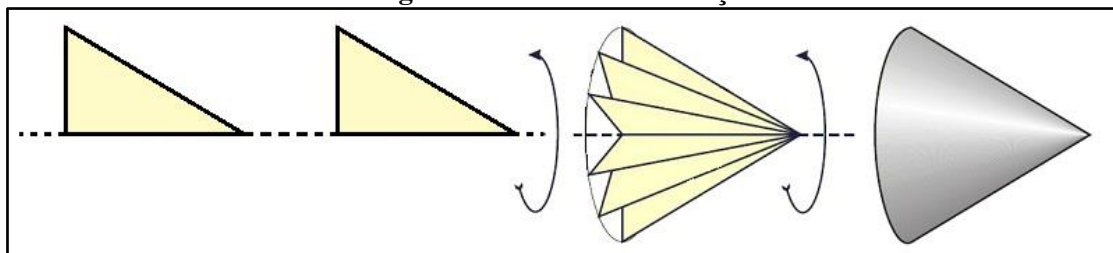
Vimos nas seções anteriores que Menaecmus (380 a.C. – 320 a.C.) resolveu o problema da duplicação do cubo encontrando dois meios proporcionais, que foram encontrados através da interseção de cônicas, cuja descoberta dessas curvas é atribuída a ele mesmo (HEATH, 1896, p. xix). Segundo Heath (1981b, p. 110) “a epigrama de Eratóstenes fala de ‘a tríade de Menaecmus’, de modo que apenas duas cônicas, a parábola e a hipérbole retangular, realmente apareciam como soluções de Menaecmus”. A questão posta à prova é: como Menaecmus pensou em obter tais curvas cortando o cone? De fato, não há documentos que respondam a essa pergunta, contudo Demócrito de Abdera [460 a.c - 370 a.c.], em um de seus textos, fala de uma seção de cone paralela e próxima à base; o que sugere um círculo, como mostrado na Figura 29.

É provável que os gregos tenham se deparado com alguma regularidade ao realizar cortes no cone e no cilindro. Esses cortes, oblíquos, por exemplo, geraram uma elipse e, ao se depararem com ela, tentaram realizar estudos que comprovassem algumas propriedades inerentes aos dois cortes. A observação de que uma elipse pode ser obtida a partir de um cilindro, bem como de um cone é feito por Euclides no seu livro *Phaenomena*, conforme aponta Heath (1981b, p. 111, tradução nossa): “se, diz Euclides, um cone ou um cilindro são cortados por um plano não paralelo à base, a seção resultante é uma seção de um cone acutângulo, o qual é semelhante a uma *θυρεοζ* (oval)”. É claro que, após essa observação, outras perguntas tenham surgido, como: que tipo de curvas é produzido se cortarmos um cone por um plano paralelo? Ou um plano oblíquo? Essas curvas geradas têm a mesma propriedade?

Também sabemos, por meio de Eutócio, que os gregos tinham conhecimento de como obter um cone por meio da revolução de um triângulo retângulo, conforme

podemos verificar na Figura 28.

Figura 28 - Cone de Revolução



Fonte: Do autor, 2015

Destes cones, ele distinguiu três tipos; conforme o ângulo vertical do cone fosse menor, igual ou maior que um ângulo reto, eles chamaram os cones de: cone acutângulo, cone reto, ou cone obtusângulo, respectivamente em relação à abertura do ângulo. Além disso, eles produziram três secções a partir do corte feito na perpendicular a uma das linhas geratrizes do cone; as curvas foram chamadas de: *oxytome* (quando o corte era feito num cone acutângulo), *orthotome* (quando o corte era feito num cone reto) e *amblytome* (quando o corte era feito num cone obtusângulo) (BOYER, 2012, p. 114). Esses nomes ainda foram utilizados por Euclides e Arquimedes.

Após esse período, outros matemáticos se debruçaram sobre as cônicas, como é o caso de Apolônio, Pappus e Aristeu. Apolônio escreveu seu famoso texto *As Cônicas* e Pappus, o *Tesouro da Análise*. De acordo com Pappus, Euclides em seu livro sobre cônicas, deu crédito a Aristeu por descobrir as cônicas, em que são apresentadas em um texto com cinco livros chamado *Solid Loci*. O nome *Solid Loci* está simplesmente relacionado às cônicas. Heath afirma que há dúvidas sobre a origem desses termos e acrescenta:

Nós achamos que lugares planos são chamados assim porque eles são gerados no plano (mas de modo algum as curvas mais complexas, como a quadratriz e a espiral de Arquimedes), e de lugares sólidos derivam seu nome do fato de serem obtidas como secções de figuras sólidas (mas de modo algum as curvas mais complexas, como as curvas espíricas que são secções das ovais ou toros) (HEATH, 1981b, p. 117).

Na classificação de Pappus, diferente da classificação de Aristeu, ele separou em problemas planos, sólidos e lineares. Os problemas planos⁴³ (*plane loci*) eram aqueles

⁴³ Assumo a classificação que Pappus atribui aos problemas como a classificação para os lugares geométricos.

que eram resolvidos por linhas retas e círculos, os problemas sólidos (*solidi loci*) os resolvidos por cônicas e os lineares (*linear loci*) os resolvidos por outras curvas.

Voltando ao Grande Geômetra, não há como falar das cônicas sem falar em Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.), pois ele dedicou sua vida a elas. O texto intitulado *As Cônicas* possuía oito livros, sendo que o último se perdeu. Quatro sobreviveram na versão original grega e três na versão traduzida em árabe. Eles foram editados por Halley em 1710, os quatro primeiros livros sendo dados do grego com tradução para o latim, e os três restantes sendo traduzidos do árabe para o latim, os quais Halley adicionou uma conjectura para restauração do oitavo livro (HEATH, 1896).

Como vimos em Menaecmus, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos diferentes de cone circular reto, de acordo com o ângulo do vértice: agudo, reto ou obtuso. Apolônio mostrou que não seria necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que de apenas um único cone poderiam ser obtidas todas as três espécies de seções, variando-se a inclinação do plano da seção, relacionando assim as curvas umas com as outras. Além disso, mostrou que o cone não precisa ser reto – eixo perpendicular à base circular – podendo ser também oblíquo, demonstrou que as propriedades das curvas independem de serem cortadas em cones oblíquos ou retos, e introduziu os nomes elipse, parábola e hipérbole, tomados da terminologia pitagórica referente a áreas. Conforme aponta Boyer (2012, p. 114)⁴⁴,

As palavras “elipse”, “parábola” e “hipérbole” não foram inventadas nesta ocasião; foram adaptadas de uso anterior, talvez pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. *Ellipsis* (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), e *hyperbola* (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra *parábola* (uma colocação ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência.

De um modo geral, os trabalhos de Apolônio substituíram todos os anteriores referentes às cônicas. Os quatro primeiros livros foram escritos como uma introdução elementar incluindo as proposições básicas das cônicas (no Livro I, proposições 11, 12 e 13, ele define a parábola, a hipérbole e a elipse). A maioria dos resultados destes livros já era de conhecimento de Euclides, Aristeu e outros, como o próprio Apolônio afirmou (HEATH, 1896, p. xxviii). Os quatro últimos livros são extensões do assunto, estudos

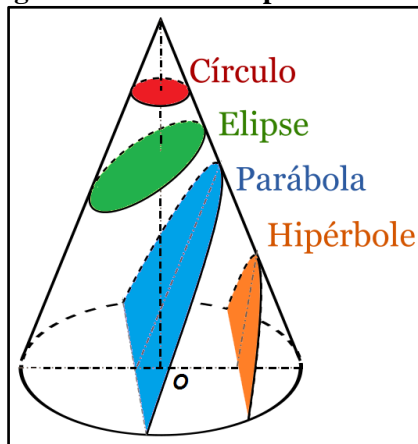
⁴⁴ A mesma afirmação aparece em Heath (1896, p. lxxviii-lxxix).

mais avançados⁴⁵.

No Livro I, ele apresenta as propriedades dos diâmetros e as tangentes das cônicas. No Livro II, ele investiga as relações entre as hipérbolas e suas assíntotas. Também estuda como traçar tangentes às cônicas dadas. O Livro III é aquele que contém o maior número de resultados novos, que Apolônio considera os mais belos possíveis. Os Livros de IV a VII também são originais. Neles se estuda o problema de achar normais às cônicas e se obtém proposições que determinam o centro de curvatura, o que conduz à equação cartesiana da *evoluta*⁴⁶. Heath (1896, p. lxxvi) diz que o Livro V é o mais notável dos livros existentes⁴⁷.

Foi Apolônio quem pela primeira vez mostrou que a partir de um único cone é possível obter as três espécies de secções cônicas, apenas variando a inclinação do plano de seção (HEATH, 1896, p. lxxvii). Para cada tipo de corte, uma seção cônica era criada: círculo, elipse, parábola e hipérbole, conforme pode ser visto na Figura 29.

Figura 29 - Cônicas a partir do Cone



Fonte: Do autor, 2015

⁴⁵ Pappus, em seu livro VII, afirma que “Apolônio nos transmitiu seus oito livros sobre cônicas completando os quatro livros das *Cônicas* de Euclides, tendo acrescentado quatro outros livros” (PAPPUS, 1982b, p. 503, tradução nossa).

⁴⁶ O lugar geométrico dos centros de uma curvatura de uma curva regular α é uma nova curva com o nome de evoluta. Alternativamente, a evoluta pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos irregulares das curvas paralelas a α ou como a envolvente das normais a α . Exemplo: Evoluta de uma circunferência. Como qualquer circunferência C tem curvatura constante e igual em valor absoluto ao inverso de seu raio, conclui-se que o centro de curvatura em qualquer ponto de C coincide com o centro da circunferência. Assim, o traço da evoluta de uma circunferência resume-se a um único o ponto, o centro.

⁴⁷ “A real distinção entre os quatro primeiros livros e o quinto consiste mais no fato de que os primeiros contêm uma conectada exposição da teoria geral das seções cônicas como uma base indispensável para futuros estudos do leitor em direções específicas, enquanto que o quinto livro é um exemplo de tal direção [especialização]. Os quatro primeiro livros foram dedicados ao que se considera os princípios elementares, e seu objetivo foi manter a tradição dos tratados utilizados como base para as aplicações especiais, como os encontrados na teoria dos *solid loci* desenvolvidos por Aristeu” (HEATH, 1896, p. lxxvi, tradução nossa).

Também provou que o cone não precisa ser reto. Finalmente substituiu o cone de uma só folha por um cone duplo, sendo assim o primeiro a reconhecer a existência dos dois ramos da hipérbole.

A seguir, apresento cada uma das cônicas a partir da definição de Apolônio e, em seguida, mostro alguns métodos de construção delas (por régua e compasso – ponto a ponto; por um movimento contínuo – usando corda ou algum tipo de instrumento; e uma construção mecânica utilizando algum instrumento⁴⁸).

PARÁBOLA

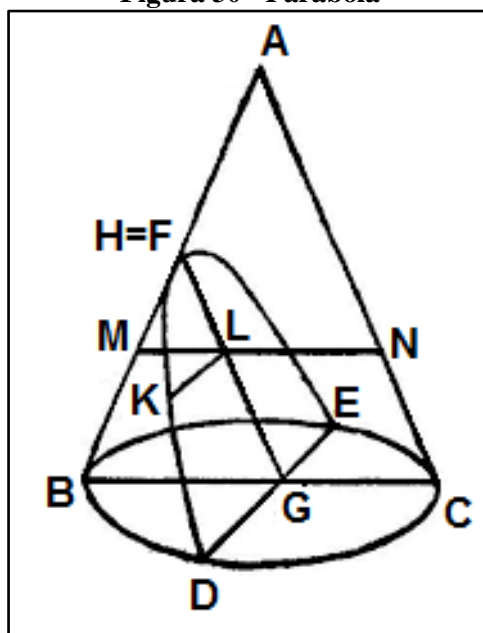
Na proposição 11, do Livro I, Apolônio define uma parábola conforme segue a citação:

Se um cone é cortado por um plano através do eixo, e também cortado por um plano qualquer a base do cone em uma linha reta perpendicular a base do triângulo axial, e se, mais, o diâmetro da seção é paralela a um dos lados do triângulo axial, e se qualquer linha reta é desenhada da seção do cone para este diâmetro tal que esta linha reta é paralela a uma seção comum do corte do plano e da base do cone, então esta linha para o diâmetro será igual à área do retângulo contido por (a) a linha reta da seção do vértex⁴⁹ para onde a linha reta do diâmetro irá cortá-lo e (b) qualquer linha reta a qual tem a mesma razão da linha reta entre o ângulo do cone e o vértex da seção como a área sobre a base do triângulo axial tem para o retângulo contido pelos dois lados do triângulo que sobraram. E a seção dada é chamada parábola (*παραβολή*) (APOLÔNIO, 2013, p. 19, tradução nossa) (Figura 30).

⁴⁸ Essas construções que apresento são apenas exemplos e não significam que são as únicas formas de construção. Inclusive, algumas construções são atuais.

⁴⁹ Apolônio no Livro I, definição I, conceitua os termos *cone*, *vértex* e *eixo*, de modo que “se de um ponto uma linha reta é ligada à circunferência de um círculo o qual não está no mesmo plano do ponto, a linha é produzida em ambas as direções, e se, com o ponto fixo existente, a linha reta sendo rotacionada sobre a circunferência do círculo retorna para o mesmo lugar do qual começou, então a superfície gerada composta de duas superfícies caídas verticalmente uma sobre a outra, cada uma das quais aumenta indefinidamente como a linha reta é produzida indefinidamente, eu chamo uma superfície cônica, e chamo o ponto fixo de vértex, e a linha reta desenhada do vértex ao centro do círculo eu chamo de eixo” (APOLÔNIO, 2013, p. 3, tradução nossa). Em notação atual, a superfície cônica é conhecida como cone, o vértex, é conhecido como vértice e o eixo é conhecido como geratriz. Vou procurar seguir a nomenclatura atribuída por Apolônio ao longo do texto.

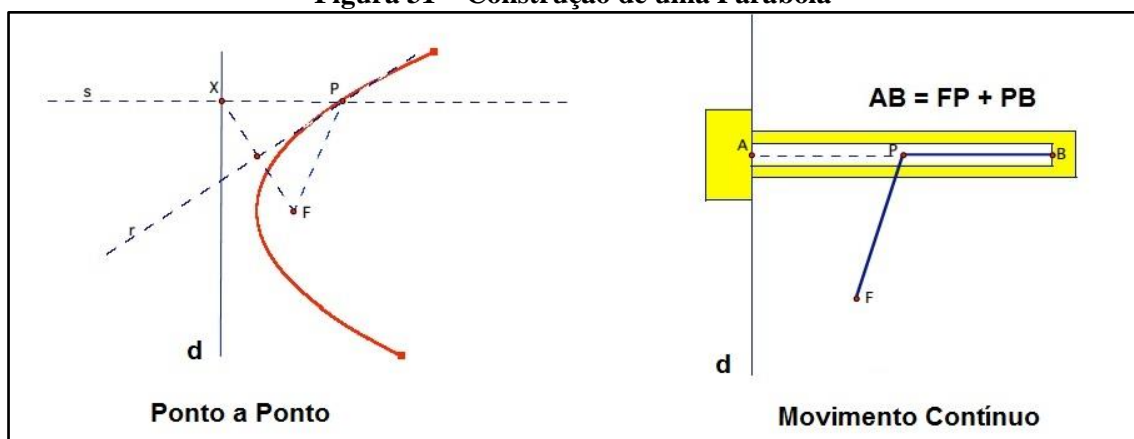
Figura 30 - Parábola



Fonte: Apolônio (2013, p. 19)

Para construir uma parábola com régua e compasso, ponto a ponto, basta que, para cada ponto $X \in d$, trace o segmento XF , sua mediatriz r e a perpendicular s à reta d por X . O ponto P da interseção de r e s descreve a parábola quando X percorre d .

Figura 31 – Construção de uma Parábola



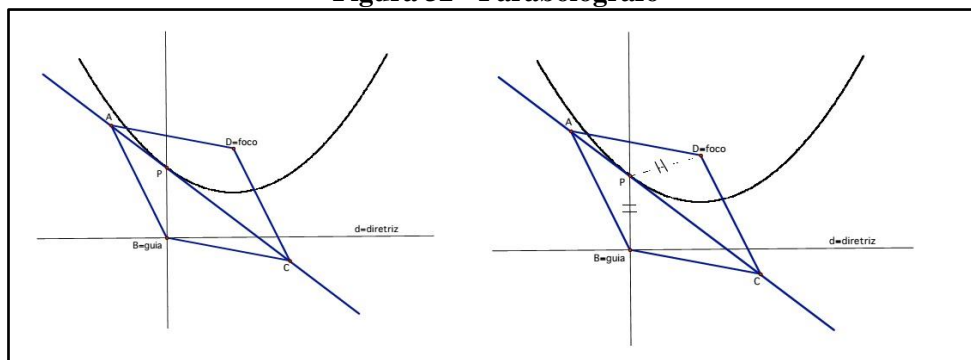
Fonte: Do autor, 2015

Outra forma de construir a parábola é com um traçado contínuo, usando um fio esticado e uma régua em T com uma abertura longitudinal AB de modo que o T percorre uma reta d . Amarre um barbante, de comprimento AB com uma das pontas presa na extremidade B da abertura, oposta ao T, e a outra fixada num ponto F da mesa.

Um lápis, mantendo esticado o barbante, enquanto o T escorrega pela reta d , descreve uma parábola de diretriz d e foco F , conforme Figura 31.

Há ainda mecanismos conhecidos como Parabológrafos, que também realizam a construção de uma parábola. Na Figura 32, apresento um exemplo de parabológrafo. Seja ABCD um losango articulado nos vértices, com D fixado numa placa e B correndo numa reta d . Uma régua de comprimento suficientemente grande correspondente à diagonal AC do losango e outra, perpendicular à d , fixada em B, encontram-se num ponto P que descreve a parábola de foco D e diretriz d . De fato, qualquer ponto da diagonal do losango está a uma distância idêntica dos vértices B e D, pois as suas diagonais são perpendiculares pelos seus pontos médios.

Figura 32 - Parabológrafo



Fonte: Do autor, 2015

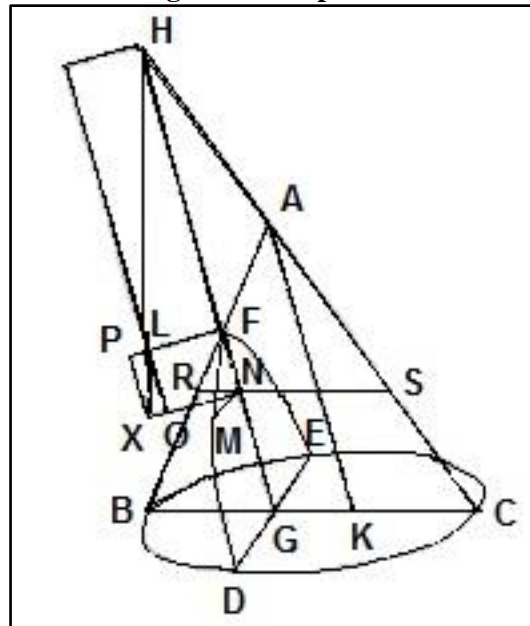
HIPÉRBOLE

Na proposição 12, do Livro I, Apolônio define uma hipérbole conforme segue a citação:

Se um cone é cortado por um plano através do eixo, e também corta por um plano qualquer a base do cone em uma linha reta perpendicular a base do triângulo axial, e se o diâmetro da seção produzida encontra um lado do triângulo axial além do vértex do cone, e se uma linha reta qualquer é desenhada da seção até o diâmetro de tal modo que a linha é paralela à seção comum do plano cortado e da base do cone, então esta linha reta do diâmetro será igual ao quadrado de área idêntica o qual é aplicado para uma linha reta [o parâmetro] (o qual é a linha reta a qual é adicionada ao longo do diâmetro da seção – tal que essa linha adicionada subentende o ângulo exterior do [vértex do] triângulo [axial] – tem razão igual a que o quadrado sobre a linha reta – paralela à seção do diâmetro – do vértex do cone à base do triângulo tem o retângulo contido pelas seções da base as quais esta linha reta vem do vértex faz quando desenha), tal que a área aplicada

(a qual tem uma distância da linha reta sobre o diâmetro da seção do vértex para onde o diâmetro é cortado da linha reta desenhando da seção até o diâmetro) projetado além ($\eta\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\omicron\upsilon$) da figura ($\epsilon\iota\delta\omicron\sigma$), similarmente situado no retângulo contido da linha reta subentendida ao ângulo exterior do [vértex] do triângulo [axial] e do parâmetro: e tal seção será chamada de hipérbole (*hyperbolé*) (APOLÔNIO, 2013, p. 21, tradução nossa) (Figura 33).

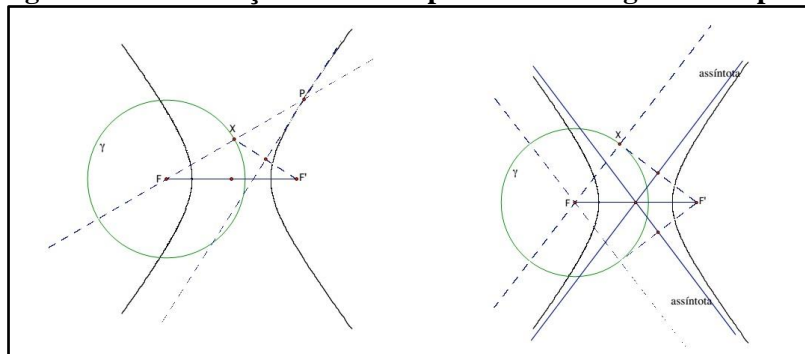
Figura 33 - Hipérbole



Fonte: Apolônio (2013, p. 22)

A definição de hipérbole leva à sua construção, ponto a ponto, com régua e compasso. Dado $X \in \gamma$, traçamos o segmento XF' e sua mediatriz encontrando a reta FX no ponto P . O conjunto dos pontos P que podem ser assim obtidos quando X varia em γ é a hipérbole. Nos dois pontos $X \in \gamma$, para os quais XF' é tangente à circunferência, a mediatriz de XF' é paralela à reta XF e, portanto, não fica determinado o ponto da hipérbole. Essas duas mediatrizes são chamadas de assíntotas.

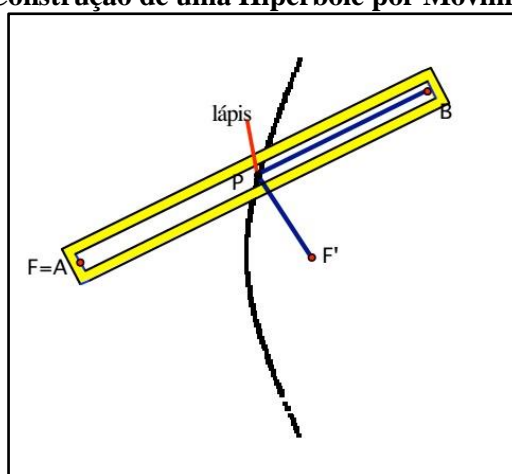
Figura 34 - Construção de uma Hipérbole com Régua e Compasso



Fonte: Do autor, 2015

A segunda construção pode utilizar um mecanismo para movimento contínuo. Ele é composto de uma placa onde estão fixados os focos F e F' , uma régua AB com a extremidade A fixada (mas podendo girar) em F e de um fio de comprimento l tal que $AB - FF' < l < AB$, preso em F' e em B . Mantendo o lápis na fenda da régua, com o fio sempre esticado, sua ponta P desenhará uma hipérbole de equação $|PF - PF'| = AB - l$. Observe, na figura, que $|PF - PF'| = PF - PF'$.

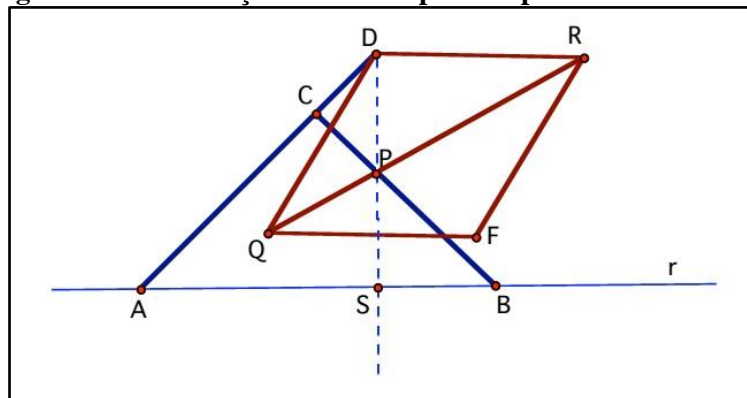
Figura 35 - Construção de uma Hipérbole por Movimento Contínuo



Fonte: Do autor, 2015

Outra construção, por meio de um instrumento mecânico, seria o desenvolvido por Strong⁵⁰, composto por duas barras AD e BC com um losango acoplado em D , para desenhar cônicas em geral.

Figura 36 - Construção de uma Hipérbole por um Instrumento



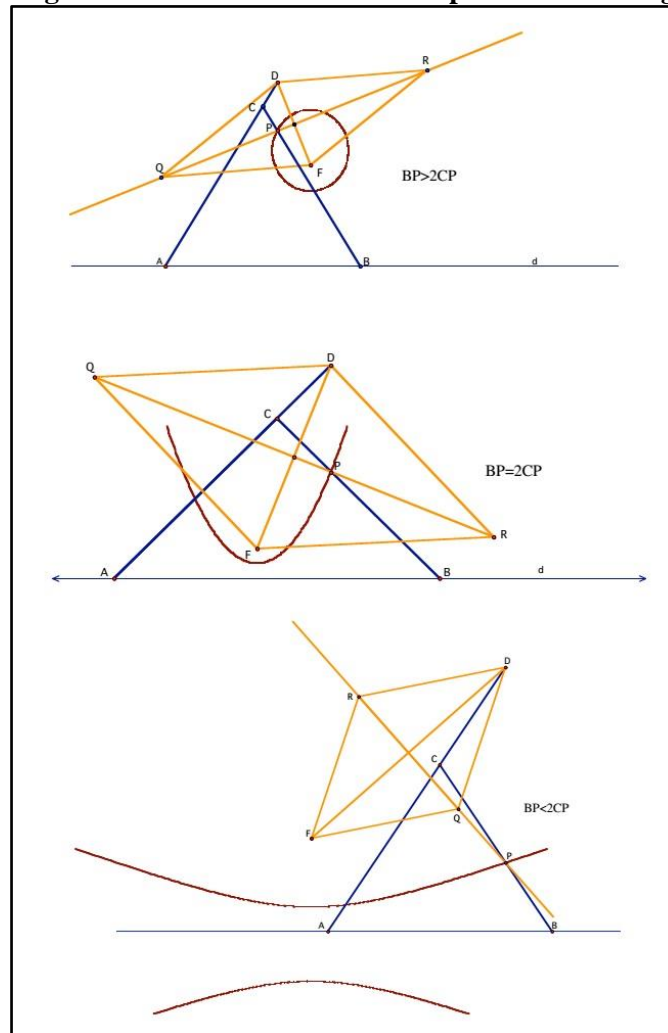
Fonte: Do autor, 2015

⁵⁰ Para maiores detalhes veja: STRONG, Wendell. M. c. *The Annals of Mathematics*, vol. 8, nº 6, pp. 181-184, 1893.

No mecanismo, $AC = BC$, P é um ponto fixado na barra BC , com $CD = PC$, que é obrigado a permanecer na diagonal QR do losango $QDRF$ e A e B movem-se livremente na reta r . Mantendo F fixado numa placa, P descreverá uma cônica, de foco F e diretriz r . De fato: estando P na diagonal do losango, $PD = PF$ e, então, $\frac{PF}{PS} = \frac{PD}{PS}$.

Por semelhança de triângulos tem-se $\frac{PD}{PS} = \frac{CP}{BP}$. Logo $\frac{PF}{PS} = \frac{PD}{PS} = \frac{2CP}{BP} = e$.

Figura 37 - Cônicas obtidas do Dispositivo de Strong



Fonte: Do autor, 2015

A cônica descrita por P será elipse, parábola ou hipérbole, conforme $BP > 2CP$, $BP = 2CP$ ou $BP < 2CP$, ou seja, conforme se tenha $BP > \frac{2}{3}BC$, $BP = \frac{2}{3}BC$ ou $BP < \frac{2}{3}BC$.

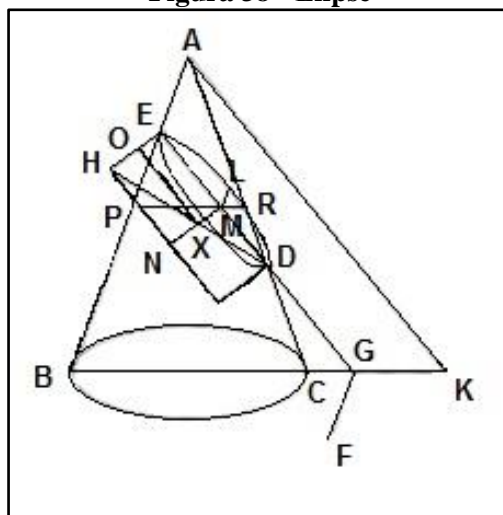
Como $\frac{BP}{2CP} = \frac{(BC - CP)}{2CP}$ e CP pode assumir qualquer valor entre BC e O, então, $\frac{PF}{PS}$ pode ser qualquer número positivo e o mecanismo pode ser ajustado para desenhar qualquer cônica.

ELIPSE

Na proposição 13, do Livro I, Apolônio define uma elipse conforme segue a citação:

Se um cone é cortado por um plano através do eixo e também cortado por um plano qualquer o lado que liga ambos os lados do triângulo axial e o qual está sobre o outro lado, quando estendido, não é nem paralela a base nem ao contrário, e se o plano, contendo a base do cone e o corte do plano ligado na linha reta perpendicular a outra base do triângulo axial ou ao produzido, então qualquer [linha] reta a qual está desenhada – paralela à seção comum do [base e corte] plano – da seção do cone ao diâmetro da seção será igual ao quadrado de idêntica área aplicada à linha reta [o parâmetro] (o qual o diâmetro da seção tem a razão como a área para a linha reta desenhada – paralela a ao diâmetro da seção – do vértex do cone à base do triângulo tem o retângulo ao qual está contido na linha reta cortada [sobre a base] desta linha reta na direção do lado do triângulo [axial]), sobre a área a qual tem uma distância da linha reta sobre o diâmetro do vértex da seção até onde o diâmetro está cortado pela linha reta da seção do diâmetro e a qual a área é deficiente ($\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\tau\omicron\nu$) por uma figura similar e similarmente situada no retângulo contido pelo diâmetro e pelo parâmetro. E tal seção será chamada de elipse (*éllipsis*) (APOLÔNIO, 2013, p. 24, tradução nossa) (Figura 38).

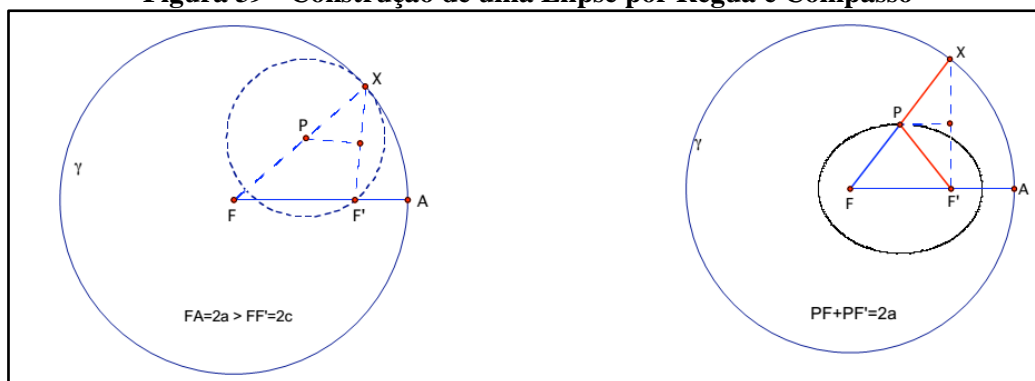
Figura 38 - Elipse



Fonte: Apolônio (2013, p. 24)

Para construir uma elipse com régua e compasso, ponto a ponto, basta que, para cada ponto $X \in \gamma$, traçamos os segmentos XF e XF' e a mediatriz de XF' que encontra XF num ponto P da elipse.

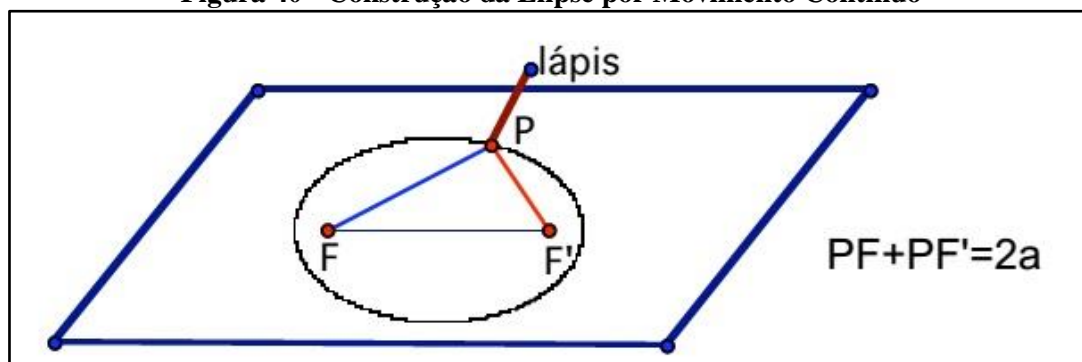
Figura 39 - Construção de uma Elipse por Régua e Compasso



Fonte: Do autor, 2015

Outra forma de construir uma elipse é com um traçado contínuo, dados a distância $2c$ entre os focos e a excentricidade $e < 1$. O mecanismo consiste de uma placa, com dois pontos F e F' fixados tais que $FF' = 2c$, e um fio flexível de comprimento $2a$, $a = \frac{c}{e}$, com as extremidades presas em F e F' . Um lápis, mantendo o fio esticado, desenha os pontos P da elipse de focos F e F' e excentricidade e , pois $PF + PF' = 2a$.

Figura 40 - Construção da Elipse por Movimento Contínuo



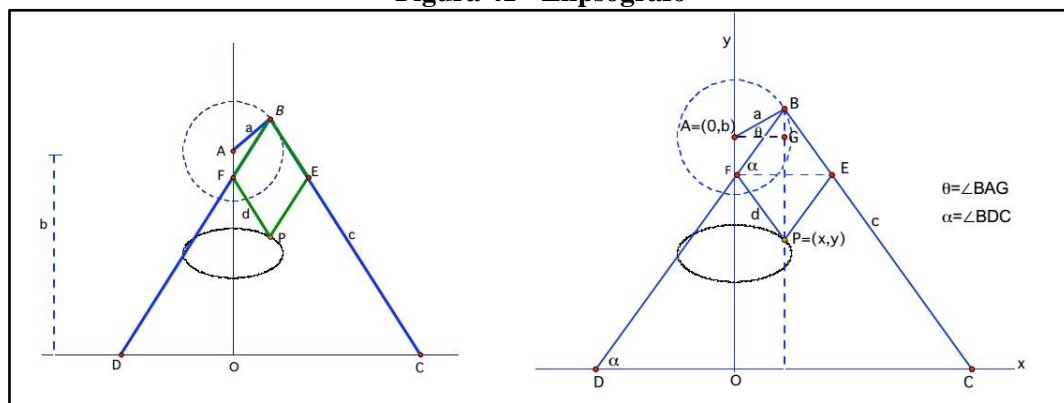
Fonte: Do autor, 2015

Podemos também utilizar um mecanismo (um elipsógrafo⁵¹), conforme a Figura 41, a seguir, articulada em A , B , E , P e F , em que o ponto A está fixado numa placa,

⁵¹ Outros elipsógrafos podem ser vistos no Museu Nacional de História Americana. Disponível em: <<http://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/ellipsographs>>.

$AB=a$, $BD=BC=c$, $BEFP$ é um losango de lado d , e as extremidades D e C movimentam-se numa reta fixada na placa e que está a uma distância b de A , com $b+a < c$. À medida que B percorre a circunferência de centro A , o vértice P do losango $BEFP$ percorre uma elipse.

Figura 41 - Elipsógrafo



Fonte: Do autor, 2015

A seguir, como exemplo da aplicação das cônicas, apresento a solução dos dois meios proporcionais realizada por Menaecmus, utilizando a interseção da hipérbole com a parábola.

PROBLEMA DOS DOIS MEIOS PROPORCIONAIS – SOLUÇÃO DE MENAECMUS

Como vimos, Menaecmus resolveu o problema da duplicação solucionando o problema dos dois meios proporcionais utilizando a interseção de duas cônicas, a hipérbole e a parábola. Vamos verificar a construção dessa solução, que se enquadra como um problema sólido, segundo a demarcação de Pappus.

Dados dois segmentos de reta a e b é requerido encontrar seus dois meios proporcionais x e y .

CONSTRUÇÃO:

1. Marque a metade de um quadrante na vertical e na horizontal começando em O . Desenhe uma parábola com eixo na vertical, vértex em O , e *latus rectum*⁵²

⁵² *Latus rectum* e *latus transversum* são os termos latinos para certos segmentos de reta definidos nas propriedades das seções cônicas. O vértex da seção cônica é dado como a origem e as direções X e Y são

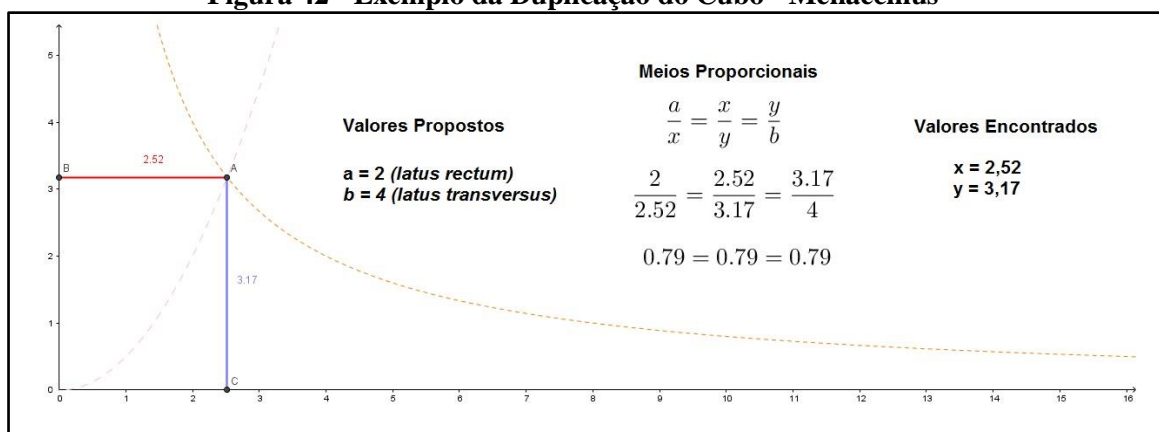
a.

2. Desenhe no quadrante uma hipérbole (apenas um ramo dela), a qual tenha os dois eixos como assíntotas e cujas abscissas e ordenadas formem o retângulo igual a (a, b) .
3. As duas curvas interceptam em A; desenhe as perpendiculares AX e AY partindo de A até os eixos, com X e Y na horizontal e vertical, respectivamente.
4. Agora $x = OX$ e $y = OY$ são os dois meios proporcionais requeridos.

PROVA: Como C está sobre a parábola com *latus rectum* a , nós temos $ay = x^2$; e como A está sobre a hipérbole, nós temos $xy = ab$. Então $a : x = x : y = y : b$.

Como podemos ver, a construção da interseção das cônicas pressupõe que, dados seus parâmetros (vértex, eixos, *latus rectum*, *latus transversus*, ou dados equivalentes) essas curvas poderiam de alguma forma ser postas no plano e, assim, os pontos da interseção podem ser conhecidos. Se retornarmos ao problema da duplicação do cubo em que $b = 2a$, podemos resolvê-lo utilizando a construção fornecida, conforme a Figura 42⁵³.

Figura 42 - Exemplo da Duplicação do Cubo - Menaecmus



Fonte: Do autor, 2015

dadas ao longo do eixo da cônica e perpendicular ao eixo, respectivamente, então, o *latus rectum* a e o *latus transversum* b ocorrem nas equações analíticas para as cônicas da seguinte forma:

$$y^2 = ax(\text{parábola}); y^2 = ax - \frac{a}{b}x^2(\text{elipse}); y^2 = ax + \frac{a}{b}x^2(\text{hipérbole}).$$

⁵³ O leitor pode se atentar para o resultado do problema, que é o mesmo obtido pelo Mesolábio de Eratóstenes, conforme Figura 4.

2.2.2 *Espiral*

A espiral de Arquimedes é assim descrita por ele na Definição 1:

Se uma linha reta traçada num plano gira a uma velocidade uniforme sobre uma extremidade que permanece fixa e volta para a posição a partir da qual começou, e se, ao mesmo tempo em que a linha gira, um ponto move-se a uma velocidade uniforme ao longo da linha reta começando a partir da extremidade que permanece fixa, o ponto vai descrever uma *espiral* (ἑλὺξ) no plano (ARQUIMEDES, 2002, p. 165, tradução nossa).

Na Definição 2, Arquimedes (2002, p. 165-166, tradução nossa) diz que “a extremidade da linha reta a qual permanece fixa enquanto a linha reta gira será chamada *origem* (ἀρχή) da espiral”. Na Definição 3 ele considera que “a posição da linha a qual a linha reta começa a girar será chamada de *linha inicial* na revolução (ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς)” (ARQUIMEDES, 2002, p. 166, tradução nossa).

E apresenta as próximas quatro definições, (ARQUIMEDES, 2002, p. 166, tradução nossa):

4. O comprimento o qual o ponto se move ao longo da linha reta descreve uma revolução, será chamada a *primeira distância*, que descreve o mesmo ponto na segunda revolução a *segunda distância*, e similarmente deixe que as distâncias descritas em mais revoluções serem chamadas depois o número partícula da revolução.

5. Deixe a área delimitada pela espiral descrita na primeira revolução e a primeira distância a ser chamada de *primeira área*, que é delimitada pela espiral descrita na segunda revolução e a *segunda distância* a segunda área, e de forma semelhante para o resto das áreas.

6. Se a partir da origem da espiral qualquer linha reta for desenhada, deixe que o lado dela, que está na mesma direção que a revolução seja chamada *adiante* (προαγούμενα), e a que se encontra na outra direção *atrás* (ἐπόμενα).

7. Seja o círculo desenhado com a *origem* como o centro e a *primeira distância* como o raio ser chamado o *primeiro círculo*, que desenhado com o mesmo centro e duas vezes o raio o *segundo círculo*, e igualmente para os círculos que se sucedem.

Em seguida, Arquimedes apresenta um resultado que servirá para a quadratura do círculo e para a trisseção do ângulo, ao afirmar que,

a área delimitada pela espiral e pela linha reta que voltou para a posição a partir da qual começou é um terço do círculo descrito com o ponto fixo sendo o centro e com o raio o comprimento percorrido pelo

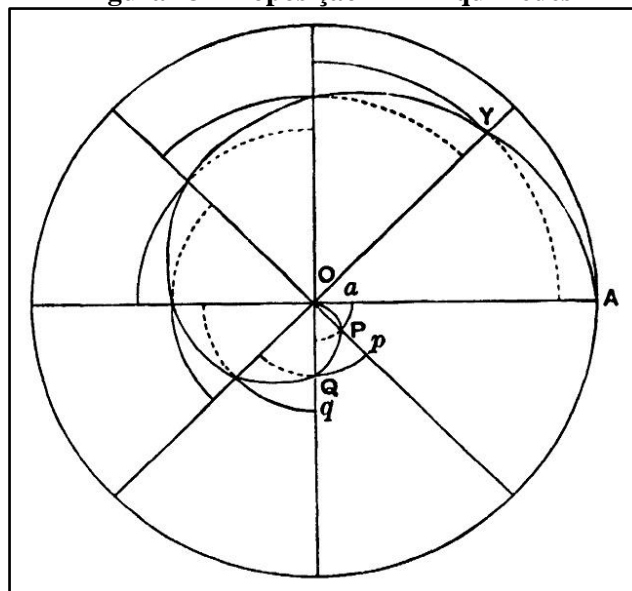
ponto ao longo da linha reta durante uma revolução (ARQUIMEDES, 2002, p. 154, tradução nossa).

Mais à frente, ele trata da Proposição 24, que afirma: “a área delimitada pela primeira volta da espiral e da linha inicial é igual a um terço do ‘primeiro círculo’ [= $\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$, onde a espiral é $r = a\theta$]” (ARQUIMEDES, 2002, p. 178, tradução nossa).

A prova para essa proposição pode ser utilizada para garantir que,

se OP [Figura 43] é um vetor radial qualquer na primeira volta da espiral, a área da porção da espiral delimitada será igual a um terço do setor circular do círculo desenhado com raio OP, o qual é delimitado pela linha inicial e OP, medida na direção adiante da linha inicial $r = a\theta$ (ARQUIMEDES, 2002, p. 178, acréscimo e tradução nossos).

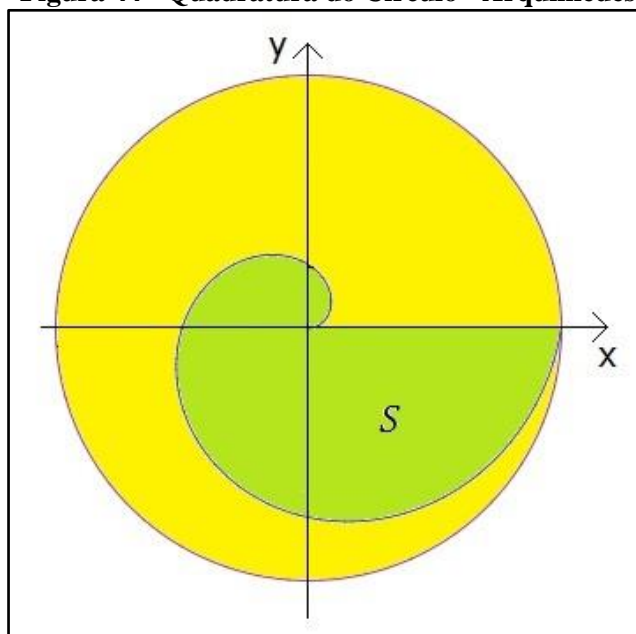
Figura 43- Proposição 24 - Arquimedes



Fonte: Arquimedes (2002, p. 179)

Se considerarmos que a área do círculo é dada por A_c e que a área da região sob a espiral de Arquimedes é S (área verde – conforme Figura 44), então, de acordo com Arquimedes, $S = \frac{1}{3}A_c$.

Figura 44 - Quadratura do Círculo - Arquimedes



Fonte: Do autor, 2015

Outro resultado importante diz respeito à tangente ao comprimento de uma circunferência:

E, se uma linha reta tocar a espiral no extremo da espiral, e outra linha reta for desenhada em um ângulo reto com a linha que tem girado e retomar a sua posição desde a extremidade fixa do ângulo, de modo a satisfazer a tangente, eu digo que a linha reta tão atraída para atendê-la é igual ao comprimento da circunferência (ARQUIMEDES, 2002, p. 154, tradução nossa).

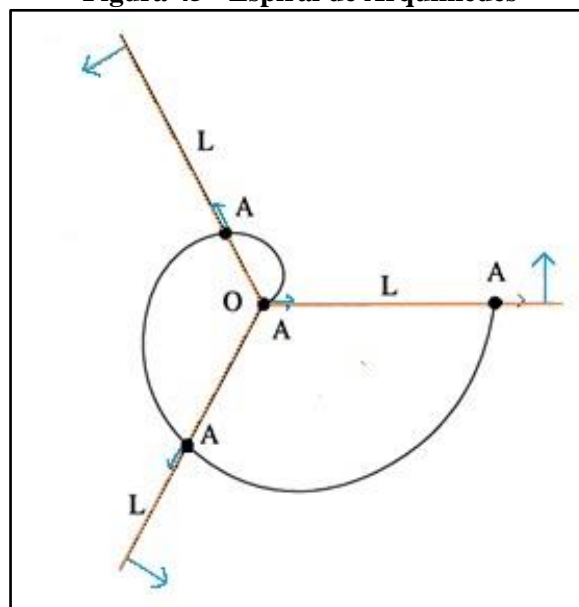
ESPIRAL - ARQUIMEDES

Dado um ponto O no plano; uma curva, iniciando em O , sendo traçada, chama-se espiral arquimediana.

CONSTRUÇÃO

1. Seja uma linha L que, iniciando em O , rotaciona uma volta completa em velocidade uniforme; ao mesmo tempo um ponto A move-se uniformemente ao longo de L iniciando em O .
2. A curva traçada pelo ponto A é a espiral.

Figura 45 - Espiral de Arquimedes

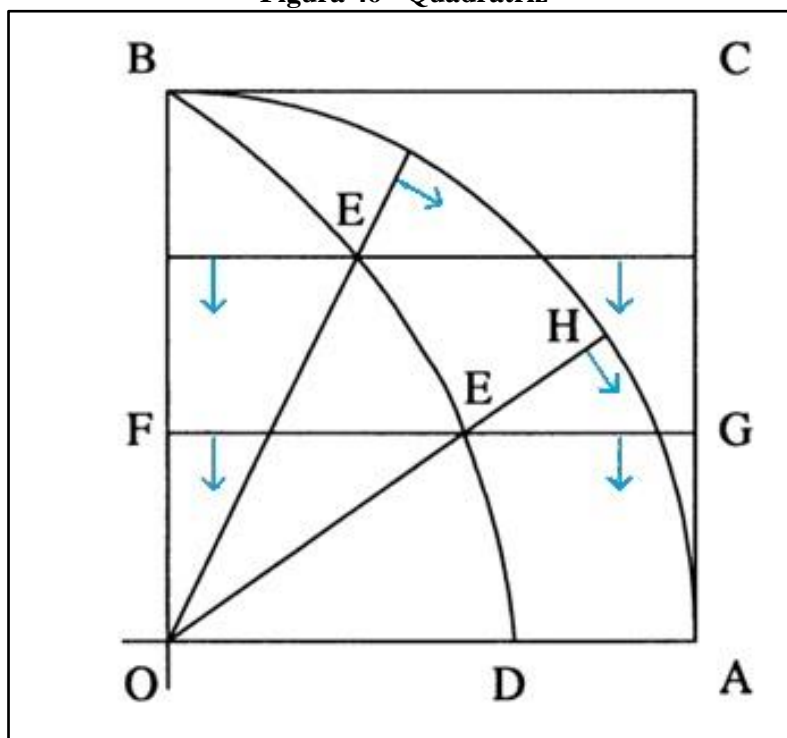


Fonte: Do autor, 2015

2.2.3 *Quadratriz*

Pappus assumiu a definição da espiral conhecida. Ele foi mais explícito sobre a quadratriz, curva, segundo ele, usada por Dinostratos e Nicomedes. Ele deu a sua definição no Livro IV:

Figura 46 - Quadratriz



Fonte: Do autor, 2015

Dado um quadrado OBCA e um quadrante OBA, a curva que está traçada é quadratriz.

CONSTRUÇÃO:

1. Permita que um segmento de linha vire uniformemente em torno da posição O da posição OB até a posição OA (sendo que seu ponto final descreve o arco BA); durante esse intervalo de tempo faça outro segmento de linha se mover de maneira uniforme a partir da posição BC até a posição OA, mantendo paralela à OA.

2. Durante o movimento o ponto de interseção E das duas linhas traça a quadratriz BEED.

Uma consequência imediata da definição, observada por Pappus, é que, para qualquer ponto E na quadratriz, com posições correspondentes de FG do segmento de reta movimentando-se na horizontal e do movimento radial de OH, a seguinte proporcionalidade é mantida:

$$\text{arc}BH : \text{arc}BA = BF : BO \text{ ou em outra notação } \frac{\text{arc}BH}{\text{arc}BA} = \frac{BF}{BO}$$

Pappus provou que

$$OD : OA = OA : \text{arc}BA$$

Se uma quadratriz foi dada, os comprimentos OD e OA também foram dados, e a proporcionalidade da equação anterior implica que o $\text{arc}BA$ pode ser determinado. Assim o círculo foi retificado e, portanto, o círculo pode ser quadrado, usando a proposição de Arquimedes que diz que a área de um círculo é igual à metade da área do retângulo formado pelo seu raio e sua circunferência. Esta aplicação da curva deu o seu nome.

Pappus também mencionou outra objeção. Ao utilizar a quadratriz para a quadratura do círculo por meio da proporcionalidade da equação dada, assumiu-se que foi dada a interseção D da quadratriz e a base. Mas esse ponto não estava coberto pelo procedimento descrito na definição. De fato, no final do procedimento, as duas linhas que se deslocam coincidem e assim a sua interseção, que deve ser D, não foi definida. Pappus qualificou essa construção da quadratriz como “bastante mecânica”, mas acrescentou que a curva pode ser gerada de uma forma geométrica pela interseção da superfície do lugar geométrico. Em seguida, descreveu duas maneiras pelas quais a

quadratriz poderia ser considerada como resultante da interseção de superfícies.

Um bom exemplo do uso da quadratriz na construção de problemas lineares é a solução de Pappus para o problema de dividir um determinado ângulo em relação a uma determinada razão.

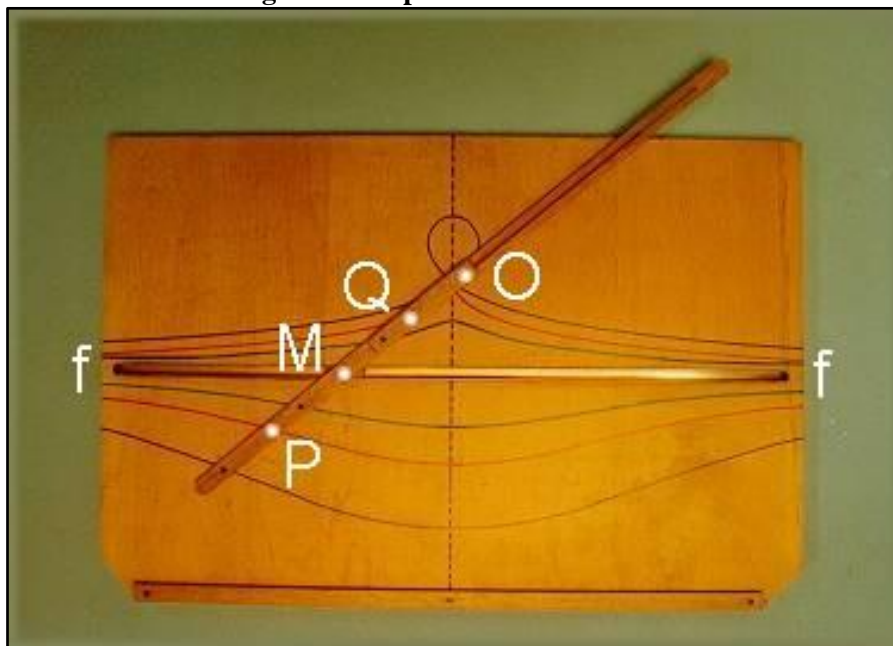
2.2.4 *Concóide (Conchóide)*

Segundo parece, Nicomedes inventou a *concóide/conchóide* (curva em forma de concha), para resolver o problema da trisseção do ângulo e o problema da duplicação do cubo. Vários comentadores antigos relacionam Nicomedes (séculos II-III d.C.) com a invenção da *concóide/conchóide*. Os mais importantes são Pappus de Alexandria, Proclus de Lícia e Eutócio de Áscalon. Ao acreditar nas afirmações de Proclus, quando comenta a proposição de Euclides relativa à bisseção do ângulo, no Livro I, proposição 9, dos *Elementos*, na sua obra *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, o problema da trisseção do ângulo deu origem à invenção de mais uma nova curva - a *concóide/conchóide*.

No Livro IV da *Coleção Matemática*, Pappus (1982a, p. 185-186) dá a definição de *concóide* e enuncia algumas das suas propriedades estabelecidas por Nicomedes, na Proposição 23 ele explica como se pode utilizar a *concóide/conchóide* para efetuar uma construção por *nêusis*, apresentando em seguida a solução de Nicomedes para o problema da duplicação do cubo.

Pappus (1982a, p. 187) afirma que a *concóide/conchóide* pode ser descrita de forma fácil mecanicamente por meio de um aparelho simples que Nicomedes imaginou. É ilustrativa a Figura 47, de um mecanismo para desenhar a *concóide/conchóide* de uma reta, obtida no site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia, Itália.

Figura 47 - Aparelho de Nicomedes



Fonte: Museu Universitário de História Natural⁵⁴

Dadas duas linhas retas L e M, um ponto O (referido como o pólo da *nêusis*) e um segmento a ; isto é requerido para encontra um linha através de O, interceptando L e M em A e B, respectivamente, tal que $AB = a$.

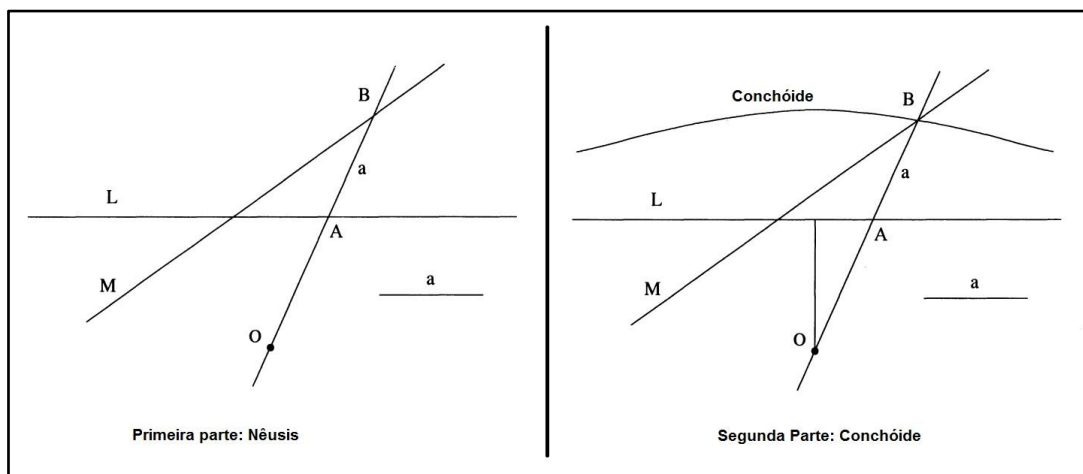
CONSTRUÇÃO:

1. Desenhe uma conchóide com eixo ao longo de L e pólo em O (isto pode ser feito com a ajuda do instrumento descrito na Figura 10, ajustando os pinos O e F tais que b seja igual à distância de O até L e a seja igual ao segmento dado); a conchóide intercepta M em B.
2. Desenhe OB; ela intercepta L em A.
3. OAB é a linha requerida.

PROVA: Imediatamente da definição da concóide/conchóide.

⁵⁴ Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: < <http://www.museo.unimo.it/labmat/mesolbin.htm>>. Acesso em: 11 jul. 2015.

Figura 48 - Concóide / Conchóide de Nicomedes

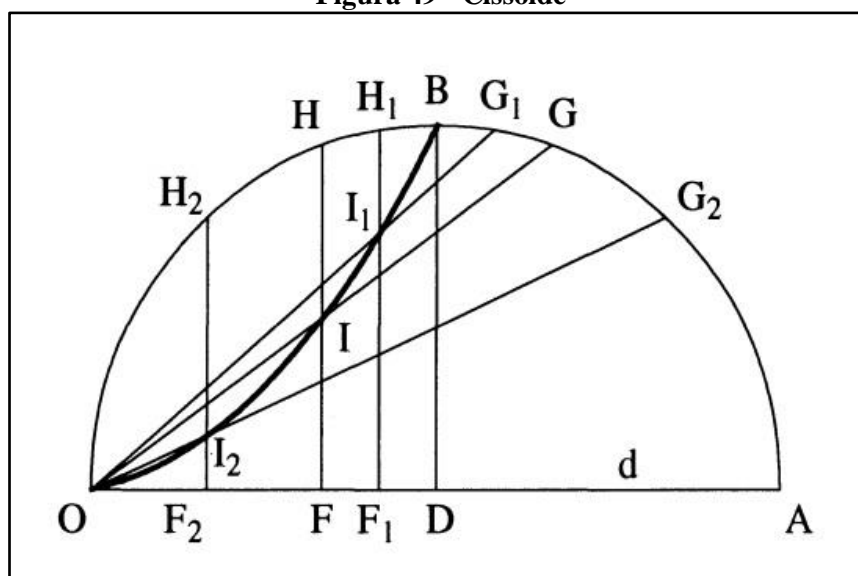


Fonte: Adaptado de Bos (2001, p. 32)

2.2.5 Cissóide

Deve-se a Diócles a *cissóide*, mas não foi ele quem lhe atribuiu este nome, pois nos seus escritos ele utiliza o termo “linha” para se referir a tal curva e, além disso, “o nome *cissóide* (“forma de hera”) é mencionado [pela primeira vez] por Gémino no séc. I a.C., isto é, cerca de um século depois da morte do inventor Diócles” (LOCKWOOD, 1961, p. 132, tradução nossa).

Figura 49 - Cissóide



Fonte: Bos (2001, p. 46)

Dado um semicírculo OAB com raio $OD = DA = d$ e vértex B; uma curva, chamada cissóide, é construída ponto a ponto.

CONSTRUÇÃO:

1. Escolha arbitrariamente um ponto H sobre o arco OB; desenhe uma linha através de H perpendicular a OA interceptando a base em F.
2. Marque G sobre o arco BA tal que $HB = BG$; desenhe GO; ele intercepta FH em I.
3. Proceda como em 1 e 2 iniciando com outros pontos H_1, H_2, \dots sobre o arco OB.
4. Os pontos I, I_1, I_2, \dots encontrados formam uma curva de O até B; esta curva é a cissóide.
5. Após uma construção suficiente de ponto I_i , conecte então os pontos com linhas para formar a curva.

2.2 Algumas Considerações

Procuro agora, nesta seção, fazer algumas considerações sobre as curvas explicitadas tendo como base o texto *Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry*⁵⁵ de George Adams Molland, publicado em 1976, na revista de História da Matemática, e algumas de minhas conclusões a respeito.

As curvas desenvolvidas pelos antigos geômetras gregos tinham o intuito principal de resolver os problemas clássicos gregos. Nesse aspecto, admitir a solução de um problema implicava também aceitar os critérios de construtibilidade da curva. Como vimos nas seções anteriores, as curvas foram construídas utilizando necessariamente algum tipo de instrumento. Os ditos “aceitáveis” eram a régua e o compasso, os outros, ainda sofriam algum tipo de preconceito. É importante notar que aceitar a construção de uma curva significava aceitá-la no *hall da fama* da geometria grega. Ok. Mas de que modo os geômetras gregos aceitavam uma curva (ou a construção dela como geométrica

⁵⁵ Como o próprio autor cita, o seu objetivo é “contribuir para clarificar a natureza da obra de Descartes, isolando algumas diferenças fundamentais entre a geometria dele e a dos antigos geômetras gregos” (MOLLAND, 1976, p. 22, tradução nossa).

– pertencente à geometria)?

Molland (1976) apresenta a tese de que as curvas podem ser especificadas⁵⁶ de dois modos distintos: por suas propriedades ou por sua gênese. Para ele especificar uma curva por suas propriedades significa estabelecer uma propriedade ou qualidade, normalmente quantitativa, em que todos os pontos da curva lhe obedecem. Por exemplo, quando dizemos que a circunferência é a união de todos os pontos que equidistam de dado ponto, estamos a determinando por meio de sua propriedade ou de sua qualidade “de ter os pontos equidistantes de um dado ponto”. Vale aqui lembrar que Descartes, ao separar as curvas pelos tipos de equações a que elas se vinculavam estava determinando-as por suas propriedades⁵⁷. Já a especificação por gênese está atrelada à construtibilidade das curvas, ou seja, aos meios que são necessários para sua construção. Por exemplo, a distinção que Pappus realizou entre os tipos de problemas (e aqui irei considerar os problemas como tipos de curvas), ao dizer que os problemas planos eram aqueles resolvidos com linhas retas e círculos (régua e compassos), os problemas sólidos eram aqueles resolvidos por meio das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) e os problemas lineares aqueles que não poderiam ser resolvidos por esses meios (quadratriz, espiral). Nesse caso, Descartes refuta a posição grega de classificar por meio da gênese algumas curvas, e isso fica claro quando ele adverte que

[...] não posso compreender porque as denominaram mecânicas⁵⁸ de preferência às geométricas; pois dizer que a causa é ter de servir-se de alguma máquina para traçá-las tornaria necessário incluir também nelas os círculos e as retas, dado que para desenhá-las sobre o papel se requeria um compasso e uma régua, que podem também ser considerados máquinas (DESCARTES, 2001, p. 27 [p. 315]).

Também é possível perceber que nos *Elementos* há os dois tipos de especificação. Por meio de propriedades: “E linha é comprimento sem largura”,

⁵⁶ Molland vai dizer que *especificar* uma curva é caracterizá-la, por meio de uma quantidade finita de símbolos verbais ou algum outro tipo de representação.

⁵⁷ Ele escreve no segundo livro “[...] todos os pontos das que podem designar-se geométricas, isto é, que admitem certa medida precisa e exata, têm necessariamente alguma relação com os pontos de uma linha reta, que pode ser expressa por alguma equação, a mesma para todos os pontos. Não sendo esta equação superior ao retângulo de duas quantidades indeterminadas, ou ao quadrado de uma só, a linha curva é do primeiro e mais simples gênero, no qual não há mais que o círculo, a parábola, a hipérbole e a elipse (DESCARTES, 2001, p. 31 [p. 319])”. Ele continua definindo para as outras equações de outros graus a relação com os gêneros das curvas. O que deve-se notar é o fato de que a classificação realizada por ele, nesse excerto do texto, é por meio das propriedades. A curva é do “tipo” primeiro gênero, se tem a propriedade de “possuir” uma equação que não seja “superior ao retângulo de duas quantidades indeterminadas, ou ao quadrado de uma só”.

⁵⁸ Descartes se refere à conchóide e à concóide que foram construídas a partir de compassos compostos, nos quais haviam dois movimentos distintos.

“Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, I, p. 97), e por meio da gênese: “Esfera é a figura compreendida quando, o diâmetro do semicírculo permanecendo fixo, o semicírculo, tendo sido levado à volta, tenha retornado, de novo, ao mesmo lugar de onde começou a ser levado”, “Pirâmide é uma figura sólida contida por planos, construída a partir de um plano até o ponto” (EUCLIDES, 2009, XI, p. 482).

Molland (1976, p. 27, tradução nossa) afirma que

[...] nenhum escritor antigo tentou dar uma explicação geral de quais modos de construção eram aceitáveis em geometria, e tal modo provavelmente teria sido impossível de produzir uma codificação universalmente aceita da intuição dos geômetras. Mas, claramente, tinha de haver limites, pois, caso contrário, por exemplo, uma construção muito simples poderia ser dada para a retificação do círculo (O movimento imaginado poderia ser o rolamento de um círculo). Nossa análise sugere que as restrições foram feitas a certos movimentos simples, e as ideias dominantes parecem ter sido aquelas de rotação e de construção de linhas retas e planos.

No que compete à construção de curvas, os instrumentos são sem dúvida nenhuma um ponto de discussão. Pappus, em sua *Coleção*, ao distinguir os três tipos de problemas (planos, sólidos e lineares) enfatiza a necessidade do uso de instrumentos na construção de certas curvas:

A diferença que existe entre os problemas para os geômetras antigos está em não construir o problema [...] das duas linhas⁵⁹, que é sólido por natureza, seguindo o raciocínio geométrico, porque não era fácil de desenhar as seções do cone em um plano, mas eles são, no entanto, instigados de uma maneira admirável a fazer uso de instrumentos adequados à execução manual da construção, como pode ser visto comumente no Mesolábio de Eratóstenes e nas *Mecânicas* de Filão e Herão (PAPPUS, 1982a, p. 39, tradução nossa).

Como o trecho aponta, o uso de certos instrumentos indica que essas construções não seguiam o “raciocínio geométrico”, sugerindo uma distinção entre as construções que utilizavam tais instrumentos e as que não utilizavam⁶⁰. Pappus, na continuação do

⁵⁹ Aqui as duas linhas se referem à solução do problema dos dois meios proporcionais, conforme nota de rodapé de Paul Ver Eecke em PAPPUS (1982a, p. 39, nota 5 do tradutor).

⁶⁰ Molland apresenta diversos trechos de autores gregos que sugerem a existência de uma distinção entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas (ou melhor, instrumentais). Vale ressaltar essa diferença entre mecânica e instrumental. Os pouquíssimos textos gregos que tratam dessas questões diferenciam as curvas ditas geométricas, das outras curvas, não como mecânicas (de Descartes), mas como instrumentais,

texto, apresenta quatro curvas que utilizaram algum tipo de instrumento que não fosse a régua e o compasso: 1) a construção de Eratóstenes, 2) a partição de Nicomedes, 3) a partição de Herão, e 4) a solução da duplicação do cubo (encontrando a solução dos dois meios proporcionais), realizada por Pappus.

A construção de Eratóstenes utiliza o seu Mesolábio (Figura 4 e Figura 9) para resolver o problema da duplicação do cubo, na verdade, dos dois meios proporcionais. Na proposição 5, do Livro III, Pappus apresenta o primeiro exemplo de uma solução mecânica ou instrumental de um problema. É importante ressaltar que, ao final da proposição, ele enfatiza que “[...] resulta claramente a partir desta [demonstração] que é impossível resolver a proposição [se referindo ao problema dos dois meios proporcionais] por meio dos planos” (PAPPUS, 1982a, p. 42, tradução e acréscimo nossos). Lembremos que o mesolábio de Eratóstenes é um instrumento que realiza mais de um movimento ao mesmo tempo, ou seja, produz um movimento composto.

Pappus (1982a) apresenta a solução de Nicomedes em duas partes do seu texto, primeiramente no Livro III, na proposição 5 (p. 42-44) e depois no Livro IV, na proposição 24 (p. 188-190)⁶¹. A construção da solução também necessita de um instrumento (Figura 10), nesse caso em específico, a solução do problema gera uma nova curva, conforme já mencionada, a concóide/conchóide. Assim, essa curva, por ser gerada por um instrumento que não fosse régua e compasso, enquadrando-se na terminologia dos gregos como uma curva mecânica ou instrumental⁶².

Em seguida, Pappus apresenta a resolução de Herão⁶³ (Figura 12) para os dois meios proporcionais:

Agora vamos mostrar como, dadas duas linhas, pode-se, utilizando o instrumento de Herão, encontrar os dois meios proporcionais, de uma forma instrumental, porque, como também diz “Herão”, este problema é sólido. Ele disse, ainda, que “expôs dentre as demonstrações convenientes a melhor para a operação manual” (PAPPUS, 1982a, p.

ou seja, todas as curvas que exigiam outros instrumentos que não fossem a régua e o compasso eram tratadas como curvas instrumentais.

⁶¹ As soluções apresentadas por Pappus são idênticas as dos comentários de Eutócio no livro *Da Esfera e do Cilindro*. Também cabe destacar que, no Livro III, a resolução de Nicomedes é voltada para a solução dos dois meios proporcionais, ou seja, buscando resolver o problema da duplicação do cubo. No Livro IV, proposição 24, o problema a ser resolvido é o da trisseção do ângulo.

⁶² Pappus, no Livro VIII, proposição 12, afirma que “Para mim os problemas mecânicos, chamados de instrumentais, são desprovidos de autoridade geométrica” (PAPPUS, 1982b, p. 845).

⁶³ Como já mencionado, o método de Herão se assemelha aos de Apolônio e Filão (KNORR, 1993, p. 305-308, tradução nossa). No livro *Mecânicas*, Herão (1894, p. 52, tradução nossa) faz a pergunta “Como, então, encontrar dois meios proporcionais entre duas linhas consecutivas dadas?”. Ele responde que será necessário resolver utilizando os sólidos.

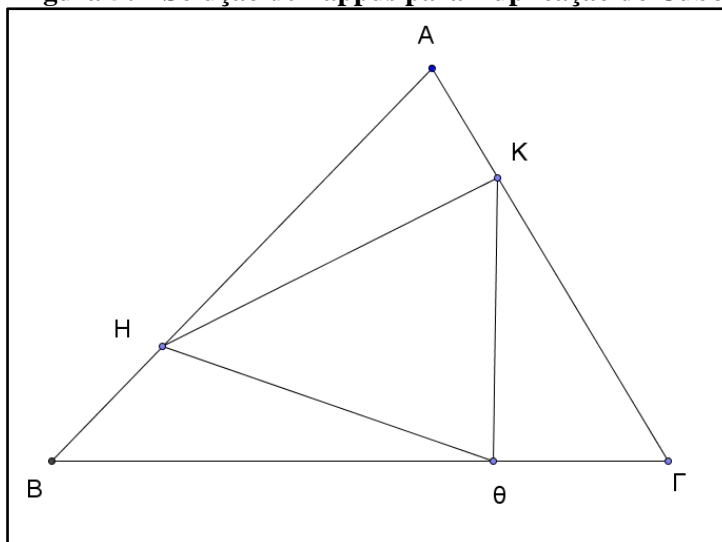
45, tradução nossa).

Novamente, percebemos o forte apelo que Pappus faz ao uso de instrumentos na construção da solução para o problema. O próprio Herão admite a necessidade de instrumentos nas construções: “é necessário um instrumento que permita resolver o nosso mesmo problema no caso de figuras irregulares de duas ou três dimensões” (HERÃO, 1894, p. 54, tradução nossa).

E, por fim, Pappus apresenta a sua solução para a duplicação do cubo por meio da chamada “régua móvel” (PAPPUS, 1982b, p. 47, nota 2 do tradutor) em dois momentos: no Livro III, proposição 5 (p. 47-49) e no Livro VIII, proposição 2 (p. 818-821). Como não foi apresentada anteriormente, segue, a partir do Livro VIII, da *Coleção de Pappus*, a proposição:

Proposição 2⁶⁴ – Seja o triângulo $AB\Gamma$, em que seus lados são cortados nos pontos H , Θ , K , de maneira que a reta $B\Theta$ esteja sobre a reta $\Theta\Gamma$ e a reta ΓK sobre a reta KA , assim como a reta AH esteja sobre a reta HB , e conduzindo as retas às junções $H\Theta$, ΘK , KH ; eu digo que o centro de gravidade do triângulo $AB\Gamma$ é o mesmo que o do triângulo $H\Theta K$ (PAPPUS, 1982b, p. 819, tradução nossa) (Figura 50).

Figura 50 - Solução de Pappus para Duplicação do Cubo



Fonte: Pappus (1982b, p. 819)

⁶⁴ A proposição pode ser interpretada cinematicamente como sugere Michel Chasles: “Se três móveis, colocados nos vértices de um triângulo, saem ao mesmo tempo e caminham sobre os três lados, respectivamente, indo no mesmo sentido com velocidades proporcionais ao comprimento destes lados, o seu centro de gravidade permanece imóvel” (CHASLES, 1875, p. 44, tradução nossa). Também é importante recordar a Proposição 14, no livro *O Equilíbrio dos Planos I*, de Arquimedes, em que ele afirma: “o centro de gravidade de um triângulo qualquer é a interseção das linhas desenhadas, de dois ângulos quaisquer ao ponto médio dos lados opostos respectivamente” (ARQUIMEDES, 2002, p. 201, tradução nossa).

Esse problema, assim como os outros três, exige movimentos compostos, por meio de instrumentos adequados para isso, por meio dos quais se obtêm a solução para os problemas. Esse fato nos dá indícios de que modo os geômetras gregos distinguiram as curvas geométricas das curvas mecânicas ou instrumentais. Para aquelas, um movimento simples e único; e, para estas, um movimento composto, único ou não. Esta parece ser a forma de classificar, pois, se pensarmos apenas na utilização de instrumento como critério de classificação, veremos que nem mesmo os gregos teriam isso de forma clara. Pappus, no seu Livro VIII, da *Coleção*, “contendo os problemas mecânicos variados e interessantes”, apresenta a resolução de alguns problemas utilizando apenas régua e compasso (PAPPUS, 1982b, XIX, p. 855; XX, p. 856; XXIII, p. 860; XXVI, p. 866; XXVII, p. 867, tradução nossa). Mas os problemas mecânicos ou instrumentais não precisam de outros instrumentos que não sejam régua e compasso? Isso mesmo! Ainda não está totalmente claro o entendimento, do ponto de vista de Pappus, da classificação entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas ou instrumentais. A passagem do Livro VIII, da proposição 19, tenta trazer à luz essa discussão: “os problemas que são chamados instrumentais também são úteis, especialmente, quando podemos refazer a análise de uma construção de modo fácil, pois eles permitem dispensar a prova [no caso geométrico] que é a resposta” (PAPPUS, 1982b, p. 860, tradução nossa). O que podemos afirmar, a partir de Pappus, é que as curvas geométricas continham caracterizações que as diferenciavam das curvas mecânicas.

Outro problema que enfrentamos é a classificação da concóide/conchóide de Nicomedes e a cissóide de Diócles. A concóide/conchóide de Nicomedes não pode ser discutida a partir de suas primeiras construções, pois o texto original de Nicomedes se perdeu, o que temos é apenas a descrição que Pappus e Eutócio fornecem. Os comentários de Eutócio sobre Arquimedes tratados no livro *Da Esfera e do Cilindro* expõem que para a geração da concóide/conchóide é necessário um instrumento específico:

Nós temos apenas que supor uma régua (ou qualquer objeto com uma borda em linha reta), com duas marcas feitas sobre ele a uma distância igual ao comprimento dado no qual o problema requer que seja interceptado entre duas curvas por uma linha que passa pelo ponto fixo; então, se o compasso for movido de modo que sempre passe pelo ponto fixo, enquanto um dos pontos marcados sobre ele segue o curso de uma das curvas, sendo apenas necessário mover o compasso até o

segundo ponto marcado caindo sobre a outra curva (HEATH, 2002, p. cvi, tradução nossa) (Figura 10).

Eutócio afirma que, embora as soluções dos problemas sólidos geralmente fossem dadas pelas cônicas, havia a possibilidade de resolver por meio de construções mecânicas. Molland afirma que:

Embora essa construção fosse mecânica, ela era dada apenas por meio de régua e compasso, conforme Eutócio (2002, p. 98-101) fornece apenas uma construção instrumental. Este faz uso de réguas e estacas paralelas, exatamente a gênese dada por Pappus. Assim, parece que neste caso pode ter Pappus considerado este análogo, de uma construção instrumental, como geométrica, mesmo que equipado de maneira pouco rigorosa para os critérios mais usuais (MOLLAND, 1976, p. 31, tradução nossa).

O caso da cissóide é menos problemático para a construção de Diócles; como relatado por Eutócio (2002, p. 67-71) e Thomas (1957b, p. 270-279), é unicamente instrumental e nem sequer realizam uma completa gênese da curva. As referências de Diócles, em seu *Espelhos Ardentes* trazem apenas a construção por meio de instrumentos, e uma construção mais aceitável do ponto de vista geométrico (por dois movimentos simultâneos), para a cissóide, só foi desenvolvida, como aponta Molland (1976), por Proclus, ainda sem apresentar o método, de fato, de construção. A construção de Diócles é dada pela propriedade de que cada ponto tem em relação à curva, portanto, podemos classificar como uma especificação por propriedade.

De tudo isso, podemos argumentar que, talvez, as definições geométricas fossem do tipo especificação por propriedade e os teoremas utilizando a especificação por gênese, mas, na verdade, apesar de o primeiro Livro dos *Elementos* de Euclides utilizar a definição de reta e círculo por propriedade, as demais definições, de Euclides, Apolônio, Arquimedes, Diócles, Nicomedes, entre outros, tendiam a ser por gênese, ou seja, pela construção. O problema está que não houve uma discussão ou explicitação das regras que eram admitidas nas especificações por gênese. Que tipos de movimentos eram possíveis? Ao que parece, os movimentos com linhas retas, círculos e as rotações eram permitidos. Movimentos simultâneos também entravam nesses tipos de construção. Contudo, construções compostas que empregavam alguns tipos de instrumentos eram consideradas mecânicas, sem o rigor necessário para entrar na geometria. Mas quais eram as regras para aceitar certos instrumentos e outros não? É difícil de responder, pois pouquíssimos textos originais desse período sobreviveram. O que temos está vinculado a historiadores matemáticos posteriores a esse período, como

por exemplo, Pappus.

O fato de não termos uma resposta a essa pergunta não impede que prossigamos na tentativa de compreender a distinção cartesiana, ponto central nesse trabalho. Portanto, continuo minha saga a partir de uma contextualização da obra de Descartes.

3 CONTEXTUALIZANDO E DISCUTINDO A PROBLEMÁTICA

3.1 O Começo

René Descartes, com o intuito de ilustrar o alcance do seu método filosófico, escreveu uma obra matemática intitulada *A Geometria*, que foi publicada como apêndice do seu livro *Discurso do Método* (1637). *A Geometria* é o último dos três ensaios que, junto com o *Discurso do Método*, foram, em 1637, a primeira publicação de Descartes. Ao lado dos outros dois ensaios *A Dióptrica* e *Os Meteoros*, *A Geometria* é a principal obra matemática do filósofo e a única publicada em vida. Trata-se de um ponto de inflexão entre a matemática grega e a matemática moderna.

Nessa obra, muitos temas que aparecem já estavam presentes em textos de outros autores da época e até mesmo em textos anteriores de Descartes, contudo não consta explicitamente em nenhum documento do filósofo até o ano de 1636 sua intenção em publicar tal obra, como pode ser vista na carta *A Huygens* de primeiro de novembro de 1635, escrita em Utrecht, na qual Descartes se refere apenas à impressão de *A Dióptrica* e de *Os Meteoros* (AT I, 329-30⁶⁵). É apenas na carta *A Mersenne* de março de 1636, escrita em Leyde, que aparece, pela primeira vez, o nome do terceiro ensaio metodológico, conforme podemos verificar:

E assim, eu vou fazer um texto com a publicação de quatro tratados, todos em francês, e os títulos, em geral, serão: O projeto de uma ciência universal para elevar a nobre natureza ao seu mais alto grau de perfeição. Mais *A Dióptrica*, *Os Meteoros*, e *A Geometria*; onde os mais importantes estudos que o autor poderia escolher para fazer prova dessa busca pela ciência universal, são explicados de tal modo, que mesmo os não estudiosos no assunto conseguirão entender (AT, I, p. 339, tradução nossa).

Descartes continua explicando quais serão suas intenções em cada um dos ensaios e, na *Geometria*, nosso interesse, diz que: “Enfim, em *A Geometria*, eu me esforço para fornecer uma maneira geral para resolver todos os problemas que ainda não

⁶⁵ As citações à tradicional tradução de Charles Adam e Paul Tannery das obras completas de Descartes serão feitas seguindo a forma (AT, Volume, Página). A referência citada é DESCARTES, René. **Œuvres de Descartes**. Éditeurs: Charles Adam e Paul Tannery. 11v. Paris: Vrin/Centre National Du Livre, 1996. Deve-se ressaltar que o presente texto trará notas dos volumes I e II, que apresentam as Correspondências de Descartes com diversos interlocutores, do volume VI que apresenta o *Discurso do método* e os seus três ensaios publicados em 1637 e do volume X que expõe o texto das *Regras para Direção do Espírito* e as *Cogitationes Privatae*; todos textos de grande influência sobre *A Geometria*, como discutirei logo a frente. Além disso, as citações diretas apresentadas ao longo do texto terão minha tradução.

o foram resolvidos” (AT, I, p. 340, tradução nossa). Podemos perceber que o projeto cartesiano para *A Geometria* é grandioso, digno de uma vida inteira e que tentou levar a cabo.

Dadas as cartas mencionadas e a data de publicação do terceiro ensaio, podemos inferir que a escrita da obra ocorreu durante o ano de 1636, no segundo semestre e finalizado no início de 1637, pois, na carta de outubro de 1637 a um padre (cujo nome não é conhecido), Descartes admite que [*A Geometria*] é “um tratado que eu praticamente compus enquanto eram impressos meus *Meteoros*, e mesmo eu inventei uma parte dela durante esse período” (AT, I, p. 457, tradução nossa). Levando em consideração que a impressão de *A Dióptrica* deva ter iniciado apenas em agosto de 1636 (AT, I, p. 611) e que, em razão de atrasos, esse ensaio não estava finalizado em outubro, Descartes deve ter estendido a escrita até os últimos meses do ano. *Os Meteoros*, por sua vez, foram começar a ser impressos em dezembro ou janeiro de 1637. Nesse período, provavelmente, Descartes finaliza a redação de *A Geometria*, sendo ela impressa nos meses seguintes; em 25 de fevereiro de 1638 (AT, I, p. 620-621) é anunciado o título definitivo do volume, estando nas mãos do livreiro, no início de março do mesmo ano (AT, I, p. 623-624), as primeiras páginas do *Discurso do Método*, enquanto as restantes ainda estavam em fase de finalização. No final de março a impressão dos quatro textos estava completa, tendo Descartes enviado *A Huygens*, no dia 29 do mesmo mês (AT, I, p. 627), um exemplar pessoal do *Discurso* e de *A Geometria*, já estando ele de posse dos outros dois ensaios. Tendo sido concedido o privilégio holandês no dia 20 de dezembro de 1636 (AT, VI, p. 515), a aprovação real francesa foi dada em quatro de maio de 1637 (AT, VI, p. 518) e foi impressa em oito de junho do mesmo ano (AT, VI, p. 515).

Realizada a sua publicação, muitas dificuldades surgiram (e surgem) por parte dos leitores. O próprio Descartes nos adverte a respeito da sua inteligibilidade e admite explicitamente que muitas das omissões e lacunas foram propositais, como ele mesmo apresenta na advertência de abertura da obra:

Até aqui procurei tornar-me inteligível para todo o mundo: mas para este tratado temo não poder ser lido senão por aqueles que já conhecem o que está nos livros de geometria; pois que estes contêm verdades muito bem demonstradas, creio ser supérfluo repeti-las, ainda que não tenha por isso deixado de utilizá-las (DESCARTES,

2001, p. 1⁶⁶).

Essa advertência é justificada, pois Descartes acredita que haverá dificuldades de compreensão em razão do uso que faz dos conhecimentos matemáticos presentes no livro. O filósofo parte do pressuposto de que o leitor esteja familiarizado com tais conceitos. Muitas das dificuldades parecem decorrer das decisões relativas a não querer explicitar todos os cálculos e passos realizados no decorrer da obra. Isso se deve ao fato de Descartes querer possibilitar ao leitor a *descoberta* por si dos resultados dos problemas, como ele mesmo indica no Livro I:

Mas não me detenho a explicá-lo [se referindo a um problema] com mais detalhe para não privar cada um do prazer de aprendê-lo por si mesmo, nem impedir o cultivo útil do próprio espírito exercitando-o, que é, em minha opinião, a principal utilidade que pode obter-se desta ciência (DESCARTES, 2001, p. 9 [p. 301-302]⁶⁷, acréscimo nosso).

E retoma essa perspectiva no Livro III, ao considerar que, diz ele: “espero que os nossos descendentes me estarão agradecidos não só pelas coisas que aqui expliquei, mas também por aquelas que omiti voluntariamente a fim de deixar-lhes o prazer de inventá-las” (DESCARTES, 2001, p. 159 [p. 413])⁶⁸. É interessante notar que a linguagem algébrica instituída por Descartes foi um dos motivos que tornou a leitura do seu texto mais difícil, já que muitos não tinham o traquejo necessário para lidar com essa simbologia. Ao contrário de hoje, em que as dificuldades de leitura estão no sentido oposto, já que a linguagem algébrica, por ele desenvolvida, continua sendo a mesma; contudo, os problemas geométricos e as construções entraram em desuso e, portanto, a leitura dessa linguagem tem se tornado mais complicada. Além dessas dificuldades relacionadas à estrutura da obra, há as dificuldades inerentes à própria complexidade da matemática, que durante muito tempo foram fontes de discussão.

No que diz respeito às dificuldades presentes no texto, para entendê-las, é preciso compreender quais foram as fontes das quais Descartes bebeu e de que modo elas interferiram no processo de escrita de *A Geometria*. Essa obra é um texto

⁶⁶ Na tradução do livro *A Geometria*, realizado por Emídio César de Queiroz Lopez não há referências à numeração do original. Ela aparece com paginação de Adam e Tannery em (AT, VI, p. 368).

⁶⁷ Ao longo do texto as citações do livro *A Geometria* que irei apresentar são da tradução bilíngue (francês-português) de Emídio César de Queiroz Lopez, de 2001. O *modus operandi* será: DESCARTES (2001, PÁGINA DA TRADUÇÃO DO EMÍDIO [PÁGINA DO ORIGINAL EM FRANCÊS]).

⁶⁸ Parece-me que, em razão de uma visão cartesiana, de que ser sábio é saber resolver problemas de forma autônoma e de que o mais importante é ser capaz de aprender e de descobrir verdades por conta própria, a forma de escrita da *Geometria* é deixar problemas em aberto, para estudos futuros, permitindo aos leitores a oportunidade do exercício e da aprendizagem.

emergente no contexto da matemática e também uma obra de diálogo com o passado clássico. Tal trabalho constitui um ponto de mudança no desenvolvimento das concepções de construção e exatidão dos objetos geométricos; esse livro contém um caráter fortemente programático, com base numa distinta visão da geometria em relação a até então conhecida em sua época. Para situar o leitor nessa dinâmica do livro, apresento e discuto a estrutura da obra na seção seguinte.

3.2 Estrutura da obra *A Geometria*

O texto contém três livros. Descartes forneceu títulos marginais para as subseções dentro desses livros; o livro I contém nove subseções, o livro II tem 19 subseções e o livro III têm 32 subseções. Tematicamente os livros podem ser divididos em um número menor de seções. Irei adotar, como forma de organizar o trabalho, a separação que Bos (2001) faz dos livros, conforme é apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Estrutura da Geometria

	Livro I: Problemas Planos	Paginação Original
I-A	Interpretação geométrica das operações de aritmética	297-300
I-B	Problemas, equações, construção de problemas planos	300-304
I-C	Problema de Pappus, montagem da equação, casos nos quais o problema é plano	304-315
	Livro II: Aceitabilidade das Curvas	Paginação Original
II-A	Aceitabilidade das curvas, suas classificações	315-323
II-B	Continuação do problema de Pappus, solução dos problemas de três e quatro linhas, lugares planos e sólidos, caso mais simples de cinco linhas	323-339
II-C	Aceitabilidade da construção de curvas ponto a ponto e da construção por cordas	339-341
II-D	Equações das curvas, sua utilização em encontrar retas normais	341-352
II-E	Ovais para óptica	352-368
II-F	Curvas em superfícies não planas	368-369
	Livro III: Simplicidade das curvas e suas construções	Paginação Original
III-A	Aceitabilidade das curvas nas construções, simplicidade	369-371
III-B	Equações e suas raízes	371-380
III-C	Redução de equações	380-389
III-D	Construção de raízes de equações de terceiro e quarto graus, problemas sólidos	389-402

III-E	Construção de raízes de equações de quinto e sexto graus, problemas supersólidos	402-413
-------	--	---------

Fonte: Bos (2001, p. 291)

A fim de direcionar o estudo aqui realizado sobre *A Geometria* apresento as discussões apresentadas por Bos (2001) juntamente com a Introdução de Battisti (no prelo) da versão brasileira para o livro *A Geometria*.

De acordo com Bos (2001), o Livro I pode ser caracterizado como uma técnica algébrica com problemas simples que podem ser resolvidos por meio de linhas retas e círculos. Descartes primeiro (I-A) mostra como as operações de aritmética, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas podem ser interpretadas por meio da geometria, conforme podemos verificar:

E assim como a aritmética é composta apenas de quatro ou cinco operações, as quais são a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes, a qual pode ser tomada como uma espécie de divisão, não há assim outra coisa a fazer, em geometria, no que concerne às linhas que se deseja conhecer, senão acrescentar-lhes ou retirar-lhes outras linhas; ou ainda, conhecendo uma, chamarei de unidade para relacioná-la o melhor possível aos números, e que geralmente pode ser escolhida arbitrariamente e, tendo a seguir ainda duas outras linhas, encontrar uma quarta linha, a qual esteja para uma dessas duas linhas assim como a outra está para a unidade, o que é o mesmo que a multiplicação; ou ainda, encontrar uma quarta, a qual esteja para uma dessas duas linhas assim como a unidade está para a outra, o que é o mesmo que a divisão; ou enfim, encontrar uma, ou duas ou muitas médias proporcionais entre a unidade e alguma outra linha, o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada ou cúbica etc. E não temo introduzir esses termos da aritmética na geometria, a fim de tornar-me mais inteligível (DESCARTES, 2001, p. 3 [p. 297-298]).

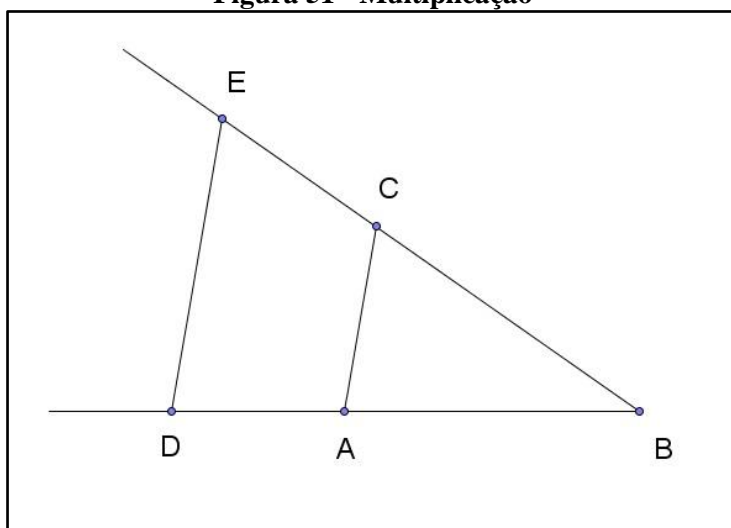
É importante notar que “enquanto na aritmética só podem ser obtidas raízes exatas de potências perfeitas⁶⁹, em geometria pode encontrar-se uma linha cujo comprimento represente exatamente a raiz quadrada de uma linha dada, mesmo quando esta linha não é comensurável com a unidade” (SMITH⁷⁰, 1954, p. 5, nota 3 do tradutor). Nesse caso, Descartes, ao introduzir o conceito de unidade, se livra do problema da incomensurabilidade. Por exemplo, nas *Regras para Direção do Espírito*, explicitamente na Regra XIV, ele afirma que: “a unidade é aquela natureza comum na

⁶⁹ Quando me refiro a potências perfeitas quero dizer $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[n]{a^n}$. Nesses casos, os gregos possuíam diversos algoritmos de resolução.

⁷⁰ As referências citadas de Smith são de suas notas da tradução da *Geometria*. DESCARTES, René. **The geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition**. Traduction: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

qual [...] devem igualmente participar todas as coisas que entre si se comparam. Se não houver já alguma determinada na questão, podemos tomar em vez dela quer uma das grandezas já dadas, quer outra qualquer, e será a medida comum a todas as outras” (DESCARTES, 1989, p. 100). Mais adiante, na Regra XVIII, o filósofo garante que “a unidade, de que já falamos, é aqui a base e o fundamento de todas as relações, e que, na série das grandezas continuamente proporcionais, ela ocupa o primeiro grau [...]” (DESCARTES, 1989, p. 115). Para explicar esse conceito central de unidade, Descartes apresenta o exemplo da multiplicação de dois segmentos de reta (Figura 51): “Seja, por exemplo, AB a unidade, e que deve multiplicar-se BD por BC; não tenho mais do que unir os pontos A e C, traçar DE paralela a CA⁷¹, e BE é o produto desta multiplicação⁷²” (DESCARTES, 2001, p. 5 [p. 298]). Em notação algébrica, podemos escrever da seguinte forma $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE}$ com $AB = 1$. Reescrevendo obtemos $BE = BD \times BC$. Nesse caso podemos notar a versatilidade da introdução da *unidade*, pois a mesma permite que qualquer segmento de reta (comensurável ou não) possa ser matematicamente manipulado do ponto de vista geométrico e algébrico, ou seja, Descartes, com a unidade, pode unificar a aritmética e a geometria, uma medida comum entre grandezas contínuas e descontínuas.

Figura 51 - Multiplicação



Fonte: Descartes (2001, p. 5)

⁷¹ Esse procedimento “traçar DE paralela a CA” se refere a traçar uma reta paralela a outra reta dada e aparece nos *Elementos*, no Livro I, Proposição 31: “Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada” (EUCLIDES, 2009, p. 121).

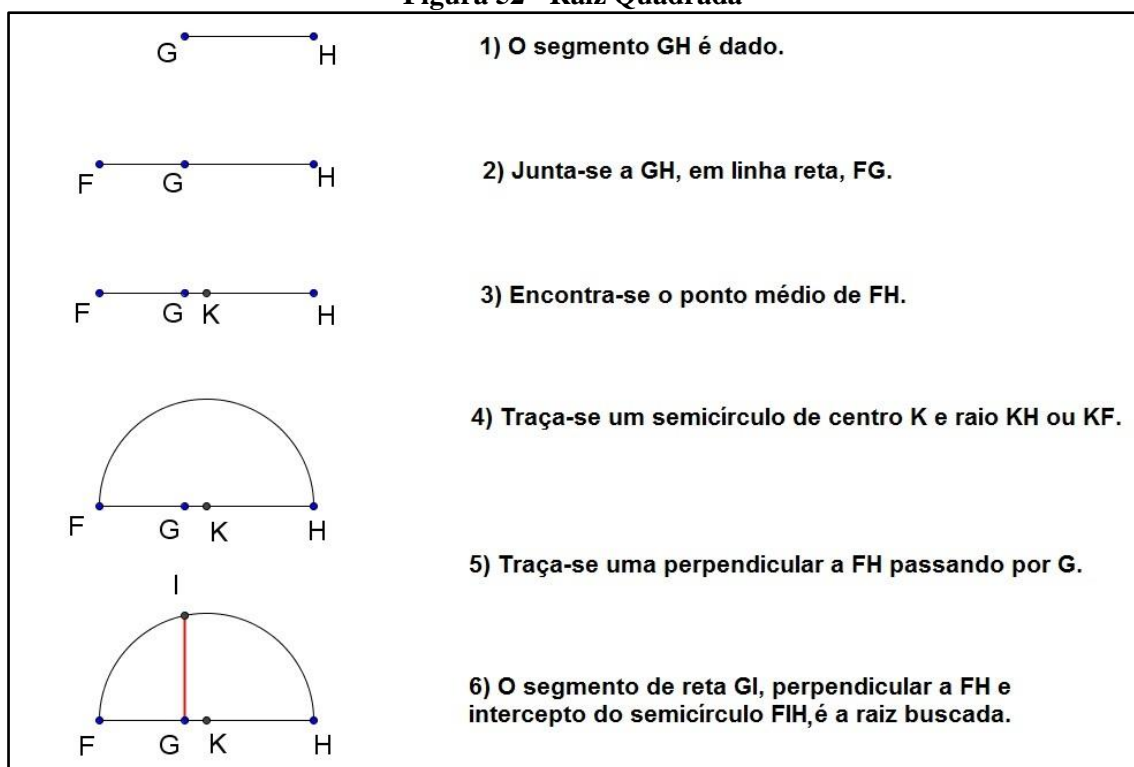
⁷² A multiplicação de dois segmentos (ou a quarta proporcional), apresentada por Descartes, já estava resolvida nos *Elementos*, aplicando o teorema de Tales. Conforme aponta Euclides (2009, p. 243), no Livro VI, Proposição 12, “Dadas três retas, achar uma quarta em proporção”.

Outro exemplo que o filósofo apresenta em sua obra para tratar da unidade é a extração da raiz quadrada de um segmento dado. Ele escreve:

pretende-se extrair a raiz quadrada de GH , se junta em linha reta FG , que é a unidade, e dividindo FH em duas partes iguais pelo ponto K , tomando este ponto como centro, traça-se o círculo FIH ; elevando então desde o ponto G uma linha reta, formando ângulos retos com FH , até I , é GI a raiz buscada (DESCARTES, 2001, p. 5 [p. 298]).

O processo de construção, passo a passo, é dado a seguir, na Figura 52.

Figura 52 - Raiz Quadrada



Fonte: Do autor, 2015

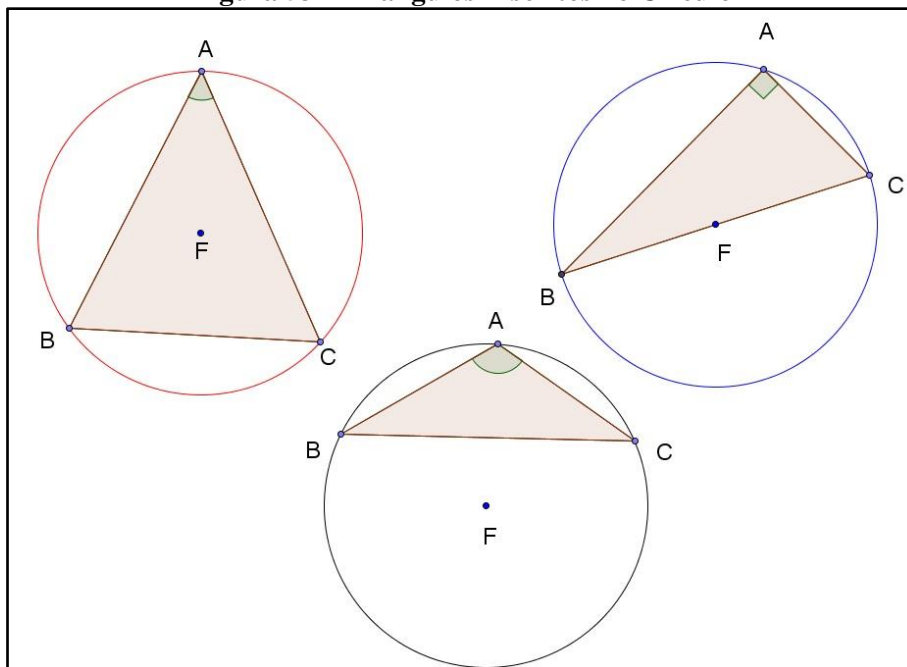
Essa construção é parecida com a dos *Elementos*, no livro VI, Proposição 13, na qual Euclides (2009, p. 244) admite ser possível “Achar uma média em proporção entre duas retas dadas”. Podemos perceber que o problema de Euclides é achar a média entre duas retas (dois segmentos), e o problema de Descartes é encontrar a raiz quadrada de uma reta (um segmento) dada(o). Para utilizar a construção de Euclides, Descartes usa a unidade (FG) e acrescenta mais um segmento de reta⁷³, fornecendo, então, dois

⁷³ É interessante notar que, apesar de Descartes inserir mais um elemento ao problema, o que ele faz é simplificá-lo. Podemos comparar essa prática com a construção em *nêusis*, na qual é inserido um segmento conhecido de modo a simplificá-lo. No livro III de *A Geometria*, Descartes apresenta alguns exemplos de simplificação para encontrar a solução de algumas equações, como veremos mais adiante. Também vale salientar que essa prática de adicionar para simplificar vigora entre os matemáticos até os dias atuais.

segmentos (FG e GH), sendo o mesmo o processo de construção. O resultado obtido para esse problema utiliza o Corolário da Proposição 5⁷⁴, do Livro IV, dos *Elementos*, conforme segue:

E, é evidente que, por um lado, quando o centro do círculo cai no interior do triângulo, o ângulo sob BAC, que se encontra em um segmento maior do que o semicírculo é menor do que um reto; por outro lado, **quando o centro sobre a reta BC, o ângulo sob BAC, que se encontra em um semicírculo é reto**; enquanto, quando o centro do círculo cai no exterior do triângulo, o sob BAC, que se encontra em um segmento menor do que o semicírculo é maior do que um reto (EUCLIDES, 2009, p. 192, **negrito nosso**) (Figura 53).

Figura 53 - Triângulos Inscritos no Círculo



Fonte: Do autor, 2015

Desse corolário é possível dizer que o triângulo FIH (da Figura 54) é retângulo em I. Em seguida, da Proposição 8⁷⁵, do Livro VI, e do seu Corolário⁷⁶, podemos admitir que GI seja raiz quadrada de GH. Em termos algébricos, podemos escrever:

$GI^2 = GH \times FG$, como $FG = 1$, temos que $GI = \sqrt{GH}$. Esse resultado é dado por

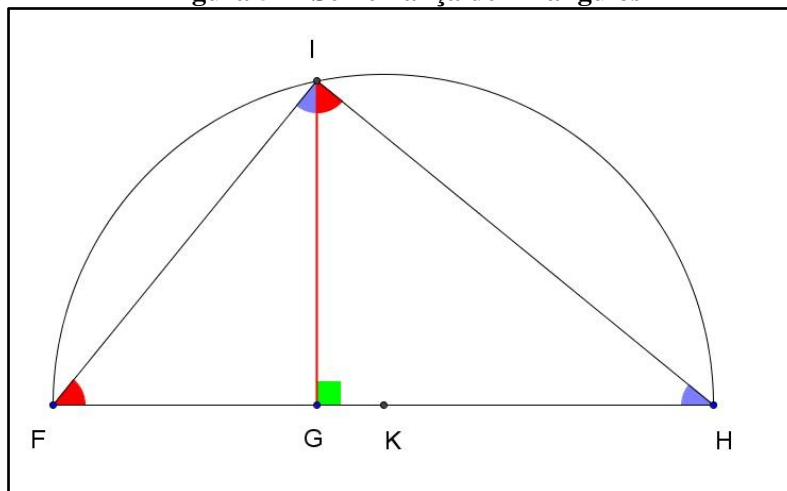
⁷⁴ “Circunscrever um círculo ao triângulo dado” (EUCLIDES, 2009, p. 191).

⁷⁵ “Caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do ângulo reto até a base, os triângulos junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo quanto entre si” (EUCLIDES, 2009, p. 240).

⁷⁶ “Disso, é evidente que, caso em um triângulo retângulo seja traçada uma perpendicular do reto até a base, a traçada é média, em proporção, entre os segmentos da base; o que era preciso provar [e, ainda, entre a base e qualquer dos segmentos, o lado junto ao segmento é média, em proporção]” (EUCLIDES, 2009, p. 241). No caso de Descartes, um dos segmentos é unidade e, portanto é a média em proporção do segmento dado.

meio da semelhança entre os triângulos retângulos gerados ($\triangle IFG, \triangle IGH, \triangle IFH$), conforme Figura 54.

Figura 54 - Semelhança de Triângulos



Fonte: Do autor, 2015

Da semelhança dos triângulos $\triangle IFG$ e $\triangle IGH$ pela Proposição 8, do Livro VI, podemos escrever a seguinte proporção: $\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH} = \frac{IF}{IH}$. Utilizando apenas as duas primeiras razões $\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH}$ e aplicando a Proposição 12⁷⁷, do Livro V, dos *Elementos*, temos que $GI^2 = FG \times GH$, mas, como dito anteriormente, FG é a unidade, e, portanto $GI = \sqrt{GH}$.

Na sequência do livro, conforme aponta Battisti (no prelo), Descartes introduz o que ele denomina de “letras em geometria” e apresenta de um modo claro e conciso a diferença entre as grandezas conhecidas, utilizando as letras iniciais do alfabeto (a, b, c , etc.)⁷⁸, e as grandezas desconhecidas, utilizando as letras finais (x, y, z , etc.). É

⁷⁷ “Caso magnitudes, em quantidade qualquer, estejam em proporção, como um dos antecedentes estará para um dos consequentes, assim todos os antecedentes para todos os consequentes” (EUCLIDES, 2009, p. 218). Essa proposição é conhecida atualmente com a seguinte afirmação “o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”, em que, dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a e d são os extremos e b e c são os meios.

⁷⁸ “Não há, com frequência, necessidade de traçar essas linhas sobre o papel, e basta designá-las por certas letras, uma só para cada linha. Assim, para somar as linhas BD e GH, designo uma por a , outra por b e escrevo $a+b$; e $a-b$ para subtrair b de a ” (DESCARTES, 2001, p. 5 [p. 299]). Cabem aqui parênteses para tal notação, pois nas *Regras*, Descartes opera de forma um pouco diferente, atribuindo letras minúsculas (a, b, c, d, \dots) para as grandezas conhecidas (como no caso da *Geometria*), mas atribui letras maiúsculas para as grandezas desconhecidas (A, B, C, D, \dots), ou como ele chama “incógnitas”

importante ressaltar que Descartes utiliza indistintamente aa ou a^2 , porém escreve a^3, a^4 , etc.. Outro símbolo utilizado por ele que difere dos atuais é o de raiz cúbica: atualmente utilizamos $\sqrt[3]{a}$, enquanto ele utilizava $\sqrt{C.a}^{79}$. Outro símbolo que ele utilizava era ∞ (possivelmente inspirado na palavra *æqualis*) no lugar de $=$. Além disso, ele sinaliza por meio de um asterisco (*) a inexistência de um termo (monômio) em uma equação, e por meio de um ponto (·) o sinal atual \pm ⁸⁰.

Descartes escreve: “É de se assinalar que para a^2 ou b^3 ou outras expressões semelhantes, eu não concebo ordinariamente mais que linhas simples, ainda que, para servir-me dos nomes usados em álgebra, as designe por quadrados, cubos, etc.” (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 299]). Nesse contexto, Descartes rompe com a tradição⁸¹, e muda a forma de lidar⁸² com os segmentos e suas operações. Como aponta Smith (1954, p. 5, nota 6 do tradutor),

(DESCARTES, 1989, p. 107). Eu chamo a atenção para isso, mas não vejo ganho ou perda de clareza nisso, pois a simples mudança das últimas letras do alfabeto para as letras maiúsculas não impede o tratamento distinto e conciso que ele pretende instituir. Como sabemos, a notação da *Geometria* venceu a “batalha” e se tornou o padrão atual.

⁷⁹ Essa notação de Descartes ainda se aproximava da notação cossica. Cajori (1993, p. 106, tradução nossa) afirma que “Na *Summa* as palavras “mais” e “menos”, no italiano *più* e *meno*, são indicadas por \tilde{p} e \tilde{m} . A quantidade desconhecida foi chamada de “coisa”, no italiano *cosa*, e a partir desta palavra foram obtidas na Alemanha e na Inglaterra as palavras *Coss* e “arte cossica”, que nos séculos XVI e XVII eram sinônimos de “álgebra”. [...] depois, *co.* (*cosa*) significa x ; *ce.* (*censo*) significa x^2 ; *cu.* (*cubo*) significa x^3 . Pacioli usou a letra R para raiz. Censo é do latim *census* e foi usado por Leonardo de Pisa e Regiomontanus. Leonardo de Pisa usou também a palavra *res* (“coisa”). Em outra passagem Cajori (1993, p. 279, tradução nossa) afirma que “O termo latino *res* foi traduzido da palavra italiana *cosa*, e que evoluiu a partir da palavra alemã *coss* e do adjetivo inglês “cossic”. Vimos que as abreviaturas das palavras *cosa* e *cubus*, *viz.*, *co.* e *cu.*, chegaram a ser usadas como símbolos algébricos”. Nesse aspecto podemos perceber que Descartes ainda estava preso a algumas notações antigas, mas que ao longo do texto ele tem procurado mudar.

⁸⁰ Alguns exemplos da escrita cartesiana em contraponto com a escrita atual: $\sqrt{C.4}$ é idêntico a $\sqrt[3]{4}$; $10\infty 10$ é equivalente a $10=10$; $x^2 - * = 0$ é o mesmo que $x^2 = 0$ ou $x^2 - 0x = 0$; $x \Rightarrow 5$ possui a mesma conotação que $x = \pm 5$.

⁸¹ A tradição a que me refiro é a euclidiana, em que, no Livro IX, Euclides diz que um segmento representa um comprimento, um retângulo representa um produto de dois números, e um volume representa um produto de três números.

⁸² Deledicq (2009, p. 11) reitera que “Descartes tem, simplesmente, toda a base para romper com os consagrados hábitos de dez mil anos de eficiência da história [matemática]” e para mudar a forma como eles desenvolviam a matemática. Por exemplo, dados dois segmentos, um de comprimento dois e outro de comprimento três, é fácil encontrar o retângulo 2×3 . E encontrar o comprimento que é o resultado de 2×3 ? Para Descartes, a resposta é simples, basta utilizar a multiplicação de dois segmentos e associar a esses dois números, ou seja, um segmento de magnitude 2 e outro segmento de magnitude 3. O resultado da multiplicação é associado ao segmento de magnitude 6. O estabelecimento dessa relação entre a aritmética e a geometria foi ponto fundamental no desenvolvimento da álgebra cartesiana. Abro parênteses para dizer que as citações de Deledicq se referem aos comentários feitos ao longo da sua tradução de *A Geometria* e podem ser encontrados na referência DESCARTES, René. **La Géométrie**. Textes choisis, présentés et commentés par André Deledicq. Paris: ACL- Les Éditions du Kangourou, 2009.

Na época de Descartes, a^2 era considerado significar a superfície de um quadrado de lado a , e b^3 significava o volume de um cubo de aresta b ; enquanto b^4 , b^5 ,... eram ininteligíveis como formas geométricas. Descartes diz aqui que a^2 não tem aquele significado, mas apenas significa a linha obtida construindo o terceiro proporcional entre 1 e a , etc.

Esse mesmo feito é visto em suas *Regras para Direção do Espírito*, como podemos notar na Regra XVI:

Outros, na Álgebra vulgar, esforçam-se por exprimi-las mediante várias dimensões e várias figuras, das quais chamam, à primeira, raiz, à segunda, quadrado; à terceira, cubo; à quarta, biquadrada, etc. Estes nomes enganaram-me a mim durante muito tempo, confesso-o, pois, não me parecia que se pudesse apresentar algo de mais claro à minha imaginação, depois da linha e do quadrado, do que o cubo e as outras figuras construídas à sua semelhança; e, claro, resolvi com o seu auxílio um bom número de dificuldades. Mas, depois de muita experiência, reconheci que, por esta maneira de conceber, nunca encontrara nada que, sem ela, não pudesse conhecer muito mais fácil e distintamente, e que se deviam rejeitar tais denominações para que não perturbem o conceito, pois a mesma grandeza quer se chame cubo ou biquadrada, nunca deve, no entanto, apresentar-se à imaginação senão como uma linha ou uma superfície, segundo a regra precedente. Há que notar, sobretudo que a raiz, o quadrado, o cubo, etc., não são mais do que grandezas continuamente proporcionais que supomos sempre dominadas por esta unidade de empréstimo [...]. É a esta unidade que a primeira grandeza proporcional se refere imediatamente e por uma só relação; mas, a segunda, por intermédio da primeira e, portanto, por duas relações; a terceira, por intermédio da primeira e da segunda, e por três relações, etc., etc. Chamaremos, pois, daqui em diante, primeira proporcional essa grandeza que, em Álgebra, se chama raiz; segunda proporcional, a que se chama quadrado, e assim por diante (DESCARTES, 1989, p. 108).

Ao simplificar as operações de multiplicação, divisão e radiciação, Descartes teve que lidar com outro conceito importante, o de homogeneidade, ao tratar das dimensões. Ele chama a atenção para o fato:

Observe-se também que, quando a unidade não está determinada no problema, todas as partes de uma mesma linha devem expressar-se ordinariamente por tantas dimensões uma como a outra, assim, na linha que designei por $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$, a^3 contém tantas [dimensões] como abb ou b^3 ; mas já o mesmo sucede quando a unidade está determinada, em virtude de ela pode ser subentendida onde quer que haja demasiadas ou demasiadas poucas dimensões; assim, se há que extrair a raiz cúbica de $aabb - b$, deve considerar-se que a quantidade $aabb$ está dividida uma vez pela unidade, e que a outra quantidade b está multiplicada duas vezes pela mesma unidade (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 299]).

O filósofo trata da homogeneidade no interior de uma expressão algébrica: para ele uma linha reta deve ser expressa pelo mesmo número de dimensões em cada uma de suas partes. Assim, a expressão $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ é homogênea, contrariamente a esta outra, a expressão $aabb - b$ não o é, a menos que a unidade, estando determinada, possa ser subentendida para homogeneizar (ou “equalizar”) as partes entre si: neste caso, para se extrair a raiz cúbica de $aabb - b$ deve-se pensar as suas partes como tendo três dimensões, estando o primeiro termo dividido pela unidade e o segundo multiplicado duas vezes por ela; ou seja, deve-se considerá-la como sendo $\frac{aabb}{1} - b$. 1.1 (esse artifício deve ser usado, pois a raiz cúbica, ou qualquer outra raiz, é unidimensional) (BATTISTI, no prelo).

A exigência da homogeneidade interna em uma expressão, segundo Battisti (no prelo), é necessária por dois requisitos. Primeiro, ela reflete a homogeneidade interna de cada objeto geométrico, ou seja, ela preenche uma necessidade para um objeto ser *aceitável* e, por extensão, de sua expressão algébrica. E, por consequência, a heterogeneidade é sinônima de ausência do que é “preciso e exato” (DESCARTES, 2001, p. 29 [p. 316]). Segundo, a igualdade no número de dimensões para cada uma de suas partes é uma exigência para a resolução da equação: para que possamos, por exemplo, extrair a raiz cúbica de uma expressão⁸³. Um exemplo do critério de homogeneidade se encontra nas *Regras*, especificamente na Regra XVI:

[...] depois de termos visto que a base do triângulo retângulo, em função dos lados a e b , é igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$, é preciso, em vez de a^2 , pôr 81 e, em vez de b^2 , 144; estes números somados dão 225, cuja raiz ou média proporcional entre a unidade e 225, é 15. Ficaremos assim a saber que a base 15 é comensurável com os lados 9 e 12, mas não de uma maneira geral pelo fato de ela ser a base do triângulo retângulo, no qual um lado está para o outro como 3 para 4 (DESCARTES, 1989, p. 109).

De acordo com Bos (2001), o segundo bloco (I-B) do Livro I tem um conteúdo

⁸³ Descartes nas *Regras para direção do Espírito* chama a atenção para esse aspecto de igualdade “É preciso notar que as comparações se dizem simples e manifestas, mas só quando o que se procura e o que é dado participa igualmente de uma certa natureza. Quanto às outras todas, necessitam de preparação, e apenas por este motivo: a natureza comum não se encontra nos dois objetos tal qual, mas segundo determinadas relações e proporções em que está envolvida. E, na sua maior parte, a indústria humana não consiste noutra coisa senão em transformar estas proporções de maneira a ver claramente a igualdade que existe entre o que se procura e o que já se conhece” (DESCARTES, 1989, p. 92). Nesse sentido, uma coisa, de determinada natureza (exemplo: curvas geométricas) só pode ser operada em relação a uma outra coisa de natureza distinta da primeira (exemplo: equações algébricas), se, em ambas, existe uma igualdade, nesse caso, ousou dizer, homogeneidade, que permita uma bijeção de propriedades.

eminentemente metodológico. Nesse bloco, temos três seções sendo abordadas por Descartes: “Como se chega às equações que servem para resolver os problemas”, “Quais são os problemas planos” e “Como se resolvem”. Nesse bloco, Descartes apresenta o seu método, entendido como um procedimento resolutivo interno a um dado problema. Ele divide em etapas: expõe seu método de resolução, relaciona as equações com os problemas geométricos e apresenta um exemplo de resolução.

A primeira etapa, apresentada na seção intitulada “Como se chega às equações que servem para resolver problemas” (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 300]), tem como principal objetivo equacionar o problema algebricamente de tal forma que o grau de dificuldade seja equacionado à sua forma mais simples. Descartes começa conforme a análise geométrica grega, “Assim, quando se pretende resolver algum problema, deve considerar-se de antemão como já feito” (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 300]). Essa afirmação é dada por Pappus, no seu Livro VII, “A análise é o caminho que parte daquilo que é procurado – considerado como se fosse já feito⁸⁴ – e seguem, em ordem, através de seus concomitantes, até algo admitido na síntese” (PAPPUS, 1982b, p. 477, tradução nossa). Passada a etapa de considerar o problema como resolvido, Descartes diz ser necessário “atribuir nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-lo, tanto às que são desconhecidas como às outras”. Ao estabelecer essa distinção entre o que é conhecido e o que não é conhecido⁸⁵, ele afirma que devemos então,

[...] sem considerar nenhuma diferença entre estas linhas conhecidas e desconhecidas, examinar a dificuldade na forma como aquelas linhas dependem mutuamente umas das outras, segundo a ordem que se

⁸⁴ Essa frase e outras são características do início da etapa analítica (“suponha-se o problema resolvido”; “suponha-se a coisa já feita”) e encontram-se regularmente no início da análise e marcam o seu começo, tanto na matemática grega e árabe quanto no início da modernidade. No período moderno, Viète e Descartes, cada um a seu modo, são os maiores representantes dessa tradição. Pappus cita vários matemáticos praticantes da análise e várias obras que o ilustram: “Euclides, autor dos *Elementos*, Apolônio de Perga e Aristeu o Antigo” (PAPPUS, 1982b, p. 477). Aqui vale ressaltar que os *Elementos* não são um exemplo de análise. As obras que Pappus cita são as seguintes: Euclides: *Dados, Porismas e Lugares de uma superfície*; Apolônio: *Cortes de Seção, Áreas de Seção, Determinação de Seções, Contatos, Inclinações, Lugares Planos, Cônicas*; Aristeu: *Lugares Sólidos*; e Eratóstenes: *Medidas*. O conjunto desses livros é conhecido como *Coleção Analítica*, conforme apontado em PAPPUS (1982b, p. 479, nota 1 do tradutor).

⁸⁵ Para Descartes é fundamental separar o que é conhecido do que é desconhecido, já que um desconhecido, para ser conhecido, se determina em relação a um conhecido. Na Regra XIII, ele admite que “em toda questão, dever haver necessariamente algo de desconhecido, pois, de outro modo, a sua investigação seria inútil: em segundo lugar, esse incógnito tem de ser designado de alguma maneira, pois, de outro modo, não estaríamos determinados a investigá-lo de preferência a qualquer outro objeto; em terceiro lugar, só pode ser designado mediante alguma outra coisa já conhecida” (DESCARTES, 1989, p. 83).

presente de todas a mais natural, até que se tenha encontrado a maneira de expressar a mesma quantidade de dois modos distintos, o que se denomina equação, pois o valor de uma dessas expressões deve ser igual ao da outra (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 300]).

Ao afirmar que podemos operar sem diferenciar as linhas conhecidas das desconhecidas, ele nos liberta para operar com uma direção privilegiada. A ordem na verdade está em encontrar a forma mais natural. Nesse aspecto podemos verificar a importância que Descartes dá à naturalidade das coisas, e podemos aproximar essa ideia de naturalidade com simplicidade, aspecto constituinte do método cartesiano para a resolução de um problema. Outro aspecto importante nessa passagem é o estabelecimento da igualdade/identidade/equivalência entre duas quantidades de natureza distintas (as curvas com as equações)⁸⁶; aqui, além de reforçar a questão da igualdade, ele define que essa igualdade será chamada equação⁸⁷, pois numa igualdade, os dois lados da mesma, chamados expressões, devem ser iguais, mas de modos distintos.

Descartes, no parágrafo seguinte, dará as condições necessárias para se resolver um problema, estabelecendo uma relação entre o número de linhas desconhecidas e o número de equações. Para ele, “devem encontrar-se tantas dessas equações quantas as linhas desconhecidas”⁸⁸. Com o intuito de exemplificar essa passagem, apresento o Problema 1 retirado dos comentários de VAN SCHOOTEN (1649, p. 149) e trazido por SMITH (1954, p. 9) em sua tradução da *A Geometria*.

⁸⁶ Essa igualdade entre naturezas distintas pode ser entendida no trecho da Regra XIV em que Descartes afirma que “a natureza comum não se encontra nos dois objetos tal qual, mas segundo determinadas relações e proporções em que está envolvida” (DESCARTES, 1989, p. 92), ou seja, o fato de serem de naturezas distintas não impede que estabeleçamos uma relação entre elas; basta para isto que encontremos tal relação, por meio de proporcionalidade ou da igualdade propriamente dita. Aqui, me parece, que já há o vislumbre cartesiano para a unificação da geometria com a álgebra.

⁸⁷ Chamo a atenção para essa passagem relacionada à equação, pois Descartes deixa claro que uma equação é a “maneira de expressar uma quantidade igual de dois modos distintos” (DESCARTES, 2001, p. 7 [p. 300]). Ao estabelecer que uma quantidade idêntica pode ser expressa de dois modos distintos, ele está admitindo, a meu ver, a possibilidade de operar com dois objetos matemáticos “diferentes”, ou melhor, com o mesmo objeto matemático, de modos diferentes. Aqui, não me parece que seja intenção do autor em falar sobre diferentes representações para o referido objeto, mas seu texto é primordial para as futuras teorias de representação de um objeto matemático (me refiro aqui, por exemplo, à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que pode ser vista em *Registres Sémiotiques et Apprenstissages Intellectuels*). Por exemplo, uma função quadrática, ou do segundo grau, pode ser representada por sua forma algébrica ($f(x) = ax^2 + bx + c$), por sua forma geométrica (uma parábola) ou, ainda, na forma tabular, por meio de alguns valores aritméticos. Essas formas diferenciadas são conhecidas, na teoria de Duval, como *diversificação dos registros de representação semiótica* (DUVAL, 2009, p. 37).

⁸⁸ Na Regra XIX (não terminada), Descartes, se referindo a seu método, afirma que “importa procurar tantas grandezas expressas de duas maneiras diferentes quantos os termos incógnitos que supomos como conhecidos, para percorrer diretamente a dificuldade; ter-se-ão assim outras tantas comparações entre duas coisas iguais” (DESCARTES, 1989, p. 121).

Dado o segmento AB contendo qualquer ponto C , é requerido que, para obter D sobre AB , que o retângulo $AD \times DB$ seja igual ao quadrado construído sobre CD .

Para resolvê-lo, faz-se $AC = a$, $CB = b$ e $BD = x$ e tem-se que $AD = a + b + x$ e $CD = b + x$, de onde podemos tirar a equação $ax + bx + x^2 = b^2 + 2bx + x^2$. Os passos para resolução do problema são apresentados na Figura 55.

Figura 55 - Problema 1 - Van Schooten

1) Dado o segmento AB contendo qualquer ponto C .

2) É requerido que, para obter D sobre AB .

4) Faz-se $AC = a$, $CB = b$ e $BD = x$.

3) O retângulo $AD \times DB$ seja igual ao quadrado construído sobre CD .

5) Tem-se que $AD = a + b + x$ e $CD = b + x$.

6) Como a área do retângulo $AD \times DB$ tem que ser igual a área do quadrado CD , temos que:

$$x \cdot (a + b + x) = (b + x)^2$$

7) Fazendo as mudanças algébricas necessárias, temos que

$$x = \frac{b^2}{(a - b)}$$

Fonte: Do autor, 2015

Chamo a atenção para o fato de o problema ter apenas uma linha desconhecida x , o que, como sugere Descartes, basta apenas uma equação para resolver. Outro ponto importante é o estabelecimento da equação por meio da igualdade no *passo 6*, em que a mesma quantidade (a magnitude da área) deve ser expressa de dois modos distintos: pela área do retângulo $AD \times DB$, e pela área do quadrado CD . No final, encontramos a linha desconhecida (x) por meio das linhas conhecidas (a e b), simplesmente operando por meio de uma multiplicação do segmento b por ele mesmo, uma subtração de a por b e, por fim, pela divisão de b^2 por $(a-b)$. Todas essas operações são aceitas tanto na

aritmética quanto na geometria⁸⁹, conforme apresentado em I-A, por Descartes.

Mas e se não for possível encontrar tantas equações quantas forem as linhas desconhecidas? Descartes responde a essa pergunta. Se não for possível isso, ocorrerão duas possibilidades: 1) o número de linhas desconhecidas pode ser maior que o de equações ou 2) o número de linhas desconhecidas pode ser menor que o de equações. Para cada um dos casos, Descartes apresenta uma solução. No primeiro caso, ele afirma que:

Apesar de não se ter omitido nada do que se deseja no problema, o número de equações for menor que o de linhas desconhecidas, isso prova que o mesmo não está inteiramente determinado e podem então tomar-se à discricção linhas conhecidas para aquelas a que não corresponde nenhuma equação (DESCARTES, 2001, p. 9 [p. 300]).

Nesse caso, a fim de resolver o problema, podemos atribuir de forma conveniente às linhas desconhecidas valores arbitrários. No segundo caso, ele admite que:

[...] é necessário recorrer, por ordem, a cada uma das equações excedentes, quer considerando-as isoladamente quer comparando-as com as outras, para explicar cada uma das linhas desconhecidas e lograr que, ao eliminá-las, não reste mais que uma só expressão igual a alguma outra que seja conhecida [...] (DESCARTES, 2001, p. 9 [p. 300-301])⁹⁰.

⁸⁹ Quanto às operações aceitas por Descartes, além de apresentar no início do Livro I da *Geometria*, como já mencionado, ele apresenta na Regra XVIII, as operações que permitem resolver um problema, ou seja, para ele “exigem-se apenas quatro operações: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão [...]” (DESCARTES, 1989, p. 114).

⁹⁰ Nesse caso, Descartes chama a atenção para algo importante na resolução de sistemas de equações lineares: a existência de equações que sejam múltiplas uma das outras ou que sejam combinações lineares de outras. Por exemplo: imaginemos as seguintes equações: $2x + 3y = 10$, $x - y = 2$, $3x + 2y = 12$ e $2x - 2y = 4$. Para esse caso temos duas linhas desconhecidas x e y , certo? Ok. E quatro equações, certo? Errado. Chamo a atenção para a terceira e quarta equações. A terceira $3x + 2y = 12$ é uma combinação (soma) da primeira com a segunda equações. A quarta é o dobro da segunda. O que isso significa? Que elas estão “sobrando”, pois já são conhecidas a partir das outras e, assim, devemos descartá-las, ficando apenas com a primeira e segunda equações, que nada têm em comum. Esses três casos apresentados por Descartes: 1) número de linhas desconhecidas iguais ao número de equações, 2) número de linhas desconhecidas menor que o número de equações e 3) número de linhas desconhecidas maior que o número de equações, permitiram o desenvolvimento do que atualmente conhecemos como análise de sistemas lineares. O que Descartes chama de desconhecidos hoje conhecemos como incógnitas, e o conhecido são chamadas coeficientes. Com isso é possível determinar se um sistema (ou problema, na nomenclatura de Descartes) é passível de solução ou não. Se possui solução, então pode possuir apenas uma única solução ou infinitas soluções. No caso de um sistema (problema) possuir menos equações do que incógnitas (linhas desconhecidas), o sistema possui solução e não é única, o que chamamos de *sistema possível e indeterminado*. No caso de um sistema possuir o número idêntico de equações e incógnitas pode significar ter uma única solução ou não ter solução. Se tiver uma única, chamamos de *sistema possível e determinado* e, caso não tenha solução, é chamado de *sistema impossível*. E, por fim, se possuir mais equações do que incógnitas, temos que simplificar e verificar em qual dos casos anteriores

Em seguida, Descartes argumenta que já admitia soluções num espaço de n dimensões ao tratar da possibilidade de resolver problemas com dimensões do tipo: quadradas, cúbicas, biquadradas (quadrado do quadrado), supersólidas⁹¹ (quintas), sextas, etc. Para ele, essas equações de ordem quaisquer podiam ser tratadas simplesmente por meio de operações como adição, subtração e multiplicação, ou seja,

$$\begin{aligned}z &= b \\z^2 &= -az + b^2 \\z^3 &= az^2 + b^2z - c^3 \\z^4 &= az^3 - c^3z + d^4\end{aligned}$$

Nesses casos é admitido z como a unidade desconhecida; a , b , c e d como as quantidades conhecidas, e z^2 , z^3 e z^4 como quantidades desconhecidas que podem ser conhecidas da unidade desconhecida z , por meio das operações básicas já citadas. Nesse sentido, o filósofo ainda demarca os tipos de curvas que podem resolver determinados problemas:

E podem assim reduzir-se sempre todas as quantidades desconhecidas a uma só quando o problema pode construir-se por círculos e linhas retas, ou ainda por seções cônicas ou por alguma outra linha que não esteja composta em mais do que um ou dois graus⁹² (DESCARTES, 2001, p. 9 [p. 301]).

Em seguida, na segunda seção, conforme aponta Bos (2001), Descartes delimita os problemas planos àqueles que são resolvidos apenas por geometria ordinária, ou seja, que utilizam apenas linhas retas e círculos sobre uma superfície plana, sendo reduzidos a equações do tipo $z^2 = \pm az \pm b$, ou seja, “mais do que um quadrado desconhecido, igual ao que resulta da adição, ou da subtração, da sua raiz multiplicada por alguma outra quantidade também conhecida, mais alguma outra quantidade conhecida” (DESCARTES, 2001, p. 11 [p. 302]). Realizada a demarcação, há a última etapa: mostrar a resolução de um exemplo. Para isso ele utiliza uma equação do tipo $z^2 = az + b^2$, que é quadrática, para mostrar que é possível encontrar uma raiz (do ponto

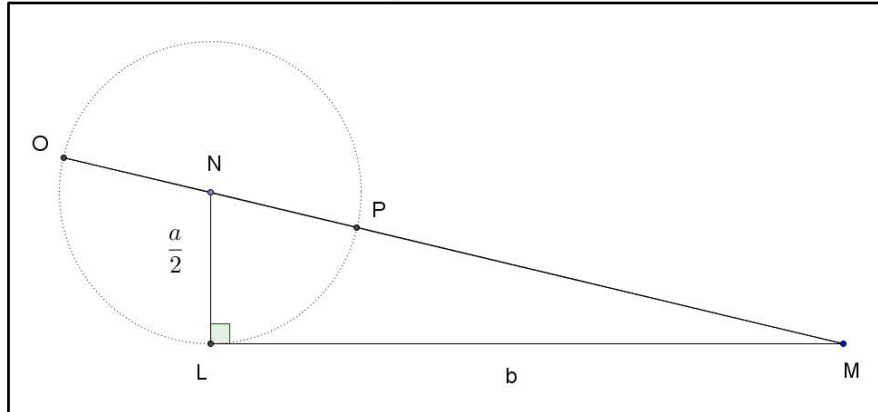
recai. Feito isso, resolve-se de forma equivalente aos anteriores.

⁹¹ Descartes, no Livro II, vai dizer que supersólido se refere a equações com grau elevado “ao quadrado do cubo” (DESCARTES, 2001, p. 35 [p. 323]) ou mais compostas.

⁹² Descartes não emprega o termo “grau” no sentido moderno (como “grau de um polinômio”). Por exemplo: $x^3 + 2x - 5 = 0$, tem, em termos atuais, grau três. Para Descartes, o termo empregado é “dimensão” e, nesse caso, a dimensão é três. Sem sentido técnico preciso e devendo ser entendido de forma abrangente, o termo “grau” é utilizado principalmente para se referir a curvas, mas também aparece relacionado a problemas. Ele jamais é utilizado para o tratamento de equações, para cuja finalidade Descartes utiliza os termos “dimensão” e “gênero” (que será definido no final do Livro I).

de vista aritmético) ou uma linha desconhecida (do ponto de vista geométrico).

Figura 56 - Exemplo 1 de Descartes - Livro I



Fonte: Descartes (2001, p. 11 [p. 302])

A sua resolução é concebida da seguinte forma:

Construo o triângulo retângulo NLM, cujo lado LM é igual a b , raiz quadrada da quantidade conhecida b^2 , e o outro LN é $a/2$, a metade da outra quantidade conhecida, que está multiplicada por z , que suponho ser a linha desconhecida. Logo, prolongando MN, base⁹³ desse triângulo, até O, de modo que NO seja igual à NL, a linha total OM, ou z , que é a linha buscada; ela expressa-se $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (DESCARTES, 2001, p. 11 [p. 302])⁹⁴.

Em seguida, trata de outra equação, do tipo $y^2 = -ay + b^2$ (sendo y a quantidade

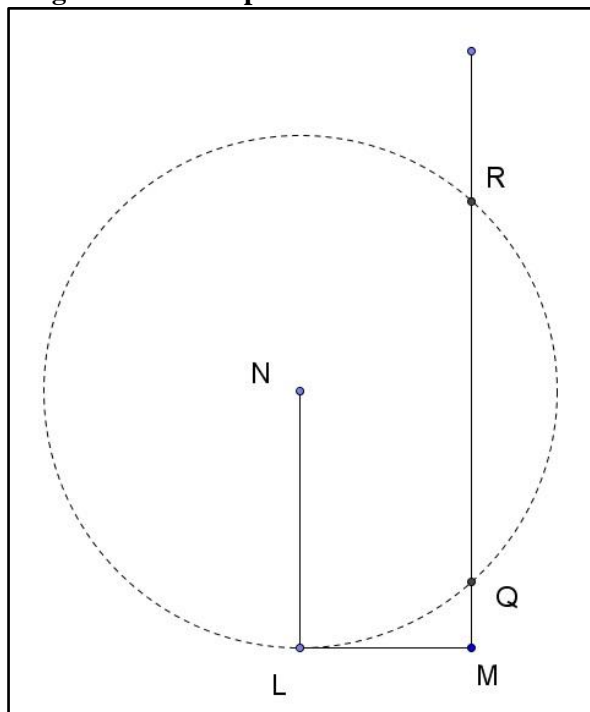
⁹³ O termo base é utilizado por Descartes para designar a hipotenusa de um triângulo retângulo.

⁹⁴ No triângulo retângulo LMN, temos, pelo teorema de Pitágoras, que está nos *Elementos*, Livro I, Proposição 47, “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto (EUCLIDES, 2009, p. 132), que $MN^2 = LN^2 + LM^2$. Por meio dessa relação, sendo os lados $LN = \frac{1}{2}a$ e $LM = b$, a hipotenusa é $NM = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ e, portanto, $OM(= z) = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Por outro lado, por meio dessa mesma relação, temos $(z - \frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + b^2$ e, portanto, $z^2 = az + b^2$. A equação pode ser obtida também por meio da Proposição 36, do Livro III, dos *Elementos*, que afirma “Caso seja tomado algum ponto exterior a um círculo, e, a partir dele, duas retas caíam sobre o círculo, e uma delas corte o círculo, e a outra seja tangente, o [segmento] pela que corta toda e pela cortada exteriormente entre tanto o ponto quanto a circunferência convexa será igual ao quadrado [do segmento] sobre a tangente” (EUCLIDES, 2009, p. 183, acréscimos nossos). Ou seja, podemos escrever a seguinte relação: $MO \cdot MP = ML^2$. Descartes ignora a outra raiz da equação, negativa, que, em alguns momentos, chama de “falsa” (DESCARTES, 2001, p. 103 [p. 372]. Contudo, em outros momentos, chama de “falsa” às raízes irracionais (DESCARTES, 2001, p. 127 [p. 386]), o que nos mostra ainda uma falta de clareza sobre a nomenclatura delas. Atualmente, as raízes negativas são conhecidas como imaginárias, como também aparece em Descartes no Livro III “que as raízes, tanto verdadeiras como falsas, podem ser reais ou imaginárias” (DESCARTES, 2001, p. 117 [p. 380]).

desconhecida), mostrando a solução por meio da mesma construção anterior, contudo, a quantidade desconhecida y passa a ser o segmento PM , que é a raiz buscada. Ele ainda sugere que uma equação biquadrada do tipo $x^4 = -ax^2 + b^2$ ⁹⁵, com x como quantidade desconhecida, pode ser resolvida como o exemplo anterior, onde x^2 seria dado pelo segmento PM . Encontrado o segmento PM , basta encontrar sua raiz quadrada para encontrar x . Por fim, apresenta uma discussão sobre a equação do tipo $z^2 = az - b^2$. A construção desse problema difere do anterior. Ele assume que

Faz-se NL igual a $\frac{1}{2}a$, e LM igual a b , como anteriormente, logo, em vez de unir os pontos M e N , traça-se a paralela MQR a LN e o círculo com centro em N e que passa por L , que a corta nos pontos Q e R ; a linha buscada, z , é MQ , ou MR , pois neste caso ela expressa-se de duas formas, a saber: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ e $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. E se o círculo que tem o seu centro em N e passa por L não corta nem toca a linha reta MQR , não há nenhuma raiz da equação, de maneira que pode assegurar-se que a construção do problema proposto é impossível (DESCARTES, 2001, p. 13 [p. 303]).

Figura 57 - Exemplo 2 de Descartes - Livro I



Fonte: Descartes (2001, p. 13 [p. 303])

⁹⁵ Por solução do triângulo retângulo, a equação biquadrada é transformada de modo a corresponder ao teorema de Pitágoras: $\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$.

A construção apresentada por Descartes pode ser mais bem entendida do ponto de vista geométrico, ao olharmos a Figura 58. Nela percebemos que a linha buscada pode ser z_1 ou z_2 . Para obtermos z_2 basta resolvermos o teorema de Pitágoras do triângulo em destaque, ou seja, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - z_2\right)^2$. Fazendo as devidas mudanças

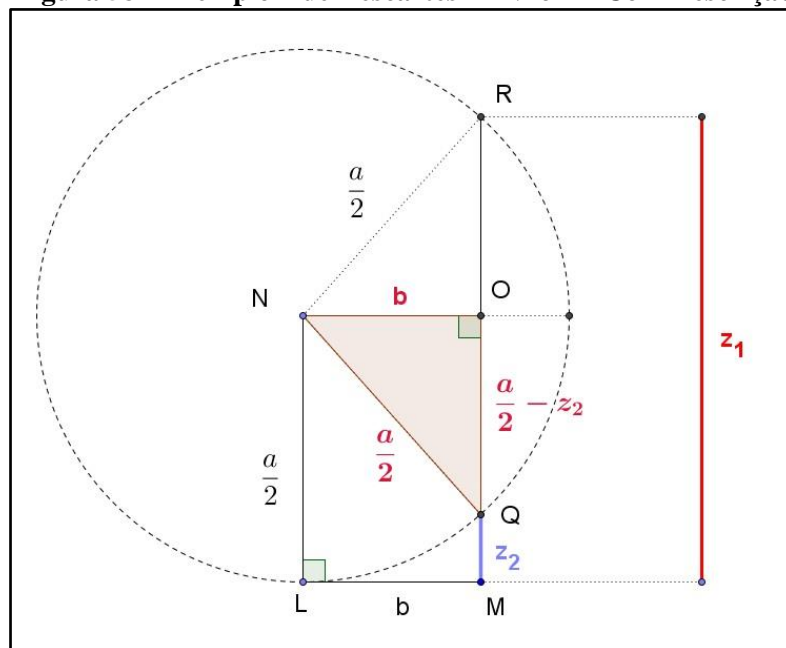
chegamos à primeira equação $z_2 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Após ter encontrado z_2 podemos

encontrar z_1 . Para isso basta fazermos $z_1 = z_2 + 2\left(\frac{a}{2} - z_2\right)$, o que nos retorna à segunda

equação $z_1 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. O filósofo chama a atenção para o fato de que, se a reta

MR não tocar o círculo, não há solução para o problema⁹⁶.

Figura 58 - Exemplo 2 de Descartes - Livro I - Com Descrição



Fonte: Do autor, 2015

⁹⁶ Descartes se esquece ou não aponta para o fato de a reta MR tocar o círculo uma única vez, ou seja, apenas tangenciar o círculo. Nesse caso, a solução para o problema seria única e igual à própria linha conhecida NL, ou seja, $\frac{a}{2}$. A condição necessária para que isso aconteça é que LM seja o dobro de NL, ou seja, $a = 4b$. Outro ponto importante é que Descartes considera apenas três tipos de equações quadráticas: 1) $z^2 + az - b^2 = 0$; 2) $z^2 - az - b^2 = 0$; 3) $z^2 - az + b^2 = 0$. Isso se deve ao fato de que a equação $z^2 + az + b^2 = 0$ não possui raízes positivas; nesse caso, ele ainda estava preso aos velhos paradigmas de não resolver equações com raízes “falsas”. A justificativa a meu ver é clara: não havia uma solução geométrica para essas raízes. Como sabemos atualmente, as raízes positivas de uma equação qualquer “cortam” o eixo das abscissas, enquanto as raízes imaginárias não. Nesse aspecto, não cortar o eixo ou o círculo (como o exemplo de Descartes) significava que o problema não tinha solução, portanto, digno de não ser investigado.

Ao final dessa seção Descartes ainda faz uma crítica aos gregos por entender que os antigos não tinham observado uma maneira simples de resolver os problemas geométricos e, portanto, haviam escrito volumosos livros com as soluções⁹⁷.

O terceiro bloco (I-C, quatro seções) do Livro I trata do famoso problema de Pappus⁹⁸. Descartes examina detalhadamente a sua primeira parte, relativa a casos em que o problema é plano, bem como traz comentários a respeito da segunda parte (examinada no Livro II). O problema mais extenso e mais importante de *A Geometria*, em meio ao qual ou a partir do qual aparecem os grandes temas do Livro II e alguns do Livro III,⁹⁹ é formulado nos termos dados a seguir.

Sendo dadas em posição três, quatro ou um número maior de linhas retas, pede-se, primeiramente, para determinar um ponto a partir do qual se podem traçar outras tantas retas, as quais, formando cada uma um dado ângulo com cada uma das dadas, satisfazem a seguinte condição: se forem três as retas dadas, que o retângulo formado por duas das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o quadrado da terceira; se forem quatro as retas dadas, que o retângulo formado por duas das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o retângulo das duas restantes; se forem cinco retas dadas, que o paralelepípedo formado por três das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o paralelepípedo formado pelas duas restantes e outra linha dada; se forem seis retas, que o paralelepípedo formado por três das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o produto formado pelas três restantes; se forem sete, que o produto de quatro das linhas desconhecidas tenha uma dada proporção para com o produto formado pelas três restantes e outra linha dada; e, assim, ao infinito. Em um segundo momento, visto que há uma infinidade de pontos que podem satisfazer a condição exigida, pede-se para determinar a linha (isto é, o lugar geométrico) na qual todos eles se encontram.

⁹⁷ Aqui cabe uma observação: Descartes tinha razão, pois a nova simbologia adotada com a emergência da álgebra simplificou e otimizou a resolução dos problemas geométricos.

⁹⁸ Descartes transcreve um longo trecho do Livro VII do texto de Pappus, conforme a edição latina feita por Federico Commandino (*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae* (Pisa, 1588)), da qual houve várias edições nos anos subsequentes à primeira. Uma tradução francesa desse trecho é dada por Paul Tannery no final das *Oeuvres* de Descartes (AT, VI, p. 721-722). Também há a edição francesa da obra de Pappus, traduzida por Paul Ver Eecke, da qual utilizo para as citações (1982b, p. 507-510). Há também uma tradução inglesa do Livro VII, feita por Alexander Jones (1986, p. 118-120). O problema de Pappus foi proposto a Descartes por Golius em 1631 (conforme *A Stampioen*, final de 1633, AT I, p. 278, 16-24).

⁹⁹ Descartes transcreve o problema (AT VI, 377-79), conforme Pappus o apresentou no Livro VII de sua obra [1982b, p. 506-510], segundo a tradução latina de Commandino (1588).

Bos (2001) analisa o extrato como sendo dividido em duas partes, na primeira trata-se de encontrar pontos e na segunda, lugares (um conjunto contínuo de pontos). Esse tratamento distinto, que produzirá duas classificações distintas de soluções, é decorrente da possibilidade de, atribuindo determinados valores a uma linha desconhecida (y , por exemplo), se pode encontrar valores correspondentes para a outra (x), o que é equivalente a uma equação de uma incógnita, ou, então, devendo-se encontrar valores para ambas, a equação correspondente é de duas incógnitas (x e y) e a sua determinação dá origem a um lugar geométrico. Na primeira configuração, os pontos procurados se encontram: a) pela geometria simples (ordinária), isto é, com régua e compasso, para três, quatro e cinco retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); b) pela geometria dos sólidos, isto é, por meio das seções cônicas (parábola, hipérbole e elipse), para cinco paralelas, seis, sete, oito e nove retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); c) por uma linha de um nível mais composta que as cônicas, para nove paralelas, 10, 11, 12 e 13 retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); d) por uma linha de um nível mais composta que a precedente, para 13 paralelas, 14, 15, 16 e 17 retas dadas (exceto no último caso, se forem todas paralelas); e, assim, ao infinito. Na segunda configuração, os pontos procurados se encontram: a) em uma das seções cônicas (ou em uma reta ou em uma circunferência de um círculo, para casos degenerados), para três e quatro retas dadas; b) em uma linha de um nível mais composta que as cônicas¹⁰⁰ (ou em uma reta, em uma circunferência de um círculo ou em uma cônica, para casos degenerados), para cinco, seis, sete e oito retas dadas; c) em uma linha de um nível mais composta que as precedentes (ou em uma reta, em uma circunferência de um círculo, em uma cônica ou em uma curva de um nível mais complexa, para casos degenerados), para nove, 10, 11, 12 retas dadas; e, assim, ao infinito.

Descartes trata longamente do caso de quatro linhas retas. No Livro I, como vimos, ele mostrou que os pontos que satisfazem a condição exigida podem ser encontrados, como dito anteriormente, por meio de linhas retas e círculos. É nesta ocasião que o autor utiliza pela primeira vez duas linhas (x e y , aqui não perpendiculares) “como as principais” e às quais pretende “relacionar todas as outras” (AT, VI, p. 383) com o objetivo de impor uma ordem ao exame da configuração; a partir desse uso é que surgiu o que conhecemos como “coordenadas cartesianas”.

¹⁰⁰ A mais simples depois das cônicas é uma curva gerada pela interseção de uma parábola com uma reta, chamada parábola cartesiana ou concóide parabólica ou cúbica (dentre outros nomes).

Nos Livros II e III estão os problemas de ordem superior; eles contêm uma nova interpretação de Descartes sobre a exatidão e inteligibilidade da construção geométrica. Esta interpretação envolve uma demarcação entre as curvas aceitáveis e as não aceitáveis, e apresenta um critério de simplicidade. Assim, o Livro II é sobre curvas e sua aceitabilidade na geometria, e o Livro III é sobre o critério de simplicidade e suas implicações técnicas.

No caso da aceitabilidade a pergunta realizada por Bos (2001) é: como construir quando a régua e o compasso não dão conta do trabalho? Não é por meio da álgebra, pelo menos por enquanto. Por quê? Porque a álgebra, naquele estágio de desenvolvimento, era capaz de resolver problemas de grau menores ou iguais a três e quatro. Se o problema envolve mais do que grau quatro, as ferramentas algébricas ainda não tinham condições de resolver tais problemas, pois as raízes-solução eram pelo menos cúbicas e, como Descartes mostrou, tais raízes não podem ser construídas por meio de régua e compasso. Outro fato importante é que até o momento a álgebra não era capaz de resolver um problema “sozinho”, ela resolvia parcialmente o problema, simplesmente a parte de análise. A geometria ainda era necessária para direcionar o raciocínio algébrico.

Como apontam Bos (2001) e Battisti (no prelo) fica claro que Descartes não foi o primeiro a perguntar como construções além da régua e do compasso poderiam ser realizadas. Na verdade essa questão havia sido discutida desde os primeiros trabalhos sobre geometria dedutiva. A dificuldade era que os geômetras não tinham chegado a uma *communis opinio* ou opinião comum sobre o assunto. Bos (2001) aponta que havia três abordagens alternativas no tempo de Descartes. A primeira foi a utilização de outros instrumentos, além de régua e compasso, a segunda era usar outras curvas além dos círculos e linhas retas. Estas duas possibilidades estão intimamente ligadas porque os instrumentos normalmente traçam curvas, o mesmo caminho que a régua e compasso seguem para traçar linhas retas e círculos. Uma terceira alternativa era simplesmente postular, sem mais explicações, que certos padrões de construção eram possíveis. Essa abordagem foi, de fato, uma extensão da maneira com que as construções euclidianas foram baseadas nos três primeiros postulados dos *Elementos*. Descartes fez uma escolha. Ele escolheu a construção de curvas, ou seja, aceitou construções onde os pontos eram encontrados pela interseção de curvas, linhas retas, círculos ou qualquer outra curva. Ao aceitar a construção por interseção de outras curvas uma questão que

surge é: quais curvas podem ser utilizadas em construções? Na verdade, não apenas curvas, mas “as curvas”.

Como aponta Bos (2001), havia duas curvas em particular que Descartes não podia aceitar como meios de construção: a espiral e a quadratriz. Geômetras tinham percebido que, se uma espiral ou uma quadratriz fosse dada, vários problemas, mesmo os mais difíceis, poderiam ser construídos de uma forma simples. Usando a espiral ou a quadratriz, a trisseção do ângulo (que não pode ser feita com régua e compasso) seria tão simples como a bissetão (que pode ser feita através da régua e compasso). Na verdade, a divisão de um ângulo em qualquer número de partes iguais seria uma questão muito simples, usando essas duas curvas. Alguns geômetras se sentiram desconfortáveis sobre isso: claramente, se essas construções fossem aceitas, tais como a da quadratriz, o jogo de resolver problemas perderia o interesse. Descartes queria excluir essas curvas. Então ele teve que (re)formular os “critérios de aceitabilidade”, ou seja, ele “corrigiu” a demarcação entre as curvas geométricas e as mecânicas.

Para o filósofo, uma construção geométrica tem que ser efetuada com os mais simples meios possíveis. Obviamente, isto significa que as curvas utilizadas na construção deveriam ser tão simples quanto possível, mas aí vem outra pergunta: quando uma curva é simples? Aqui também as escolhas tiveram que ser feitas, ou seja, “critérios de simplicidade” também tiveram que ser formulados. Assim, vemos que o programa de Descartes de construção por meio de curvas naturalmente o levou a duas outras questões. Estas questões são levantadas e caracterizadas nos dois livros restantes; no Livro II ele trata sobre os critérios de aceitabilidade (já mencionado) e no Livro III dos critérios de simplicidade.

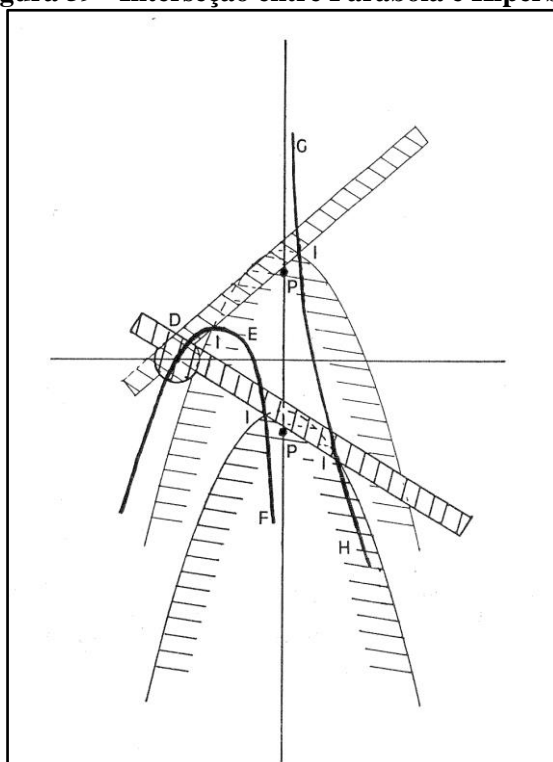
Mas, então, quais são os critérios de aceitabilidade apresentados por Descartes? Em primeiro lugar, é preciso salientar que o filósofo mantém a nomenclatura adotada pelos gregos, mas admite algumas mudanças, como pode ser visto na primeira seção do Livro II:

É verdade que eles [os geômetras gregos] tampouco admitiram inteiramente, em sua geometria, as seções cônicas, e eu não pretendo mudar os nomes que foram consagrados pelo uso, mas me parece ser muito claro que, tomando, como se faz, por geométrico aquilo que é preciso e exato, enquanto que, por mecânico, aquilo que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina a conhecer geralmente as medidas de todos os corpos, não se deve excluir as linhas mais compostas nem as mais simples, desde que se possa imaginá-las serem

descritas por um movimento contínuo ou por muitos movimentos que se sucedem e dos quais os últimos sejam inteiramente regulados por aqueles que os precedem, pois, por esse meio, pode-se sempre ter um conhecimento exato de sua medida (DESCARTES, 2001, p. 29, [p. 316-317]).

Movimentos são aceitáveis se forem contínuos. As combinações de movimentos são aceitáveis se um movimento inicial determina completamente os outros movimentos que seguem. Descartes descreve vários exemplos. Vou explicar um baseado nos estudos de Bos (2001).

Figura 59 - Interseção entre Parábola e Hipérbole



Fonte: Bos (1990, p. 363)

Descartes considera uma parábola (conforme Figura 59), que já admitiu como uma curva aceitável. Esta parábola se move verticalmente e carrega consigo o ponto P. Há também uma régua que liga um ponto fixo D e um ponto móvel P. Se a parábola se move, a régua se move; seu movimento é determinado pelo da parábola. Os movimentos combinados da régua e da parábola, por sua vez, determinam o movimento dos pontos de interseção I; durante esse movimento, as interseções traçam uma nova curva DEFGH. A nova curva, de acordo com Descartes, é traçada por uma combinação aceitável de movimentos (contínuos), portanto, segundo ele, é uma curva geométrica. É,

de fato, a curva que mais tarde veio a ser chamada de “parábola cartesiana”; ela desempenha um papel importante em *A Geometria*. Bom, isso nos leva a outra pergunta: por que Descartes escolheu como critério de aceitabilidade o movimento contínuo? A nossos olhos atuais não parece muito convincente ou clara a proposta feita por ele. Mas, se olharmos para a certeza matemática expressa na Regra III¹⁰¹ das Regras para Direção do Espírito, podemos entender sua escolha: ele considerou este tipo de movimento por ser claro e distintamente intuído, visto que a mente consegue seguir as combinações de movimentos, como um caso de dedução, no sentido de uma sequência ordenada de intuições consecutivas, assegurando assim a certeza dos primeiros movimentos ao longo de todo o caminho através de uma série de movimentos ligados ao último. Na verdade, se olharmos para *A Geometria* com todas as longas cadeias de raciocínio mencionadas no *Discurso do Método*, não encontraremos uma dedução lógica a partir de axiomas e convergindo aos teoremas, mas cadeias de movimentos que se combinam para traçar as curvas que são aceitáveis em construções geométricas.

Assim, o critério de movimento contínuo parece ter sido uma escolha natural; contudo, algumas perguntas ainda continuam sem respostas: qual o critério para excluir a espiral e a quadratriz? Podemos realmente traçar desta forma (em um movimento contínuo) todas as curvas que gostaríamos de incluir? Existem outras formas de traçar ou construir curvas: ponto a ponto, por meio de instrumentos, por meio de cordas, etc.; qual é a relação entre essas outras formas de construir e o critério do movimento contínuo? E, finalmente, uma questão metodológica crucial: como é que se pode definir a simplicidade? Pode-se definir a simplicidade de curvas pela simplicidade dos movimentos que eles traçam?

Na verdade, Descartes tratou exaustivamente dessas questões e chegou a uma conclusão; curvas aceitáveis são exatamente aquelas que podem ser representadas por equações algébricas, isto é, equações envolvendo apenas adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação. Mais tarde, no século XVII, estas curvas passaram a

¹⁰¹ “Poderá agora perguntar-se por que é que à intuição juntamos um outro modo de conhecimento, que se realiza por dedução; por ela entendemos o que se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza. Foi imperioso proceder assim, porque a maior parte das coisas são conhecidas com certeza, embora não sejam em si evidentes, contanto que sejam deduzidas de princípios verdadeiros, e já conhecidos, por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa em particular: eis o único modo de sabermos que o último elo de uma cadeia está ligado ao primeiro, mesmo que não aprendamos intuitivamente num só e idêntico olhar ao conjunto dos elos intermédios, de que depende a ligação; basta que os tenhamos examinado sucessivamente e que nos lembremos que do primeiro ao último, cada um deles está ligado aos seus vizinhos imediatos” (DESCARTES, 1989, p. 21).

ser conhecidas por curvas geométricas, na distinção dada por Leibniz entre curvas geométricas e curvas transcendentais.

À primeira vista, este resultado é estranho, para dizer o mínimo, pois por que o critério de movimento contínuo deve coincidir precisamente com o algébrico? Descartes levou a questão muito a sério a ponto de, ao final da obra, equiparar a resolução geométrica com a algébrica. Como aponta Bos (1998), seus argumentos não foram totalmente conclusivos ou convincentes, e poucas pessoas o incomodaram sobre esses assuntos. A maioria dos seguidores de Descartes tomou o resultado como dogma e não pensou sobre a relação entre a aceitação do movimento contínuo¹⁰² e a algebrização das curvas. A maioria dos argumentos sobre a demarcação e a aceitabilidade pode ser encontrada no início do Livro II, nomeadamente nos pontos II-A, que é sobre os movimentos aceitáveis, e II-C, que trata da aceitação de outros meios de construção de curvas (ponto a ponto e com cordas). Na seção II-B, Descartes completou seu tratamento do problema de Pappus, já que agora poderia discutir as curvas já tratadas como soluções para esse problema. Na seção II-D trata-se da determinação das curvas normais, ou seja, das retas que se interceptam num ângulo reto (90°). Esta seção foi muito influente na história da matemática por permitir avanços consideráveis nos métodos infinitesimais de resolução de problemas. No entanto, não entrarei em detalhes neste trabalho, pois foge ao escopo da pesquisa. As seções subsequentes tratam sobre o estudo das ovas, fornecendo exemplos interessantes de seus usos na construção de lentes (II-E); em seguida, é realizada uma breve apresentação sobre a geometria dos sólidos ou geometria em três dimensões (II-F) em geometria tridimensional. Ao que parece, essas duas últimas seções são questões secundárias dentro da estrutura geral do livro, até porque, por exemplo, a discussão das lentes é retomada em seu outro ensaio *Dióptrica*.

Dirijo-me agora ao Livro III, cuja estrutura é determinada pela questão da

¹⁰² A ideia de movimento contínuo, enquanto mecanismo básico para se chegar à certeza das coisas (eu diria, para ter a aceitabilidade delas), está presente em Descartes, principalmente nas *Regras*. Ele admite na Regra VII “Para completar a ciência, é preciso analisar, uma por uma, todas as coisas que se relacionam com o nosso objetivo, por um movimento contínuo e jamais interrompido do pensamento, abarcando-as numa e numeração suficiente e metódica” (DESCARTES, 1989, p. 39). Ele adverte que “este movimento não deve interromper-se em nenhuma parte” (DESCARTES, 1989, p. 40). Essa advertência nos dá indícios do que pode e não pode ser feito em relação ao movimento, talvez essa frase seja a chave para entender porque Descartes não aceita a espiral e a quadratriz. Ambas são geradas por movimentos que são “interrompidos”, já que não há um instrumento (ou pelo menos Descartes não conseguiu desenvolver um) capaz de gerar um movimento contínuo linear e angular, o que impede que possamos ter “uma intuição clara e evidente ou que podemos deduzir com certeza” (DESCARTES, 1989, p. 18) a curva gerada.

simplicidade¹⁰³, na qual Descartes enfatiza o que os geômetras devem evitar, ou seja, o erro de construir qualquer problema com meios muito complicados ou de tentar, em vão, construir um problema com meios mais simples do que isso requer. A simplicidade é a palavra-chave aqui. Descartes fornece esse critério: uma curva é mais simples na medida em que o grau de sua equação é menor. Assim, uma curva de segundo grau (ou seja, as secções cônicas) é mais simples do que as curvas de terceiro grau (tais como a “parábola cartesiana”), etc.

Para Bos (1998), esta escolha do critério não era óbvia e Descartes percebeu isso. De fato, na seção III-A, Descartes discute a simplicidade das curvas. Primeiro ele menciona o critério alternativo de simplicidade, a saber, a simplicidade do movimento de um traçado. Este é um critério mais provável, porque, afinal, Descartes aceitou curvas apenas se elas eram traçadas por movimentos aceitáveis. Mas Descartes decidiu ir contra esse critério e aceitou o grau da equação algébrica como critério. É provável que Descartes fez isso porque ele não conseguia formular um critério de aplicação geral de simplicidade do traçado de uma curva. O fato de ele ter escolhido o grau da equação algébrica como critério de simplicidade levou-o a certa incoerência; o grau não era um critério obviamente geométrico. Mas o critério tinha a vantagem de ser claro e, com ele, finalmente, a atividade de construir não apenas com régua e compasso poderia ser resolvido completamente e as regras necessárias para a exatidão matemática poderiam ser precisamente formuladas.

O resultado foi o aparecimento de um método para lidar com as construções geométricas. Bos (1998) apresenta o passo a passo de Descartes para a resolução/construção de um problema geométrico que reescrevo na íntegra a seguir.

1) Quando um geômetra for confrontado com um problema, ele deve primeiro traduzi-lo em seu equivalente algébrico, ou seja, encontrar uma equação que o represente.

2) Se a equação envolvida possui apenas um desconhecido, então o problema se

¹⁰³ “Ainda que todas as linhas curvas que possam traçar-se por algum movimento regular devam ser admitidas na Geometria, não pode-se dizer que seja lícito servir-se da primeira que se encontra para a construção de cada problema, pois é necessário ter o cuidado de escolher sempre a mais simples que permita resolvê-lo. E é ainda necessário observar que não devem entender-se por mais simples as que possam ser mais facilmente traçadas, nem as que tornam a construção ou a demonstração do problema mais fácil, mas, principalmente, as que, sendo da classe mais simples, possam servir para determinar a grandeza que se busca” (DESCARTES, 2001, p. 99 [p. 369-370]).

limita a uma simples construção. A fim de obter a construção mais simples, o geômetra deve se certificar de que essa equação tenha o menor grau possível; ou seja, ele tem que verificar se a equação era redutível, e em caso afirmativo, ele tem que executar a redução e chegar a uma equação irredutível.

3) Uma vez convencido de que a equação é irredutível, ele tem que reescrevê-la em uma forma padrão.

4) Em seguida, ele pode ler no livro III a construção padrão para encontrar as raízes de uma equação padrão, que é a solução geométrica do problema, que é uma construção, ou seja, o resultado foi atingido.

5) Se a equação contém dois desconhecidos, isso significa que as soluções formam um *locus*. Nesse caso, o geômetra poderia construir pontos sobre o *locus*, escolhendo um valor arbitrário para um dos desconhecidos e lidar com a equação resultante (no qual há apenas um desconhecido correto) de acordo com os itens (2) a (4).

Pelo método em (5) o *locus* foi construído ponto a ponto, isto é, arbitrariamente muitos pontos poderiam ser construídos sobre ele. Na seção II-B, Descartes mostrou que, no caso de equações de segundo grau, suas soluções se assemelham a um caso especial do problema de Pappus (o chamado caso das quatro linhas); o *locus*, nesse caso, são as cônicas, as quais poderiam ser construídas como curvas. No entanto, ele não explicou procedimentos análogos para as curvas de ordem superior. Na seção II-D ele alegou que a equação de uma curva contém todas as suas propriedades, mas ele não deu regras gerais sobre como podemos encontrar essas propriedades a partir da equação; ele tratou apenas da determinação de retas normais à curva.

Este método, especialmente dos números (2) a (4), determina a estrutura do livro III. Após uma curta seção sobre a aceitabilidade e simplicidade das curvas usadas em construções (III-A), uma grande parte (III-B e III-C) é dedicada à teoria das equações e suas raízes. À primeira vista, esta teoria parece totalmente alheia à geometria, mas, na verdade, não é. Encontramos nessa parte temas ligados à redutibilidade da equação ou na transformação de uma equação para uma forma padrão; ambas as discussões são necessárias ao programa cartesiano.

Para ser mais específico, me remeto a Bos (1998) para explicar as seções III-B e III-C. Segundo o autor, há 21 subseções para os quais Descartes dá títulos separados. Quase todos eles têm o objetivo de relacionar uma equação com uma construção. Estes

objetivos são os seguintes: [1] a redução da equação (para evitar as raízes falsas¹⁰⁴ na construção por meio impróprios) e [2] a transformação, principalmente por substituições, de $x \rightarrow x + a$, de equações para uma forma padrão. Para equações de terceiro e quarto grau [2a] a forma padrão é uma equação de grau quatro em que o coeficiente de x^3 é zero (Descartes apresenta a construção das raízes dessa equação padrão em III-D, entre as páginas 389-395, nelas a construção é realizada pela interseção de uma parábola com um círculo). Para equações de grau cinco e seis [2b] a forma padrão é uma equação de sexto grau em que os coeficientes são alternadamente positivos e negativos (as construções dessas raízes se dão pela interseção da Parábola Cartesiana com o círculo; isso pode ser visto em III-E, entre as páginas 402-411). Para indicar a forma como estes objetivos se relacionam com a teoria das equações de Descartes, listo na forma [a], [b],... os temas das subseções de III-B e III-C e indico entre parênteses como se relacionam a um dos objetivos anteriores [1], [2], [2a] e [2b]: [a] Número de raízes de uma equação (preliminares); [b] raízes negativas (preliminares); [c] abaixamento do grau de uma equação por divisão por $(x - x_0)$ ¹⁰⁵ ([1]); [d] verificar se x_0 é uma raiz ([1] via [c]); [e] número de raízes positivas de uma equação, a chamada “regra de sinais”¹⁰⁶ de Descartes ([2b] via [j]); [f] transformação de $x \rightarrow -x$ (preliminar a [g]); [g] transformação de $x \rightarrow x + a$ ([2]); [h] efeito dessa transformação sobre as raízes negativas ([2h]); [i] remover o segundo termo ([2a]); [j] uso de $x \rightarrow x + a$ para fazer com que todas as raízes sejam reais e positivas ([2b]); [k] idem a fazer todos os coeficientes diferentes de zero ([2b]); [l] transformação de $x \rightarrow cx$ ou $x \rightarrow x/c$ (simplificação de coeficientes, útil para simplificar as construções); [m] a remoção de frações de coeficientes (idem); [n] fazendo um coeficiente igual a um

¹⁰⁴ Descartes designa “falsas” às raízes negativas, porém, em outras passagens chama de falsas as raízes irracionais, em outros, ainda denomina de “absurdas”. Como podemos verificar, ainda nesse período não estava claro para ele a nomenclatura. Atualmente, as raízes com números negativos são chamadas de raízes imaginárias, relacionadas ao conjunto dos números complexos.

¹⁰⁵ Aqui x_0 é uma raiz conhecida da equação. Por exemplo, se tenho $x^2 + x - 6$, uma das raízes é 3, nesse caso $x_0 = 3$.

¹⁰⁶ A regra de sinais de Descartes é conhecida pela seguinte proposição: O número de raízes positivas, p , de um polinômio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ com $(a_0 > 0)$ é igual ou inferior ao número de variações de sinal, v , da sucessão $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, e da mesma paridade. Suponha que, para simplificar, $a_0 = 1$, então temos que $a_n = (-1)^n r_1 r_2 \dots r_n$, sendo os números r as raízes de $f(x)$. Se n é par, o número de raízes também é par e $(-1)^n$ é positivo. Sendo a_n negativo, tanto o número de raízes positivas como o de negativas é ímpar. Com a_n positivo, as raízes positivas mantêm a paridade com o número de variações de sinal. As conclusões são análogas quando n é ímpar.

determinado valor (sem um objetivo claro); [o] raízes reais e imaginárias ([2b] via [j]); [p] redutibilidade de equações cúbicas ([1]); [q] divisão por $(x - x_0)$ ([1]); [r] irreducibilidade de equações cúbicas ([1]); [s] redutibilidade e irreducibilidade de equações biquadradas ([1]); [t] exemplo ([1]); [u] método geral para testar a redutibilidade [1].

Depois disso, a parte restante do livro (III-D e III-E) dá a conclusão natural de toda a sua obra: a construção padrão para encontrar raízes das equações. Descartes trata inicialmente das equações de graus três e quatro; para estas ele dá uma construção padrão por meio da interseção de uma parábola e com um círculo, a combinação mais simples possível para esse caso. Ele passa então para as equações de graus cinco e seis, apresentando uma construção pela interseção da “Parábola Cartesiana” com um círculo. Em seguida, ele afirma que o método deve ser claro a ponto de permitir que o leitor consiga resolver equações de ordem superiores¹⁰⁷.

Resumindo, conforme Bos (1998; 2001) aponta, podemos dizer que o Livro II abre com a explicação da demarcação entre as curvas que são aceitáveis em geometria e as curvas que não são. Segue-se uma solução completa do “problema Pappus” em três e quatro linhas, e uma discussão de dois casos especiais do problema em cinco linhas. Após isso, Descartes retorna para a aceitabilidade de curvas e discute em que contexto os vários métodos de traçado de curvas podem ser aceitos. A parte restante do Livro II é dedicada ao uso de equações algébricas para encontrar retas normais e tangentes, o estudo de formas ovais e a geometria tridimensional. Estas passagens são importantes em sua influência no desenvolvimento posterior da geometria analítica e do cálculo. Como elas não são intimamente relacionadas com a construção e a exatidão, não serão discutidas no presente estudo. E o Livro III lida com a simplicidade dos problemas, das soluções e das curvas, e estabelece um padrão nas construções não planas de Descartes. A fim de que as construções sejam o mais simples possível, isto é, que os graus de construção das curvas sejam a menor possível, as equações têm de ser reduzidas a seus componentes irreducíveis. Consequentemente, Descartes fornece na primeira parte do Livro III um estudo extenso sobre as propriedades algébricas e as transformações das equações em uma desconhecida (entre elas a famosa “regra dos sinais”¹⁰⁸). Na segunda

¹⁰⁷ Descartes parece ter subestimado a solução de equações de ordem superior. Atualmente, existe um campo da matemática que se preocupa com essas soluções, chama-se construções de equações. Com o advento da computação, essas soluções são realizadas por meio de cálculo numérico.

¹⁰⁸ Regras usuais nos cálculos aritméticos. Por exemplo, $(-2) * (-3) = +6$.

parte do Livro III, ele apresenta as construções padrão para equações de terceiro e quarto grau (pela interseção de uma parábola e um círculo) e para as de grau cinco e seis (pela interseção de uma parábola com um círculo). Com um excesso de confiança, ele termina seu ensaio com a afirmação de que, com isso, deve ter ficado claro como estender o cânon da construção de equações para graus cada vez maiores.

3.3 Descartes e as Curvas Geométricas e Mecânicas

René Descartes inicia seu segundo livro elogiando e criticando os antigos geômetras gregos. O fato de eles terem conseguido distinguir os problemas da geometria em três grupos: planos, sólidos e lineares é uma façanha; contudo, ele se queixa de que os mesmos não souberam compreender a diferença entre as curvas mecânicas e as curvas geométricas. Para o filósofo, eles não separaram de forma adequada os dois tipos de curvas:

[...] não posso compreender porque as denominaram mecânicas de preferência a geométricas; pois dizer que a causa é ter de servir-se de alguma máquina para traçá-las tornaria necessário incluir também nelas os círculos e as rectas, dado que para desenhá-las sobre o papel se requiere um compasso e uma régua, que podem também considerar-se máquinas (DESCARTES, 2001, p. 27, [p. 315]).

Nesse trecho, podemos perceber que, para Descartes, um dos critérios adotados pelos gregos para distinguir as curvas é o uso ou não de máquinas ou instrumentos para a sua construção. Aquelas que não utilizassem nenhum tipo de máquina seriam consideradas geométricas, enquanto as outras seriam mecânicas. O filósofo, entretanto, derruba esse critério, pois, para ele, a régua e o compasso também são máquinas, e, portanto, a construção de retas e círculos entraria no critério das curvas mecânicas. Um antigo geômetra grego poderia argumentar que a régua e o compasso são instrumentos simples, ao passo que os demais são mais complexos, o que justificaria a distinção estabelecida por eles. Todavia, Descartes rebateria esse argumento ao afirmar que:

tão-pouco se deve a que os instrumentos que servem para traçá-las, por serem mais complicados que a régua ou o compasso, sejam menos exactos, pois seria necessário por esta razão eliminá-los da mecânica, onde a exactidão dos trabalhos que produz é mais necessária que na Geometria, donde é somente a exactidão do raciocínio que o que se busca, e que pode, sem dúvida, ser tão perfeito com respeito a estas linhas, como em respeito às outras. (DESCARTES, 2001, p. 27, [p. 315-316]).

Pode-se perceber nesse trecho que a exatidão apontada por Descartes não está relacionada à construção “física” das curvas, ou melhor, àquilo que está no papel, mas, sim, à compreensão racional da construção, a exatidão do raciocínio. Exatidão essa que para Descartes será o mote para o estabelecimento do critério de distinção das curvas. Para ele, as curvas serão geométricas se forem precisas e exatas, e as mecânicas serão o oposto disso¹⁰⁹. E mais, o critério de exatidão estabelecido por ele será dado necessariamente pelo conceito de continuidade. Descartes afirma que:

[...] considerando a geometria como uma ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não devem excluir-se as linhas por compostas que sejam, enquanto possam imaginar-se descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se sucedem, e em que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois, por este meio se pode sempre ter um conhecimento exacto da sua medida (DESCARTES, 2001, p. 29, [p. 316-317]).

Novamente pode-se perceber que a complexidade ou a composição de curvas não é um critério de Descartes para diferenciar as curvas geométricas das mecânicas. O fato primordial para ele está na ideia de continuidade, ou ainda, no movimento contínuo estabelecido na construção, podendo este movimento ser único ou composto por vários outros, desde que se sucedam, seguindo um possível encadeamento lógico, como o estabelecido nos Elementos de Euclides. No *Discurso do Método*, Descartes divide o método em quatro partes, admitindo que na terceira parte é necessário

conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros (DESCARTES, 1979, p. 38).

Percebemos aqui que há algo comum ou similar que está valendo tanto para o Método quanto para justificar seu critério de continuidade e, por consequência, da utilização da dedução. A dedução é um processo de continuidade tanto quanto a construção. Essa justificativa da continuidade e da dedução para estabelecer o critério de exatidão pode ser visto nas *Regras para Direção do Espírito*. Como ele apresenta na Regra III:

[...] por ela [a dedução] entendemos o que se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza. Foi imperioso proceder assim, porque a maior parte das coisas são conhecidas com certeza,

¹⁰⁹ “[...] mas é muito claro, parece-me, que tomando, como se sabe, por geométrico o que é preciso e exacto, e por mecânico o que não o é” (DESCARTES, 2001, p. 29, [p. 316]).

embora sejam em si evidentes, contanto que sejam deduzidas de princípios verdadeiros, e já conhecidos, por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa em particular (DESCARTES, 1989, p. 21, acréscimo nosso).

Até aqui, Descartes deixou claro que o critério de distinção das curvas está no movimento contínuo, baseado no raciocínio construtivamente ordenado, ou seja, todas as curvas que são passíveis de serem construídas por um movimento contínuo são consideradas precisas e exatas, logo são chamadas de geométricas. As outras, que não se fazem por esse movimento são chamadas de mecânicas, como é o caso da espiral e da quadratriz, por “poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que possa medir-se exactamente” (DESCARTES, 2001, p. 29, [p. 317]). Destacamos aqui o fato “se poder medir exatamente” é um critério do que é fazer ciência: como mencionado, Geometria, para Descartes, é a ciência da medição precisa e exata. Sendo assim, se algo não se deixa medir, não pertence a Geometria. Outro fato importante de ser mencionado é que o medir nesse caso é encontrar uma relação ou proporção entre os dois movimentos diferentes. Vale lembrar que a construção tanto da espiral quanto da quadratriz envolvem dois movimentos distintos, um movimento linear e outro movimento angular.

Bos (2000) sugere que Descartes compartilha da mesma convicção de Aristóteles, em que a proporção entre o movimento linear e o movimento angular não poderia ser conhecida exatamente. Como consequência, o pensamento de Descartes sobre a natureza mecânica de certas curvas estaria fundamentada na crença aristotélica da impossibilidade da comparação dos movimentos na geração de uma espiral e de uma quadratriz, o que também explicaria o porquê das curvas mecânicas não serem exprimíveis, em *A Geometria* de Descartes, por meio de equações (BOS, 2000, p. 341-342).

Para que ambas as curvas pudessem ser consideradas geométricas, era necessário que os antigos geômetras gregos pudessem estabelecer uma relação entre os dois diferentes movimentos, fato esse que nunca aconteceu. Descartes ainda chama a atenção para a concóide/conchóide e a cissóide, curvas essas que, para os antigos geômetras, eram consideradas mecânicas, mas que o filósofo conseguiu mostrar, por meio de seus critérios de continuidade, que também são geométricas.

No entanto, a busca de um critério único ou uma característica unificadora comum a essas curvas mecânicas mencionadas por Descartes revela-se frustrante, pois

me parece, e Crippa (2012) também aponta para isso, que as curvas foram realmente julgadas mecânicas com base em critérios locais, principalmente relacionados à dificuldade dos procedimentos de construção das curvas, cujas características mais marcantes não foram nem partilhadas por todas as curvas mecânicas conhecidas por Descartes, nem exclusivamente aplicáveis às curvas mecânicas. Com base nessas evidências, eu suponho que Descartes não adota um critério sistemático a fim de aceitar ou refutar as curvas na geometria, mas exhibe vários critérios locais, a fim de argumentar contra a aceitação de curvas especiais.

Para reforçar o caráter local dos critérios, podemos considerar a referência de Bos, apresentada nos parágrafos anteriores quando trata da origem aristotélica da opinião de Descartes sobre a natureza mecânica de certas curvas. O critério apresentado certamente justifica a natureza mecânica da espiral, da quadratriz e da cissóide, mas como pode justificar a natureza mecânica da curva de Florimond de Beaune¹¹⁰? Por outro lado, os processos que levaram ao traçado de curvas mecânicas poderiam ser aplicados também para descrever curvas geométricas. Por exemplo, no seu *Discorsi e Dimostrazioni matematiche*, Galileu descreve uma parábola pela composição de dois movimentos independentes, um horizontal e uniforme, e o outro vertical e uniformemente acelerado. Este é um exemplo simples de uma construção “mecânica” utilizada para descrever uma curva reconhecida como geométrica.

Com o intuito de mostrar que uma máquina ou instrumento pode construir uma curva por meio de um movimento contínuo, Descartes apresenta a construção de três curvas por meio de um único instrumento, o seu Mesolábio. A sua justificativa é que o Mesolábio consegue conceber de forma clara e distinta o traçado das três curvas por meio de um único movimento contínuo.

¹¹⁰ O problema de Beaune consiste em encontrar uma curva, dada alguma propriedade da tangente e a tal curva. De fato, na parte final da Carta de Beaune a Descartes em 1638, o problema proposto era encontrar a curva cuja interseção de sua tangente com o eixo das abscissas fosse igual a um segmento de longitude constante.

4 CONSIDERAÇÕES “FINAIS”

Nesse ponto “final”, tento compreender o que ficou! Mas para responder o que ficou, preciso saber o que me levou a esse caminho. E, nesse aspecto, retomo o início do trabalho com as perguntas norteadoras: o que significa aceitar uma construção inteligível (ou geométrica)? O que é necessário para que a solução ou a curva seja conhecida? Ou ainda, por que motivos eles não aceitaram algumas construções que utilizavam certos instrumentos? Que critérios foram estabelecidos para separar os meios aceitáveis dos não aceitáveis? Assim, para responder as essas perguntas realizei no segundo capítulo a retrospectiva histórica do surgimento das curvas. Nele, procurei mostrar que as curvas se originaram dos problemas clássicos dos antigos geômetras e foram tais problemas que impulsionaram o desenvolvimento da matemática. Ao tratar dos problemas e posteriormente das curvas, tentei apresentar cada uma delas, de modo a reconstituir a sua definição e construção. Esse movimento me permitiu entender os aspectos levantados por Molland no que se refere à constituição de uma curva por gênese ou por propriedade.

No capítulo três fiz uma contextualização da obra *A Geometria*, tentando resgatar e entender os principais conceitos presente no texto. Feito isso, algumas perguntas foram necessárias para retomar o problema de pesquisa: o que faz com que Descartes apresente uma classificação das curvas diferente dos gregos? Será que o objeto matemático curva geométrica é diferente para Descartes e para os gregos? Os critérios adotados por ele são diferentes dos gregos? De que modo?

Essas perguntas são importantes, pois foram elas que me deram condições de entender (e não responder) a distinção cartesiana entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Busquei em outros autores como Bos, Crippa, Domski, Lenoir, Panza, Paty, Serfati e Warus, justificativas e entendimentos das construções geométricas de Descartes, em consequência, dos gregos.

Assim, posso concluir que há uma tradição na historiografia da matemática que interpreta o interesse dos antigos matemáticos gregos da construção geométrica com os relacionados às provas de existência. Neste ponto de vista, em primeiro lugar defendida por Zeuthen (1896), os postulados e construções dos Elementos de Euclides serviram

para provar a existência dos objetos geométricos sobre os quais os teoremas subsequentes fizeram afirmações. Esta interpretação tem sido, de forma convincente eu diria, refutada pelos recentes historiadores da matemática, como Mueller e Knorr. Mas, independentemente do estado das construções em geometria grega clássica, a interpretação das construções como provas da existência é inaplicável para o início do período moderno. Eu não encontrei (e outros historiadores como Bos também não encontraram) nenhuma evidência de que os matemáticos modernos (do período até Descartes) duvidaram da existência das soluções dos problemas, cuja solução, por construção, eles perseguiram com tal intensidade. Nem parece que eles entenderam o interesse clássico na construção em termos de existência. Argumentos, com base na continuidade, foram conhecidos e aceitos, por exemplo, para provar a existência da equivalência entre a área do quadrado e área de um círculo dado, mas era comum o acordo de que tais argumentos não contavam como solução para o problema de encontrar, determinar, ou mesmo construir tal quadrado. Da mesma forma, a existência de dois meios proporcionais entre dois segmentos de linha indicados não foi posta em dúvida no início do período moderno, mas a sua existência não respondeu a questão de como, na matemática dita pura, na geometria exata, estes dois meios proporcionais poderiam ser construídos.

Deve-se ressaltar que uma resposta a esta questão não pode ser derivada de axiomas dentro de um *corpus* aceito do conhecimento matemático. Em geometria clássica, conforme codificado nos *Elementos* (2009) de Euclides, figuras são consideradas conhecidas se elas podem ser construídas por linhas retas e círculos de outras figuras assumidas como conhecidas. Esta interpretação de exatidão é codificada em postulados; ela própria não pode ser derivada de outros axiomas ou postulados. Da mesma forma, na década de 1690, Christiaan Huygens defendeu a aceitação de uma curva particular, a “tratriz”, na construção de outras curvas logarítmicas. Não há maneira de demonstrar matematicamente que a atratriz é aceitável para esse fim; Huygens usou argumentos extramatemáticos em apoio à sua sugestão.

Assim, qualquer resposta à pergunta dos meios aceitáveis à construção, necessariamente, tem a natureza de um postulado escolhido; as razões da sua escolha estão fora do reino do argumento comprovado. A questão de saber se estas razões estão corretas ou válidas não têm, estritamente falando, nenhum significado. Os matemáticos são livres para aceitar ou rejeitar qualquer proposta de decisão sobre a questão de quais

os meios de construção são legítimos na geometria e quais não são.

O fato de que as escolhas de postulados e axiomas em matemática são baseados em argumentos extramatemáticos não envolvem necessariamente grande arbitrariedade ou ambiguidade; as razões para aceitar um axioma ou um postulado, embora formem a esfera do argumento comprovadamente formalizado, pode ser convincente o suficiente. No entanto, no caso da construção, durante o período moderno, nenhum dos argumentos propostos para sublinhar a legitimidade e a exatidão dos vários procedimentos provou de forma duradoura e convincente; como dito acima, a questão em última instância desapareceu da agenda matemática.

Vale salientar, no entanto, que as primeiras tentativas modernas para interpretar a exatidão das construções merecem um estudo histórico (o que tentei realizar nesse trabalho). As razões a favor ou contra os procedimentos de aceitação de construção, e os argumentos em que os matemáticos tentaram fazer explicitamente, convincentes ou não, foram muito importantes para o desenvolvimento da matemática. Eles determinaram rumos na pesquisa matemática, e eles refletiram as imagens mentais que os matemáticos tiveram dos objetos que eles estudaram. Além disso, eles mudaram suas convicções essencialmente durante os séculos XVI e XVIII, e essas mudanças revelam muito sobre os processos de desenvolvimento dentro da matemática nesse período.

Deve-se ainda notar que, no início do período moderno, havia muito menos preocupação sobre o rigor das provas do que havia sobre a legitimidade das construções. Isto pode parecer notável porque, atualmente, a exatidão na matemática está relacionada quase que exclusivamente às provas; de fato, a essência da matemática é geralmente localizada no fato de que suas afirmações são comprovadas. O relaxamento do rigor grego clássico da prova em matemática tem sido reconhecido como uma característica da matemática dos séculos XVII e XVIII. Muitos podem até pensar que essa atitude não implica uma falta de interesse em exatidão, mas os matemáticos estavam preocupados com a fundação de sua ciência, e eles consideravam que as questões sobre a construção, ou, em geral, sobre os procedimentos para fazer objetos conhecidos, deveriam ser dadas com o mais crítico rigor da prova. O exemplo de Kepler é ilustrativo a esse respeito. Kepler estava disposto a substituir de forma rigorosa o método da prova da “exaustão” de Arquimedes por argumentos infinitesimais, mas, ao mesmo tempo, ele adotou uma posição extremamente purista na construção, rejeitando todos os outros processos que a ortodoxa linha euclidiana usava para círculos e linhas retas.

Assim, compreender os argumentos que levaram a aceitabilidade de certas curvas está ligado a uma atitude extramatemática, a qual, Bos (2001) se debruçou para entender. Nesse contexto, ele traz que essas atitudes são baseadas em seis tipos de argumentos: (1) apelo à autoridade e tradição, (2) idealização de métodos práticos, (3) análise filosófica da intuição geométrica, (4) a apreciação da matemática resultante, (5) recusa e rejeição de quaisquer regras, e (6) falta de interesse.

No nosso caso, Descartes, segundo Bos, adotou o argumento da “análise filosófica da intuição geométrica”. A construção e representação serviram para criar objetos conhecidos. Assim, por trás de qualquer escolha dos procedimentos para a construção estava a intuição do “conhecido-desconhecido”, ou, em geral, a intuição da certeza na geometria. A visão geral que fincava suas estacas era a de que a geometria foi moldada por uma preocupação filosófica baseada na certeza das operações geométricas, em particular das construções, ou seja, matemática cartesiana era (e ainda é) a matemática de um filósofo e, nesse contexto, essa matemática não se pode postular sem argumentos.

Nesse aspecto, compreendo que Descartes tem uma ideia de racionalidade baseada na continuidade. Continuidade essa que pressupõe um movimento contínuo de intuições que podem se reduzir em um todo ou em vários movimentos, desde que contínuos e intelegíveis. Por exemplo, em uma teia de aranha, há um fio principal que se tocado, movimentada todos os outros fios. Assim também o é o movimento contínuo intuitivo pressuposto por Descartes para o entendimento de uma curva geométrica. Vale destacar que a continuidade da geração de um objeto geométrico corresponde à continuidade do pensamento matemático e, portanto, de compreensão desse objeto de forma contínua.

Para fechar o texto, mas não encerrar as discussões, vale destacar a necessidade de realizar outros estudos que não foram possíveis neste trabalho, como por exemplo, verificar na obra *Cogitações Privadas* o uso dos compassos cartesianos e de que modo esse uso contribuiu para compreender a historicidade/mudança dos critérios de Descartes. Outro ponto que merece mais atenção é o aprofundamento dos conceitos de simplicidade, medida, ordem e movimento contínuo na obra cartesiana e de que modo eles são essenciais para toda a sua filosofia. Além disso, realizar um estudo histórico da matemática árabe do século XV e XVI pode ajudar a compreender a influência dela nos textos matemáticos de Descartes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLMAN, George Johnston. **Greek geometry: from Thales to Euclid**. London: Longmans, Green & CO. Partnernoster-Row, 1889.
- APOLLONIUS OF PERGA. **Conics: Books I-IV**. Translation: Catesby Taliaferro and Michael N. Fried. Michigan: Green Lion Press, 2013.
- ARISTÓFANES. **As vespas, as aves, as rãs**. Tradução: Mário da Gama Cury. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 1996.
- ARQUIMEDES. On Spirals. In: HEATH, Thomas Little. **The works of Archimedes**. Edited by: Thomas Little Heath. New York: Dover Publications, 2002.
- BATTISTI, César Augusto. **O método de análise em Descartes: da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento**. Cascavel/PR: Edunioeste, 2002.
- BOS, Henk Jan Maarten. **On the Representation of Curves in Descartes' Géometrie**. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 24, n.4, 1981, p. 295-338.
- . **Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction**. USA: Springer, 2001.
- . **The Concept of Construction and the Representation of Curves in Seventeenth-Century Mathematics**. *Proceeding of the International Congress of Mathematicians: Berkeley, California, USA, 1986*.
- . The structure of Descartes's Géométrie. In: **Lectures in the History of Mathematics**. *American Mathematical Society*, 51, n. 2-3, 1998, pp. 291-318.
- CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations**. Two volumes bound as one. New York: Dover, 1993.
- CHASLES, Michel. **Des Méthodes em Géométrie**. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Librairie, 1875.
- CRIPPA, Davide. A solução Cartesiana da quadratura do círculo. **Revista Scientae Studia**. São Paulo, v. 8, n. 4, p. 597-621, 2010.
- . **Impossibility Results: from Geometry oo Analysis - A study in early modern conceptions of impossibility**. 2014. 509f. Thèse (**Doctorat: Epistémologie et Histoire des Sciences**) – Université Paris Diderot (Paris 7). Paris, 2014.
- . **Revisiting the distinction between geometrical and mechanical curves**. 11 mar., 2012. Disponível em: <https://www.academia.edu/3419451/Revisiting_the_distinction_between_geometrical_and_mechanical_curves_project_>. Acesso em: 30 mai. 2015.
- CUOMO, Serafina. **Ancient Mathematics**. New York: Taylor & Francis Group, 2005.
- DELEDICQ, André. Comentários sobre La Géométrie. In: DESCARTES, René. **La Géométrie**. Textes choisis, présentés et commentés par André Deledicq. Paris: ACL-

Les Éditions du Kangourou, 2009.

DESCARTES, René. **A Geometria**. Tradução: Emídio César de Queiroz Lopes. Lisboa: Editorial Prometeu, 2001.

———. **A Geometria**. Tradução, introdução e notas de César Augusto Battisti. São Paulo, Ed. 34, s.d. (no prelo).

———. **Discurso do Método; Objeções e Respostas; As paixões da Alma; Cartas**. Tradução: J. Guinsberg e Bento Prado Júnior. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

———. **La Géométrie de 1637**. Traduction: Vincent Jullien. Paris: PUF, 1996.

———. **La Géométrie**. Textes choisis, présentés et commentés par André Deledicq. Paris: ACL- Les Éditions du Kangourou, 2009.

———. **Œuvres de Descartes**. Éditeurs: Charles Adam e Paul Tannery. 11v. Paris: Vrin/Centre National Du Livre, 1996.

———. **Regras para a Direção do Espírito**. Tradução: João Gama. Lisboa: Edições 70, 1989.

———. **The geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition**. Traduction: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

DOMSKI, Mary. The Constructible and the Intelligible in Newton's Philosophy of Geometry. **Philosophy of Science**, v. 70, n. 5, p. 114–124, 2009.

DOMSKI, Mary. The intelligibility of motion and construction: Descartes' early mathematics and metaphysics, 1619–1637. **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 40, p. 119–130, 2009.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EUTÓCIO. Comments of the books Of the Sphere and Cylinder. In: HEATH, Thomas Little. **The works of Achimedes**. Edited by: Thomas Little Heath. New York: Dover Publications, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995.

GAUKROGER, Stephen. **Descartes: Uma biografia intelectual**. Tradução: Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: EdUERJ: Contraponto, 1999.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics, Volume I: From Thales to Euclid**. New York: Dover Publications, 1981a.

- . **A History of Greek Mathematics, Volume II: From Aristarchus to Diophantus.** New York: Dover Publications, 1981b.
- . Apollonius of Perga – Treatise on Conic Sections. Cambridge, 1896.
- . **The Thirteen Books of Euclid's Elements.** Vol I – Introduction and Books I, II. New York: Dover Publications, 1956.
- . **The works of Archimedes.** Edited by: Thomas Little Heath. New York: Dover Publications, 2002.
- HERÃO. **Les Mécaniques.** Traduction en arabe: M. Le Baron Carra de Vaux. Paris: Imprimerie Nationale, 1894.
- HILBERT, DAVID. **The Foundations of Geometry.** Illinois: The Open Court Publishing Company, 1950.
- JULLIEN, Vincent. Commentaires sur Géométrie. In: DESCARTES, René. **La Géométrie de 1637.** Traduction: Vincent Jullien. Paris: PUF, 1996.
- JULLIEN, Vincent. Les frontières dans les mathématiques cartésiennes. **Historia Scientiarum**, mar., p. 1-26, 1999.
- KNORR, Wilbur Richard. **The ancient tradition of geometric problems.** Boston: Birkhäuser, 1993.
- LENOIR, Timothy. Descartes and the Geometrization of Thought: the methodological background of Descartes' Géométrie. **Historia Mathematica**, v. 6, p. 355-379, 1979.
- LOCKWOOD, Edward Harrington. **A Book of curves.** Cambridge: Cambridge University Press, 1961.
- MOLLAND, George Adams. Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. **Historia Mathematica**, v. 3, n. 1, p. 21–49, 1976.
- MUELLER, Ian. Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements. Cambridge, Mass: MIT Press, 1981.
- PANZA, Marco. Rethinking geometrical exactness. **Historia Mathematica**, v. 38, p. 42–95, 2011.
- PAPPUS D'ALEXANDRIE. **La Collection Mathématique.** Tome Premier. Traduction, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982a.
- . **La Collection Mathématique.** Tome Second. Traduction, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982b.
- . **Book 7 of The Collection.** Part 1. Introduction, Text and Translation. Edited with translation and commentary by Alexander Jones. Springer: New York, 1986.
- PATY, Michel. Mathesis universalis e inteligibilidade em Descartes. Tradução: Maria

Aparecida Corrêa, **Cadernos de História e Filosofia da Ciência** (Campinas), série 3, vol. 8, n. 1, jan./jun., p. 9-57, 1998.

PLATÃO. **TEETO**. Tradução: Adriana Manuela Nogueira e Marcelo Boeri. 3ª ed. Lisboa: Fundação Lacoste Gulbenkian, 2010.

RAMOS, José Portugal dos Santos. **Método e Ciências em Descartes**. 2012. 216 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. São Paulo, 2012.

RONNEY, Anne. **A História da Matemática**. Tradução: Mario Fecchio. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHUBRING, Gert; ROQUE, Tatiana. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **Revista História Unisinos**, vol. 18, n. 1, jan/abr, 2014.

SERFATI, Michel. Les Compas Cartésiens. **Archives de Philosophie**, vol. 56, p. 197-230, 1993.

SMITH, David Eugene. Comentários sobre The geometry. In: DESCARTES, René. **The geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition**. Traduction: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

———. **History of Mathematics**. Vol. I. New York: Dover, 1951a.

———. **History of Mathematics**. Vol. II. New York: Dover, 1951b.

SZABÓ, Árpád. **The beginnings of Greek mathematics**. Traduction: Anfänge Griechischen Mathematik. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978.

THOMAS, Ivor. **Greek Mathematics**. Vol. I – from Thales to Euclid. Cambridge: Harvard University Press, 1957a.

THOMAS, Ivor. **Greek Mathematics**. Vol. II – from Aritharcus to Pappus. Cambridge: Harvard University Press, 1957b.

VAN SCHOOTEN. **Geometria a Renato Des Cartes**. Amsterdã: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, 1649.

WARUSFEL, André. **L'œuvre mathématique de Descartes dans La Géométrie : de la résolution des équations algébriques à la naissance de la géométrie analytique**. Thèse (Doctorat: Epistémologie et Histoire des Sciences) – Université Paris Sorbonne (Paris 4). Paris, 2010.

ZEUTHEN, Hieronymus Georg. Die geometrische Konstruktion als "Existenzbeweis" in der antiken Geometrie, **Mathematische Annalen**, n. 47, p. 222-228, 1896.